F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

1

TOMUL 17

1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — **redactor responsabil**;
Acad. GR. C. MOISIL — **redactor responsabil adjunct**;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU — membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

Pentru a vă asigura colecţia completă şi primirea la timp a revistei, reînnoiţi abonamentul dv. pe anul 1965.
În ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti
Revista apare de 10 ori pe an.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1983

TOM. 17, Nr. 1
1965

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag

D. FIRESCU și G. THEILER, Asupra unor probleme de inferență statistică relativ la lanțurile Markov simple, finite și omogene 3

H. BODNĂRESCU, Spații de incidență. I 19

PETRU CARAMAN, Cîteva proprietăți ale reprezentărilor cvasiconforme n-dimensionale 49

GABRIELA TEODORESCU, Contribuții la integrarea ecuațiilor elasticității 83

ANATOLIE P. HRISTEV, Comutatorii formelor biliniare covariante ale cîmpului spinorial cuantificat 95

OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ și ALEX. RADU, Șirul lui Künneth pentru complexe generalizate 105

TUDOR ZAMFIRESCU, Despre suprapunerea a două funcții crescătoare, una convexă iar cealaltă concavă 111

G. VRĂNCEANU, Grupuri discrete în spațiul euclidian 119

CORNEL CÂȘLARU, Unele aplicații ale teoriei grafelor la studiul grupurilor consonantice finale din limba română . . . 131

RECENZIE 147

INDEX ALFABETIC PE ANUL 1964 149

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, P. 1–152, BUCUREȘTI, 1965

ASUPRA UNOR PROBLEME DE INFERENŢĂ STATISTICĂ RELATIV LA LANŢURILE MARKOV SIMPLE, FINITE ŞI OMOGENE

DE

D. FIRESCU şi G. THEILER

Centrul de statistică matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

Se consideră un lanţ Markov simplu, finit şi omogen, precum şi două selecţii independente, în general, de mărimi diferite şi se pune problema verificării ipotezei statistice, dacă cele două selecţii aparţin sau nu lanţului considerat. Problema este abordată cu ajutorul frecvenţelor $n_{ij}/(n_i - 1)$ ale realizării succesiunilor $a_i a_j$ de două stări a_i şi a_j ale lanţului în selecţiile date, stabilindu-se unele criterii statistice de natură asimptotică.

Întrucît — din punct de vedere practic — este preferabil să se recurgă la criterii statistice utilizînd numai o parte din observaţii, în această lucrare se arată cum poate fi studiată problema în cazul criteriilor statistice care nu sînt bazate pe totalitatea observaţiilor.

1. În cadrul unei comunicări prezentate la Consfătuirea ştiinţifică din 28—30 mai 1964, organizată de Consiliul ştiinţifico-metodologic al Direcţiei Centrale de Statistică de pe lîngă Consiliul de Miniştri al Republicii Populare Romîne, unul din autorii lucrării de faţă a expus rezultatele unor cercetări, pe care le-a făcut relativ la unele probleme de inferenţă statistică referitoare la lanţurile Markov simple, finite şi omogene.

În acea comunicare, s-a pus problema verificării ipotezei statistice ca două selecţii independente, în general de volume diferite, să aparţină aceluiaşi lanţ Markov.

În această lucrare, vom dezvolta unele din ideile cuprinse acolo şi, în acelaşi timp, vom aborda noi probleme care se încadrează în aceeaşi ordine de idei.

Vom considera astfel un lanţ Markov simplu şi omogen ale cărui variabile

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

pot lua oricare din valorile (stările)

$$a_1, a_2, \ldots, a_s.$$

Cu notaţiile uzuale, probabilităţile de trecere se scriu

$$p_{ij} = P_r(X_n = a_j \mid X_{n-1} = a_i) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, s),$$

ele constituind elementele matricei stocastice

$$(p_{ij}) \left(\sum_{j=1}^{1} p_{ij} = 1 \text{ pentru orice } i \right).$$

Fiind date două selecţii independente, prima de volum $n^{(1)}$ şi a doua de volum $n^{(2)}$, problema care se pune este următoarea: dacă cele două selecţii date aparţin sau nu lanţului considerat.

După cum se ştie, cea mai bună concluzie la care putem ajunge cu ajutorul unui criteriu statistic este aceea în care se respinge ipoteza. În cazul contrar al admiterii ipotezei, sînt necesare în general şi alte consideraţii.

În primul rînd, din punct de vedere practic, este de preferat să recurgem la criterii statistice utilizînd numai o parte din totalul datelor de observaţie, iar, în al doilea rînd, dacă aceste criterii ne conduc la concluzia că cele două serii de observaţii corespund aceluiaşi lanţ — deci nu la cea mai bună concluzie — va trebui să avem în vedere criterii statistice bazate pe totalitatea datelor de observaţie.

În această lucrare, vom arăta cum poate fi abordată problema în cazul criteriilor statistice ce se pot obţine folosind numai o parte din totalul datelor de observaţie.

Elementele matricei stocastice nu trebuie să fie toate egale cu zero. Atunci, cînd vom aborda problema relativ la totalitatea elementelor unei linii ale matricei stocastice—pentru simplificarea scrierii—se va presupune implicit că toate aceste elemente sînt diferite de zero.

În esenţă, aceasta nu comportă nici o limitare, deoarece dacă unele elemente ale liniei ar fi egale cu zero, se vor considera în acest caz numai acele elemente care sînt diferite de zero, iar în loc de s stări vor apare s' $(s' < s)$ stări diferite de zero.

2. Să considerăm din cele două selecţii independente de volume date $n^{(1)}$ şi $n^{(2)}$, acele observaţii care reprezintă starea a_i, precum şi succesiunile de cîte două observaţii consecutive de forma $a_i\, a_j$ în care prima observaţie este întotdeauna starea a_i.

Fie $n_i^{(1)}$ numărul de cîte ori apare starea a_i şi $n_{ij}^{(1)}$ numărul de cîte ori apar succesiunile de cîte două stări consecutive de forma $a_i\, a_j$, în prima selecţie de volum dat $n^{(1)}$. În mod analog, fie $n_i^{(2)}$ şi $n_{ij}^{(2)}$ numerele corespunzătoare din selecţia a doua de volum dat $n^{(2)}$. Numerele $n_i^{(1)}$, $n_i^{(2)}$, $n_{ij}^{(1)}$ şi $n_{ij}^{(2)}$ sînt evident variabile aleatoare.

Vom stabili un criteriu cu caracter asimptotic, considerînd numerele $n_i^{(1)}$ şi $n_i^{(2)}$ fixe, iar numerele $n^{(1)}$ şi $n^{(2)}$ aleatoare. Cu alte cuvinte, vom face atîtea observaţii $n^{(1)}$ şi $n^{(2)}$ pînă cînd starea a_i se va realiza exact de $n_i^{(1)}$

ori respectiv de $n_i^{(2)}$ ori. Se poate afirma că realizarea numerelor $n_i^{(1)}$ şi $n_i^{(2)}$ se obţine cu o probabilitate egală cu unu într-un număr *finit* de observaţii. Să observăm că procedînd astfel prin a considera numerele $n_i^{(1)}$ şi $n_i^{(2)}$ fixe, numerele $n_{ij}^{(1)}$ şi $n_{ij}^{(2)}$ rămîn ca şi mai înainte variabile aleatoare.

În ceea ce priveşte alegerea stării a_i se va lua acea stare care se întîlneşte mai frecvent cel puţin într-una din cele două selecţii independente. O dată aleasă starea a_i, starea a_j se determină după consideraţii analoge, adică starea cea mai frecvent întîlnită în succesiunile de forma $a_i\, a_u$ $(u = 1, 2, \ldots, s)$, cel puţin într-una din selecţii.

Dacă acum presupunem starea a_i fixă şi considerăm evenimentele care constau în apariţia succesiunilor $a_i a_j$, precum şi evenimentele complimentare, adică evenimentele care constau în apariţia stărilor a_i urmate de o stare alta decît a_j, sîntem în cazul urnei lui Bernoulli în care numărul evenimentelor posibile este $n_i - 1$, iar acela al evenimentelor favorabile este n_{ij} (n_i şi n_{ij} fiind oricare din numerele $n_i^{(1)}$ şi $n_i^{(2)}$ respectiv $n_{ij}^{(1)}$ şi $n_{ij}^{(2)}$).

Fiind în cazul urnei lui Bernoulli, rezultă că $n_{ij}/(n_i - 1)$ este o estimaţie absolut corectă a probabilităţii p_{ij} (i fix). Nu numai atît, dar în acest caz putem să scriem

$$\lim_{n_i \to \infty} P_r \left(\frac{|n_{ij} - (n_i - 1)\, p_{ij}|}{\sqrt{(n_i - 1)\, p_{ij}\, (1 - p_{ij})}} < \lambda_i \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x \qquad (i \text{ fix}),$$

adică la limită se aplică legea lui Laplace-Gauss.

În cazul considerat al urnei lui Bernoulli, vom stabili un criteriu cu caracter asimptotic relativ la verificarea ipotezei statistice că două selecţii independente de volum mare aparţin aceluiaşi lanţ Markov simplu, finit şi omogen. Mai precis, vom demonstra că

$$\lim_{n_i^{(1)} \to \infty,\ n_i^{(1)}/n_i^{(2)} \to c \neq 0} P_r \left\{ \frac{\left| \dfrac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)} - 1} - \dfrac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)} - 1} \right|}{\left(\dfrac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)} - 1} \left(1 - \dfrac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)} - 1}\right) + \dfrac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)} - 1} \left(1 - \dfrac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)} - 1}\right) \right)^{\frac{1}{2}}} < \right.$$

$$\left. < \lambda_i \left(\frac{n_i^{(1)} + n_i^{(2)} - 2}{2\,(n_i^{(1)} - 1)(n_i^{(2)} - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x \qquad (i \text{ fix}). \tag{2.1}$$

Pentru demonstraţie, vom folosi metoda funcţiei caracteristice. Astfel, notînd cu $\varphi\, (t_i\, ;\, n_i^{(1)} - 1,\ n_i^{(2)} - 1)$, funcţia caracteristică a variabilei aleatoare

$$\sqrt{\frac{(n_i^{(1)} - 1)(n_i^{(2)} - 1)}{n_i^{(1)} + n_i^{(2)} - 2}} \left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)} - 1} - \frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)} - 1} \right),$$

avem

$$\varphi\,(t_i\,;n_i^{(1)}-1,\;n_i^{(2)}-1)=\sum_{n_{ij}^{(1)}=0}^{n_i^{(1)}-1}\;\sum_{n_{ij}^{(2)}=0}^{n_i^{(2)}-1} C_{n_i^{(1)}-1}^{n_{ij}^{(1)}}\,p_{ij}^{n_{ij}^{(1)}}\,(1-p_{ij})^{n_i^{(1)}-n_{ij}^{(1)}-1}\times$$

$$\times C_{n_i^{(2)}-1}^{n_{ij}^{(2)}}\,p_{ij}^{n_{ij}^{(2)}}\,(1-p_{ij})^{n_i^{(2)}-n_{ij}^{(2)}-1}\,\mathrm{e}^{it_i\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right)\sqrt{\frac{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}}}=$$

$$=\sum_{n_{ij}^{(1)}=0}^{n_i^{(1)}-1}\;\sum_{n_{ij}^{(2)}=0}^{n_i^{(2)}-1} C_{n_i^{(1)}-1}^{n_{ij}^{(1)}}\,p_{ij}^{n_{ij}^{(1)}}(1-p_{ij})^{n_i^{(1)}-n_{ij}^{(1)}-1}\,C_{n_i^{(2)}-1}^{n_{ij}^{(2)}}\,p_{ij}^{n_{ij}^{(2)}}(1-p_{ij})^{n_i^{(2)}-n_{ij}^{(2)}-1}\times$$

$$\times\,\mathrm{e}^{it_i\left(\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-p_{ij}\right)-\left(\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}-p_{ij}\right)\right)\sqrt{\frac{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}}}.$$

Dacă pentru simplificarea scrierii punem

$$\frac{(n_i^{(1)}-1)\,(n_i^{(2)}-1)}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}=N_i$$

şi observăm că

$$\frac{n_{ij}}{n_i-1}-p_{ij}=\frac{1-p_{ij}}{n_i-1}\,n_{ij}-\frac{p_{ij}}{n_i-1}\,(n_i-n_{ij}-1),$$

atunci se constată uşor că funcţia caracteristică este

$$\varphi\,(t_i\,;n_i^{(1)}-1,\;n_i^{(2)}-1)=\left(p_{ij}\,\mathrm{e}^{\frac{it_i(1-p_{ij})\sqrt{N_i}}{n_i^{(1)}-1}}+(1-p_{ij})\,\mathrm{e}^{-\frac{it_i p_{ij}\sqrt{N_i}}{n_i^{(2)}-1}}\right)^{n_i^{(1)}-1}\times$$

$$\times\left(p_{ij}\,\mathrm{e}^{\frac{it_i(1-p_{ij})\sqrt{N_i}}{n_i^{(2)}-1}}+(1-p_{ij})\,\mathrm{e}^{-\frac{it_i p_{ij}\sqrt{N_i}}{n_i^{(2)}-1}}\right)^{n_i^{(2)}-1}=\left(1-\frac{t_i^2}{2}\,\frac{N_i}{(n_i^{(1)}-1)^2}p_{ij}(1-p_{ij})+\right.$$

$$\left.+\,0\left(\frac{N_i}{(n_i^{(1)}-1)^2}\right)\right)\left(1-\frac{t_i^2}{2}\,\frac{N_i}{(n_i^{(2)}-1)^2}\,p_{ij}\,(1-p_{ij})+0\left(\frac{N_i}{(n_i^{(2)}-1)^2}\right)\right).$$

Trecînd acum la limită, cînd $n_i^{(1)}\to\infty$ şi $n_i^{(1)}/n_i^{(2)}\to c\neq 0$, obţinem

$$\lim_{n_i^{(1)}\to\infty,\;n_i^{(1)}/n_i^{(2)}\to c\neq 0}\varphi\,(t_i^2\,;n_i^{(1)}-1,\;n_i^{(2)}-1)=\mathrm{e}^{-\frac{t_i^2}{p}\,p_{ij}(1-p_{ij})\frac{1}{1+c}}\times$$

$$\times\,\mathrm{e}^{-\frac{t_i^2}{2}\,p_{ij}(1-p_{ij})\frac{c}{1+c}}=\mathrm{e}^{-\frac{t_i^2}{2}\,p_{ij}(1-p_{ij})},$$

adică funcţia caracteristică limită corespunde distribuţiei normale $N\left(0,\,p_{ij}\,(1-p_{ij})\right)$.

Pe de altă parte, avem evident

$$\mathcal{M}\left\{\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}\left(1-\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}\right)+\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\left(1-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$=\sqrt{2p_{ij}\,(1-p_{ij})}+0\left(\frac{1}{N_i}\right)$$

şi

$$D^2\left\{\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}\left(1-\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}\right)+\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\left(1-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}\,p_{ij}\,(1-p_{ij})}+0\left(\frac{1}{N_{i^2}}\right).$$

De aici, în baza inegalităţii lui Celeişev, rezultă că variabila aleatoare

$$\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}\left(1-\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}\right)+\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\left(1-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

tinde în probabilitate, pentru $n_i^{(1)}\to\infty$ şi $n_i^{(1)}/n_i^{(2)}\to c\neq 0$, către constanta $\sqrt{2p_{ij}\,(1-p_{ij})}>0$.

În sfîrşit, aplicînd o teoremă cunoscută [4], obţinem egalitatea (2.1), care constituie criteriul pe care ne-am propus să-l stabilim.

3. Dacă criteriul de la punctul precedent ar duce la cea mai bună concluzie, deci la situaţia că frecvenţele $n_{ij}^{(1)}/(n_i^{(1)}-1)$ şi $n_{ij}^{(2)}/(n_i^{(2)}-1)$ nu corespund aceluiaşi lanţ Markov considerat, aplicarea lui ar fi justificată.

Dacă însă acesta nu ar duce la cea mai bună concluzie, deci la situaţia că cele două frecvenţe corespund aceluiaşi lanţ Markov considerat, criteriul utilizat nu ar fi îndeajuns de satisfăcător. În acest caz, criteriul ar putea fi aplicat pentru compararea altor două frecvenţe, de exemplu, $n_{ik}^{(1)}/(n_i^{(1)}-1)$ şi $n_{ik}^{(2)}/(n_i^{(2)}-1)$ $(k\neq j)$.

Dacă şi din această comparaţie criteriul ne-ar duce la aceeaşi concluzie, adică la situaţia că frecvenţele $n_{ik}^{(1)}/(n_i^{(1)}-1)$ şi $n_{ik}^{(2)}/(n_i^{(1)}-1)$ corespund aceleiaşi colectivităţi, atunci este normal să recurgem la alte criterii mai complexe, bazate pe compararea concomitentă nu a două frecvenţe, ci a unui grup de frecvenţe.

Astfel, etapa următoare ar putea consta în stabilirea unui criteriu care să permită — cu un grad de siguranţă dat — compararea concomitentă a tuturor perechilor de frecvenţe $n_{ij}^{(1)}/(n_i^{(1)}-1)$ şi $n_{ij}^{(2)}/(n_i^{(2)}-1)$ (i fix, $j=1,\,2,\ldots,\,s-1$) corespunzătoare liniilor de rang i (complete) ale matricelor $(n_{ij}^{(1)})$ şi $(n_{ij}^{(2)})$ $(i,j=1,2,\ldots,s)$.

În mod uzual, cînd se pune problema comparării concomitente a două selecţii independente de acelaşi volum (considerarea selecţiilor de acelaşi volum nu este esenţială), se introduc criterii cu ajutorul unui singur indicator reprezentînd un tip de distanţă cu o anumită pondere, într-un spaţiu cu mai multe dimensiuni.

Exemplul tipic în această privinţă este cunoscutul criteriu χ^2, care într-o anumită privinţă este un criteriu optim. Dar, ca orice criteriu bazat pe un singur indicator, prezintă şi el deficienţe, astfel încît, unele erori semnificative putînd să fie acoperite de o concordanţă strînsă numai a unora din componentele sale.

De aceea, este preferabil să se găsească criterii care să asigure concordanţa componenţelor în totalitatea lor. Asupra unor astfel de criterii ne vom opri aici.

În primul rînd, vom căuta să determinăm valoarea asimptotică a probabilităţii de a se realiza simultan inegalităţile

$$\frac{|n_{ij} - (n_i - 1)\, p_{ij}|}{\sqrt{n_i - 1}} < \lambda_{ij}\ (i \text{ fix}, j = 1, 2,\ldots, s-1) \left(\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = n_i - 1 \right) \tag{3.1}$$

unde n_i şi n_{ij} sînt oricare din numerele $n_i^{(1)}$ şi $n_i^{(2)}$ respectiv $n_{ij}^{(1)}$ şi $n_{ij}^{(2)}$.

Presupunînd deci starea a_i fixă şi considerînd evenimentele care constau dîn apariţia succesiunilor $a_i a_j$ $(i \text{ fix}, j = 1, 2,\ldots, s - 1)$, sîntem acum în cazul urnei generalizate a lui Bernoulli.

Vom începe prin a stabili legea de probabilitate limită, pentru $n_i \to \infty$, relativ la distribuţia vectorului aleator ale cărui componente sînt variabilele

$$x_{ij} = \frac{n_{ij} - (n_i - 1)\, p_{ij}}{\sqrt{n_i - 1}},\quad (i \text{ fix}, j = 1, 2,\ldots, s - 1). \tag{3.2}$$

Pentru demonstraţie vom aplica metoda funcţiei caracteristice. Astfel, notînd cu $\varphi\,(t_{i1}, t_{i2},\ldots, t_{i,s-1};\, n_i - 1)$ funcţia caracteristică a vectorului aleator cu componentele de mai sus, avem

$$\varphi\,(t_{j1}, t_{j2},\ldots, t_{j,s-1};\, n_j - 1) =$$

$$= \sum_{n_{j1}+\ldots+n_{js}=n_j-1} \frac{(n_j - 1)}{n_{j1}!\ldots n_{js}!} \prod_{k=1}^{s} p_{jk}^{n_{jk}} \prod_{k=1}^{s-1} \mathrm{e}^{i t_{jk} \frac{n_{jk}-(n_j-1)p_{jk}}{\sqrt{n_j-1}}} =$$

$$= \mathrm{e}^{-i(n_j-1)\frac{p_{j1}t_{j1}+\ldots+p_{j,s-1}t_{j,s-1}}{\sqrt{n_j-1}}} \Bigg(p_{j1}\, \mathrm{e}^{i\frac{t_{j1}}{\sqrt{n_j-1}}} + p_{j2}\, \mathrm{e}^{i\frac{t_{j2}}{\sqrt{n_j-1}}} + \ldots + p_{j,s-1}\, \mathrm{e}^{i\frac{t_{j,s-1}}{\sqrt{n_j-1}}} +$$

$$+ p_{j,s} \Bigg)^{n_j-1} = \Bigg(p_{j1}\, \mathrm{e}^{i\frac{t_{j1}-\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}}{\sqrt{n_j-1}}} + p_{j2}\, \mathrm{e}^{i\frac{t_{j2}-\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}}{\sqrt{n_j-1}}} + \ldots$$

$$\ldots + p_{j,s-1}\, \mathrm{e}^{i\frac{t_{j,s-1}\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}}{\sqrt{n_j-1}}} + p_{js}\, \mathrm{e}^{-i\frac{\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}}{\sqrt{n_j-1}}} \Bigg)^{n_j-1}$$

$$(j \text{ fix})$$

Aplicînd dezvoltarea în serie a exponenţialelor, obţinem

$$\varphi\,(t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_{j,s-1};\; n_j - 1) =$$

$$= \left(1 + i\left(p_{j1}\frac{t_{jk} - \sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}}{\sqrt{n_j - 1}} + \ldots + p_{j,s-1}\frac{t_{j,s-1} - \sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}}{\sqrt{n_j - 1}} - \right.\right.$$

$$\left. - p_{j,s}\frac{\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}}{\sqrt{n_j - 1}}\right) - \frac{1}{2(n_j - 1)}\left(p_{j1}\left(t_{j1} - \sum_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}\right)^2 + p_{j2}\left(t_{j2} - \sum_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{fk}\right)^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\left. \ldots + p_{j,s-1}\left(t_{j,s-1} - \sum_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}\right)^2 + p_{js}\left(\sum_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}\right)^2\right) + 0\left(\frac{1}{n_j - 1}\right)\right)^{n_j - 1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2(n_j - 1)}\left(\sum_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}^2 - \left(\sum_{k=1}^{s-1} p_{jk}t_{jk}\right)^2\right) + 0\left(\frac{1}{n_j - 1}\right)\right)^{n_j - 1},$$

de unde rezultă, dacă înlocuim indicele j cu i, că

$$\lim_{n_i \to \infty} \varphi\,(t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{i,s-1};\, n_i - 1) = e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{ik}t_{ik}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{ik}t_{ik}\right)^2\right)}. \qquad (3.3)$$

De aici se vede că legea de probabilitate limită, pentru $n_i \to \infty$ a vectorului aleator considerat, este o lege de probabilitate normală cu $s - 1$ dimensiuni, avînd vectorul medie nul şi matricea covariantă

$$\overset{-1}{A} = \begin{pmatrix} p_{i1}(1 - p_{i1}) & -p_{i1}p_{i2} & \cdots & -p_{i1}p_{i,s-1} \\ -p_{i2}\,p_{i1} & p_{i2}(1 - p_{i2}) & \cdots & -p_{i2}p_{i,s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{i,s-1}\,p_{i1} & -p_{i,s-1}p_{i2} & \cdots & p_{i,s-1}(1 - p_{i,s-1}) \end{pmatrix}.$$

În continuare, ne propunem să determinăm funcţia de frecvenţă corespunzătoare acestei distribuţii normale. Pentru aceasta vom calcula matricea A, inversa matricei covariante $\overset{-1}{A}$.

Determinantul matricei covariante este

$$|\overset{-1}{A}| = p_{i1}\,p_{i2}\cdots p_{i,s-1}\begin{vmatrix} 1 - p_{i1} & -p_{i2} & \cdots & -p_{i,s-1} \\ -p_{i1} & 1 - p_{i2} & \cdots & -p_{i,s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{i1} & -p_{i2} & \cdots & 1 - p_{i,s-1} \end{vmatrix}.$$

Dacă în determinantul din partea dreaptă a acestei egalităţi se scad elementele fiecărei linii, începînd cu penultima, din elementele linii următoare, obţinem

$$|\overset{-1}{A}| = p_{i1}p_{i2}\cdots p_{i,s-1}\begin{vmatrix} 1-p_{i1} & -p_{i2} & -p_{i3} & \cdots & -p_{i,s-2} & -p_{i,s-1} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dacă acum în determinantul obţinut în partea dreaptă a egalităţii precedente adunăm elementele ultimei coloane la elementele coloanei precedente şi apoi dezvoltăm după elementele ultimei linii, avem

$$|\overset{-1}{A}| = p_{i1}p_{i2}\cdots p_{i,s-1}\begin{vmatrix} 1-p_{i1} & -p_{i2} & -p_{i3} & \cdots & -p_{i,s-3} & -(p_{i,s-2}+p_{i,s-1}) \\ -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

unde determinantul din membrul doi are $s-2$ linii şi coloane.

Continuînd procedeul de mai sus, se vede uşor că

$$|\overset{-1}{A}| = p_{i1}p_{i2}\cdots p_{i,s-1}(1-p_{i1}-p_{i2}-\cdots-p_{i,s-1}) = p_{i1}p_{i2}\cdots p_{is}.$$

În mod analog se obţine complementul algebric $|\overset{-1}{A}|_{kk}$ al elementului situat la intersecţia liniei şi coloanei de rang k din determinantul $|\overset{-1}{A}|$, a cărui valoare este

$$|\overset{-1}{A}|_{kk} = \frac{p_{i1}p_{i2}\cdots p_{i,s-1}}{p_{ik}}(p_{ik}+p_{is}),$$

astfel încît elementul corespunzător din matricea A se scrie

$$\frac{|\overset{-1}{A}|_{kk}}{|\overset{-1}{A}|} = \frac{1}{p_{ik}} + \frac{1}{p_{is}}.$$

În ceea ce priveşte elementul corespunzător situat la intersecţia liniei de rang j şi a coloanei de rang k din matricea A, un calcul simplu ne arată că

$$\frac{|\overset{-1}{A}_{kj}|}{|\overset{-1}{A}|} = \frac{1}{p_{is}}.$$

Rezultă deci că matricea A are forma de mai jos:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_{i1}} + \frac{1}{p_{is}} & \frac{1}{p_{is}} & \dots & \frac{1}{p_{is}} \\ \frac{1}{p_{is}} & \frac{1}{p_{i2}} + \frac{1}{p_{is}} & \dots & \frac{1}{p_{is}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{p_{is}} & \frac{1}{p_{is}} & \dots & \frac{1}{p_{i,s-1}} + \frac{1}{p_{is}} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, funcția de frecvență a distribuției normale cu $s-1$ dimensiuni, adică repartiția limită, pentru $n_i \to \infty$ a vectorului aleator avînd componentele (3.2) este

$$f(x_{i1}\, x_{i2} \dots, x_{i,s-1}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_{i1} p_{i2} \dots p_{is}}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{s-1}\left(\frac{1}{p_{ij}}+\frac{1}{p_{is}}\right) x_{ij}^2 + \frac{2}{p_{is}}\left(\sum\limits_{1 \leqslant j,k \leqslant s-1} x_{ij} x_{ik}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_{i1} p_{i2} \dots p_{is}}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{s-1} \frac{1}{p_{ij}} x_{ij}^2 + \frac{1}{p_{is}}\left(\sum\limits_{j=1}^{s-1} x_{ij}\right)^2\right)}. \qquad (3.4)$$

Ținînd seama de relația $\sum\limits_{j=1}^{s} x_{ij} = 0$, funcția de frecvență (3.4) se aduce la forma simetrică

$$f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,s-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_{i1} p_{i2} \dots p_{is}}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{s} \frac{1}{p_{ij}} x_{ij}^2}. \qquad (3.5)$$

Acum sîntem în măsură să determinăm valoarea asimptotică a probabilității de a se realiza simultan inegalitățile (3.1).

Într-adevăr, cu ajutorul funcțiilor de frecvență (3.4) sau (3.5), putem să scriem

$$\lim_{n_i \to \infty} P_r \left(\frac{|n_{ij} - (n_i - 1) p_{ij}|}{\sqrt{n_i - 1}} < \lambda_{ij} \ (i \text{ fix}, \ j = 1, 2, \dots, s-1) \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_{i1} p_{i2} \dots p_{is}}} \int_{-\lambda_{i1}}^{\lambda_{i1}} \mathrm{d}x_{i1} \int_{-\lambda_{i2}}^{\lambda_{i2}} \mathrm{d}x_{i2} \dots$$

$$\dots \int_{-\lambda_{i,s-1}}^{\lambda_{i,s-1}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{s-1} \frac{1}{p_{ij}} x_{ij}^2 + \frac{1}{p_{is}}\left(\sum\limits_{j=1}^{s-1} x_{ij}\right)^2\right)} \mathrm{d}x_{i,s-1} \qquad (3.6)$$

respectiv sub forma simetrică

$$\lim_{n_i\to\infty} P_r\left(\frac{|n_{ij}-(n_i-1)\,p_{ij}|}{\sqrt{n_i-1}} < \lambda_{ij}\,(i \text{ fix}, j=1,2,\ldots,s-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_{i1}p_{i2}\cdots p_{is}}}\int_G e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{p_{ij}}x_{ij}^2}\,\mathrm{d}v, \tag{3.7}$$

unde $G = \{|x_{ij}| < \lambda_{ij}\,(i \text{ fix}, j=1,2,\ldots,s-1);\ \sum\limits_{j=1}^{s} x_{ij}=0\}$, iar d$v$ este elementul de volum corespunzător. Reamintim că numerele n_i și n_{ij} sînt oricare din numerele $n_i^{(1)}$ și $n_i^{(2)}$, respectiv $n_{ij}^{(1)}$ și $n_{ij}^{(2)}$.

4. Înainte de a trece la problema comparării concomitente a observațiilor date de două selecții independente, ne este necesară teorema de mai jos, care să generalizeze pe cea cunoscută [4] în cazul variabilelor din spațiul cu o singură dimensiune.

TEOREMĂ. *Fie șirul de vectori aleatori* $\{X_1^{(n)}, X_2^{(n)},\ldots, X_s^{(n)}\}_{n=1,2,\ldots}$ *din spațiul cu s dimensiuni ale căror funcții de repartiție tind, pentru* $n\to\infty$, *către o funcție de repartiție determinată* $F(x_1, x_2,\ldots, x_s)$. *Fie de asemenea șirul de vectori aleatori* $\{Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)},\ldots, Y_s^{(n)}\}_{n=1,2,\ldots}$ *ale căror componente tind respectiv în probabilitate către constantele* $c_k > 0$ $(k=1,2,\ldots,s)$.

În aceste condiții, funcțiile de repartiție ale șirului de vectori aleatori

$$\left\{\frac{X_1^{(n)}}{Y_1^{(n)}}, \frac{X_2^{(n)}}{Y_2^{(n)}},\ldots,\frac{X_s^{(n)}}{Y_s^{(n)}}\right\}_{n=1,2,\ldots}$$

tind, pentru $n\to\infty$, *către o funcție de repartiție* $F(c_1x_1, c_2x_2,\ldots, c_sx_s)$ *în orice punct de continuitate al funcției* $F(x_1, x_2,\ldots, x_s)$.

Demonstrație. Să notăm cu $S^{(n)}$ mulțimea punctelor din spațiul cu s dimensiuni pentru care sînt satisfăcute relațiile

$$\frac{X_k^{(n)}}{Y_k^{(n)}} \leqslant x_k \text{ pentru orice } k\ (k=1,2,\ldots,s),$$

unde $(x_1, x_2,\ldots, x_s)$ este un punct de continuitate al funcției $F(x_1, x_2,\ldots, x_s)$.

Mulțimea $S^{(n)}$ se poate descompune în următoarele două mulțimi complementare :

$$S_1^{(n)} = \left\{\frac{X_k^{(n)}}{Y_k^{(n)}} \leqslant x_k;\ |Y_k^{(n)}-c_k| \leqslant \varepsilon \text{ pentru orice } k\ (k=1,2,\ldots,s)\right\}$$

și

$$S_2^{(n)} = \left\{\frac{X_k^{(n)}}{Y_k^{(n)}} \leqslant x_{kk} \text{ pentru orice } k\ (k=1,2,\ldots,s);\ |Y_k^{(n)}-c_k| > \varepsilon \text{ pentru}\right.$$

$$\left.\text{cel puțin un } k\ (k=1,2,\ldots,s)\right\},$$

unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar.

Avem evident

$$P\,(S^{(n)}) = P\,(S^{(n)}) + P\,(S_2^{(n)}).$$

În baza relaţiei de convergenţă în probabilitate

$$\underset{n\to\infty}{P}\left(|\,Y_k^{(n)} - c_k\,| \leqslant \varepsilon\right) = \underset{n\to\infty}{P}\left(c_k - \varepsilon \leqslant Y_k^{(n)} \leqslant c_k + \varepsilon\right) \to 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

rezultă că

$$P\left(\{X_k^{(n)} \leqslant (c_k - \varepsilon)\,x_k\,;\ |\,Y_k^{(n)} - c_k\,| \leqslant \varepsilon \text{ pentru orice } k\ (k = 1, 2, \ldots, s)\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\,(S_1^{(n)}) \leqslant P\Big(\,\{X_k^{(n)} \leqslant (c_k + \varepsilon)\,x_k\,;\ |\,Y_k^{(n)} - c_k\,| \leqslant \varepsilon \text{ pentru orice } k$$

$$(k = 1, 2, \ldots, s)\}\Big),$$

unde am luat $\varepsilon < \min\,(c_1, c_2, \ldots, c_s)$.

Pe de altă parte, avem

$$P\Big(\{X_k^{(n)} \leqslant (c_k - \varepsilon)\,x_k\,;\ |\,Y_k^{(n)} - c_k\,| \leqslant \varepsilon \text{ pentru orice } k\ (k = 1, 2, \ldots, s)\}\Big) =$$

$$= P\Big(\{X_k^{(n)} \leqslant (c_k - \varepsilon)\,x_k \text{ pentru orice } k\ (k = 1, 2, \ldots, s)\}\Big) - P\,(S_2^{(n)}).$$

O relaţie analogă este valabilă şi pentru $P\Big(\{X_k^{(n)} \leqslant (c_k + \varepsilon)\,x_k\,\cdot$ $|\,Y_k^{(n)} - c_k\,| \leqslant \varepsilon$ pentru orice $k\ (k = 1, 2, \ldots, s)\}\Big)$, astfel încît inegalitatea dublă de mai sus devine

$$P\Big(\{X_k^{(n)} \leqslant (c_k - \varepsilon)\,x_k \text{ pentru orice } k\ (k = 1, 2, \ldots, s)\}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant P\,(S^{(n)}) \leqslant P\left(\{X_k^{(n)} \leqslant (c_k + \varepsilon)\,x_k \text{ pentru orice } k\ (k = 1, 2, \ldots, s)\}\right).$$

Prin ipoteză, $\lim\limits_{n\to\infty} P\Big(\{X_k^{(n)} \leqslant (c_k \mp \varepsilon)\,x_k \text{ pentru orice } k\ (k=1, 2, \ldots, s)\}\Big)$ există şi este egală cu $F\Big((c_1 \mp \varepsilon)\,x_1, (c_2 \mp \varepsilon)\,x_2, \ldots, (c_s \mp \varepsilon)\,x_s\Big)$, de aceea putem să scriem

$$F\Big((c_1 - \varepsilon)\,x_1, (c_2 - \varepsilon)\,x_2, \ldots, (c_s - \varepsilon)\,x_s\Big) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} P(S^{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} P\,(S^{(n)}) \leqslant F\Big((c_1 + \varepsilon)\,x_1, (c_2 + \varepsilon)\,x_2, \ldots, (c_s + x_s)\Big).$$

În sfîrşit, cum $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ este un punct de continuitate al funcţiei $F\,(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, iar $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} P(S^{(n)})$ există şi este egală cu $F\,(c_1 x_1, c_2 x_2, \ldots, c_s x_s)$ şi deci teorema este demonstrată.

5. Acum putem să trecem la problema care ne interesează de fapt, a comparării concomitente a observaţiilor date de două selecţii independente în cazul urnei generalizate a lui Bernoulli. Ca şi în cazul simplu al urnei lui Bernoulli, considerat la punctul 2, vom stabili un criteriu cu caracter asimptotic referitor la verificarea ipotezei statistice că două selecţii independente de volum mare corespund aceluiaşi lanţ Markov simplu, finit şi omogen.

Mai întîi vom determina valoarea asimptotică a probabilităţii de a se realiza simultan inegalităţile

$$\sqrt{\frac{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}}\left|\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(1)}-1}\right| < \lambda_{ij}\ (i \text{ fix}, j=1,2,\dots,s-1) \tag{5.1}$$

stabilind repartiţia limită, pentru $n_i^{(1)} \to \infty$ şi $n_i^{(1)}/n_i^{(2)} \to c \neq 0$, a distribuţiei vectorului aleator ale cărui componente sînt variabilele normate

$$\sqrt{\frac{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}}\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right)(i \text{ fix}, j=1,2,\dots,s-1). \tag{5.2}$$

Pentru aceasta vom aplica şi aici metoda funcţiei caracteristice. Astfel, notînd cu $\varphi(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{i,s-1};\ n_i^{(1)}-1, n_i^{(2)}-1)$, funcţia caracteristică a vectorului aleator cu componentele (5.2), avem

$$\varphi(t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j,s-1}; n_j^{(1)}-1, n_j^{(2)}-1) = \sum_{n_{j1}^{(1)}+\dots+n_{js}^{(1)}=n_j^{(1)}-1} \frac{(n_j^{(1)}-1)!}{n_{j1}^{(1)}!\dots n_{js}^{(1)}!}\prod_{k=1}^{s} p_{jk}^{n_{jk}} \times$$

$$\times \sum_{n_{j1}^{(2)}+\dots+n_{js}^{(2)}=n_j^{(2)}-1} \frac{(n_j^{(2)}-1)!}{n_{j1}^{(2)}!\dots n_{js}^{(2)}}\prod_{k=1}^{s} p_{jk}^{n_{jk}^{(2)}}\prod_{k=1}^{s-1} e^{it_{jk}\sqrt{\frac{(n_j^{(1)}-1)(n_j^{(2)}-1)}{n_j^{(1)}+n_j^{(2)}-2}}\left(\frac{n_{jk}^{(1)}}{n_j^{(1)}-1}-\frac{n_{jk}^{(2)}}{n_j^{(2)}-1}\right)}.$$

Să observăm că dacă scriem variabilele (5.2) sub forma

$$\sqrt{\frac{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}}\left(\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-p_{ij}\right)-\left(\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}-p_{ij}\right)\right)(i \text{ fix}, j=1,2,\dots,s-1),$$

atunci funcţia caracteristică $\varphi(t_{i1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,s-1};\ n_i^{(1)}-1,\ n_i^{(2)}-1)$ se prezintă ca produsul următoarelor funcţii caracteristice de tip Bernoulli cu $s-1$ stări

$$\varphi_1(t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j,s-1};\ n_j^{(1)}-1,\ n_j^{(2)}-1) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{s-1} p_{jk}\, e^{i\sqrt{\frac{(n_j^{(1)}-1)(n_j^{(2)}-1)}{n_j^{(1)}+n_j^{(2)}-2}}\frac{t_{jk}-\sum\limits_{l=1}^{s-1} p_{jl}t_{jl}}{n_j^{(1)}-1}} + p_{js}\, e^{-i\sqrt{\frac{(n_j^{(1)}-1)(n_j^{(2)}-1)}{n_j^{(1)}+n_j^{(2)}-2}}\frac{\sum\limits_{l=1}^{s-1} p_{jl}t_{jl}}{n_j^{(1)}-1}}\right)^{n_j^{(1)}-1}$$

şi

$$\varphi_2(t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{j,s-1};\ n_j^{(1)}-1, n_j^{(2)}-1) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{s-1} p_{jk}\, e^{i\sqrt{\frac{(n_j^{(1)}-1)(n_j^{(2)}-1)}{n_j^{(1)}+n_j^{(2)}-2}}\frac{t_{jk}-\sum\limits_{l=1}^{s-1} p_{jl}t_{jl}}{n_j^{(2)}-1}} + p_{js}\, e^{-i\sqrt{\frac{(n_j^{(1)}-1)(n_j^{(2)}-1)}{n_j^{(1)}+n_j^{(2)}-2}}\frac{\sum\limits_{l=1}^{s-1} p_{jl}t_{jl}}{n_j^{(2)}-1}}\right)^{n_j^{(2)}-1}$$

Procedînd întocmai ca şi în cazul funcţiei caracteristice $\varphi(t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{i,s-1}; n_i - 1)$, considerată la punctul 3, se constată uşor că

$$\lim_{n_i^{(1)}\to\infty,\ n_i^{(1)}/n_i^{(2)}\to c\neq 0} \varphi_1, (t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{i,s-1};\ n_i^{(1)} - 1, n_i^{(2)} - 1) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{c+1}\left(\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{ik} t_{ik}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{ik} t_{jk}\right)^2\right)},$$

iar

$$\lim_{n_i^{(1)}\to\infty,\ n_i^{(1)}/n_i^{(2)}\to c\neq 0} \varphi_2 (t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{i,s-2};\ n_i^{(1)} - 1, n_i^{(2)} - 1) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{c}{c+1}\left(\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{ik} t_{ik}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{ik} t_{jk}\right)^2\right)}.$$

De aici rezultă că

$$\lim_{n_i^{(1)}\to\infty,\ n_i^{(1)}/n_i^{(2)}\to c\neq 0} \varphi (t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{i,s-1};\ n_i^{(1)} - 1,\ n_i^{(2)} - 1) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{ik} t_{ik}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{s-1} p_{ik} t_{jk}\right)^2\right)},$$

adică funcţia caracteristică (3.3) corespunzătoare distribuţiei normale cu $s - 1$ dimensiuni avînd funcţia de frecvenţă (3.4).

Prin urmare, repartiţia limită, pentru $n_i^{(1)} \to \infty$ şi $n_i^{(1)}/n_i^{(2)} \to c \neq 0$, a vectorului aleator avînd drept componente variabilele (5.2) fiind distribuţia normală $s - 1$ dimensională cu funcţia de frecvenţă (3.4), putem să scriem

$$\lim_{n_i^{(1)}\to\infty,\ n_i^{(1)}/n_i^{(2)}\to c\neq 0} P_r\left(\sqrt{\frac{(n_i^{(1)} - 1)(n_i^{(2)} - 1)}{n_i^{(1)} + n_i^{(2)} - 2}} \left| \frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)} - 1} - \frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)} - 1} \right| < \right.$$

$$\left. < \lambda_{ij}\ (i \text{ fix},\ j = 1, 2, \ldots, s - 1)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_{i1} p_{i2} \cdots p_{is}}} \times$$

$$\times \int_{-\lambda_{i1}}^{\lambda_{i1}} \mathrm{d}x_{i1} \int_{-\lambda_{i2}}^{\lambda_{i2}} \mathrm{d}x_{i2} \ldots \int_{-\lambda_{i,s-1}}^{\lambda_{i,s-1}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{s-1} \frac{1}{p_{ij}} x_{ij}^2 + \frac{1}{p_{is}}\left(\sum\limits_{j=1}^{s-1} x_i\right)^2\right)} \mathrm{d}x_{i,s-1}. \qquad (5.3)$$

Din punct de vedere al problemei noastre, rezultatul obţinut nu este satisfăcător, deoarece probabilitatea limită depinde de probabilităţile p_{ij} (i fix, $j = 1, 2, \ldots, s - 1$), care în general nu sînt cunoscute. De aceea, se pune întrebarea dacă nu există un criteriu cu caracter asimptotic independent de aceste probabilităţi, analog cu (2.1), considerat la punctul 2. Sau, în cazul cînd o astfel de situaţie nu este posibilă, se pune din nou întrebarea, dacă nu este posibil să îmbunătăţim relaţia (5.3) în sensul de a găsi o expresie mai simplă pentru probabilitatea limită.

Teorema stabilită la punctul precedent permite să dăm un răspuns afirmativ la ultima întrebare, adică să obţinem o expresie mai simplă a probabilităţii limită.

Într-adevăr, să considerăm acum vectorul aleator ale cărui componente sînt variabilele

$$\frac{\sqrt{\frac{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}}\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right)}{\sqrt{\frac{n_{ij}^{(1)}+n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}}} \quad (i \text{ fix}, j = 1, 2, \ldots, s-1) \quad (5.4)$$

care, evident, se pot scrie sub forma mai simplă

$$\sqrt{\frac{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}{n_{ij}^{(1)}+n_{ij}^{(2)}}}\left(\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right) \quad (i \text{ fix}, j=1, 2, \ldots, s-1). \quad (5.4')$$

După cum s-a arătat mai sus, repartiţia limită, pentru $n_i^{(1)} \to \infty$ şi $n_i^{(1)}/n_i^{(2)} \to c \neq 0$, a vectorului aleator ale cărui componente sînt variabilele de la numărătorul raportului (5.4), este o distribuţie normală cu $s-1$ dimensiuni avînd funcţia de frecvenţă (3.4).

Pe de altă parte, vectorul aleator ale cărui componente sînt variabilele de la numitorul raportului (5.4) tinde în probabilitate, pentru $n_i^{(1)} \to \infty$ şi $n_i^{(1)}/n_i^{(2)} \to c \neq 0$, către vectorul avînd drept componente constantele $p_{ij} > 0$ $(i \text{ fix}, j = 1, 2, \ldots, s-1)$.

Aplicînd teorema mai sus menţionată, ale cărei condiţii sînt îndeplinite, rezultă că

$$\lim_{n_i^{(1)}\to\infty,\, n_i^{(1)}/n_i^{(2)}\to c\neq 0} P_r\left(\sqrt{\frac{(n_i^{(1)}-1)(n_i^{(2)}-1)}{n_i^{(1)}+n_{ij}^{(2)}}}\left|\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right| < \right.$$

$$\left. < \lambda_{ij} \, (i \text{ fix}, j = 1, 2, \ldots, s-1)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_{is}}} \int_{-\lambda_{i1}}^{\lambda_{i1}} \mathrm{d}x_{i1} \int_{-\lambda_{i2}}^{\lambda_{i2}} \mathrm{d}x_{i2} \ldots$$

$$\ldots \int_{-\lambda_{i,s-1}}^{\lambda_{i,s-1}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{s-1} x_{ij}^2 + \left(\sum_{j=1}^{s-1}\sqrt{\frac{p_{ij}}{p_{is}}}x_{ij}\right)^2\right)} \mathrm{d}x_{i,s-1} \, . \quad (5.5)$$

În general, probabilităţile p_{ij} $(i \text{ fix}, j = 1, 2, \ldots, s-1)$, după cum s-a mai spus, nu sînt cunoscute, dar din datele de observaţie corespunzătoare şi altor observaţii anterioare — care pot fi mult mai numeroase decît acelea furnizate de cele două selecţii — ele pot fi estimate.

Cu alte cuvinte, probabilităţile respective pot fi estimate cu ajutorul frecvenţelor f_{ij}/f_i $(i \text{ fix}, j = 1, 2, \ldots, s-1)$, unde numerele f_i şi f_{ij}, a căror semnificaţie este aceeaşi ca şi a numerelor n_i şi n_{ij} se referă de astă dată la totalul observaţiilor anterioare. Într-un astfel de caz probabilităţile care intervin în integralele din (5.3) și (5.5) pot fi înlocuite cu un prag de siguranță suficient de mare prin estimațiile menționate.

Comparînd rezultatele de mai sus cu privire la probabilitățile limite, conform lui (5.3) și (5.5), este clar că ultimul din ele este preferabil celui dintîi, în care intervine factorul $1/\sqrt{p_{i1}p_{i2}\ldots p_{is}}$ implicînd produsul a prea multe elemente estimate, atunci cînd s este mare.

În ceea ce privește factorul $1/\sqrt{p_{is}}$ din fața integralei din (5.5), el poate fi estimat destul de strîns prin $\sqrt{f_i}\,/\sqrt{f_{is}}$ dacă f_i este suficient de mare și aceasta cu o probabilitate oricît de apropiată de unitate.

Considerații analoge sînt valabile și pentru rapoartele $\sqrt{p_{ij}}\,/\sqrt{p_{is}}$ (i fix, $j = 1, 2, \ldots, s-1$), care intervin la exponentul expresiei de sub aceeași integrală, astfel încît se vede imediat care sînt motivele care justifică afirmația noastră în privința preferării rezultatelor de mai sus.

Primită la redacție la 15 iunie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. George Theiler. *Asupra unor probleme de inferență statistică relative la lanțurile Markov.* Revista de Statistică 7, 1964, Anexa.
2. Patrick Billingsley. *Statistical Methods in Markov Chains.* The Annals of Mathematical Statistics, 32, *1* (1961).
3. В. И. Романовский, *Дискретные цепи Маркова* Государственное Издательство Москва — Ленинград, 1949.
4. Harold Cramer. *Mathematical Methods of Statistics.* (Traducerea în limba rusă) 1948.

SPAȚII DE INCIDENȚĂ. I

DE

H. BODNĂRESCU

Institutul de Petrol, Gaze și Geologie

În Cap. I, se dă o listă de axiome de incidență L1 — L9, urmată de teoremele ce decurg din axiomele respective.

Se compară sistemul *L* cu sistemul de axiome de incidență Hilbert.

Se definesc, în continuare, simplexul Σ^3 și spațiile de incidență tridimensionale omogene, de putere *p*.

În Cap. II se expun, pentru spațiile de incidență patrudimensionale S^4, sistemul de axiome *L'* și teoremele ce decurg din acesta.

Se definesc : simplexul patrudimensional Σ^4 și spațiile de incidență patrudimensionale omogene de putere *p*.

INTRODUCERE

În lucrarea de față se consideră un sistem de axiome de incidență diferit de sistemul Hilbert, sistem în care elementele sînt punctele, iar mulțimea punctelor este denumită spațiu de incidență. Dreptele și planele sînt submulțimi de puncte organizate conform axiomelor L, denumite axiome de legătură.

Lucrarea are patru capitole ¹).

Capitolul I al lucrării cuprinde o expunere a noțiunilor de bază, după cum s-a arătat mai sus, urmată de lista axiomelor de legătură L1 — L9, și de teoremele ce decurg din aceste axiome. Se arată că sistemul L este necontradictoriu și se compară sistemul L cu sistemul Hilbert. Se definește în continuare simplexul tridimensional Σ^3, și apoi se definesc spațiile de incidență tridimensionale omogene de putere *p*.

---

¹) Capitolele III și IV ale lucrării de față se publică în nr. 2 al revistei „St. cerc. mat.", tom. 17 (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, P. 19–47, BUCUREȘTI, 1965.

În Cap. II se expun axiomele L′ și teoremele decurgînd din aceste axiome referitoare la spațiul de incidență patrudimensional S^4. Se remarcă faptul că sistemul L′ conține axiomele L cu excepția axiomei L9 care apare ca teoremă în cadrul sistemului L′; rezultă de aici că tridimensionalele $A^3 \subset S^4$ sînt spații de incidență deoarece în cadrul lor sînt realizate axiomele L 1—9. Se definește apoi simplexul patrudimensional Σ^4 și spațiile de incidență patrudimensionale omogene de putere p.

În Cap. III se consideră o mulțime S, ale cărei părți sînt grupate în clase H^1 conform relațiilor (axiomelor) L^i 1—4. Se definesc noțiunile de „elemente independente" și de „dimensiune". Se definesc clasele $H^0, H^1, \ldots$ ale spațiilor S^3 și S^4 și se demonstrează, cu ajutorul teoremelor 15 și 16 (Cap. III), că spațiile de incidență S^3 și S^4 sînt tridimensionale, respectiv patrudimensionale.

În Cap. IV se studiază spațiile de incidență n-dimensionale S^n. Sistemul de axiome L^i este completat de axioma de închidere L_0^n. Din teorema 1 (Cap. IV) rezultă că spațiul S^n este n-dimensional, iar din teorema 4 (Cap. IV) rezultă că orice subspațiu $A^i \subset S^n$ este un spațiu de incidență i-dimensional. Se definesc în continuare noțiunile de simplex Σ^n și de spațiu de incidență n-dimensional omogen de putere p.

Unele elemente de geometrie, în lumina celor expuse mai sus, se găsesc în lucrarea *Asupra unui sistem de axiome de incidență*, publicată în „Studii și cercetări matematice" nr. 1, 1960 — iar o aplicare a acestor noțiuni în cadrul geometriei clasice se găsește în lucrarea *Curs de geometrie descriptivă* publicată de Ed. didactică și pedagogică — 1962.

★

În expunerile ce urmează se folosesc următoarele noțiuni și simboluri din teoria mulțimilor:

— Mulțime; element

— Apartenență, cu simbolul $\in$ și negația $\notin$.

— Submulțime sau parte a unei mulțimi

— Mulțime vidă, cu simbolul $\emptyset$

— Mulțime formată dintr-un singur element x: $[x]$

— Mulțime formată din elementele $A, B, C \ldots$: $(A, B, C \ldots)$

— Incluziune sau conținere, cu simbolul $\subset$ și negația : $\not\subset$; relația „$X \subset Y$ și $Y \subset X$" este echivalentă cu $X = Y$; relația $X \subset Y$ nu exclude $X = Y$.

— Reuniune, cu simbolul $\bigcup$

— Intersecție, cu simbolul $\bigcap$

— X și Y sînt „disjuncte" dacă $X \bigcap Y = \emptyset$.

Din algebra propozițională se folosesc simbolurile:

$\Rightarrow$ pentru implicație

$\Leftrightarrow$ pentru echivalență.

Capitolul I

SPAŢII DE INCIDENŢĂ S^3

1° GENERALITĂŢI

O mulţime de elemente denumite puncte şi organizată conform axiomelor de legătură L1 — L9 se numeşte spaţiu de incidenţă S^3, sau spaţiu de incidenţă tridimensional S^3.

În mulţimea S^3 sînt considerate, conform axiomelor L 1 — L 9, submulţimi denumite drepte şi plane.

Se notează cu $A^0, B^0, \ldots$ punctele, cu $A^1, B^1, \ldots$ dreptele şi cu $A^2, B^2, \ldots$ planele.

Pentru relaţiile de apartenenţă şi conţinere se acceptă exprimările clasice: „punctul aparţine dreptei" sau „dreapta trece prin punctul" etc. cu observaţia că expresiile „dreapta aparţine punctului" sau „planul aparţine dreptei sau punctului" nu sînt acceptate.

Spaţiul S^3 este prin definiţie nevid $S^3 \neq \emptyset$.

2° AXIOME DE LEGĂTURĂ L

L1. *Pentru oricare punct* A^0 *există o dreaptă* A^1 *cu relaţia* $A^0 \in A^1$ — *şi evident* $[A^0] \subset A^1$.

L2. *Pentru oricare punct* A^0 *şi dreaptă* A^1 *există relaţia* $A^1 \not\subset [A^0]$.

L3. *Pentru oricare puncte* A^0 *şi* B^0 $(A^0 \neq B^0)$ *există o dreaptă unică* A^1 *cu relaţia*: $A^0 \in A^1$ *şi* $B^0 \in A^1$ — *şi evident* $(A^0, B^0) \subset A^1$.

Evident, L3 este echivalentă cu oricare dintre relaţiile:

$$(A^0 \neq B^0 \text{ şi } A^0, B^0 \in A^1) \Rightarrow (A^1 \text{ unică})$$

sau

$$(A^0 \neq B^0;\ A^0, B^0 \in A^1;\ A^0, B^0 \in B^1) \Rightarrow (A^1 = B^1)$$

sau

$$(A^0 \neq B^0 \text{ şi } A^0, B^0 \in A^1 \cap B^1) \Rightarrow (A^1 = B^1).$$

Se justifică astfel scrierea A^0B^0 pentru dreaptă [2]) şi expresia: dreapta este definită de punctele A^0 şi B^0.

Din L3 rezultă de asemenea că oricare două puncte A^0, B^0 sînt coliniare (pentru $A^0 = B^0$ coliniaritatea este implicată de L1).

L4. *Pentru oricare dreaptă* A^1 *există un plan* A^2 *cu relaţia* $A^1 \subset A^2$.

L5. *Pentru oricare dreaptă* A^1 *şi plan* A^2 *există relaţia* $A^2 \not\subset A^1$.

L6. *Pentru oricare punct* A^0 *şi dreaptă* A^1 *cu relaţia* $A^0 \notin A^1$ *există un plan unic* A^2 *cu relaţia* $(A^0 \in A^2$ *şi* $A^1 \subset A^2)$.

---

[2]) Se precizează că „dreapta A^0B^0" implică $A^0 \neq B^0$.

Axioma L6 este echivalentă cu oricare dintre relațiile :

$$(A^0 \notin A^1;\ A^0 \in A^2;\ A^1 \subset A^2) \Rightarrow (A^2 \text{ unic}),$$

$$(A^0 \notin A^1;\ A^0 \in A^2;\ A^1 \subset A^2;\ A^0 \in B^2;\ A^1 \subset B^2) \Rightarrow (A^2 = B^2),$$

$$(A^0 \notin A^1;\ A^0 \in A^2 \cap B^2;\ A^1 \subset A^2 \cap B^2) \Rightarrow (A^2 = B^2).$$

Din L6 rezultă că oricare punct A^0 și dreaptă A^1 sînt coplanare (dacă $A^0 \in A^1$, coplanaritatea este implicată de L4).

L7. *Există relația* :

$$(A^0 \neq B^0;\ A^0, B^0 \in A^1;\ A^0, B^0 \in A^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2).$$

Această relație se mai poate scrie și sub forma echivalentă :

$$(A^0 \neq B^0 \text{ și } A^0, B^0 \in A^1 \cap A^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2)$$

L8. *Pentru oricare plan A^2 există relația $S^3 \not\subset A^2$.*

L9. *Există relația* :

$$(A^0 \in A^2 \text{ și } A^0 \in B^2) \Rightarrow (\text{există } B^0 \neq A^0 \text{ și } B^0 \in A^2;\ B^0 \in B^2).$$

Relația de mai sus se poate scrie și sub forma echivalentă

$$(A^0 \in A^2 \cap B^2) \Rightarrow (\text{există } B^0 \neq A^0 \text{ și } B^0 \in A^2 \cap B^2).$$

3° TEOREME REZULTÎND DIN AXIOME DE LEGĂTURĂ L

TEOREMA 1. *Pe oricare dreaptă A^1 există cel puțin două puncte A^0, B^0 ($A^0 \neq B^0$).*

Demonstrație. Dacă pe dreapta A^1 nu există nici un punct, atunci $A^1 = \theta$; dar $(\theta \subset [A^0]$ și $A^1 = \theta) \Rightarrow (A^1 \subset [A^0])$ ceea ce contrazice L2. Există deci un punct A^0 pe dreapta A^1. Dacă $A^1 = [A^0]$, atunci $(A^1 = [A^0]$ și $[A^0] \subset [A^0]) \Rightarrow (A^1 \subset [A^0])$ ceea ce contrazice L2, deci pe oricare dreaptă A^1 există cel puțin două puncte A^0, B^0 ($A^0 \neq B^0$), c.c.t.d.

TEOREMA 2. *Oricare plan A^2 conține trei puncte necoliniare A^0, B^0, C^0.*

Demonstrație. Dacă $A^2 = \theta$, atunci $(A^2 = \theta$ și $\theta \subset A^1) \Rightarrow (A^2 \subset A^1)$ ceea ce contrazice L5, deci există un punct $A^0 \in A^2$. Dacă $A^2 = [A^0]$, atunci există o dreaptă A^1 cu relația $[A^0] \subset A^1$ (conform axiomei L1); $(A^2 = [A^0]$ și $[A^0] \subset A^1) \Rightarrow (A^2 \subset A^1)$, ceea ce contrazice L5, deci există două puncte A^0, $B^0 \in A^2$.

Dacă $A^2 = (A^0, B^0)$, atunci există A^1 cu relația $(A^0, B^0) \subset A^1$ conform axiomei L3; $[A^2 = (A^0, B^0)$ și $(A^0, B^0) \subset A^1] \Rightarrow (A^2 \subset A^1)$ ceea ce contrazice L5, deci există un punct $C^0 \in A^2$ și $C^0 \notin A^1$, și deci există cel puțin trei puncte A^0, B^0, C^0 necoliniare 3) în planul A^2, c.c.t.d.

---

3) Se atrage atenția că $(A^0, B^0, C^0 \text{ necoliniare}) \Rightarrow (A^0 \neq B^0 \neq C^0 \neq A^0)$; într-adevăr, dacă $A^0 = C^0$ și $A^0 \neq B^0$, atunci $(A^0, B^0 \in A^1 \text{ unic})$ conform axiomei L3 și $(C^0 = A^0;\ A^0 \in A^1) \Rightarrow (C^0 \in A^1)$ și deci $A^0, B^0, C^0 \in A^1$ ceea ce contrazice ipoteza. De asemenea, $(A^0 \in B^0C^0) \Leftrightarrow (B^0 \in A^0C^0) \Leftrightarrow (C^0 \in A^0B^0)$.

(Dacă $A^0, B^0, C^0 \in B^1$, se ajunge fără dificultate la $A^2 \subset A^1$ etc.).

TEOREMA 2'. *Oricare plan conţine cel puţin o dreaptă.*

TEOREMA 3. *Pentru oricare trei puncte diferite A^0, B^0, C^0 există un plan A^2 cu relaţia $A^0, B^0, C^0 \in A^2$.*

Demonstraţie. Două oarecare din puncte, de exemplu B^0 şi C^0 determină dreapta unică $A^1 = B^0C^0$ (vezi axioma L3). Se pot ivi următoarele cazuri:

α) $A^0 \in A^1$; în acest caz $A^0, B^0, C^0 \in A^1$; există un plan A^2 cu relaţia $A^1 \subset A^2$ (conform axiomei L4); $(A^0, B^0, C^0 \in A^1$ şi $A^1 \subset A^2) \Rightarrow (A^0, B^0, C^0 \in A^2)$, c.c.t.d.

β) $A^0 \notin A^1$; în acest caz există un plan A^2 cu relaţia $(A^1 \subset A^2$ şi $A^0 \in A^2)$ conform axiomei L6; $(B^0, C^0 \in A^1$ şi $A^1 \subset A^2) \Rightarrow (B^0, C^0 \in A^2)$ şi deci $A^0, B^0, C^0 \in A^2$, c.c.t.d.

Din teorema 2 rezultă evident teoremele:

TEOREMA 3'. *Pentru oricare punct A^0 există un plan A^2 cu relaţia $A^0 \in A^2$.*

TEOREMA 3''. *Pentru oricare puncte A^0, B^0 există un plan A^2 cu relaţia $A^0, B^0 \in A^2$.*

TEOREMA 4. *Pentru oricare trei puncte A^0, B^0, C^0 necoliniare, există un plan unic A^2 cu relaţia $A^0, B^0, C^0 \in A^2$.*

Demonstraţie. Există un plan A^2 cu relaţia $A^0, B^0, C^0 \in A^2$ conform teoremei 3. Există o dreaptă unică A^1 cu relaţia $B^0, C^0 \in A^1$ conform axiomei L3. Avem

$(B^0 \neq C^0;\ B^0, C^0 \in A^1$ şi $B^0, C^0 \in A^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2)$ conform axiomei L7. A^0, B^0, C^0 necoliniare implică $A^0 \notin A^1$; rezultă:

$(A^0 \notin A^1;\ A^0 \in A^2$ şi $A^1 \subset A^2) \Rightarrow (A^2$ unic) conform axiomei L6, c.c.t.d.

Teorema 4 justifică expresia „Planul determinat de punctele necoliniare A^0, B^0, C^0" sau „planul $A^0B^0C^0$" [4]).

TEOREMA 5. *În spaţiul S^3 există patru puncte necoplanare A^0, B^0, C^0, D^0.*

Demonstraţie. Prin definiţia $S^3 = \emptyset$ şi deci există un punct $A^0 \in S^3$. Conform axiomei L1 există o dreaptă A^1 astfel ca $A^0 \in A^1$ şi conform teoremei 1 există două puncte $A^0, B^0 \in A^1$ $(A^0 \neq B^0)$; conform axiomei L4 există un plan A^2 astfel ca $A^1 \subset A^2$ şi conform teoremei 2 există un punct $C^0 \notin A^1$ şi $C^0 \in A^2$. Deci S^3 conţine trei puncte necoliniare A^0, B^0, C^0 situate în planul $A^2 = A^0B^0C^0$ (vezi teorema 4). Să arătăm că există un punct $D^0 \notin A^2$; într-adevăr, dacă pentru oricare $D^0 \in S^3$ avem $D^0 \in A^2$, ar rezulta $S^3 \subset A^2$ ceea ce contrazice axioma L8. Deci există în S^3 cel puţin patru puncte necoplanare A^0, B^0, C^0, D^0. Se atrage atenţia că (A^0, B^0, C^0, D^0 necoplanare) $\Rightarrow$ (oricare două puncte din cele patru sînt distincte) oricare trei puncte din cele patru sînt necoliniare.

Din teorema 5 se deduc fără dificultate teoremele:

TEOREMA 5'. *Pentru oricare dreaptă A^1 există un punct A^0 cu relaţia $A^0 \notin A^1$.*

---

[4]) Se precizează că „planul $A^0B^0C^0$" implică A^0, B^0C^0, necoliniare.

TEOREMA 5″. *Pentru oricare plan A^2 există un punct A^0 cu relaţia* $A^0 \notin A^2$.

TEOREMA 6. *În spaţiul S^3 există cel puţin şase drepte distincte.*

Demonstraţie. Existenţa punctelor necoplanare A^0, B^0, C^0, D^0 (vezi teorema 5) implică existenţa dreptelor distincte A^0B^0, A^0C^0, A^0D^0, B^0C^0, B^0D^0, C^0D^0 (într-adevăr, dacă două oarecare din aceste drepte ar fi confundate, ar rezulta că trei din cele patru puncte sînt coliniare şi deci cele patru puncte ar fi coplanare).

TEOREMA 7. *În spaţiul S^3 există cel puţin patru plane distincte.*

Demonstraţie. Rezultă din teorema 5 existenţa planelor distincte $A^0B^0C^0$, $A^0B^0D^0$, $A^0C^0D^0$, $B^0C^0D^0$.

TEOREMA 8. *Există relaţia* $(A^1 \subset B^1) \Rightarrow (A^1 = B^1)$.

Demonstraţie. Există două puncte A^0, $B^0 \in A^1$ $(A^0 \neq B^0)$ conform teoremei 1. Avem relaţia

$$(A^0, B^0 \in A^1 \text{ şi } A^1 \subset B^1) \Rightarrow (A^0, B^0 \in B^1).$$

$(A^0 \neq B^0;\ A^0, B^0 \in A^1$ şi $A^0, B^0 \in B^1) \Rightarrow (A^1 = B^1)$ conform axiomei L3, c.c.t.d.

TEOREMA 9. *Există relaţia* $(A^2 \subset B^2) \Rightarrow (A^2 = B^2)$.

Demonstraţie. Există trei puncte A^0, B^0, C^0 cu relaţia $(A^0 \notin B^0C^0$ şi $A^0, B^0, C^0 \in A^2)$ — conform teoremei 2

$$(A^0, B^0, C^0 \in A^2 \text{ şi } A^2 \subset B^2) \Rightarrow (A^0, B^0, C^0 \in B^2)$$

$(A^0 \notin B^0C^0;\ A^0, B^0, C^0 \in A^2$ şi $A^0, B^0, C^0 \in B^2) \Rightarrow (A^2 = B^2)$ conform teoremei 4, c.c.t.d.

TEOREMA 10. *Pentru oricare drepte* A^1, B^1 $(A^1 \neq B^1)$ *există relaţia* :

$$(A^1 \cap B^1 = \emptyset \text{ sau } A^1 \cap B^1 = [A^0]).$$

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că nu există două puncte A^0, B^0 $(A^0 \neq B^0)$ cu relaţia $(A^0, B^0 \in A^1 \cap B^1)$; într-adevăr, $(A^0 \neq B^0$ şi $A^0, B^0 \in A^1 \cap B^1) \Rightarrow (A^1 = B^1)$ conform axiomei L3 ceea ce contrazice ipoteza $A^1 \neq B^1$.

DEFINIŢII : Dacă :

$A^1 \cap B^1 = \emptyset$, dreptele se numesc disjuncte.

$A^1 \cap B^1 = [A^0]$, dreptele se numesc concurente.

$A^1 = B^1$, dreptele se numesc confundate.

Teorema 10 se poate enunţa deci şi astfel : două drepte pot fi : sau confundate, sau concurente sau disjuncte. Se mai poate scrie :

$$(A^1 \cap B^1 = A^1 = B^1 \text{ sau } A^1 \cap B^1 = [A^0] \text{ sau } A^1 \cap B^1 = \emptyset).$$

TEOREMA 11. *Oricare două drepte concurente A^1 şi B^1 sînt coplanare iar planul A^2 ce le conţine este unic.*

Demonstraţie. Trebuie demonstrate relaţiile :

$$(A^1 \cap B^1 = [A^0]) \Rightarrow (\text{există } A^2 \text{ astfel ca } A^1, B^1 \subset A^2),$$

$$(A^1, B^1 \subset A^2 \text{ şi } A^1, B^1 \subset B^2 \Rightarrow (A^2 = B^2).$$

Într-adevăr:

$$(A^1 \cap B^1 = [A^0]) \Rightarrow (A^0 \in A^1 \text{ şi } A^0 \in B^1)$$

$(A^0 \in A^1) \Rightarrow$ (există $B^0 \neq A^0$ şi $B^0 \in A^1$) conform teoremei 1

$(A^0 \in B^1) \Rightarrow$ (există $C^0 \neq A^0$ şi $C^0 \in B^1$) conform teoremei 1

Evident, $C^0 \notin A^1$ căci ($C^0 \in A^1$, $A^0 \in A^1$, $C^0 \in B^2$, $A^0 \in B^1$ şi $C^0 \neq A^0$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ($A^1 = B^1$) conform axiomei L3 ceea ce duce la contrazicerea ipotezei $(A^1 \cap B^1) = [A^0]$.

($C^0 \in A^1$) $\Rightarrow$ (există un plan unic A^2 cu relaţiile $C^0 \in A^2$ şi $A^1 \subset A^2$) conform axiomei L6. Dar:

$$(A^0 \in A^1 \text{ şi } A^1 \subset A^2) \Rightarrow (A^0 \in A^2)$$

($A^0 \neq C^0$; A^0, $C^0 \in A^2$ şi A^0, $C^0 \in B^1$) $\Rightarrow$ ($B^1 \subset A^2$) conform axiomei L7 şi deci există un plan A^2 astfel ca A^1, $B^1 \subset A^2$.

Planul A^2 este unic deoarece pentru A^1, $B^1 \subset B^2$ avem:

($B^1 \subset B^2$ şi $C^0 \in B^1$) $\Rightarrow$ ($C^0 \in B^2$) iar:

($C^0 \notin A^1$; $C^0 \in A^2$; $A^1 \subset A^2$; $C^0 \in B^2$ şi $A^1 \subset B^2$) $\Rightarrow$ ($A^2 = B^2$) conform axiomei L6 şi astfel teorema este demonstrată.

TEOREMA 12. *În S^3 există drepte concurente şi drepte disjuncte.*

Demonstraţie. În S^3 există patru puncte necoplanare A^0, B^0, C^0, D^0 conform teoremei 5 şi dreptele A^0B^0, A^0C^0, A^0D^0, B^0C^0, B^0D^0 şi C^0D^0 distincte conform teoremei 6.

Perechile de drepte (A^0B^0, A^0C^0), (A^0B^0, A^0D^0), (A^0B^0, B^0C^0) (A^0B^0, B^0D^0), (A^0C^0, A^0D^0), (A^0C^0, B^0C^0), (A^0C^0, C^0D^0), (A^0D^0, B^0D^0), (A^0D^0, C^0D^0), (B^0C^0, B^0D^0), (B^0C^0, C^0D^0), (B^0D^0, C^0D^0) sînt concurente; într-adevăr ($A^0 \in A^0B^0$ şi $A^0 \in A^0C^0$) $\Rightarrow$ ($[A^0] \subset A^0B^0 \cap A^0C^0$) şi cum $A^0B^0 \neq A^0C^0$, rezultă $[A^0] = A^0B^0 \cap A^0C^0$ — vezi teorema 10 — şi deci dreptele A^0B^0 şi A^0C^0 sînt concurente; şi analog pentru celelalte perechi.

Perechile de drepte (A^0B^0, C^0D^0), (A^0C^0, B^0D^0), (A^0D^0, B^0C^0) sînt disjuncte; într-adevăr, $A^0B^0 \neq C^0D^0$ şi dacă $A^0B^0 \cap C^0D^0 = [E^0]$, ar rezulta că există un plan A^2 cu relaţia (A^0B^0, $C^0D^0 \subset A^2$) conform teoremei 11, şi deci punctele A^0, B^0, C^0, D^0 ar fi coplanare contrar ipotezei; rezultă deci că A^0B^0 şi C^0D^0 sînt disjuncte; şi analog pentru celelalte perechi.

TEOREMA 13. *Pentru orice dreaptă A^1 şi plan A^2 există relaţia:*

$$(A^1 \cap A^2 = \emptyset \text{ sau } A^1 \cap A^2 = [A^0] \text{ sau } A^1 \cap A^2 = A^1).$$

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că:

$$(A^0 \neq B^0 \text{ şi } A^0, B^0 \in A^1 \cap A^2) \Rightarrow (A^1 \cap A^2 = A^1).$$

Într-adevăr,

($A^0 \neq B^0$ şi A^0, $B^0 \in A^1 \cap A^2$) $\Rightarrow$ ($A^1 \subset A^2$) conform axiomei L7.

Dar ($A^1 \subset A^2$) $\Leftrightarrow$ ($A^1 \cap A^2 = A^1$) c.c.t.d.

DEFINIȚII. Dacă :

$A^1 \cap A^2 = \emptyset$ se spune „dreapta și planul sînt disjuncte”.

$A^1 \cap A^2 = [A^0]$ se spune „dreapta și planul sînt concurente” sau „dreapta taie planul” sau „dreapta înțeapă planul”.

Deoarece $(A^1 \cap A^2 = A^1) \Leftrightarrow (A^1 \subset A^2)$, se folosesc termenii „dreapta este conținută în plan” etc.

Observație. Se demonstrează fără dificultate existența în S^3 a unor drepte A^1 și plane A^2 în relațiile $A^1 \cap A^2 = [A^0]$ sau $A^1 \cap A^2 = A^1$; pe baza axiomelor de legătură nu se poate confirma sau infirma existența în S^3 a unor drepte și plane în relația $A^1 \cap A^2 = \emptyset$. Se demonstrează fără dificultate existența în orice plan A^2 a unor drepte distincte A^1 și B^1 în relația $A^1 \cap B^1 = [A^0]$; nu se poate confirma sau infirma existența în A^2 a unor drepte cu relația $A^1 \cap B^2 = \emptyset$. Există relația :

$$(A^1 \text{ și } B^1 \text{ necoplanare}) \Rightarrow (A^1 \cap B^1 = \emptyset).$$

TEOREMA 14. *Pentru oricare două plane* A^2 *și* B^2 $(A^2 = B^2)$ *există relația*

$$(A^2 \cap B^2 = \emptyset \textit{ sau } A^2 \cap B^2 = A^1).$$

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că

$$(A^2 \neq B^2 \text{ și } A^0 \in A^2 \cap B^2) \Rightarrow (A^2 \cap B^2 = A^1).$$

Într-adevăr :

$(A^0 \in A^2 \cap B^2) \Rightarrow$ (există $B^0 \neq A^0$ și $B^0 \in A^2 \cap B^2$) conform axiomei L9 și deci există două puncte A^0, B^0 $(A^0 \neq B^0)$ cu relația $(A^0, B^0 \in A^2 \cap B^2)$. Dar :

$$(A^0, B^0 \in A^2 \cap B^2) \Rightarrow (A^0, B^0 \in A^2 \text{ și } A^0, B^0 \in B^2).$$

Există o dreaptă unică $A^1 = A^0B^0$ $(A^0 \in A^1$ și $B^0 \in A^1)$ conform axiomei L3. Avem

$$(A^0 \neq B^0 \text{ și } A^0, B^0 \in A^1 \text{ și } A^0, B^0 \in A^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2)$$

$(A^0 \neq B^0$ și $A^0, B^0 \in A^1$ și $A^0, B^0 \in B^2) \Rightarrow (A^1 \subset B^2)$ conform axiomei L7.

Dar :

$$(A^1 \subset A^2 \text{ și } A^1 \subset B^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2 \cap B^2).$$

Să arătăm că $A^1 = A^2 \cap B^2$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că nu este posibilă relația $(C^0 \notin A^1$ și $C^0 \in A^2 \cap B^2)$. Într-adevăr : $(C^0 \notin A^1$ și $C^0 \in A^2 \cap B^2$ și $A^1 \subset A^2 \cap B^2) \Rightarrow (A^2 = B^2)$ conform axiomei L6, ceea ce contrazice ipoteza $A^2 \neq B^2$ și deci teorema este demonstrată.

DEFINIȚII. Dacă :

$A^2 \cap B^2 = \emptyset$, planele se numesc disjuncte.

$A^2 \cap B^2 = A^1$, planele se numesc concurente.

$A^2 = B^2$ planele se numesc confundate.

Observație. Se poate demonstra fără dificultate existența în S^3 a unor plane în relația $A^2 \cap B^2 = A^1$; pe baza axiomelor de legătură nu se poate confirma sau infirma existența unor plane în relația $A^2 \cap B^2 = \emptyset$.

4° NECONTRADICȚIA SISTEMULUI *L* ȘI COMPARAȚIA LUI CU SISTEMUL DE AXIOME DE LEGĂTURĂ HILBERT

Pentru demonstrarea necontradicției sistemului L vom alege un model pe care să fie realizate axiomele L1—L9.

Fie patrupunctul $A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0$ ale cărui puncte $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0$, formează spațiul S^3, deci

$$(A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0) = S^3.$$

Se consideră dreptele ca bipuncte:

$$A_1^1 = (A_1^0, A_2^0),\ A_2^1 = (A_1^0, A_3^0),\ A_3^1 = (A_1^0, A_4^0),\ A_4^1 = (A_2^0, A_3^0),$$
$$A_5^1 = (A_2^0, A_4^0),\ A_6^1 = (A_3^0, A_4^0).$$

Se consideră planele ca tripuncte:

$$A_1^2 = (A_1^0, A_2^0, A_3^0),\ A_2^2=(A_1^0, A_2^0, A_4^0,),\ A_3^2 = (A_1^0, A_3^0, A_4^0),\ A_4^2=(A_2^0, A_3^0, A_4^0).$$

Pe modelul construit, mai sus sînt realizate axiomele L1—L9, verificarea acestei afirmații neprezentînd nici o dificultate.

Sistemul L de axiome este echivalent sistemului de axiome de legătură Hilbert în interpretarea că dreptele și planele sînt submulțimi de puncte. Dacă se consideră pentru axiomele Hilbert numerotarea din lucrarea *Les fondements de la géométrie* de Béla Kerékjártó (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955), atunci axiomelor Hilbert le corespund în prezenta lucrare: 1— teorema 1; 2—L3; 3— teorema 2; 4— teorema 4; 5—L8; 6—L9; 7— teorema 5. Axiomele L care nu fac parte din axiomele Hilbert, sînt teoreme în raport cu aceste axiome, evident în interpretarea precizată mai sus.

5° SIMPLEX Σ^3

S-a demonstrat că un spațiu de incidență tridimensional S^3 conține cel puțin patru puncte necoplanare (teorema 5).

Vom denumi simplex tridimensional sau simplex Σ^3 un model de spațiu de incidență S^3 care conține patru puncte $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0$ organizate după cum s-a arătat la punctul 4°; se poate spune că simplexul Σ^3 este un spațiu de incidență tridimensional minimal.

Punctele $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0$ se numesc vîrfurile simplexului.

Dreptele $A_1^1, A_2^1, \ldots, A_6^1$ se numesc muchiile simplexului.

Planele $A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2$ se numesc fețele simplexului.

Se notează cu :

$N^{0,3}$ numărul de vîrfuri ale simplexului Σ^3.

$N^{1,3}$ numărul de muchii ale simplexului Σ^3.

$N^{2,3}$ numărul de fețe ale simplexului Σ^3

sau, prescurtat, $N^{i,3}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ — cu relația $N^{3,3} = 1$.

S-a arătat că :

$$N^{0,3} = 4\,;\ N^{1,3} = 6\,;\ N^{2,3} = 4.$$

Se verifică existența relației :

$$N^{0,3} - N^{1,3} + N^{2,3} - N^{3,3} = 1 \tag{I.1}$$

care este echivalentă formulei lui Euler aplicată simplexului Σ^3.

Se pot realiza diferite modele de spații de incidență minimale S^3 sau de simplexe Σ^3 ca de exemplu :

Să considerăm clasele de resturi modulo 4 ; aceste clase conțin numerele de forma $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$ (k întreg).

Notăm aceste clase cu :

(C_0^0) pentru $4k$.
(C_1^0) pentru $4k + 1$.
(C_2^0) pentru $4k + 2$.
(C_3^0) pentru $4k + 3$.

Cu ajutorul claselor (C_0^0), (C_1^0), (C_2^0), (C_3^0) definim clasele

$$(C_0^1) = (C_0^0) \cup (C_1^0)$$
$$(C_1^1) = (C_0^0) \cup (C_2^0)$$
$$(C_2^1) = (C_0^0) \cup (C_3^0)$$
$$(C_3^1) = (C_1^0) \cup (C_2^0)$$
$$(C_4^1) = (C_1^0) \cup (C_3^0)$$
$$(C_5^1) = (C_2^0) \cup (C_3^0)$$

și încă :

$$(C_0^2) = (C_0^0) \cup (C_1^0) \cup (C_2^0)$$
$$(C_1^2) = (C_0^0) \cup (C_1^0) \cup (C_3^0)$$
$$(C_2^2) = (C_0^0) \cup (C_2^0) \cup (C_3^0)$$
$$(C_3^2) = (C_1^0) \cup (C_2^0) \cup (C_3^0).$$

Se pot organiza clasele (C) definite mai sus astfel :

Denumim clasa (C_i^0) ca punct A_i^0 $(i = 0, 1, 2, 3)$, clasa (C_i^1) ca dreaptă A_i^1 $(i = 0, 1, 2, \ldots, 6)$, clasa (C_i^2) ca plan A_i^2 $(i = 0, 1, 2, 3)$. Realizăm astfel un model de spațiu de incidență tridimensional minimal sau un model de simplex Σ^3. Se verifică fără dificultate că axiomele L1—L9 sînt realizate pe modelul de mai sus.

6° SPAŢII DE INCIDENŢĂ S^3 OMOGENE ŞI NEOMOGENE

Să considerăm un spaţiu de incidenţă tridimensional S^3 şi fie A_i^1 $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ toate dreptele lui S^3 şi A_i^2 $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ toate planele lui S^3.

Dacă fiecare dreaptă A_i^1 din S^3 conţine acelaşi număr de puncte şi fiecare plan A_i^2 din S^3 conţine acelaşi număr de puncte şi drepte, se spune că spaţiul S^3 este omogen ; în caz contrar spaţiul S^3 este neomogen.

Se verifică fără dificultate că simplexul Σ^3 este un spaţiu de incidenţă omogen.

Se pot construi fără dificultate modele de spaţii S^3 neomogene ca de exemplu :

— se aleg ca puncte ale spaţiului :

$$A_0^0,\ A_1^0,\ A_2^0,\ A_3^0,\ A_4^0. ;$$

— se aleg ca drepte ale spaţiului :

$$(A_0^0, A_1^0, A_2^0), (A_0^0, A_3^0), (A_0^0, A_4^0), (A_1^0, A_3^0), (A_2^0, A_3^0), (A_1^0, A_4^0), (A_2^0, A_4^0), (A_3^0, A_4^0) ;$$

— se aleg ca plane ale spaţiului :

$$(A_0^0, A_1^0, A_2^0, A_4^0), (A_0^0, A_3^0, A_4^0), (A_1^0, A_3^0, A_4^0), (A_2^0, A_3^0, A_4^0), (A_0^0, A_1^0, A_2^0, A_3^0).$$

Modelul de mai sus este un spaţiu de incidenţă S^3 neomogen care conţine 5 puncte, 8 drepte şi 5 plane.

7° SPAŢII DE INCIDENŢĂ TRIDIMENSIONALE, OMOGENE, DE PUTERE $p : S_p^3$

Se înţelege prin spaţiu de incidenţă tridimensional, omogen, de putere p, notat cu S_p^3, un spaţiu tridimensional omogen în care fiecare dreaptă A_i^1 $(i = 0,1,2, \ldots)$ conţine $p + 1$ puncte (p fiind un întreg mai mare sau cel puţin egal cu 1) ; S_p^3 fiind un spaţiu minimal în sensul că el conţine minimum de puncte cu ajutorul cărora se pot construi dreptele spaţiului astfel încît fiecare dreaptă să conţină $p + 1$ puncte.

Să notăm cu :

$N_p^{0,1}$ numărul punctelor unei drepte din S_p^3.

$N_p^{0,2}$ numărul punctelor unui plan din S_p^3.

$N_p^{0,3}$ numărul punctelor spaţiului S_p^3.

$N_p^{1,2}$ numărul dreptelor unui plan din S_p^3.

$N_p^{1,3}$ numărul dreptelor spaţiului S_p^3.

$N_p^{2,3}$ numărul planelor spaţiului S_p^3.

Prin definiţie avem:

$$N_p^{0,1} = p + 1. \tag{I.2}$$

În S_p^3 există o dreaptă A_0^1 (vezi teorema 6); pe dreapta A_0^1 se găsesc $p + 1$ puncte $A_0^0, A_1^0, A_2^0, \dots, A_p^0$. Există un punct $A_{p+1}^0 \notin A_0^1$ (vezi teorema 5′) şi planul A_0^2 astfel încît $A_{p+1}^0 \in A_0^2$ şi $A_0^1 \subset A_0^2$. În planul A_0^2 sînt conţinute dreptele: A_0^1 şi $A_{p+1}^0 A_0^0, A_{p+1}^0 A_1^0, \dots, A_{p+1}^0 A_p^0$; deoarece fiecare din aceste drepte conţine $p + 1$ puncte, rezultă că numărul total de puncte din plan este $(p + 1)(p - 1) + (p + 1) + 1 = = p^2 + p + 1 = \dfrac{p^3 - 1}{p - 1}$ puncte; deci obţinem formula:

$$N_p^{0,2} = \frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1. \tag{I.3}$$

Se arată mai jos, prin unele modele, cum se pot construi, cu aceste puncte, drepte coplanare astfel încît fiecare dreaptă să conţină $p + 1$ puncte, pentru $p = 2$ şi $p = 3$.

Prin fiecare punct al planului A_0^2 vor trece $p + 1$ drepte în acest plan. Să considerăm punctele $A_0^0, A_1^0, \dots, A_p^0$ ale dreptei A_0^1. Prin fiecare dintre punctele acestei drepte vor trece, în afară de dreapta A_0^1, încă p drepte şi deci dreptele din planul A_0^2 sînt în număr de $p(p + 1) + 1 = = p^2 + p + 1 = \dfrac{p^3 - 1}{p - 1}$; am obţinut deci formula:

$$N_p^{1,2} = \frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1. \tag{I.4}$$

Există un punct $A_k^0 \in S_p^3$ şi $A_k^0 \notin A_0^2$ conform teoremei 5″; prin punctul A_k^0 şi prin fiecare punct al planului A_0^2 trece cîte o dreaptă; rezultă deci că prin A_k^0 trec $N_p^{0,2}$ drepte. Pe fiecare dintre aceste drepte se găsesc p puncte în afară de A_k^0; rezultă deci că numărul de puncte din S_p^3 este

$N_p^{0,3} = p\, N_p^{0,2} + 1$ şi înlocuind pe $N_p^{0,2}$ cu valoarea din formula (I.3) se obţine

$$N_p^{0,3} = \frac{p^4 - 1}{p - 1} = p^3 + p^2 + p + 1. \tag{I.5}$$

Se poate arăta fără dificultate că se pot construi cu $N_p^{0,3} = \dfrac{p^4 - 1}{p - 1}$ puncte, drepte astfel încît fiecare dreaptă să conţină $p + 1$ puncte. Prin fiecare punct din spaţiu vor trece $N_p^{0,2}$ drepte. Prin fiecare punct al planului A_0^2 trecînd $N_p^{0,2}$ drepte rezultă că, în afara dreptelor conţinute în A_0^2, vor trece, prin fiecare punct al planului A_0^2, drepte în număr de $N_p^{0,2} - (p + 1) = p^2$. Deci în S_p^3 vor fi drepte în număr de $N_p^{1,3} = p^2 \cdot N_p^{0,2} +$

$+ N_p^{1,2}$; înlocuind pe $N_p^{0,2}$ şi $N_p^{1,2}$ cu valorile lor din formulele (I.3) şi (I.4) obţinem :

$$N^{1,3} = \frac{p^5 + p^3 - p^2 - 1}{p - 1} = (p^2 + 1)(p^2 + p + 1) =$$

$$= \frac{(p^4 - 1)(p^3 - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1)}. \tag{I.6}$$

Să considerăm dreapta $A_k^0 A_0^0$; prin această dreaptă vor trece $p + 1$ plane, determinate de $A_k^0 A_0^0$ şi de toate dreptele planului A_0^2, ce trec prin A_0^0. Rezultă că prin fiecare dreaptă din S_p^3 trec $p - 1$ plane. Prin fiecare dreaptă din A_0^2 vor trece, în afară de planul A_0^2, p plane. Deoarece în A_0^2 sînt $\frac{p^3 - 1}{p - 1}$ drepte, rezultă că numărul total de plane din S_p^3 este :

$$N_p^{2,3} = p \frac{p^3 - 1}{p - 1} = 1,$$

sau

$$N_p^{2,3} = \frac{p^4 - 1}{p - 1} = p^3 + p^2 + p + 1. \tag{I.7}$$

Pentru $p = 1$ se obţin numerele respective deduse pentru simplexul Σ^3.

Din relaţiile stabilite mai sus rezultă :

$$N_p^{0,2} = N_p^{1,2} \tag{I.8}$$

$$N_p^{0,3} = N_p^{2,3}. \tag{I.9}$$

Formulele (I.8) şi (I.9) exprimă următoarele relaţii „de simetrie" :

— Numărul punctelor din plan este egal cu numărul dreptelor din plan.

— Numărul punctelor din spaţiul S_p^3 este egal cu numărul planelor din S_p^3.

În figura 1 este redat modelul unui plan A^2 corespunzător puterii $p = 2$; se disting punctele A_0^0, A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0, A_5^0, A_6^0 şi dreptele $A_0^0 A_1^0 A_2^0$, $A_0^0 A_3^0 A_4^0$, $A_0^0 A_5^0 A_6^0$, $A_1^0 A_3^0 A_6^0$, $A_1^0 A_4^0 A_5^0$, $A_2^0 A_3^0 A_5^0$, $A_2^0 A_4^0 A_6^0$.

Se redă în continuare un model de spaţiu A_2^3, construit cu ajutorul claselor de resturi modulo 15. Acest model conţine :

$$N_2^{0,3} = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15 \text{ puncte},$$

$$N_2^{1,3} = \frac{(2^4 - 1)(2^3 - 1)}{(2 - 1)(2^2 - 1)} = 35 \text{ drepte},$$

$$N^{2,3} = 15 \text{ plane}.$$

Fiecare dreaptă conține 3 puncte, fiecare plan conține cîte 7 puncte și 7 drepte.

Să considerăm deci clasele de resturi modulo 15; notăm cu $C_i = 15\,k + i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, 14)$ clasa i.

Denumim aceste clase puncte ale spațiului S_2^3 și notăm:

$$A_i^0 = 15\,k + i \qquad (i = 0, 1, 2 \dots 14),$$

$$N \text{ mulțimea } 0,\ 1,\ 2,\ \dots 14$$

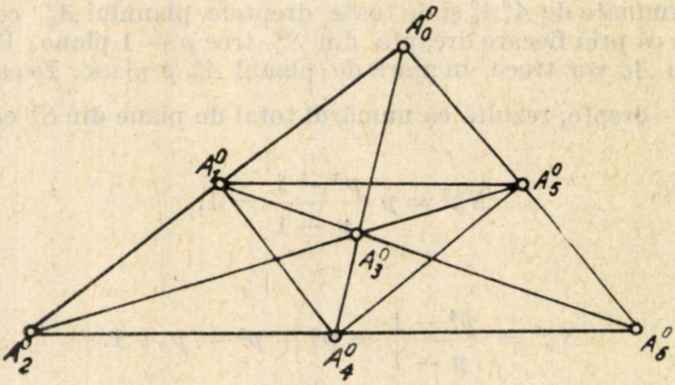


Fig. 1

și

$$A_i^0 A_j^0 \dots A_t^0 \text{ reuniunea}: (15\,k + i) \cup (15\,k + j) \cup \dots \cup (15\,k + t),$$

unde

$i, j, \dots, t$ sînt diferiți între ei și $i, j, \dots, t \in N$.

Spațiul S_2^3 conține următoarele 35 de drepte:

$A_0^0A_1^0A_2^0$, $A_0^0A_3^0A_4^0$, $A_0^0A_5^0A_6^0$, $A_0^0A_7^0A_8^0$, $A_0^0A_9^0A_{10}^0$, $A_0^0A_{11}^0A_{14}^0$,
$A_0^0A_{12}^0A_{13}^0$, $A_1^0A_3^0A_6^0$, $A_1^0A_4^0A_5^0$, $A_1^0A_7^0A_9^0$, $A_1^0A_8^0A_{10}^0$, $A_1^0A_{12}^0A_{14}^0$,
$A_1^0A_{11}^0A_{13}^0$, $A_2^0A_3^0A_5^0$, $A_2^0A_4^0A_6^0$, $A_2^0A_7^0A_{10}^0$, $A_2^0A_8^0A_9^0$, $A_2^0A_{11}^0A_{12}^0$,
$A_2^0A_{13}^0A_{14}^0$, $A_3^0A_7^0A_{14}^0$, $A_3^0A_8^0A_{11}^0$, $A_3^0A_9^0A_{12}^0$, $A_3^0A_{10}^0A_{13}^0$, $A_4^0A_7^0A_{11}^0$,
$A_4^0A_8^0A_{14}^0$, $A_4^0A_9^0A_{13}^0$, $A_4^0A_{10}^0A_{12}^0$, $A_5^0A_7^0A_{13}^0$, $A_5^0A_8^0A_{12}^0$, $A_5^0A_9^0A_{11}^0$,
$A_5^0A_{10}^0A_{14}^0$, $A_6^0A_7^0A_{12}^0$, $A_6^0A_8^0A_{13}^0$, $A_6^0A_9^0A_{14}^0$, $A_6^0A_{10}^0A_{11}^0$.

Spațiul S_2^3 conține următoarele 15 plane:

$A_0^0A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0A_5^0A_6^0$, $A_0^0A_1^0A_2^0A_7^0A_8^0A_9^0A_{10}^0$, $A_0^0A_1^0A_2^0A_{11}^0A_{12}^0A_{13}^0A_{14}^0$,
$A_0^0A_3^0A_4^0A_7^0A_8^0A_{11}^0A_{14}^0$, $A_0^0A_3^0A_4^0A_9^0A_{10}^0A_{12}^0A_{13}^0$, $A_0^0A_5^0A_6^0A_7^0A_8^0A_{12}^0A_{13}^0$,

$$A_0^0A_5^0A_6^0A_9^0A_{10}^0A_{11}^0A_{14}^0,\quad A_1^0A_3^0A_6^0A_7^0A_9^0A_{12}^0A_{14}^0,\quad A_1^0A_3^0A_6^0A_8^0A_{10}^0A_{11}^0A_{13}^0,$$

$$A_1^0A_4^0A_5^0A_7^0A_9^0A_{11}^0A_{13}^0,\quad A_1^0A_4^0A_5^0A_8^0A_{10}^0A_{12}^0A_{14}^0,\quad A_2^0A_3^0A_5^0A_7^0A_{10}^0A_{13}^0A_{14}^0,$$

$$A_2^0A_4^0A_6^0A_7^0A_{10}^0A_{11}^0A_{12}^0,\quad A_2^0A_3^0A_5^0A_8^0A_9^0A_{11}^0A_{12}^0,\quad A_2^0A_4^0A_6^0A_8^0A_9^0A_{13}^0A_{14}^0.$$

Pentru $p = 3$, spaţiul S_3^3 are $N_3^{0,3} = 40$ puncte, $N_3^{1,3} = 130$ drepte şi $N_3^{2,3} = 40$ plane. Se notează punctele cu A_i^0 $(i = 1, 2, 3, \ldots, 40)$; spaţiul S_3^3 conţine următoarele 40 plane:

$$A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0A_5^0A_6^0A_7^0A_8^0A_9^0A_{10}^0A_{11}^0A_{12}^0A_{13}^0,$$

$$A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0A_{14}^0A_{15}^0A_{16}^0A_{17}^0A_{20}^0A_{18}^0A_{22}^0A_{19}^0A_{21}^0,$$

$$A_1^0A_5^0A_6^0A_7^0A_{14}^0A_{15}^0A_{16}^0A_{23}^0A_{26}^0A_{24}^0A_{28}^0A_{25}^0A_{27}^0,$$

$$A_1^0A_8^0A_9^0A_{10}^0A_{14}^0A_{15}^0A_{16}^0A_{29}^0A_{32}^0A_{30}^0A_{34}^0A_{31}^0A_{33}^0,$$

$$A_1^0A_{11}^0A_{12}^0A_{13}^0A_{14}^0A_{15}^0A_{16}^0A_{35}^0A_{38}^0A_{36}^0A_{40}^0A_{37}^0A_{39}^0,$$

$$A_2^0A_5^0A_8^0A_{11}^0A_{14}^0A_{17}^0A_{20}^0A_{23}^0A_{26}^0A_{29}^0A_{32}^0A_{35}^0A_{38}^0,$$

$$A_2^0A_6^0A_9^0A_{12}^0A_{14}^0A_{17}^0A_{20}^0A_{24}^0A_{28}^0A_{30}^0A_{34}^0A_{36}^0A_{40}^0,$$

$$A_2^0A_7^0A_{10}^0A_{13}^0A_{14}^0A_{17}^0A_{20}^0A_{25}^0A_{27}^0A_{31}^0A_{33}^0A_{37}^0A_{39}^0,$$

$$A_3^0A_5^0A_9^0A_{13}^0A_{14}^0A_{18}^0A_{22}^0A_{23}^0A_{26}^0A_{30}^0A_{34}^0A_{37}^0A_{39}^0,$$

$$A_3^0A_6^0A_{10}^0A_{11}^0A_{14}^0A_{18}^0A_{22}^0A_{24}^0A_{28}^0A_{31}^0A_{33}^0A_{35}^0A_{38}^0,$$

$$A_3^0A_7^0A_8^0A_{12}^0A_{14}^0A_{18}^0A_{22}^0A_{25}^0A_{27}^0A_{29}^0A_{32}^0A_{36}^0A_{40}^0,$$

$$A_4^0A_5^0A_{10}^0A_{12}^0A_{14}^0A_{19}^0A_{21}^0A_{23}^0A_{26}^0A_{31}^0A_{33}^0A_{36}^0A_{40}^0,$$

$$A_4^0A_6^0A_8^0A_{13}^0A_{14}^0A_{19}^0A_{21}^0A_{24}^0A_{28}^0A_{29}^0A_{32}^0A_{37}^0A_{39}^0,$$

$$A_4^0A_7^0A_9^0A_{11}^0A_{14}^0A_{19}^0A_{21}^0A_{25}^0A_{27}^0A_{30}^0A_{34}^0A_{35}^0A_{38}^0,$$

$$A_2^0A_5^0A_8^0A_{11}^0A_{15}^0A_{18}^0A_{21}^0A_{24}^0A_{27}^0A_{30}^0A_{33}^0A_{36}^0A_{39}^0,$$

$$A_2^0A_6^0A_9^0A_{12}^0A_{15}^0A_{18}^0A_{21}^0A_{25}^0A_{26}^0A_{31}^0A_{32}^0A_{37}^0A_{38}^0,$$

$$A_2^0A_7^0A_{10}^0A_{13}^0A_{15}^0A_{18}^0A_{21}^0A_{23}^0A_{28}^0A_{29}^0A_{34}^0A_{35}^0A_{40}^0,$$

$$A_3^0A_5^0A_9^0A_{13}^0A_{15}^0A_{19}^0A_{20}^0A_{24}^0A_{27}^0A_{31}^0A_{32}^0A_{35}^0A_{40}^0,$$

$$A_3^0A_6^0A_{10}^0A_{11}^0A_{15}^0A_{19}^0A_{20}^0A_{25}^0A_{26}^0A_{29}^0A_{34}^0A_{36}^0A_{39}^0,$$

$$A_3^0A_7^0A_8^0A_{12}^0A_{15}^0A_{19}^0A_{20}^0A_{23}^0A_{28}^0A_{30}^0A_{33}^0A_{37}^0A_{38}^0,$$

$$A_4^0A_5^0A_{10}^0A_{12}^0A_{15}^0A_{17}^0A_{22}^0A_{24}^0A_{27}^0A_{29}^0A_{34}^0A_{37}^0A_{38}^0,$$

$$A_4^0A_6^0A_8^0A_{13}^0A_{15}^0A_{17}^0A_{22}^0A_{25}^0A_{26}^0A_{30}^0A_{33}^0A_{35}^0A_{40}^0,$$

$$A_4^0A_7^0A_9^0A_{11}^0A_{15}^0A_{17}^0A_{22}^0A_{23}^0A_{28}^0A_{31}^0A_{32}^0A_{36}^0A_{39}^0,$$

$$A_2^0A_5^0A_8^0A_{11}^0A_{16}^0A_{19}^0A_{22}^0A_{25}^0A_{28}^0A_{31}^0A_{34}^0A_{37}^0A_{40}^0,$$

$$A_2^0A_6^0A_9^0A_{12}^0A_{16}^0A_{19}^0A_{22}^0A_{23}^0A_{27}^0A_{29}^0A_{33}^0A_{35}^0A_{39}^0,$$

$$A_2^0A_7^0A_{10}^0A_{13}^0A_{16}^0A_{19}^0A_{22}^0A_{24}^0A_{26}^0A_{30}^0A_{32}^0A_{36}^0A_{38}^0,$$

$$A_3^0A_5^0A_9^0A_{13}^0A_{16}^0A_{17}^0A_{21}^0A_{25}^0A_{28}^0A_{29}^0A_{33}^0A_{36}^0A_{38}^0,$$

$$A_3^0A_6^0A_{10}^0A_{11}^0A_{16}^0A_{17}^0A_{21}^0A_{23}^0A_{27}^0A_{30}^0A_{32}^0A_{37}^0A_{40}^0,$$

$$A_3^0A_7^0A_8^0A_{12}^0A_{16}^0A_{17}^0A_{21}^0A_{24}^0A_{26}^0A_{31}^0A_{34}^0A_{35}^0A_{39}^0,$$

$$A_4^0A_5^0A_{10}^0A_{12}^0A_{16}^0A_{18}^0A_{20}^0A_{25}^0A_{28}^0A_{30}^0A_{32}^0A_{35}^0A_{39}^0,$$

$$A_4^0A_6^0A_8^0A_{13}^0A_{16}^0A_{18}^0A_{20}^0A_{23}^0A_{27}^0A_{31}^0A_{34}^0A_{36}^0A_{38}^0,$$

$$A_4^0A_7^0A_9^0A_{11}^0A_{16}^0A_{18}^0A_{20}^0A_{24}^0A_{26}^0A_{29}^0A_{33}^0A_{37}^0A_{40}^0,$$

$$A_1^0A_5^0A_6^0A_7^0A_{17}^0A_{18}^0A_{19}^0A_{29}^0A_{38}^0A_{30}^0A_{40}^0A_{31}^0A_{39}^0,$$

$$A_1^0A_8^0A_9^0A_{10}^0A_{17}^0A_{18}^0A_{19}^0A_{35}^0A_{26}^0A_{36}^0A_{28}^0A_{37}^0A_{27}^0,$$

$$A_1^0A_{11}^0A_{12}^0A_{13}^0A_{17}^0A_{18}^0A_{19}^0A_{23}^0A_{32}^0A_{24}^0A_{34}^0A_{25}^0A_{33}^0,$$

$$A_1^0A_5^0A_6^0A_7^0A_{20}^0A_{21}^0A_{22}^0A_{35}^0A_{32}^0A_{36}^0A_{34}^0A_{37}^0A_{33}^0,$$

$$A_1^0A_8^0A_9^0A_{10}^0A_{20}^0A_{21}^0A_{22}^0A_{23}^0A_{38}^0A_{24}^0A_{40}^0A_{25}^0A_{39}^0,$$

$$A_1^0A_{11}^0A_{12}^0A_{13}^0A_{20}^0A_{21}^0A_{22}^0A_{29}^0A_{26}^0A_{30}^0A_{28}^0A_{31}^0A_{27}^0,$$

$$A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0A_{23}^0A_{24}^0A_{25}^0A_{29}^0A_{35}^0A_{30}^0A_{37}^0A_{31}^0A_{36}^0,$$

$$A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0A_{26}^0A_{27}^0A_{28}^0A_{38}^0A_{32}^0A_{39}^0A_{34}^0A_{40}^0A_{33}^0.$$

Cele 130 de drepte ale spațiului S_3^3 pot fi scrise fără dificultate, ele rezultînd din intersecțiile a cîte două plane din cele 40 plane de mai sus.

8° IZOMORFISM

Două spații de incidență tridimensionale (S^3) și $(S^3)'$, se numesc izomorfe dacă între punctele spațiului (S^3) și punctele spațiului $(S^3)'$ se poate stabili o corespondență biunivocă astfel încît: punctului $(A_i^0)(S^3)$ corespunzîndu-i punctul $(A_i^0)'(S^3)'$, atunci dreptei $A_i^0A_j^0$ $(i \neq j)$ să-i corespundă dreapta $(A_i^0)'$ $(A_j^0)'$ iar planului $A_i^0A_j^0A_l^0$ să-i corespundă planul $(A_i^0)'$ $(A_j^0)'$ $(A_l^0)'$.

Se poate verifica fără dificultate că toate spațiile de incidență tridimensionale omogene de putere p sînt izomorfe între ele. Rezultă deci că orice spațiu de incidență S_p^3 este izomorf cu spațiul de incidență tridimensional omogen de putere p, realizat cu clasele de resturi modulo $(p^3 + p^2 + p + 1)$.

Capitolul II

SPAȚII DE INCIDENȚĂ S^4

1° GENERALITĂȚI

O mulțime de elemente denumite puncte şi organizate conform axiomelor de legătură L′1 — L′13 se numeşte spațiu de incidență S^4, sau spațiu de incidență patrudimensional S^4.

În mulțimea S^4 sînt considerate conform axiomelor L′1 — L′13 submulțimi denumite drepte, plane şi tridimensionale.

Se notează cu A^0, B^0... punctele, cu A^1, B^1 ... dreptele, cu A^2,B^2... planele şi cu A^3, B^3 ... tridimensionalele. Pentru relațiile de apartenență, şi conținere se acceptă exprimările conform indicațiilor din Cap. I, punctul 1°.

Spațiul S^4 este prin definiție nevid $S^4 \neq \emptyset$.

2° AXIOME DE LEGĂTURĂ L′

L′1. *pentru oricare punct* A^0 *există o dreaptă* A^1 *cu relația* $A^0 \in A^1$ — *și evident* $[A^0] \subset A^1$.

L′2. *Pentru oricare punct* A^0 *și dreaptă* A^1 *există relația* $A^1 \not\subset [A^0]$ [5])

L′3. *Pentru oricare puncte* A^0 *și* B^0 $(A^0 \neq B^0)$ *există o dreaptă unică* A^1 *cu relația* : $A^0 \in A^1$ *și* $B^0 \in A^1$ — *și evident* $(A^0, B^0) \subset A^1$.

Evident, L′3 implică oricare dintre relațiile :

$$(A^0 \neq B^0 \text{ şi } A^0,\ B^0 \in A^1) \Rightarrow (A^1 \text{ unică})$$

sau

$$(A^0 \neq B^0;\ A^0, B^0 \in A^1 \text{ şi } A^0, B^0 \in B^1) \Rightarrow (A^1 = B^1)$$

sau

$$(A^0 \neq B^0 \text{ şi } A^0,\ B^0 \in A^1 \cap B^1) \Rightarrow (A^1 = B^1).$$

Se justifică astfel scrierea A^0B^0 pentru dreaptă [6]) și expresia : dreapta este definită de punctele A^0 şi B^0. Din L′3 rezultă că oricare două puncte sînt coliniare (pentru $A^0 = B^0$ coliniaritatea este implicată de L′1).

L′4. *Pentru oricare dreaptă* A^1 *există un plan* A^2 *cu relația* $A^1 \subset A^2$.

L′5. *Pentru oricare dreaptă* A^1 *și plan* A^2 *există relația* $A^2 \not\subset A^1$.

L′6. *Pentru oricare punct* A^0 *și dreaptă* A^1 *cu relația* $A^0 \notin A^1$ *există un plan unic* A^2 *cu relația* $(A^0 \in A^2$ *și* $A^1 \subset A^2)$.

---

[5]) Se va accepta în cele ce urmează notația A^0 în loc de $[A^0]$, în cazul cînd această notație nu duce la confuzii.

[6]) Se precizează că ,,dreapta A^0B^0'' implică $A^0 \neq B^0$.

Axioma L′6 implică oricare dintre relațiile :

$(A^0 \notin A^1;\quad A^0 \in A^2;\ A^1 \subset A^2) \Rightarrow (A^2 \text{ unic}).$

$(A^0 \notin A^1;\quad A^0 \in A^2;\ A^1 \subset A^2;\quad A^0 \in B^2;\quad A^1 \subset B^2) \Rightarrow (A^2 = B^2).$

$(A^0 \notin A^1;\quad A^0 \in A^2 \cap B^2;\ A^1 \subset A^2 \cap B^2) \Rightarrow (A^2 = B^2).$

Din L′6 rezultă că oricare punct A^0 și dreaptă A^1 sînt coplanare (dacă $A^0 \in A^1$ coplanaritatea este implicată de L′4).

L′7. *Există relația* :

$$A^0 \neq B^0;\ A^0,\ B^0 \in A^1;\ A^0,\ B^0 \in A^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2).$$

Această relație se poate scrie și sub forma echivalentă :

$$(A^0 \neq B^0 \text{ și } A^0,\ B^0 \in A^1 \cap A^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2).$$

L′8. *Pentru oricare plan A^2 există un tridimensional A^3 cu relația $A^2 \subset A^3$.*

L′9. *Pentru oricare plan A^2 și tridimensional A^3 există relația $A^3 \not\subset A^2$.*

L′10. *Pentru oricare punct A^0 și plan A^2 cu relația $A^0 \notin A^2$ există un tridimensional unic A^3 cu relația* : $(A^0 \in A^3$ *și* $A^2 \subset A^3)$.

Axioma L′10 implică oricare dintre relațiile :

$(A^0 \notin A^2;\quad A^0 \in A^3;\quad A^2 \subset A^3) \Rightarrow (A^3 \text{ unic}),$

$(A^0 \notin A^2;\quad A^0 \in A^3;\quad A^2 \subset A^3;\quad A^0 \in B^3;\quad A^2 \subset B^3) \Rightarrow (A^3 = B^3),$

$(A^0 \notin A^2;\quad A^0 \in A^3 \cap B^3;\quad A^2 \subset A^3 \cap B^3) \Rightarrow (A^3 = B^2).$

L′11. Dacă A^0, B^0, C^0 sînt trei puncte necoliniare, atunci :

$$(A^0, B^0,\ C^0 \in A^2 \text{ și } A^0,\ B^0, C^0 \in A^3) \Rightarrow (A^2 \subset A^3).$$

Relația de mai sus se poate scrie și sub forma echivalentă :

$$(A^0 \notin B^0C^0 \text{ și } A^0, B^0, C^0 \in A^2 \cap A^3) \Rightarrow (A^2 \subset A^3).$$

L′12. Pentru oricare tridimensional A^3 există relația $S^4 \not\subset A^3$.

L′13. Există relația :

$(A^0 \in A^2 \text{ și } A^0 \in A^3) \Rightarrow (\text{există } B^0 \neq A^0 \text{ și } B^0 \in A^2;\ B^0 \in A^3).$

Această relație se mai poate scrie și sub forma echivalentă :

$$(A^0 \in A^2 \cap A^3) \Rightarrow (\text{există } B^0 \neq A^0 \text{ și } B^0 \in A^2 \cap A^3).$$

3° TEOREME REZULTÎND DIN AXIOMELE DE LEGĂTURĂ L′

Deoarece axiomele L′1, L′2, . . ., L′7 sînt identice cu axiomele L1, L2, . . ., L7 și L′9 ≡ L8, rezultă că teoremele din Cap. I, punctul 3°, bazate pe aceste axiome sînt valabile pentru S^4, adică teoremele 1—13 ; se va arăta în cele ce urmează că axioma L9 este teoremă în cadrul sistemului L′.

S-a demonstrat că orice tridimensional A^3 conţine patru puncte necoplanare; pentru puncte, drepte, plane aparţinînd aceluiaşi tridimensional vom folosi expresia: cotridimensionale.

Teoremele 1—13 rămîn valabile.

TEOREMA 15. *Pentru oricare patru puncte diferite* A^0, B^0, C^0, D^0 *există un tridimensional* A^3 *care le conţine.*

Demonstraţie. Există un plan A^2 astfel ca A^0, B^0, $C^0 \in A^2$ (conform teoremei 4).

Se pot ivi următoarele cazuri:

α) $D^0 \in A^2$. Există un tridimensional A^3 astfel ca $A^2 \subset A^3$ (conform axiomei L′8). Avem

$$(A^0,\ B^0,\ C^0,\ D^0 \in A^2 \text{ și } A^2 \subset A^3) \Rightarrow (A^0,\ B^0,\ C^0,\ D^0 \in A^3).$$

β) $D^0 \notin A^2$. Există un tridimensional unic A^3 astfel ca: ($D^0 \in A^3$ şi $A^2 \subset A^3$). Dar (A^0, B^0, $C^0 \in A^2$ şi $A^2 \subset A^3$) $\Rightarrow$ (A^0, B^0, $C^0 \in A^3$) şi deci A^0, B^0, C^0, $D^0 \in A^3$, c.c.t.d.

Din teorema 15 rezultă:

TEOREMA 15′. *Pentru oricare punct* A^0 *există* A^3 *cu relaţia*:

$$A^0 \in A^3.$$

TEOREMA 15″. *Pentru oricare două puncte* A^0, B^0, *există* A^3 *cu relaţia* A^0, $B^0 \in A^3$.

TEOREMA 15‴. *Pentru oricare trei puncte* A^0, B^0 C^0, *există* A^3 *cu relaţia* A^0, B^0, $C^0 \in A^3$.

TEOREMA 16. *Pentru oricare patru puncte necoplanare* [7] A^0, B^0, C^0, D *există un tridimensional unic* A^3 *cu relaţia* (A^0, B^0, C^0, $D^0 \in A^3$).

Demonstraţie. (A^0, B^0, C^0 necoliniare) $\Rightarrow$ (există un plan unic A^2 cu relaţia A^0, B^0, $C^0 \in A^2$) conform teoremei 4. $D^0 \notin A^2$ şi deci există un tridimensional unic A^3 cu relaţia ($D^0 \in A^3$ şi $A^2 \subset A^3$) conform axiomei L′10. Există deci un tridimensional unic A^3 cu relaţia A^0, B^0, C^0, $D^0 \in A^3$.

Teorema 16 justifică expresia „tridimensionalul determinat de punctele A^0, B^0, C^0, D^0" sau „tridimensionalul $A^0B^0C^0D^0$".

De asemenea:

TEOREMA 16′. *Pentru oricare dreaptă* A^1 *există un tridimensional* A^3 *cu relaţia* $A^1 \subset A^3$.

TEOREMA 17. *În spaţiul* S^4 *există cinci puncte* A^0, B^0, C^0, D^0, E^0 *care nu sînt cotridimensionale.*

Demonstraţie. Prin definiţie $S^4 \neq \emptyset$ şi deci există un punct $A^0 \in S^4$. Conform axiomei L′1 există o dreaptă A^1 astfel ca $A^0 \in A^1$ şi conform teoremei există două puncte A^0, $B^0 \in A^1$ ($A^0 \neq B^0$); conform axiomei L′4 există un plan A^2 cu relaţia $A^1 \subset A^2$ şi conform teoremei 2 există un punct $C^0 \notin A^1$ şi $C^0 \in A^2$. Există un tridimensional A^3 cu relaţia $A^2 \subset A^3$ conform axiomei L′8 şi conform teoremei 5 există un punct $D^0 \in A^3$ şi $D^0 \notin A^2$. Să arătăm că există un punct $E^0 \notin A^3$; într-adevăr, dacă pentru oricare $E^0 \in S^4$ avem $E^0 \in A^3$, ar rezulta $S^4 \subset A^3$ ceea ce contrazice axiomei L'12, şi deci există în S^4 cel puţin cinci puncte care nu sînt cotridimensionale.

---

[7] (A^0, B^0, C^0, D^0 necoplanare) $\Rightarrow$ (A^0, B^0, C^0, D^0 sînt distincte) şi (oricare trei puncte din cele patru nu sînt coliniare).

Din teorema 17 rezultă fără dificultate:

TEOREMA 17'. *Pentru oricare tridimensional* A^3 *există un punct* A^0 *cu relaţia* $A^0 \notin A^3$.

Existenţa punctelor A^0, B^0, C^0, D^0, E^0 care nu sînt cotridimensionale conduce la teoremele:

TEOREMA 18. *În spaţiul* S^4 *există cel puţin 10 drepte distincte, 10 plane distincte şi 5 tridimensionale distincte.*

Teorema 18 este consecinţa existenţei în S^4 a punctelor necotridimensionale A^0, B^0, C^0, D^0, E^0. Există în S^4 deci:

— dreptele: A^0B^0, A^0C^0, A^0D^0, A^0E^0, B^0C^0, B^0D^0, B^0E^0, C^0D^0, C^0E^0, D^0E^0.

— planele: $A^0B^0C^0$, $A^0B^0D^0$, $A^0B^0E^0$, $A^0C^0D^0$, $A^0C^0E^0$, $A^0D^0E^0$, $B^0C^0D^0$, $B^0C^0E^0$, $B^0D^0E^0$, $C^0D^0E^0$.

— tridimensionalele: $A^0B^0C^0D^0$, $A^0B^0C^0E^0$, $A^0B^0D^0E^0$, $A^0C^0D^0E^0$, $B^0C^0D^0E^0$.

TEOREMA 19. *Există relaţia* $(A^3 \subset B^3) \Rightarrow (A^3 = B^3)$.

Există patru puncte A^0, B^0, C^0, D^0 necoplanare cu relaţia A^0, B^0, C^0, $D^0 \in A^3$ (conform teoremei 5). Fie planul $A^2 = A^0B^0C^0$, unde A^0, B^0, C^0 sînt necoliniare (vezi teorema 4) şi $D^0 \notin A^2$. Există relaţia (A^0, B^0, C^0 necoliniare; A^0, B^0, $C^0 \in A^2$ şi A^0, B^0, $C^0 \in A^3$) $\Rightarrow (A^2 \subset A^3)$.

Avem:

$$(D^0 \in A^3;\ A^2 \subset A^3 \text{ şi } A^3 \subset B^3) \Rightarrow (D^0 \in B^3 \text{ şi } A^2 \subset B^3)$$

$$(D^0 \notin A^2;\ D^0 \in A^3;\ A^2 \subset A^3;\ D^0 \in B^3 \text{ şi } A^2 \subset B^3) \Rightarrow (A^3 = B^3)$$

conform axiomei L'10, c.c.t.d.

TEOREMA 20. *În* S^4 *există drepte* A^1 *şi* B^1 *care pot fi: confundate, concurente, disjuncte.*

Teorema 20 este o extindere a teoremei 12.

TEOREMA 21. *Dîndu-se punctele* A^0, B^0 $(A^0 \neq B^0)$, *dreapta* $A^1 = A^0B^0$ *şi tridimensionalul* A^3, *avem*:

$$(A^0,\ B^0 \in A^1 \text{ şi } A^0,\ B^0 \in A^3) \Rightarrow (A^1 \subset A^3).$$

Demonstraţie. Există în A^3 un punct $C^0 \notin A^0\,B^0$ conform teoremei 5'. Există un plan A^2 cu relaţia: $C^0 \in A^2$ şi $A^0\,B^0 \subset A^2$ conform axiomei L'6. Dar: $(C^0 \notin A^0\,B^0;\ A^0, B^0, C^0 \in A^2;\ A^0, B^0, C^0 \in A^3) \Rightarrow (A^2 \subset A^3)$ conform axiomei L'11. Deoarece $(A^0 \neq B^0;\ A^0, B^0 \in A^0\,B^0$ şi $A^0, B^0 \in A^2) \Rightarrow (A^0B^0 \subset A^2)$ conform axiomei L'7, avem $(A^0\,B^0 \subset A^2$ şi $A^2 \subset A^3) \Rightarrow (A^0\,B^0 \subset A^3) \Leftrightarrow (A^1 \subset A^3)$, c.c.t.d.

TEOREMA 22. *În* S^4 *există drepte* A^1 *şi plane* A^2 *disjuncte.*

Demonstraţie. În S^4 există punctele necotridimensionale A^0, B^0, C^0, D^0, E^0 conf. teoremei 17. Fie planul $A^2 = A^0B^0C^0$ şi dreapta $A^1 = D^0E^0$. Deoarece $D^0 \notin A^0B^0C^0$ rezultă $A^1 \not\subset A^2$. Este suficient să demonstrăm imposibilitatea relaţiei $A^1 \cap A^2 = F^0$. Într-adevăr, dacă $A^1 \cap A^2 = F^0$, atunci :

$$(A^1 \cap A^2 = F^0) \Rightarrow (F^0 \in A^1 \text{ şi } F^0 \in A^2)$$

însă :

$(D^0 \notin A^2) \Rightarrow$ (există A^3 unic cu relaţia : $D^0 \in A^3$ şi $A^2 \subset A^3$) conf. axiomei L'10,

$$(F^0 \in A^2 \text{ şi } A^2 \subset A^3) \Rightarrow (F^0 \in A^3),$$

$$(D^0, F^0 \in A^1 \text{ şi } D^0, F^0 \in A^3) \Rightarrow (A^1 \subset A^3) \text{ conform teoremei 21.}$$

$$(E^0 \in A^1 \text{ şi } A^1 \subset A^3) \Rightarrow (E^0 \in A^3)$$

şi deoarece

$$A^0B^0C^0 \subset A^3$$

rezultă

$$A^0,\ B^0,\ C^0,\ D^0,\ E^0 \in A^3$$

ceea ce contrazice ipoteza (aceste puncte fiind necotridimensionale) c.c.t.d.

TEOREMA 23. *Pentru oricare dreaptă A^1 şi tridimensional A^3 există relaţia :*

$$(A^1 \cap A^3 = \emptyset \textit{ sau } A^1 \cap A^3 = A^0 \textit{ sau } A^1 \cap A^3 = A^1).$$

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că :

$$(A^0 \neq B^0 \text{ şi } A^0,\ B^0 \in A^1 \cap A^2) \Rightarrow (A^1 \cap A^2 = A^1).$$

Relaţia de mai sus este însă o consecinţă a teoremei 21.

DEFINIŢII. Dacă :

$A^1 \cap A^3 = \emptyset$ se spune „dreapta şi tridimensionalul sînt disjuncte”.

$A^1 \cap A^3 = A^0$ se spune „dreapta şi tridimensionalul sînt concurente”.

$A^1 \cap A^3 = A^1$ se spune „dreapta este conţinută în tridimensional” deoarece $(A^1 \cap A^3 = A^1) \Leftrightarrow (A^1 \subset A^3)$.

Observaţie. Se demonstrează fără dificultate existenţa în S^4 a unor drepte şi tridimensionale în relaţiile $A^1 \cap A^3 = A^0$ sau $A^1 \cap A^3 = A^1$; pe baza axiomelor L' nu se poate confirma sau infirma existenţa în S^4 a unor drepte şi tridimensionale în relaţia $A^1 \cap A^2 = \emptyset$.

TEOREMA 24. *Pentru oricare două plane distincte A^2 şi B^2 există relaţia :*

$$(A^2 \cap B^2 = \emptyset \textit{ sau } A^2 \cap B^2 = A^0 \textit{ sau } A^2 \cap B^2 = A^1).$$

Demonstraţie. Teorema 24 este o consecinţă a relaţiei :

$(M^0 \notin M^1$ şi $M^0 \in A^2 \cap B^2$ şi $M^1 \subset A^2 \cap B^2) \Rightarrow (A^2 = B^2)$ (vezi axioma L'6).

DEFINIŢII. Se menţin definiţiile menţionate în legătură cu teorema 15 cu observaţia că pentru :

α) $A^2 \cap B^2 = A^0$ se spune „planele sînt concurente într-un punct”.

β) $A^2 \cap B^2 = A^1$ se spune „planele sînt concurente după o dreaptă”.

Se poate demonstra fără dificultate existența în S^4 a unor plane în relațiile $A^2 \cap B^2 = A^0$ sau $A^2 \cap B^2 = A^1$; pe baza axiomelor L′ nu se poate confirma sau infirma existența în S^4 a unor plane în relația $A^2 \cap B^2 = \theta$.

TEOREMA 25. *Se demonstrează fără dificultate că pentru orice plan* A^2 *și tridimensional* A^3 *există relația* :

$$(A^2 \cap A^3 = \theta \text{ sau } A^2 \cap A^3 = A^1 \text{ sau } A^2 \cap A^3 = A^2).$$

Inexistența relației $A^2 \cap A^3 = A^0$ este garantată de axioma L′13. Se enunță în continuare teoremele 26, 27, 28 și 29, a căror demonstrație se face fără dificultate.

TEOREMA 26. *Pentru oricare punct* A^0 *și plan* A^2 *cu relația* $A^0 \notin A^2$ *există un tridimensional unic* A^3 *cu relația* $(A^0 \in A^3$ *și* $A^2 \subset A^3)$ (vezi axioma L′10).

TEOREMA 27. *Pentru oricare drepte* A^1 *și* B^1 *necoplanare există un tridimensional unic* A^3 *cu relația* $(A^1, B^1 \subset A^3)$.

TEOREMA 28. *Pentru oricare dreaptă* A^1 *și plan* A^2 *cu relația* $A^1 \cap A^2 = A^0$ *există un tridimensional unic* A^3 *cu relația* $(A^1, A^2 \subset A^3)$.

TEOREMA 29. *Pentru oricare plane* A^2 *și* B^2 *cu relația* $A^2 \cap B^2 = A^1$ *există un tridimensional unic* A^3 *cu relația* $(A^2, B^2 \subset A^3)$.

TEOREMA 30. *Pentru punctul* A^0 *și tridimensionalele* A^3 *și* B^3 *există relația* :

$$(A^0 \in A^3 \text{ și } A^0 \in B^3) \Rightarrow (\text{există o dreaptă } A^1 \text{ cu relația } A^1 \subset A^3 \text{ și } A^1 \subset B^3).$$

Demonstrație. Există în A^3 punctele necoplanare A^0, B^0, C^0, D^0 și în B^3 punctele necoplanare A^0, M^0, N^0, P^0. Ne propunem să demonstrăm relația :

$$(A^0 \in A^3 \text{ și } A^0 \in B^3) \Rightarrow (\text{există } E^0 \neq A^0 \text{ și } E^0 \in A^3 \text{ și } E^0 \in B^3)$$

Punctele necoliniare A^0, M^0, N^0 determină planul unic $A^2(A^0, M^0, N^0 \in A^2)$. Avem

$(A^0 \in A^2$ și $A^0 \in A^3) \Rightarrow ($există $E^0 \neq A^0$ și $E^0 \in A^2$; $E^0 \in A^3)$ conf. axiomei L′13

$(A^0 \notin M^0N^0$; $A^0, M^0, N^0 \in A^2$ și $A^0, M^0, N^0 \in B^3) \Rightarrow (A^2 \subset B^3)$ conf. axiomei L′11

$$(E^0 \in A^2 \text{ și } A^2 \subset B^3) \Rightarrow (E^0 \in B^3)$$

și deci există relația :

$$(E^0 \neq A^0, E^0 \in A^3 \text{ și } E^0 \in B^3)$$

însă

$(E^0 \neq A^0) \Rightarrow ($există dreapta unică A^1 cu relația $A^0, E^0 \in A^1)$ conf. axiomei L′3

$(E^0 \neq A^0$ și $E^0, A^0 \in A^1$ și $E^0, A^0 \in A^3$ și $E^0, A^0 \in B^3) \Rightarrow (A^1 \subset A^3$ și $A^1 \subset B^3)$ conf. axiomei L′7, c.c.t.d.

TEOREMA 31. *Pentru dreapta* $A^1 = A^0B^0$ *și tridimensionalele* A^3 *și* B^3 *există relația* :
$(A^1 \subset A^3 \text{ și } A^1 \subset B^3) \Rightarrow (\text{există un plan } A^2 \text{ cu relația } A^2 \subset A^3 \text{ și } A^2 \subset B^3)$.
Demonstrație. Există în A^3 punctele necoplanare A^0, B^0, C^0, D^0 și în B^3 punctele necoplanare A^0, B^0, M^0, N^0.

Punctele necoliniare A^0, M^0, N^0 determină planul unic $B^2(A^0, M^0, N^0 \in B^2)$. Avem

$$(A^0 \in B^2 \text{ și } A^0 \in A^3) \Rightarrow (\text{există } E^0 \neq A^0 \text{ și } E^0 \in B^2 \text{ și } E^0 \in A^3)$$

$(A^0 \notin M^0N^0$ și $A^0, M^0, N^0 \in B^2$ și $A^0, M^0, N^0 \in B^3) \Rightarrow (B^2 \subset B^3)$ conf. axiomei L'11

$$(E^0 \in B^2 \text{ și } B^2 \subset B^3) \Rightarrow (E^0 \in B^3).$$

Însă $E^0 \notin A^0B^0$ deoarece : $(E^0 \in A^0B^0) \Leftrightarrow (B^0 \in A^0E^0)$ și cum $A^0E^0 \subset B^2$, ar rezulta $B^0 \in B^2$ și deci A^0, B^0, M^0, N^0 coplanare, ceea ce contrazice A^0, B^0, M^0, N^0 necoplanare; rezultă deci $E^0 \notin A^0B^0$. Avem

$(E^0 \notin A^0B^0) \Rightarrow$ (există planul unic A^2 cu relația $E^0 \in A^2$ și $A^0B^0 \subset A^2$) conf. axiomei L'6.

$(E^0 \notin A^0B^0$ și $A^0, B^0, E^0 \in A^2$ și $A^0, B^0, E^0 \in A^3$ și $A^0, B^0, E^0 \in B^3)$

$$(A^2 \subset A^3 \text{ și } A^2 \subset B^3) \text{ conf. axiomei L'11, c.c.t.d.}$$

Din teoremele 30 și 31 rezultă :

TEOREMA 32. *Pentru punctul* A^0 *și tridimensionalele* A^3 *și* B^3 *există relația* :

$(A^0 \in A^3 \text{ și } A^0 \in B^3) \Rightarrow (\text{există un plan } A^2 \text{ cu relația } A^2 \subset A^3 \text{ și } A^2 \subset B^3)$.

TEOREMA 33. *Pentru oricare tridimensionale distincte* A^3 *și* B^3 *există relația* :

$$(A^3 \cap B^3 = \emptyset \text{ sau } A^3 \cap B^3 = A_2).$$

Imposibilitatea relațiilor $(A^3 \cap B^3 = A^0)$ și $(A^3 \cap B^3 = A^1)$ este garantată de teorema 32.

TEOREMA 34. *Pentru punctul* A^0, *planele* A^2 *și* B^2 *și tridimensionalul* A^3 *există relația*

$$(A^2, B^2 \subset A^3 \text{ și } A^0 \in A^2 \cap B^2) \Rightarrow (\text{există } G^0 \neq A^0 \text{ și } G^0 \in A^2;\ G^0 \in B^2).$$

Demonstrație. În fiecare din planele A^2 și B^2 există cîte două puncte necoliniare cu A^0 deci există punctele :
$A^0, B^0, C^0 \in A^2$ și $A^0, D^0, E^0 \in B^2$ cu relația $A^0 \notin B^0C^0$ și $A^0 \notin D^0E^0$ (vezi teorema 2).

$$(A^0, B^0, C^0 \in A^2 \text{ și } A^0, D^0, E^0 \in B^2 \text{ și } A^2, B^2 \subset A^3) \Rightarrow (A^0, B^0, C^0, D^0 \in A^3).$$

Există un punct $F^0 \notin A^3$ (conf. teoremei 17'); evident, $F^0 \in A^2$ și $F^0 \in B^2$ într-adevăr, dacă $F^0 \in A^2$ ar rezulta $F^0 \in A^3$, deoarece $A^2 \subset A^3$; analog pentru $F^0 \in B^2$).

$(F^0 \notin A^2) \Rightarrow$ (există B^3 unic cu relaţia $F^0 \in B^3$ şi $A^2 \subset B^3$) conf. axiomei L'10.

$$(A^0, B^0, C^0 \in A^2 \text{ şi } A^2 \subset B^3) \Rightarrow (A^0, B^0, C^0 \in B^3).$$

$(A^0 \in B^2$ şi $A^0 \in B^3) \Rightarrow$ (există $G^0 \neq A^0$ şi $G^0 \in B^2$ şi $G^0 \in B^3$) conf. axiomei L'13

şi încă : $(G^0 \in B^2$ şi $B^2 \subset A^3) \Rightarrow (G^0 \in A^3)$.

Să arătăm că $G^0 \in A^2$; într-adevăr, dacă $G \notin A^2$, atunci : $(G^0 \notin A^2 ;\ G^0 \in A^3 ;\ A^2 \subset A^3 ;\ G^0 \in B^3$ şi $A^2 \subset B^3) \Rightarrow (A^3 = B^3)$ conf. axiomei L'10,

$$(F^0 \in B^3 \text{ şi } B^3 = A^3) \Rightarrow (F^0 \in A^3)$$

ceea ce contrazice $F^0 \notin A^3$ şi deci $G^0 \in A^2$; cum $G^\circ \in B^2$, rezultă că teorema este demonstrată.

Teorema 34 este echivalentă axiomei L9 şi deci în cadrul axiomelor L' axioma L9 apare ca teoremă.

4° NECONTRADICŢIA SISTEMULUI L'

Pentru demonstrarea necontradicţiei sistemului L' vom alege un model pe care să fie realizate axiomele L'1—L'13.

Fie cincipunctul $A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0 A_5^0$ ale cărui puncte $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0, A_5^0$ formează spaţiul S^4.

Se consideră dreptele ca bipuncte :

$$A^1 = (A_1^0, A_2^0),\ A_2^1 = (A_1^0, A_3^0),\ A_3^1 = (A_1^0, A_4^0),\ A_4^1 = (A_1^0, A_5^0),$$

$$A_5^1 = (A_2^0, A_3^0),\ A_6^1 = (A_2^0, A_4^0),\ A_7^1 = (A_2^0, A_5^0),$$

$$A_8^1 = (A_3^0, A_4^0),\ A_9^1 = (A_3^0, A_5^0),\ A_{10}^1 = (A_4^0, A_5^0).$$

Se consideră planele ca tripuncte :

$$A_1^2 = (A_1^0, A_2^0, A_3^0),$$

$$A_2^2 = (A_1^0, A_2^0, A_4^0),\ A_3^2 = (A_1^0, A_2^0, A_5^0),\ A_4^2 = (A_1^0, A_3^0, A_4^0),$$

$$A_5^2 = (A_1^0, A_3^0, A_5^0),\ A_6^2 = (A_1^0, A_4^0, A_5^0),\ A_7^2 = (A_2^0, A_3^0, A_4^0)$$

$$A_8^2 = (A_2^0, A_3^0, A_5^0),\ A_9^2 = (A_2^0, A_4^0, A_5^0),\ A_{10}^2 = (A_3^0, A_4^0, A_5^0).$$

Se consideră tridimensionalele ca patru puncte :

$$A_1^3 = (A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0),\ A_2^3 = (A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_5^0),\ A_3^3 = (A_1^0, A_2^0, A_4^0, A_5^0),$$

$$A_4^3 = (A_1^0, A_3^0, A_4^0, A_5^0),\ A_5^3 = (A_2^0, A_3^0, A_4^0, A_5^0).$$

Se verifică fără dificultate că, pe modelul de mai sus, sînt realizate axiomele L'1—L'13.

5° SIMPLEX Σ^4

S-a demonstrat că spaţiul de incidenţă patrudimensional S^4 conţine cel puţin cinci puncte necotridimensionale (vezi teorema 17). Vom denumi simplex patrudimensional sau simplex Σ^4, un spaţiu de incidenţă S^4 care conţine cinci puncte $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0, A_5^0$ organizate după cum s-a arătat la punctul 4° ; se poate spune că simplexul Σ^4 este un spaţiu de incidenţă patrudimensional minimal. Punctele $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_5^0$ se numesc vîrfurile simplexului, dreptele $A_1^1, A_2^1, \ldots, A_{10}^1$ se numesc muchiile simplexului, planele $A_1^2, A_2^2, \ldots, A_{10}^2$ se numesc feţele simplexului, iar $A_1^3, A_2^3, \ldots, A_5^3$ se numesc tridimensionalele simplexului.

Se notează cu :

$N^{0,4}$ numărul vîrfurilor simplexului Σ^4,
$N^{1,4}$ numărul muchiilor simplexului Σ^4,
$N^{2,4}$ numărul feţelor simplexului Σ^4,
$N^{3,4}$ numărul tridimensionalelor simplexului Σ^4,

sau, prescurtat : $N^{i,4}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 4)$ – cu relaţia $N^{4,4} = 1$.

S-a arătat că $N^{0,4} = 5$; $N^{1,4} = 10$; $N^{2,4} = 10$; $N^{3,4} = 5$.

Se verifică existenţa relaţiei :

$$N^{0,4} - N^{1,4} + N^{2,4} - N^{3,4} + N^{4,4} = 1. \qquad \text{(II.1)}$$

Relaţia (II.1) reprezintă o extindere a relaţiei (I.1).

În cele ce urmează se realizează un model de spaţiu de incidenţă patrudimensional minimal, sau simplex Σ^4, cu ajutorul claselor de resturi modulo 5. Notăm aceste clase cu :

(C_0^0) clasa numerelor de forma $5\,k$ (k întreg),

(C_1^0) clasa numerelor $5\,k + 1$,

(C_2^0) clasa numerelor $5\,k + 2$,

(C_3^0) clasa numerelor $5\,k + 3$,

(C_4^0) clasa numerelor $5\,k + 4$.

Cu ajutorul acestor clase definim clasele :

α) $(C_0^1) = (C_0^0) \cup (C_1^0)$; $(C_1^1) = (C_0^0) \cup (C_2^0)$; $\ldots$ $C_9^1 = (C_3^0) \cup (C_4^0)$.

β) $(C_0^2) = (C_0^0) \cup (C_1^0) \cup (C_2^0)$;$\ldots$; $C_9^2 = (C_2^0) \cup (C_3^0) \cup (C_4^0)$.

γ) $(C_0^3) = (C_0^0) \cup (C_1^0) \cup (C_2^0) \cup (C_3^0)$;$\ldots$; $C_9^3 = (C_1^0) \cup (C_2^0) \cup (C_3^0) \cup (C_4^0)$.

Considerăm clasa C_0^0 $(i = 0, 1, \ldots, 4)$ ca punct, clasa C_i^1 $(i = 0, 1, \ldots, 9)$ ca dreaptă, clasa C_i^2 $(i = 0, 1, \ldots, 9)$ ca plan, clasa C_i^3 $(i = 0, 1, \ldots, 9)$ ca tridimensional ; se realizează astfel un model de spaţiu patrudimensional minimal sau un model de simplex Σ^4. Se verifică fără dificultate că axiomele L'1—L'13 sînt realizate pe modelul de mai sus.

6° SPAŢII DE INCIDENŢĂ S^4 OMOGENE ŞI NEOMOGENE

Să considerăm un spaţiu de incidenţă patrudimensional S^4 şi fie A_i^1 $(i = 1, 2, \ldots)$ dreptele, A_i^2 planele şi A_i^3 tridimensionalele din S^4. Dacă fiecare dreaptă din S^4 conţine acelaşi număr de puncte, dacă fiecare plan din S^4 conţine acelaşi număr de puncte şi drepte, dacă fiecare tridimensional din S^4 conţine acelaşi număr de puncte, drepte şi plane, se spune că spaţiul S^4 este omogen ; în caz contrar spaţiul S^4 este neomogen.

Se verifică, fără dificultate, că simplexul Σ^4 este un spaţiu de incidenţă omogen.

Se pot construi modele de spaţii S^4 neomogene, analog cu construcţia realizată în Cap. I, punctul 6°.

7° SPAŢII DE INCIDENŢĂ PATRUDIMENSIONALĂ OMOGENE DE PUTERE $p : S_p^4$

Se înţelege prin spaţiu de incidenţă patrudimensional omogen, de putere p, notat cu S_p^4, un spaţiu patrudimensional omogen în care fiecare dreaptă A_i^1 $(i = 1, 2, \ldots)$ conţine $p + 1$ puncte (p fiind un întreg mai mare sau cel puţin egal cu 1) ; S_p^4 fiind un spaţiu minimal în sensul că el conţine minimum de puncte cu ajutorul cărora se pot construi dreptele spaţiului astfel încît fiecare dreaptă să conţină $p + 1$ puncte.

Să notăm cu : $N_p^{0,1}$ numărul punctelor unei drepte, $N_p^{0,2}$ numărul punctelor unui plan, $N_p^{0,3}$ numărul punctelor unui tridimensional, $N_p^{0,4}$ numărul punctelor spaţiului S_p^4, $N_p^{1,2}$ numărul dreptelor unui plan, $N_p^{1,3}$ numărul dreptelor unui tridimensional, $N_p^{1,4}$ numărul dreptelor spaţiului S_p^4, $N_p^{2,3}$ numărul planelor unui tridimensional, $N_p^{2,4}$ numărul planelor spaţiului S_p^4, $N_p^{3,4}$ numărul tridimensionalelor din S_p^4.

Prin definiţie :

$$N_p^{0,1} = p + 1. \tag{II.2}$$

În mod analog celor expuse în Cap. I, punctul 7° se stabilesc formulele :

$$N_p^{0,2} = \frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1 \tag{II.3}$$

$$N_p^{1,2} = \frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1 \tag{II.4}$$

$$N_p^{0,3} = \frac{p^4 - 1}{p - 1} = p^3 + p^2 + p + 1, \tag{II.5}$$

$$N_p^{1,3} = \frac{(p^4 - 1)(p^3 - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1)} = (p^2 + 1)(p^2 + p + 1), \tag{II.6}$$

$$N_p^{2,3} = \frac{p^4 - 1}{p - 1} = p^3 + p^2 + p + 1. \tag{II.7}$$

Aceste formule sînt evident identice cu formulele (I.2)...(I.7).

Fie tridimensionalul $A^3 \subset S_p^4$; există un punct A^0 S_p^4 şi $A^0 \in A^3$ – conf. teoremei 17′. Unind punctul A^0 cu fiecare punct al tridimensionalului A^3, se obţin $N_p^{0,3}$ drepte, care conţin fiecare cîte p puncte în afară de A^0. Deci numărul de puncte din S_p^4 este :

$$N_p^{0,4} = p\, N_p^{0,3} + 1 = p\, \frac{p^4 - 1}{p - 1} + 1 \tag{II.8}$$

sau

$$N_p^{0,4} = \frac{p^5 - 1}{p - 1} .$$

Fie B^0 A^3 ; s-a arătat că prin B^0 trec $N_p^{0,2}$ drepte conţinute în A^3. Deoarece printr-un punct din S_p^4 trec $N_p^{0,3}$ drepte, rezultă că prin fiecare punct din A^3 vor trece, în afara dreptelor conţinute în A^3, un număr de $(N_p^{0,3} - N_p^{0,2})$ drepte ; $N_p^{0,3} - N_p^{0,2} = \dfrac{p^4 - 1}{p - 1} - \dfrac{p^3 - 1}{p - 1} = p^3$. Numărul total de drepte din S va fi deci

$$p^3 \cdot N_p^{0,3} + N_p^{1,3} = \frac{p^3(p^4 - 1)}{p - 1} + \frac{(p^4 - 1)(p^3 - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1)}$$

şi făcînd calculele obţinem :

$$N_p^{1,4} = \frac{(p^5 - 1)(p^4 - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1)} . \tag{II.9}$$

Deoarece prin B^0 trec $N_p^{0,2}$ drepte conţinute în A^3, rezultă că prin dreapta A^0B^0 vor trece $N_p^{0,2}$ plane. Dacă prin fiecare dreaptă din A^3 trec $N_p^{0,2}$ plane, atunci numărul de plane ce trec prin fiecare dreaptă din A^3, în afară de planele conţinute în A^3, este

$$N_p^{0,2} - N_p^{2,3} = \frac{p^3 - 1}{p - 1} - p - 1 = p^2.$$

Numărul total de plane din S_p^4 va fi deci :

$$p^2 \cdot N_p^{1,3} + N_p^{2,3} = \frac{p^2(p^4 - 1)(p^3 - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1)} + \frac{p^4 - 1}{p - 1}$$

şi făcînd calculele se obţine :

$$N_p^{2,4} = \frac{(p^5 - 1)(p^4 - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1)} . \tag{II.10}$$

Pentru fiecare punct din S_p^4 există un tridimensional care nu conţine acel punct şi deci numărul de tridimensionale din S_p^4 este egal cu $N_p^{0,4}$; obţinem formula :

$$N_p^{3,4} = \frac{p^5 - 1}{p - 1} . \tag{II.11}$$

Făcînd $p = 1$ în formulele (II.8), (II.9), (II.10) şi (II.11) se obţin numerele respective deduse pentru simplexul Σ^4.

Din relaţiile stabilite mai sus rezultă :

$$N_p^{0,2} = N_p^{1,2}, \tag{II.12}$$

$$N_p^{0,3} = N_p^{2,3}, \tag{II.13}$$

$$N_p^{0,4} = N_p^{3,4}, \tag{II.14}$$

$$N_p^{1,4} = N_p^{2,4}. \tag{II.15}$$

Formulele (II.12), (II.13), (II.14) şi (II.15) exprimă următoarele relaţii de „simetrie'' :

— Numărul de puncte dintr-un plan este egal cu numărul de drepte din plan.

— Numărul de puncte dintr-un tridimensional este egal cu numărul de plane din tridimensional.

— Numărul de puncte din spaţiul S_p^4 este egal cu numărul de tridimensionale din spaţiul S_p^4.

— Numărul de drepte din spaţiul S_p^4 este egal cu numărul de plane din spaţiul S_p^4.

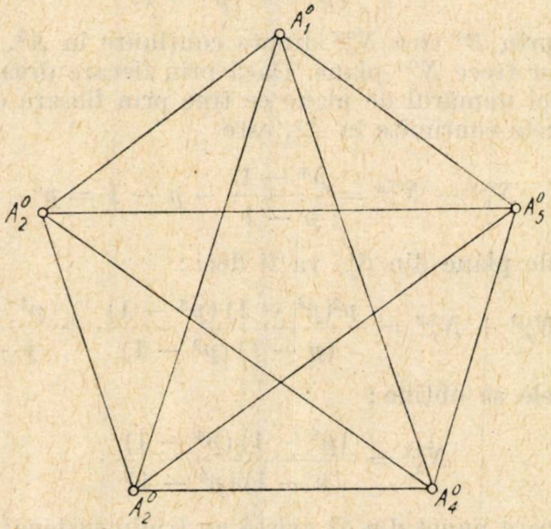


Fig. 2

În figura 2 este redat modelul unui spaţiu patrudimensional omogen de putere $p = 1$, adică un spaţiu S_1^4 echivalent cu simplexul Σ^4. Punctele simplexului sînt $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_5^0$, cele zece drepte ale simplexului sînt bipunctele $(A_1^0, A_2^0), (A_1^0, A_3^0) \ldots (A_4^0, A_5^0)$, cele zece plane ale simplexului sînt tripunctele $(A_1^0, A_2^0, A_3^0), (A_1^0, A_2^0, A_4^0), \ldots, (A_3^0, A_4^0, A_5^0)$ iar cele cinci tridimensionale sînt patrupunctele $(A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0), (A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_5^0), \ldots$ $\ldots, (A_2^0, A_3^0, A_4^0, A_5^0)$.

Noţiunea de izomorfism expusă în Cap. I, punctul 8°, se extinde fără dificultate pentru spaţii patrudimensionale. Toate spaţiile de incidenţă S_p^4 sînt izomorfe cu spaţiul de incidenţă patrudimensional omogen de putere p, realizat cu clasele de resturi modulo $\frac{p^5 - 1}{p - 1}$.

Primită la redacţie la 2 iunie 1964

CÎTEVA PROPRIETĂŢI ALE REPREZENTĂRILOR CVASICONFORME n-DIMENSIONALE 1)

DE

PETRU CARAMAN
Institutul de matematică, al Academiei R.P.R., Filiala Iaşi

INTRODUCERE

O reprezentare cvasiconformă cu două ansambluri de caracteristici

$$(C) \qquad \gamma_m^k, \quad p_i = \frac{a_i}{a_n}, \qquad (k, m = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n-1),$$

$$(C') \qquad (\gamma_m^k)', \quad p_i' = \frac{a_1'}{a_{1n}'} = \frac{a_{2i}'}{a_{2n}'}{}^{2)}, \quad (k, m = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n-1)$$

a domeniului $D \subset E_n$ în E_n (E_n fiind spaţiul euclidian n-dimensional) (vezi [1]) este o reprezentare (continuă) univalentă, care, pentru orice $x \in D$, transformă elipsoizii infinitezimali $E[(C), x]$ în elipsoizii infinitezimali $E[(C'), f(x)]$, caracteristicile principale p_1, p_1' fiind continue în D.

Spunem [1] că o reprezentare $\overline{x} = f(x)$ transformă un elipsoid infinitezimal $E\,[(C), x]$ într-un elipsoid infinitezimal $E[(C'), f(x)]$ dacă este univalentă şi continuă în vecinătatea lui x şi transformă orice elipsoid $E_h\,[(C), x]$, de centru x, caracteristici (C) şi semiaxă minimă h suficient de mică, într-o suprafaţă Jordan $f(E_h)$ conţinută între doi elipsoizi omotetici $E_{h_1'}\,[(C'), f(x)]$, $E_{h_2'}\,[(C'), f(x)]$ de centru $f(x)$, de caracteristici (C') şi de semiaxe minime $a_{1n}' = h_1'$, $a_{2n}' = h_2'$ şi aşa fel încît

$$\lim_{h \to 0} \frac{h_1'}{h_2'} = 1,$$

atunci cînd elipsoidul iniţial $E_h\,[(C), x]$ se reduce omotetic la punctul x.

---

1) Apărută în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **IX**, *3*, *5* **(1964)**; Comunicare ţinută la Colocviul de Analiză funcţională şi teoria funcţiilor din 21–27.IX.1962.

2) Cu γ_m^k am notat cosinuşii directori ai axelor elipsoidului $E_h[(C), x]$ iar cu a_i, a_n $(a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n)$ semiaxele sale; $(\gamma_m^k)'$, p_i' au aceleaşi semnificaţii referitor la elipsoizii $E_{h_1'}\,[(C), f(x)]$, $E_{h_2'}\,[(C), f(x)]$.

ST. CERC. MAT., TOM. 17. NR. 1, P. 49–82, BUCUREŞTI. 1965.

O reprezentare cvasiconformă cu două ansambluri de caracteristici (C), (C') ale cărei caracteristici principale verifică condiţia $p_1 \cdot p_1' \leqslant Q$ (Q constantă) în D, se numeşte Q-cvasiconformă cu două ansambluri de caracteristici.

Clasa reprezentărilor cvasiconforme cu un ansamblu de caracteristici se obţine din clasa reprezentărilor cvasiconforme cu două ansambluri de caracteristici atunci cînd elipsoizii infinitezimali $E[(C'), f(x)]$ se reduc la sfere infinitezimale.

Faptul că elipsoizii infinitezimali se transformă în sfere infinitezimale se exprimă analitic prin relaţia

$$\lim_{h\to 0} \frac{\max\limits_{x\in E_h} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{x\in E_h} |f(x) - f(x_0)|} = 1. \tag{1}$$

Reprezentările conforme sînt nişte reprezentări 1-cvasiconforme. În § 1 ne ocupăm de dilatări. În § 2 stabilim incluziunea clasei reprezentărilor noastre Q-cvasiconforme în clasa reprezentărilor K-cvasiconforme ale lui Väisälä [13] şi K-cvasiconforme a lui Gehring [4]. Paragraful 3 este consacrat reprezentărilor conforme. În § 4 ne ocupăm de reprezentările cvasiconforme diferenţiabile.

Din motive de simplitate, în cuprinsul lucrării, atunci cînd va fi vorba de reprezentări cvasiconforme cu două ansambluri de caracteristici le vom numi pur şi simplu reprezentări cvasiconforme; de asemenea, prin sfere, elipsoizi şi suprafeţe vom înţelege hipersfere, hiperelipsoizi şi hipersuprafeţe ale lui E_n.

§ 1. CÎTEVA PROPRIETĂŢI ALE DILATĂRILOR REPREZENTĂRILOR CVASICONFORME

TEOREMA 1. *Dacă reprezentarea* $\bar{x} = f(x)$ *duce elipsoizii infinitezimali de centru* x_0 *şi de caracteristici* (C) *în sfere infinitezimale şi are un modul de dilatare* $\left|\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial s}\right|$ *într-o direcţie oarecare* s, *atunci reprezentarea inversă va duce sfere infinitezimale în elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C).

Fie S_r o sferă de centru $\bar{x}_0 = f(x_0)$ şi de rază r şi $E_{h_1}[(C), x_0]$, $E_{h_2}[(C), x_0]$ cei doi elipsoizi omotetici, primul circumscris, al doilea înscris suprafeţei $f^{-1}(S_r)$. Fie S_{r_1}, S_{r_2} două sfere de centru $\bar{x}_0$ şi de raze r_1, r_2, prima circumscrisă suprafeţei $f(E_{h_1})$ şi a doua înscrisă suprafeţei $f(E_{h_2})$. Din definiţia unei reprezentări care duce elipsoizi infinitezimali în sfere infinitezimale, rezultă

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{r_1}{r} = 1, \qquad \lim_{h_2\to 0} \frac{r}{r_2} = 1$$

şi deci

$$\lim_{r\to 0} \frac{r_1}{r_2} = 1, \tag{2}$$

deoarece h_1, h_2 tind către zero atunci cînd $r \to 0$. Dar, modulul de dilatare $\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|$ există în direcţia s, ceea ce implică

$$1 = \lim_{r\to 0} \frac{\dfrac{|f(x') - f(x_0)|}{|x^1 - x_0|_s}}{\dfrac{|f(x'') - f(x_0)|}{|x'' - x_0|_s}} = \lim_{r\to 0} \frac{|f(x') - f(x_0)|}{|f(x'') - f(x_0)|} \cdot \frac{|x' - x_0|_s}{|x'' - x_0|_s}, \qquad (3)$$

unde $x' \in E_{h_1}$, $x'' \in E_{h_2}$. Pe de altă parte, avem:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{|f(x_2) - f(x_0)|} \geqq \frac{|f(x') - f(x_0)|}{|f(x'') - f(x_0)|} \geqq 1,$$

unde $x_1 = f^{-1}(\bar{x}_1)$, $x_2 = f^{-1}(\bar{x}_2)$, $\bar{x}_1 \in S_{r_1}$, $\bar{x}_2, \in S_{r_2}$ şi ţinînd seama de relaţia 2) obţinem

$$\lim_{r\to 0} \frac{|f(x') - f(x_0)|}{|f(x'') - f(x_0)|} = 1.$$

Dar atunci, din relaţia (3), rezultă

$$\lim_{r\to 0} \frac{|x'' - x_0|_s}{|x' - x_0|_s} = 1,$$

ceea ce stabileşte teorema.

TEOREMA 2. *Dacă reprezentarea* $\bar{x} = f(x)$ *duce elipsoizii infinitezimali de centru* x_0 *şi de caracteristici* (C) *în elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C') *şi are un modul de dilatare* $\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s}\right|$ *într-o direcţie oarecare* s, *atunci reprezentarea inversă va duce elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C') *în elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C).

Fie $\xi = A(\bar{x})$ o transformare afină de caracteristici (C'). Evident, reprezentarea produs $\xi = \psi(x) = A[f(x)]$ va duce elipsoizii infinitezimali de caracteristici (C) şi de centru x_0 în sfere infinitezimale de centru ξ_0. Dar atunci, în virtutea teoremei precedente, reprezentarea inversă $x = \psi^{-1}(\xi) = f^{-1}[A^{-1}(\xi)]$ va duce sferele infinitezimale de centru ξ_0 în elipsoizi infinitezimali de centru x_0 şi de caracteristici (C). Deci reprezentarea produs $x = f^{-1}(\bar{x}) = \psi^{-1}[A(\bar{x})]$ va duce elipsoizii infinitezimali de centru $\bar{x}_0$ şi de caracteristici (C') în elipsoizi infinitezimali de centru x_0 şi de caracteristici (C).

COROLARUL 1. *Dacă o reprezentare cvasiconformă de caracteristici* (C) (C') *în* D *are un modul de dilatare într-o direcţie oarecare în fiecare punct al lui* D, *atunci inversa este o reprezentare cvasiconformă de caracteristici* (C'), (C).

COROLARUL 2. *Dacă o reprezentare univalentă transformă sfere infinitezimale în elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C) *şi are un modul* *de dilatare într-o direcție oarecare în fiecare punct din domeniul de definiție* $D - p_1(\overline{x})$ *fiind continuă în* $f(D)$ — *atunci inversa este o reprezentare cvasiconformă cu un ansamblu de caracteristici* (C).

TEOREMA 3. *Dacă o reprezentare* $\overline{x} = f(x)$, *care duce elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C) *în elipsoizi de caracteristici* (C'), *are* $\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s_0}\right| = 0$ *cel puțin într-o direcție* s_0, *atunci* $\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s}\right| = 0$ *în orice direcție* s.

Într-adevăr, luînd creșterea $\Delta x = x - x_0$ în direcțiile s și s_0 și așa fel încît $x \in E_h\,[(C), x_0]$, vom avea

$$\frac{1}{p_1'} \leqq \lim_{h\to 0} \frac{|\Delta f|_s}{|\Delta f|_{s_0}} \leqq \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{|\Delta f|_s}{|\Delta f|_{s_0}} \leqq p_1',$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\Delta f|_{s_0}}{|\Delta x|_{s_0}} = \left|\frac{\partial f}{\partial s_0}\right| = 0, \quad \frac{1}{p_1} \leqq \lim_{h\to 0} \frac{|\Delta x|_{s_0}}{|\Delta x|_s} \leqq p_1, \tag{4}$$

de unde obținem

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{|\Delta f|_s}{|\Delta x|_s} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{|\Delta f|_s}{|\Delta f|_{s_0}} \cdot \frac{|\Delta f|_{s_0}}{|\Delta x|_{s_0}} \cdot \frac{|\Delta x|_{s_0}}{|\Delta x|_s}\right) \leqq p_1' \left|\frac{\partial f}{\partial s_0}\right| \lim_{h\to 0} \frac{|\Delta x|_{s_0}}{|\Delta x|_s} = 0. \tag{5}$$

TEOREMA 4. *Dacă modulul de dilatare al unei reprezentări* $\overline{x} = f(x)$, *care duce elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C) *în elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C') *și cel al reprezentării inverse există în direcțiile* s, s', *respectiv* S, S', *atunci ei verifică relațiile*

$$\frac{1}{p_1 p_1'}\left|\frac{\partial f}{\partial s'}\right| \leqq \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right| \leqq p_1 p_1' \left|\frac{\partial f}{\partial s'}\right|, \quad \frac{1}{p_1 p_1'}\left|\frac{\partial f^{-1}}{\partial S'}\right| \leqq \left|\frac{\partial f^{-1}}{\partial S}\right| \leqq p_1 p_1' \left|\frac{\partial f^{-1}}{\partial S'}\right|.$$

A doua parte a primei inegalități rezultă în virtutea relației (5) unde s-a înlocuit s_0 prin s' și unde $\left|\frac{\partial f}{\partial s'}\right|$ este, în general, diferit de zero, iar prima parte a ei rezultă din următoarea relație analogă:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{|\Delta f|_s}{|\Delta x|_s} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{|\Delta f|_s}{|\Delta f|_{s'}} \cdot \frac{|\Delta f|_{s'}}{|\Delta x|_{s'}} \cdot \frac{|\Delta x|_{s'}}{|\Delta x|_s}\right) \leqq \frac{1}{p_1 p_1'} \left|\frac{\partial f}{\partial s'}\right|.$$

A doua inegalitate este o consecință a primeia și a teoremei 2.

TEOREMA 5. *Dacă o reprezentare cvasiconformă* $\overline{x} = f(x)$ *și inversa acesteia admit un modul de dilatare* $\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s}\right|$, *respectiv* $\left|\frac{\partial f^{-1}(\overline{x}_0)}{\partial S}\right|$, *într-o direcție oarecare* s, *respectiv* S, *atunci dilatările lor extreme verifică relațiile*

$$\frac{\Lambda_f(x_0)}{\lambda_f(x_0)} \leqq p_1^2(x_0)\, p_1'^2(x_0) < \infty, \frac{\Lambda_{f^{-1}}(\overline{x}_0)}{\lambda_{f^{-1}}(\overline{x}_0)} \leqq p_1^2(x_0)\, p_1'^2(x_0) < \infty. \tag{6}$$

Fie $\{x_k\}$, $\{x_i\}$ două şiruri de puncte aşa fel încît

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{i\to\infty} x_i = x_0,$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|f(x_i) - f(x_0)|}{|x_i - x_0|} = \overline{\lim_{x\to x_0}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \Lambda(x_0),$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f(x_k) - f(x_0)|}{|x_k\, x_0|} = \underline{\lim}_{x\to x_0} - \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \lambda(x_0).$$

Să descriem prin fiecare punct x_k şi x_i cîte un elipsoid E_{h_k}, respectiv E_{h_i}, şi să punem în corespondenţă biunivocă (într-un mod oarecare) cele două şiruri. Dar atunci, păstrînd notaţia $\{x_k\}$ pentru primul şir, putem nota cu $\{x_k^*\}$ pe cel de-al doilea.

Fie $x_k^{*\prime\prime} \in E_{h_k^*}$ şi aşa fel încît $x_k^{*\prime\prime} - x_0$ să fie un vector de direcţie s, iar $x_k^{\prime\prime} \in E_{h_k}$ aşa fel încît $x_k^{\prime\prime} - x_0$ să fie de asemenea un vector de direcţie s. Atunci, în virtutea relaţiilor:

$$\frac{1}{p_1} \leqq \frac{|x_k^{*\prime\prime} - x_0|}{|x_k^* - x_0|}, \quad \frac{|x_k^{\prime\prime} - x_0|}{|x_k - x_0|} \leqq p_1,$$

$$\frac{|f(x_k^*) - f(x_0)|}{|f(x_k^{*\prime\prime}) - f(x_0)|} \leqq p_1' \frac{(h_1')_k^*}{(h_2')_k^*}, \qquad \frac{1}{p_1'} \cdot \frac{(h_2')_k}{(h_1')_k} \leqq \frac{|f(x_k) - f(x_0)|}{|f(x_k^{\prime\prime}) - f(x_0)|}$$

— unde $(h_1')_k^*$, $(h_2')_k^*$ sînt semiaxele minime ale elipsoidului circumscris, respectiv înscris suprafeţei $f(E_{h_k^*})$, iar $(h_1')_k$, $(h_2')_k$ sînt semiaxele minime ale elipsoidului circumscris, respectiv înscris suprafeţei $f(E_{h_k})$ — deducem că

$$\frac{\Lambda_f(x_0)}{\lambda_f(x_0)} = \frac{\overline{\lim_{x\to x_0}} \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}}{\underline{\lim}_{x\to x_0} \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|f(x_k^*) - f(x_0)|}{|x_k^* - x_0|}}{\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|f(x_k) - f(x_0)|}{|x_k - x_0|}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{p_1\, p_1' \dfrac{(h_1')_k^*}{(h_2')_k^*}}{\dfrac{1}{p_1 p_1'} \cdot \dfrac{(h_2')_k}{(h_1')_k}} \cdot \frac{\dfrac{|f(x_k^{*\prime\prime}) - f(x_0)|}{|x_k^{*\prime\prime} - x_0|}}{\dfrac{|f(x_k^{\prime\prime}) - f(x_0)|}{|x_k^{\prime\prime} - x_0|}} =$$

$$= p_1^2 p_1'^2 \lim_{k\to\infty} \frac{(h_1')_k^*}{(h_2')_k^*} \lim_{k\to\infty} \frac{(h_1')_k}{(h_2')_k} \cdot \frac{\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|f(x_k^{*\prime\prime}) - f(x_0)|}{|x_k^{*\prime\prime} - x_0|}}{\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|f(x_k^{\prime\prime}) - f(x_0)|}{|x_k^{\prime\prime} - x_0|}} = p_1^2 p_1'^2,$$

deoarece

$$\lim_{h\to\infty} \frac{(h_1')_k^*}{(h_2')_k^*} = \lim_{k\to\infty} \frac{(h_1')_k}{(h_2')_k} = 1,$$

în virtutea definiției reprezentărilor cvasiconforme, iar

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f(x_k'') - f(x_0)|}{|x_k'' - x_0|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f(x_k^{*''}) - f(x_0)|}{|x_k^{*''} - x_0|} = \left| \frac{\partial f(x_0)}{\partial s} \right|,$$

prin ipoteză.

Afirmația corespunzătoare relativă la reprezentarea inversă rezultă din prima relație (6) și corolarul 1 al teoremei 2.

COROLAR. *Dacă* $\overline{x} = f(x)$ *este o reprezentare cvasiconformă, care admite* $\left|\frac{\partial f(x)}{\partial S}\right|, \left|\frac{\partial f^{-1}(\overline{x})}{\partial S}\right|$, *respectiv în direcțiile* s, S, *atunci* $\lambda_f(x) = 0$, $\lambda_f(x) < \infty$, $\lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) = 0$, $\lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) < \infty$ *implică respectiv* $\Lambda_f(x)=0$,$\Lambda_f(x) < \infty$, $\Lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) = 0$, $\Lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) < \infty$.

LEMĂ. *Fie* $\overline{x} = f(x)$ *o reprezentare continuă în* D, *iar* δ, M *niște numere date dinainte așa fel încît* $\delta > 0$, $M \geqq 0$. *Atunci mulțimea*

$$E\left\{ x\,;\, x, x + k \in D,\ 0 < |k| \leqq \delta, \frac{|f(x+k) - f(x)|}{|k|} \leqq M \right\}$$

este închisă relativ la D.

Fie $\{x_m\}$ un șir așa fel încît $x_m \in E$ și $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0 \in D$. Să demonstrăm că $x_0 \in E$, adică

$$\frac{|f(x_0 + k) - f(x_0)|}{|k|} \leqq M, \tag{7}$$

pentru orice k așa fel încît $0 < |k| \leqq \delta$ și $x_0 + k \in D$.

k fiind dat, fie $\{k_p\}$ un șir de vectori așa fel încît, pentru un p fix, fiecare din componentele lui k_p să fie cuprinse între 0 și componenta corespunzătoare a lui k, iar $\lim\limits_{p\to\infty} k_p = 0$. Vom avea așadar $0 < |k - k_p| < \delta$. Pentru un p arbitrar, suficient de mare pentru ca $x_0 + k_p$ și $x_0 + k - k_p$ să fie în D, vom avea

$$\frac{|f(x_0 + k - k_p) - f(x_0 + k_p)|}{|k|} \leqslant \frac{|f(x_0 + k - k_p) - f(x_m)|}{|k|} +$$

$$+ \frac{|f(x_0 + k_p) - f(x_m)|}{|k|} = \frac{|f(x_0 + k - k_p) - f(x_m)|}{|x_0 + k - k_p - x_m|} \cdot \frac{|x_0 + k - k_p - x_m|}{|k|} +$$

$$+ \frac{|f(x_0 + k_p) - f(x_m)|}{|x_0 + k_p - x_m|} \cdot \frac{|x_0 + k_p - x_m|}{|k|}.$$

Pentru un m suficient de mare, vom avea $0 < |x_0 + k - k_p - x_m| \leqq \delta$, $0 < |x_0 + k_p - x_m| \leqslant \delta$, așa că, ținînd seama că $x_m \in E$, rezultă

$$\frac{|f(x_0 + k - k_p) - f(x_m)|}{|x_0 + k - k_p - x_m|} \cdot \frac{|x_0 + k - k_p - x_m|}{|k|} +$$

$$+ \frac{|f(x_0 + k_p) - f(x_m)|}{|x_0 + k_p - x_m|} \cdot \frac{|x_0 + k_p - x_m|}{|k|} \leqslant M \frac{|x_0 + k - k_p - x_m|}{|k|} +$$

$$+ M \frac{|x_0 + k_p - x_m|}{|k|}.$$

Dar atunci, trecînd la limită, pentru $m \to \infty$, vom avea

$$\frac{|f(x_0 + k - k_p) - f(x_0 + k_p)|}{|k|} \leqq M\left(\frac{|k - k_p|}{|k|} + \frac{|k_p|}{|k|}\right).$$

Apoi, trecînd la limită pentru $p \to \infty$ și ținînd seama de continuitatea lui $f(x)$, vom obține tocmai relația (7).

În mod analog se demonstrează și următorul

COROLAR. *Fie* $\overline{x} = f(x)$ *o reprezentare continuă în* D, e_i *versorii axelor de coordonate, iar* δ^i, M^i *niște numere date așa fel încît* $\delta^i > 0$, $M^i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Atunci mulțimile*

$$E^i\left\{x;\, x, x + k^i e_i \in D,\, 0 < |k^i| \leqq \delta^i, \frac{|f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + k^i, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^n)|}{|k^i|} \leqq \right.$$

$$\left. \leqq M^i\right\},\quad (i = 1, \ldots, n)$$

sînt închise relativ la D.

Observație. În cazul $n = 2$, corolarul precedent are loc chiar în ipoteza mai largă a continuității liniare a lui $f(x)$ (adică a continuității în raport cu fiecare variabilă separat), cum a arătat-o Tolstov [12], în timp ce pentru $n > 2$, continuitatea liniară nu mai este suficientă, după cum rezultă din exemplul construit de Tolstov [11] în acest scop.

TEOREMA 6. *Fie* $\overline{x} = f(x)$ *o reprezentare univalentă și continuă în* D. *Atunci mulțimile* $E\{x;\, x \in D,\, \Lambda_f(x) \leqq M\}$, $E\left\{x;\, x \in D,\, \lambda_f(x) \geqq \frac{1}{M}\right\}$ $(0 \leqq M < \infty)$ *sînt închise relativ la* D, *mulțimile* $E\left\{\overline{x};\, \overline{x} \in f(D),\, \lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) \geqq \frac{1}{M}\right\}$, $E\{\overline{x};\, \overline{x} \in f(D),\, \Lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) \leqq M\}$ $(0 \leqq M < \infty)$ *sînt închise relativ la* $f(D)$, *iar mulțimile* $E\{x;\, x \in D,\, \Lambda_f(x) > M\}$, $E\left\{x;\, x \in D,\, \lambda_f(x) < \frac{1}{M}\right\}$, $E\{\overline{x};\, \overline{x} \in f(D),\, \Lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) > M\}$, $E\left\{\overline{x};\, \overline{x} \in f(D),\, \lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) < \frac{1}{M}\right\}$ $(0 \leqq M < \infty)$ *sînt deschise.*

Să demonstrăm mai întîi că $E\{\overline{x};\, \overline{x} \in D,\, \Lambda_f(x) \leqq M\}$ este închisă relativ la D. Într-adevăr, mulțimea $E\{x;\, x \in D,\, \Lambda_{f,\delta}(x) \leqq M\}$, unde am notat

$$\Lambda_{f,\delta}(x) = \sup_{\substack{0 < |k| \leqq \delta \\ x + k \in D}} \frac{|f(x + k) - f(x)|}{|k|},$$

care nu este altceva decît mulțimea în care

$$\frac{|f(x + k) - f(x)|}{|k|} \leqq M,$$

pentru orice k aşa fel încît $x + k \in D$, $0 < |k| \leqq \delta$, este deci — în virtutea lemei precedente — o mulţime închisă relativ la D. Dar

$$E\{x;\, x\in D, \Lambda_f(x) \leqq M\} = \bigcap_{\delta > 0} E\{x;\, x\in D, \Lambda_{f,\delta}(x) \leqq M\},\ ^{3)}$$

căci incluziunea primei părţi în a doua este evidentă, pe cînd incluziunea inversă rezultă din faptul că dacă un punct x_0 aparţine la intersecţie, atunci $\Lambda_{f,\delta}(x_0) \leqq M$ pentru orice $\delta > 0$ şi deci şi

$$\Lambda_f(x_0) = \lim_{\delta\to 0} \Lambda_{f,\delta}(x_0) \leqq M;$$

dar atunci, din faptul că intersecţia unei mulţimi de mulţimi închise este închisă, rezultă că $E\{x;\, x\in D, \Lambda_f(x) \leqq M\}$ este de asemenea închisă relativ la D. Acelaşi raţionament aplicat inversei arată că $E\{\bar{x};\, \bar{x}\in f(D), \Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) \leqq M\}$ este închisă relativ la $f(D)$.

Pentru a demonstra că $E\left\{x;\, x\in D, \lambda_f(x) \geqq \dfrac{1}{M}\right\}$ este închisă relativ la D, observăm că relaţia $\Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) \leqq M$ este echivalentă cu relaţia $\lambda_f(x) \geqq \dfrac{1}{M}$, cum rezultă în virtutea relaţiei

$$\lambda_f(x) = \underline{\lim}_{x_1\to x} \frac{|f(x_1) - f(x)|}{|x_1 - x|} = \underline{\lim}_{\bar{x}_1\to \bar{x}} \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}|}{|f^{-1}(\bar{x}_1) - f^{-1}(\bar{x})|} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim}_{\bar{x}_1\to\bar{x}} \dfrac{|f^{-1}(\bar{x}_1) - f^{-1}(\bar{x})|}{|\bar{x}_1 - \bar{x}|}} = \frac{1}{\Lambda_{f^{-1}}(\bar{x})} \tag{8}$$

şi că mulţimea $E\left\{x;\, x\in D, \lambda_f(x) \geqq \dfrac{1}{M}\right\}$ este imaginea prin reprezentarea omeomorfă $x = f^{-1}(\bar{x})$ a mulţimii $E\{\bar{x};\, \bar{x}\in f(D), \Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) \leqq M\}$, care este închisă relativ la $f(D)$.

Raţionînd în acelaşi fel, rezultă că $E\left\{\bar{x};\, \bar{x}\in f(D), \lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) \geqq \dfrac{1}{M}\right\}$, care este imaginea lui $E\{x;\, x\in D, \Lambda_f(x) \leqq M\}$, este închisă relativ la $f(D)$.

Mulţimile $E\{x;\, x\in D, \Lambda_f(x) > M\}$, $E\left\{x;\, x\in D, \lambda_f(x) < \dfrac{1}{M}\right\}$ şi $E\{\bar{x};\, \bar{x}\in f(D), \Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) > M\}$, $E\left\{\bar{x};\, \bar{x}\in f(D), \lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) < \dfrac{1}{M}\right\}$ sînt deschise ca fiind complementare relativ la mulţimea deschisă D, respectiv $f(D)$, de mulţimi închise relativ la aceste mulţimi.

LEMĂ. *Fie* $\bar{x} = f(x)$ *un omeomorfism în* D. *Atunci mulţimea* $E\{x;\, x\in D, \lambda_f(x) \leqq M\}$ $(0 \leqq M < \infty)$ *este închisă relativ la* D.

---

3) Cu $\bigcap$ am notat intersecţia de mulţimi.

Să demonstrăm mai întîi că $E\{x\,;\ x \in D,\ \lambda_{f,\delta}(x) \leqq M\}$, unde am notat

$$\lambda_{f,\delta}(x) = \inf_{0<|k|\leqq\delta} \frac{|f(x+k)-f(x)|}{|k|},$$

este închisă relativ la D. Fie $\{x_m\}$ un şir de puncte, $x_m \in E\{x\,;\ x \in D,\ \lambda_{f,\delta}(x) \leqq M\}$ şi $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0 \in D$. Să arătăm că $x_0 \in E\{x\,;\ x \in D,\ \lambda_{f,\delta}(x) \leqq M\}$. Într-adevăr, să presupunem mai întîi că pentru o infinitate de x_m, formînd un subşir $\{x_{m_p}\}$, marginea inferioară este atinsă pentru fiecare x_m pentru un $k_m \neq 0$. Aşadar, vom avea

$$\frac{|f(x_{m_p}+k_{m_p})-f(x_{m_p})|}{|k_{m_p}|} \leqq M,$$

şi trecînd la limită pentru $p\to\infty$, vom obţine

$$\lim_{p\to\infty} \frac{|f(x_{m_p}+k_{m_p})+f(x_{m_p})|}{|k_{m_p}|} = \frac{|f(x_0+k)-f(x_0)|}{|k|} \leqq M,$$

unde $|k| \leqq \delta$, căci $|k_{m_p}| \leqq \delta$ şi deci $k = \lim\limits_{p\to\infty} k_{m_p}$. (Dacă şirul K_{m_p} nu converge se extrage un subşir convergent. Aşadar, în acest caz, $x_0 \in E$.

Să presupunem acum, că pentru toţi indicii m, cu excepţia eventuală a unui număr finit (excepţie pe care o putem neglija fără a restrînge generalitatea) marginea inferioară din expresia lui $\lambda_{f,\delta}(x_m)$ nu este atinsă pentru nici un $k : 0 < |k| \leqq \delta$. Aşadar, fiind dat un şir aşa fel încît $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$, atunci, pentru fiecare indice m, trebuie să existe un şir $\{k_{m_p}\}$, aşa fel încît $\lim\limits_{p\to\infty} k_{m_p} = 0$ şi

$$\frac{|f(x_m+k_{m_{p'}})-f(x_m)|}{|k_{m_{p'}}|} < M + \varepsilon_p,$$

pentru toţi $p' \geqq p$. Dar atunci, trecînd la limită pentru $m\to\infty$ şi ţinînd seama că membrul al doilea al inegalităţii este independent de m, vom obţine

$$\frac{|f(x_0+k_{p'})-f(x_0)|}{|k_{p'}|} < M + \varepsilon_p,$$

unde $p' \geqq p$, $k_{p'} = \lim\limits_{m\to\infty} k_{m_{p'}}$ şi $\varepsilon_p \to 0$. Deci $x_0 \in E\{x\,;\ x \in D,\ \lambda_{f,\delta}(x) \leqq M\}$. Raţionînd ca în teorema precedentă, obţinem relaţia

$$E\{x\,;\ x \in D,\ \lambda_f(x) \leqq M\} = \bigcap_{\delta>0} E\{x\,;\ x \in D,\ \lambda_{f,\delta}(x) \leqq M\},$$

care implică faptul că mulţimea $E\{x\,;\ x \in D,\ \lambda_f(x) \leqq M\}$ este închisă relativ la D ca intersecţie de mulţimi închise relativ la D.

TEOREMA 7. *Fie* $\overline{x} = f(x)$ *o reprezentare cvasiconformă în* D. *Atunci* ***mulţimile*** $E\{x\,;\ x \in D,\ \Lambda_f(x) = \infty\}$, $E\{x\,;\ x \in D,\ \lambda_f(x) = 0\}$ şi $E\{\overline{x}\,;\overline{x} \in f(D),\ \Lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) = \infty\}$, $E\{\overline{x}\,;\ \overline{x} \in f(D),\ \lambda_{f^{-1}}(\overline{x}) = 0\}$ *sînt închise relativ la* D, *res-*

pectiv la $f(D)$, *iar mulțimile* $E\{x;\, x \in D, \Lambda_f(x) < \infty\}$, $E\{x;\, x \in D, 0 < \Lambda_f(x) < \infty\}$, $E\{x;\, x \in D, \lambda_f(x) > 0\}$, $E\{x;\, x \in D, 0 < \lambda_f(x) < \infty\}$, $E\{\bar{x};\, \bar{x} \in f(D), \Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) < \infty\}$, $E\{\bar{x};\, \bar{x} \in f(D), 0 < \Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) < \infty\}$, $E\{\bar{x};\, \bar{x} \in f(D), 0 < \lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) < \infty\}$ *sînt deschise.*

Faptul că mulțimea $E\{x;\, x \in D, \lambda_f(x) = 0\}$ este închisă relativ la D este o consecință a lemei precedente. Raționînd ca în această lemă, însă pentru reprezentarea inversă, se stabilește că $E\{\bar{x};\, \bar{x} \in f(D), \lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) = 0\}$ este închisă relativ la $f(D)$. Dar, în virtutea relației (8), respectiv a unei relații analoge cu (8), rezultă că $E\{\bar{x};\, \bar{x} \in f(D), \lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) = \infty\}$ și $E\{x;\, x \in D, \Lambda_f(x) = \infty\}$ sînt închise relativ la $f(D)$, respectiv la D.

Ultima parte a teoremei rezultă în virtutea acelorași considerații ca în teorema precedentă relativ la mulțimile deschise.

§ 2. LEGĂTURA DINTRE REPREZENTĂRILE Q-CVASICONFORME ȘI K-CVASICONFORME (ÎN SENS VÄISÄLÄ)

În acest paragraf stabilim incluziunea clasei reprezentărilor Q-cvasiconforme (definite de noi) în clasa reprezentărilor K^{n-1}-cvasiconforme (definite de Väisälä [13]).

În baza aceluiași raționament ca în teorema 16 din [3], obținem

TEOREMA 8. *Orice reprezentare univalentă* $\bar{x} = f(x)$, *verifică, în punctele sale de diferențiabilitate cu jacobianul* $J \neq 0$, *relațiile*

$$\Lambda_f = \sup_s \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right| = \sqrt[n]{p_1 \cdots p_{n-1} |J|},$$

$$\lambda_f = \inf_s \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right| = \frac{\sqrt[n]{p_1 \cdots p_{n-1} |J|}}{p_1},$$

unde p_i $(i = 1, \ldots, n)$ *sînt parametrii caracteristici ai transformării afine nedegenerate*

$$f_1(x, x_0) = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} (x^i - x_0^i). \tag{9}$$

COROLAR. *Într-un punct de diferențiabilitate cu* $J \neq 0$ *al unei reprezentări univalente* $\bar{x} = f(x)$, *are loc relația*

$$\frac{\Lambda_f}{\lambda_f} = p_1.$$

Această relație precizează relația (6) din cazul unei reprezentări cvasiconforme și a fost stabilită de Väisälä [13] în cazul mai restrictiv al reprezentărilor cvasiconforme de clasă C^1.

Stabilirea relației precedente ne va permite să demonstrăm incluziunea clasei reprezentărilor Q-cvasiconforme cu un ansamblu de caracteristici în clasa reprezentărilor K-cvasiconforme ale lui Väisälä [13], pentru care acesta dă următoarele trei definiţii echivalente:

1° Reprezentare K-cvasiconformă în $D\,(1 \leqq K < \infty)$ se numeşte o reprezentare topologică cu dilatarea $\delta(x)$ uniform mărginită în D şi aşa fel încît

$$\delta(x) \leqq K$$

aproape peste tot în D.

Amintim că

$$\delta(x) = \max\,[\underline{\delta}(x),\ \overline{\delta}(x)],$$

$$\underline{\delta}\,(x) = \varliminf_{r\to 0} \frac{T(x, r)}{A_n\, l\,(x, r)^n}, \qquad \overline{\delta}(x) = \varlimsup_{r\to 0} \frac{A_n\, L\,(x, r)^n}{T(x, r),},$$

$$T(x, r) = m\,\{f[B^n\,(x, r)]\},$$

$$L\,(x, r) = \max_{|x'-x|=r}\ |f(x') - f(x)|, \quad l(x, r) = \min_{|x'-x|=r}\ |f(x') - f(x)|,$$

unde $B^n(x, r)$ este interiorul sferei de centru x şi de rază r, $A_n r^n$ este volumul său, iar $x,\ x' \in D$.

2° Reprezentare K-cvasiconformă este o reprezentare topologică în D şi care verifică condiţia

$$\frac{1}{K}\,M(\Gamma) \leqq M\,(\Gamma') \leqq KM\,(\Gamma),$$

pentru orice familie de curbe $\{\Gamma\}$ din D, unde $M(\Gamma)$ este modulul familiei de curbe $\{\Gamma\}$, iar $\{\Gamma'\}$ e imaginea lui $\{\Gamma\}$ prin reprezentarea K-cvasiconformă.

3° Reprezentare K-cvasiconformă este o reprezentare topologică, ACL (absolut continuă pe linii), aproape peste tot diferenţiabilă în D şi care verifică aproape peste tot în D relaţia

$$\frac{1}{K} \max\,|f'(x)\,|^n \leqq |J(x)| \leqq K \min\,|f'(x)|^n.$$

Amintim că

$$\max|\,f'(x)| = \max_{|\Delta x|=1}\ |f'(x)\,\Delta x|, \quad \min\,|f'(x)| = \min_{|\Delta x|=1}\ |f'(x)\,\Delta x|,$$

unde $f'(x)$ este matricea funcţională a lui $f(x)$, iar produsul $f'(x)\ \Delta x$ se deduce din relaţia

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\ \Delta x + \varepsilon(x + \Delta x)\ |\ \Delta x|.$$

TEOREMA 9. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o reprezentare* $\overline{x} = f(x)$ *avînd un A-punct în* x_0 *să transforme elipsoizi infinitezimali de centru* x_0 *şi de caracteristici* (C) *în elipsoizi infinitezimali de caracteristici* (C') *este ca transformarea afină (9) corespunzătoare să transforme elipsoizi de centru* x_0 *şi de caracteristici* (C) *în elipsoizi de caracteristici* (C').

Să demonstrăm mai întîi suficiența. Diferențiabilitatea lui $f(x)$ se poate exprima sub forma

$$\overline{x}^i(x)=\overline{x}^i(x_0)+\overline{x}^i_k(x_0)(x^k-x^k_0)+\varepsilon^i(x, x_0)\,|x-x_0|, \qquad (i=1,\ldots,n),$$

unde $\varepsilon^i(x, x_0)\to 0$ în același timp cu $|x-x_0|$. Să presupunem că elipsoidul de centru $\overline{x}_0=f(x_0)$ și de caracteristici (C') este de forma :

$$E_{h'}[(C'), \overline{x}_0]: \quad \alpha_{ik}(\overline{x}^i-\overline{x}^i_0)(\overline{x}^k-\overline{x}^k_0)=\sqrt[n]{p'^2_1\ldots p'^2_{n-1}}\,h'^2,$$

unde pentru a simplifica am notat $\overline{x}^i(x_0)=\overline{x}^i_0$. Acest elipsoid este imaginea prin transformarea afină (9) a următorului elipsoid de centru x_0 și de caracteristici (C) :

$$E_h\ [(C), x_0]: \ \alpha_{ik}\overline{x}^i_m\,\overline{x}^k_q\,(x^m-x^m_0)(x^q-x^q_0)=\sqrt[n]{p'^2_1\ldots p'^2_{n-1}}\,h'^2=$$
$$=\sqrt[n]{p^2_1\ldots p^2_{n-1}J^2}\cdot h^2.$$

Reprezentarea $\overline{x}=f(x)$ transformă elipsoidul E_h într-o suprafață Jordan $f(E_h)$:

$$\alpha_{ik}(\overline{x}^i-\overline{x}^i_0-\varepsilon^i\,|x-x_0|)(\overline{x}^k-\overline{x}^k_0-\varepsilon^k\,|x-x_0|)=\sqrt[n]{p'^2_1\ldots p'^2_{n-1}}\,h'^2.$$

Să demonstrăm că această suprafață este cuprinsă între doi elipsoizi de centru $\overline{x}_0$ și de caracteristici (C') și al căror raport al semiaxelor minime tinde către 1 pentru $h\to 0$.

Într-adevăr, fiecărui punct $x\in E_h$ îi corespunde un punct $\overline{x}(x)$ situat pe un elipsoid $E_{h'}$ de caracteristici (C') dar de centru $\overline{x}_0+\varepsilon(x, x_0)|x-x_0|$. Evident că elipsoidul de centru x_0, caracteristici (C') și semiaxa minimă egală cu $h'+\max\limits_{x\in E_h}[|\varepsilon(x, x_0)|\,|x-x_0|]$ va fi circumscris suprafeței $f(E_h)$ și că elipsoidul omotetic cu primul și avînd semiaxa minimă egală cu $h'-\max\limits_{x\in E_h}[|\varepsilon(x, x_0)|\,|x-x_0|]$ — în ipoteza că această cantitate este pozitivă — va fi înscris în suprafața $f(E_h)$. Pe de altă parte, evident, $\min\limits_{x\in E_h}|x-x_0|=h$ și $\max\limits_{x\in E_h}|x-x_0|=p_1h=p_1Ah'$, unde $A=\left(\dfrac{p'_1\ldots p'_{n-1}}{p_1\ldots p_{n-1}|J|}\right)^{\frac{1}{n}}$, și deci pentru un h suficient de mic, vom avea :

$$h'+\max_{x\in E_h}[|\varepsilon(x, x_0)|\,|x-x_0|]\leqq h'+p_1h'A\max_{x\in E_h}|\varepsilon(x, x_0)|,$$

$$h'-\max_{x\in E_h}[|\varepsilon(x, x_0)|\,|x-x_0|]\geqslant h'-p_1h'A\max_{x\in E_h}|\varepsilon(x, x_0)|>0.$$

Dar atunci

$$\lim_{h\to 0}\frac{h'+p_1h'A\max\limits_{x\in E_h}|\varepsilon(x, x_0)|}{h'-p_1h'A\max\limits_{x\in E_h}|\varepsilon(x, x_0)|}=\lim_{h\to 0}\frac{1+p_1A\max\limits_{x\in E_h}|\varepsilon(x, x_0)|}{1-p_1A\max\limits_{x\in E_h}|\varepsilon(x, x_0)|}=1,$$

căci $\max\limits_{x\in E_h}|\varepsilon(x, x_0)|\to 0$ pentru $h\to 0$. Cu aceasta am stabilit suficiența.

Necesitatea este o consecință a suficienței, deoarece dacă transformarea afină (9) duce elipsoizii $E_h[(C), x_0]$ în elipsoizii $E'_h[(C''), \overline{x}_0]$, unde $(C') \neq (C'')$, atunci, în virtutea suficienței, $\overline{x} = f(x)$ va duce elipsoizii infinitezimali $E[(C), x_0]$ în elipsoizi infinitezimali $E[(C''), \overline{x}_0]$, ceea ce ar contrazice ipoteza că elipsoizii infinitezimali $E[(C), x_0]$ sînt duși în elipsoizii infinitezimali $E[(C'), \overline{x}_0]$.

TEOREMA 10. *Dilatările extreme ale unei reprezentări cvasiconforme* $\overline{x} = f(x)$ *de caracteristici* (C), (C') *verifică, în orice punct de diferențiabilitate, inegalitatea*

$$\frac{\Lambda_f}{\lambda_f} \leqq p_1 p'. \tag{10}$$

Este o consecință a teoremei 3 din [1].

TEOREMA 11. *Fie* $\overline{x} = f(x)$ *un omeomorfism Q-cvasiconform a bilei* $|x| \leqq 1$ *în bila* $|\overline{x}| \leqq 1$, *cu* $f(0) = 0$. *Atunci modulul său verifică inegalitatea*

$$R_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{2^{\frac{(n-4)(n-1)}{2}} 3^{n-2} \pi A_n Q^{n-1}}{|x|^n}} < |f(x)| < \left[\frac{2^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}} 3^{n-2} \pi A_n Q^{n-1}}{\lg \frac{1}{|x|}} \right]^{\frac{1}{n}}, \tag{11}$$

unde $x \in f^{-1}[|\overline{x}| < R_0]$ *și* $R_0 = \min\limits_{|x|=1} |f(x)|$.

Fie $x_1 \neq 0$ un punct oarecare din bila $|x| < 1$ și fie $|x_1| = r_1$. Să aproximăm volumul lui $f(r_1 < |x| < 1)$. În acest scop să reamintim următoarea teoremă a lui Kudriavțev [7]:

Fie $\overline{x} = f(x)$ *o reprezentare diferențiabilă și slab monotonă pe mulțimea măsurabilă* $E \subset D$; *atunci*

$$\int\limits_E |J(x)| \, \mathrm{d}\tau = mf(E). \tag{12}$$

Să mai reamintim că o reprezentare $\overline{x} = f(x)$ se numește slab monotonă dacă imaginea inversă $f^{-1}(\overline{x})$ a fiecărui punct $\overline{x} \in f(E)$ este o mulțime conexă.

În virtutea teoremei 27 din [2], $f(x)$ este diferențiabilă aproape peste tot în $|x| \leqq 1$. Fie E mulțimea punctelor de diferențiabilitate. Cum omeomorfia implică monotonia, atunci, în virtutea teoremei lui Kudraivțev, vom avea:

$$A_n > mf(r_1 < |x| < 1) > mf[(r_1 < |x| < 1) \cap E] = \int\limits_{(r_1 < |x| < 1) \cap E} |J| \mathrm{d}\tau, \tag{13}$$

A_n fiind volumul bilei unitate. Dar din teorema 3 din [1] deducem că

$$|J| \geqq \frac{\Lambda_f^n p'_1 \ldots p'_{n-1}}{p_1'^n p_1 \ldots p_{n-1}} \geqq \frac{\Lambda_f^n}{(p_1 p'_1)^{n-1}} \geqq \frac{\Lambda_f^n}{Q^{n-1}},$$

aşa că, în virtutea relaţiei (13), vom avea

$$A_n > \frac{1}{Q^{n-1}} \int\limits_{(r_1<|x|<1)\cap E} \Lambda_f^n \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{Q^{n-1}} \int\limits_{r_1<|x|<1} \Lambda_f^n \mathrm{d}\tau = \frac{1}{Q^{n-1}} \int_r^1 r^{n-1} \mathrm{d}r \int_S \Lambda_f^n \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{Q^{n-1}} \int_{r_1}^1 r^{n-1} \, \mathrm{d}r \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Lambda_f^n \sin^{n-2} \vartheta_1 \ldots \sin \vartheta_{n-2} \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{n-1} = \quad (14)$$

$$= \frac{1}{Q^{n-1}} \int_{r_1}^1 r^{n-2} \, \mathrm{d}r \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi \sin^{n-2} \vartheta_1 \ldots \sin \vartheta_{n-2} \, \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{n-2} \int_0^{2\pi} \Lambda_f^n r \mathrm{d}\vartheta_{n-1},$$

unde S e sfera unitate. Pe de altă parte, aplicînd inegalitatea lui Hölder obţinem

$$\left(\int_0^{2\pi} \Lambda_f r \mathrm{d}\vartheta_{n-1}\right)^n \leqq \int_0^{2\pi} \Lambda_f^n r \mathrm{d}\vartheta_{n-1} \left(\int_0^{2\pi} r \mathrm{d}\vartheta_{n-1}\right)^{n-1} = (2\pi r)^{n-1} \int_0^{2\pi} \Lambda_f^n r \mathrm{d}\vartheta_{n-1}. \quad (15)$$

Dar, în virtutea corolarului 1 al teoremei 16 din [3], deducem că

$$\int_0^{2\pi} \Lambda_f r \mathrm{d}\vartheta_{n-1} \geqq \int_0^{2\pi} \sqrt[n]{|J|} \, r \mathrm{d}\vartheta_{n-1} = l(r) > 2 \, |f(x_1)|, \quad (16)$$

aproape pentru toţi $r (r_1 < r < 1)$, sau pentru cel puţin un k $(k = 1, \ldots, n-2)$ aproape pentru toate valorile lui θ_k $(\theta < \theta_k < \pi)$, unde $l(r)$ este lungimea imaginii circumferinţei

$$|x| = r, \ \vartheta_k = \text{const.} \qquad (k = 1, \ldots, n-2).$$

Din relaţiile (14), (15) şi (16) deducem

$$A_n > \frac{2|f(x_1)|^n}{(\pi Q)^{n-1}} \int_{r_1}^1 \frac{\mathrm{d}r}{r} \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi \sin^{n-2} \vartheta_1 \ldots \sin \vartheta_{n-2} \, \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{n-2} >$$

$$> \frac{2|f(x_1)|^n}{(\pi Q)^{n-1}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \ldots \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^{n-2} \vartheta_1 \ldots \sin \vartheta_{n-2} \, \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{n-2} >$$

$$> \frac{2|f(x_1)|^n}{\left(2^{\frac{n-2}{2}} \pi Q\right)^{n-1}} \lg \frac{1}{\mathrm{r}_1} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \ldots \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{n-2} = \frac{|f(x_1)|^n}{2^{\frac{(n-4)\,(n-1)}{2}} \, 3^{n-2} \, \pi Q^{n-1}} \lg \frac{1}{r_1},$$

de unde deducem că

$$|f(x_1)| < \left(2^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}} \, \frac{3^{n-2} \, \pi A_n Q^{n\;1}}{2 \lg \dfrac{1}{r_1}}\right)^{\frac{1}{n}},$$

ceea ce stabileşte a doua parte a inegalităţii (11) pentru orice punct $x_1 \in \{|x| < 1\}$.

Fie acum $x_1 \in f^{-1}\,[|\overline{x}| < R_0|$ şi $|f(x_1)| = R_1$, iar $x = f^{-1}(\overline{x})$ omeomorfismul invers. În virtutea lemei 1 şi a teoremei 25 din [2], $f^{-1}(\overline{x})$ este diferenţiabil aproape peste tot în $f(|x| < 1)$. Apoi, din teorema 11 din [3], din relaţia (8) şi din faptul că

$$J_{\overline{x}/x} = \frac{1}{J_{x/\overline{x}}} \tag{17}$$

în orice A—punct, rezultă inegalitatea

$$\Lambda_{f^{-1}} \geqq \sqrt[n]{|J_{x/\overline{x}}|},$$

care continuă să fie verificată şi pentru $J_{x/\overline{x}} = 0$. În sfîrşit, din teorema 3 din [1] şi ţinînd seama de relaţiile (8) şi (17), obţinem

$$J_{x/\overline{x}} \geqq \frac{\Lambda_{f^{-1}}^{n}}{Q^{n-1}}.$$

Ţinînd seamă de aceste consideraţii şi raţionînd ca în prima parte a demonstraţiei, ajungem la inegalitatea

$$|x_1| < \left[\frac{2^{\frac{(n-1)(n-4}{2}}\,3^{n-2}\,\pi A_n Q^{n-1}}{\lg \dfrac{R_0}{|f(x_0)|}}\right]^{\frac{1}{n}},$$

de unde deducem că

$$|f(x_1)| > R_0\,\mathrm{e}^{-\frac{2^{\frac{(n-4)(n-1)}{2}}\,3^{n-2}\pi A_n Q^{n-1}}{2|x_1|^n}}$$

TEOREMA 12. *Fie $\overline{x} = f(x)$ un omeomorfism Q-cvasiconform al unui domeniu D. Atunci*

$$\delta_L(x_0) = \varlimsup_{r\to 0} \frac{\max\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|} < 8BQ\,\mathrm{e}^{(3BQ4)\,n} \tag{18}$$

unde

$$B = \left[2^{\frac{(n-1)\,(n-4)}{2}}\,3^{n-2}\,\pi A_n\,Q^{2(n-1)}\right]^{\frac{1}{n}},$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in D$ și fie (C), (C') caracteristicile lui $f(x)$ în x_0. Să presupunem că elipsoidul $E_h[(C), x_0]$ are semiaxa minimă suficient de mică pentru ca imaginea sa $f(E_h)$ să fie conținută între doi elipsoizi $E_{h'_1}\,[(C'), f(x_0)]$ și $E_{h'_2}\,[(C'), f(x_0)]$, cu raportul semiaxelor minime

$$1 > \frac{h'_2}{h'_1} > 1 - \varepsilon > \frac{1}{2}.$$

Să mai presupunem că, pentru orice elipsoid omotetic cu E_h şi a cărei semiaxă minimă este inferioară lui h, condiţia precedentă continuă să fie verificată.

Să considerăm acum funcția

$$\overline{x}' = \psi(x') = \frac{\varphi(x')}{p_1' h_1'} = \frac{f(p_1 h x' + x_0) - f(x_0)}{p_1' h_1'} =$$

$$= \frac{f\left(p_1 h \dfrac{x - x_0}{p_1 h} + x_0\right) - f(x_0)}{p_1' h_1'} = \frac{f(x) - f(x_0)}{p_1' h_1'},$$

unde $x' = \dfrac{x - x_0}{p_1 h}$ și $\psi(0) = 0$. Trecînd de la x la x', respectiv de la $\overline{x}$ la $\overline{x}'$, E_h, respectiv $E_{h_1'}$, se transformă în E_{h*}, respectiv $E_{h_1'*}$, omotetici cu E_h, respectiv cu $E_{h_1'}$, și ale căror semiaxe maxime sînt egale cu unitatea. În urma acestei omotetii, raportul semiaxelor minime

$$\frac{h_2'^*}{h_1'^*} = \frac{h_2'}{h_1'} > 1 - \varepsilon > \frac{1}{2}\cdot$$

Vom scrie acum $\overline{x}' = \psi(x')$ ca următorul produs de trei omeomorfii:

$$\overline{x}' = \psi(x') = A'^{-1}\{\chi\,[A(x')]\},$$

unde $\xi = A(x')$, respectiv $\xi' = A'(x')$, sînt transformări afine, care fac să corespundă fiecărui elipsoid avînd centrul în origine și caracteristicile (C), respectiv (C'), sferele avînd centrul în origine, iar razele egale cu semiaxele maxime; în sfîrșit, $\xi' = \chi(\xi)$ este un omeomorfism Q^2-cvasiconform avînd originea ca punct de analiticitate. Transformarea afină $\xi = A\,(x')$ face să corespundă elipsoidului E_{h*} sfera unitate S, care este transformată de $\xi' = \chi(\xi)$ în $\chi(S)$, care-i transformată la rîndul ei de $\overline{x}' = A'^{-1}(\xi')$ în $A'^{-1}\,[\chi(S)]$ conținută între elipsoizii $E_{h_1'*}$, $E_{h_2'*}$. Faptul că $\dfrac{h_2'^*}{h_1'^*} > 1 - \varepsilon$, implică $\dfrac{R_0}{1} = \dfrac{h_2'^*}{h_1'^*} > 1 - \varepsilon$, unde R_0 și 1 sînt razele celor două sfere concentrice care-l conțin pe $\chi(S)$, iar $R_0 = \min\limits_{\xi \in S} |\,\chi(\xi)\,| > 1 - \varepsilon > \dfrac{1}{2}\cdot$

Fie $r_0 = \min\limits_{|\xi'| = R_0} |\,\chi^{-1}\,(\xi')\,|$. Să ne ocupăm pe rînd de cele două cazuri posibile și anume:

1° $\qquad r_0 \geqq \dfrac{1}{eQ^2}$ și

2° $\qquad r_0 < \dfrac{1}{eQ^2}\cdot$

1° *Cazul* $r_0 \geqq \dfrac{1}{eQ^2}$ Să considerăm inelul

$$\frac{1}{eQ^4} < |\,\xi\,| < \frac{1}{eQ^2} < \frac{1}{e}\cdot \tag{19}$$

În virtutea teoremei precedente, pentru orice ξ conţinut în acest inel

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(3BQ^4)^n} < R_0\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{B}{|\xi|}\right)^n} < |\chi(\xi)| < \frac{B}{\left(\lg\frac{1}{|\xi|}\right)^{\frac{1}{n}}} < B,$$

de unde deducem că pentru orice pereche de puncte ξ_1, ξ_2 ale inelului (19), vom avea

$$\frac{|\chi(\xi_1)|}{|\chi(\xi_2)|} < 2\,B\,\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n},$$

ceea ce revine la

$$\frac{|\chi[A(x')]|}{|\chi[A(x')]|} < 2\,B\,\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n}$$

pentru orice pereche de puncte x'_1, x'_2 din inelul A_E format de cei doi elipsoizi omotetici cu centrul în origine, de caracteristici (C) şi avînd semiaxele maxime $\frac{1}{eQ^2}$ şi $\frac{1}{eQ^4}\cdot$

Fie $x^* \in E_{h_0}\left(h_0 = \frac{eQ^4}{p_1}\right)$, aşa fel încît

$$|\chi[A(x^*)]| = \min_{x' \in E_{h_0}} |\,\chi\,[A(x')]|.$$

Inegalitatea precedentă, ţinînd seama şi de relaţia precedentă, exprimă faptul că imaginea inelului A_E prin $\xi' = \chi\,[A(x')]$ este conţinută într-un inel sferic de raze $r_2 = |\chi[A(x^*)]|$ şi $r_1 = 2r_2\,\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n}$. Dar transformarea afină $\overline{x}' = A'^{-1}\,(\xi')$ face să corespundă acestui inel sferic un inel determinat de doi elipsoizi cu centrul în origine, caracteristicile (C') şi semiaxele maxime respectiv egale cu r_1, r_2. Cum acest inel e conţinut la rîndul său într-un inel sferic de raze r_1 şi $\frac{r_2}{Q}$ rezultă că pentru orice pereche de puncte $x'_1, x'_2 \in A_E$ vom avea

$$\frac{|\psi(x')|}{|\psi(x')|} = \frac{|A'^{-1}\{\chi[A(x')]\}|}{|A'^{-1}\{\chi[A(x')]\}|} < Q\frac{r_1}{r_2} = 2BQ\,\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n}\cdot$$

2° *Cazul* $r_0 \leqq \frac{1}{eQ^2}$. Deosebim două subcazuri:

A° $\quad r_0 \leqq \frac{1}{eQ^4}$ şi

B° $\quad \frac{1}{eQ^4} \leqq r_0 \leqq \frac{1}{eQ^2}\cdot$

Să considerăm mai întîi primul subcaz :

2° A° $r_0 \leqq \frac{1}{eQ^4}$. În virtutea ipotezelor făcute

$$\frac{\max\limits_{|\xi|=r_0} |\chi(\xi)|}{\min\limits_{|\xi|=r_0} |\chi(\xi)|} < \frac{1}{1-\varepsilon},$$

aşa că

$$\frac{\max\limits_{|\xi|=1} |\chi(\xi)|}{\min\limits_{|\xi|=r_0} |\chi(\xi)|} < \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}.$$

Aşadar, pentru orice pereche de puncte x'_1, x'_2 din inelul format de perechile de elipsoizi avînd centrul în origine, caracteristicile (C) şi semiaxele maxime respectiv $\frac{1}{eQ^2}$, $\frac{1}{eQ^4}$, vom obţine

$$\frac{|\chi[A(x_1')]|}{|\chi[A(x_2')]|} < \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} < 4 < 2B\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n}.$$

2° B° $\frac{1}{eQ^4} \leqq r_0 \leqq \frac{1}{eQ^2}$. Să considerăm mai întîi inelul $r_0 \leqq |\xi| \leqq \frac{1}{eQ^2}$. În virtutea celor ce preced, pentru orice pereche de puncte ξ_1, ξ_2 din acest inel, vom avea

$$\frac{|\chi(\xi_1)|}{|\chi(\xi_2)|} < \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} < 4.$$

Să considerăm apoi inelul $\frac{1}{eQ^4} \leqq |\xi| \leqq r_0 < \frac{1}{e}$. În virtutea celor obţinute în cazul 1°, vom avea

$$\frac{|\chi(\xi_1)|}{|\chi(\xi_2)|} < 2B\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n},$$

pentru orice pereche de puncte $\xi_1, \xi_2 \in \left\{\frac{1}{eQ^4} \leqq |\xi| \leqq r_0\right\}$. Fie ξ_1, ξ_2 o pereche de puncte din inelul $\left\{\frac{1}{eQ^4} \leqq |\xi| \leqq \frac{1}{eQ^2}\right\}$, aşa fel ca $\xi_1 \in \left\{r_0 \leqq |\xi| \leqq \frac{1}{eQ^2}\right\}$, iar $\xi_2 \in \left\{\frac{1}{eQ^4} \leqq |\xi| \leqq r_0\right\}$ şi fie $\xi^* \in \{|\xi| = r_0\}$. În virtutea celor ce preced, vom avea :

$$\frac{|\chi(\xi_1)|}{|\chi(\xi_2)|} = \frac{|\chi(\xi_1)|}{|\chi(\xi^*)|} \cdot \frac{|\chi(\xi^*)|}{|\chi(\xi_2)|} < \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \cdot 2B\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n} < 8B\,\mathrm{e}^{(BQ^4)^n}.$$

Aşadar, în fiecare din cazurile 2°, pentru orice pereche ξ_1, ξ_2 din $\left\{\frac{1}{eQ^4} \leqq |\xi| \leqq \frac{1}{eQ^2}\right\}$, vom avea

$$\frac{|\chi(\xi_1)|}{|\chi(\xi_2)|} < 8B\,\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n}. \tag{20}$$

Această inegalitate obţinută în cazurile 1° şi 2° continuă să rămînă adevărată pentru orice pereche de puncte $\xi_1, \xi_2 \in \left\{\frac{1}{eQ^{m+4}} \leqq |\xi| \leqq \frac{1}{eQ^{m+2}}\right\}$. Într-adevăr, fie

$$S_m = \left\{|\xi| = \frac{1}{Q^m}\right\}, \quad R_m = \min_{\xi\in S_m} |\chi(\xi)|, \; r_m = \min_{|\xi'|=R_m} |\chi^{-1}(\xi')|$$

şi să considerăm, ca mai sus, cele două cazuri posibile: $r_m \geqq \frac{1}{eQ^{m+2}}$ şi $r_m \leqq \frac{1}{eQ^{m+2}}$. Dacă efectuăm acum o omotetie de coeficient Q^m : $\xi''=Q^m\xi$ şi notăm

$$\chi(\xi) = \chi\left(\frac{\xi''}{Q^m}\right) = \Theta(\xi''),$$

atunci inegalitatea (20) devine

$$\frac{|\chi(\xi_1)|}{|\chi(\xi_2)|} = \frac{|\Theta(\xi_1'')|}{|\Theta(\xi_2'')|} < 8B\,\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n},$$

pentru orice pereche de puncte $\xi_1, \xi_2 \in \left\{\frac{1}{eQ^{m+4}} < |\xi| < \frac{1}{eQ^{m+2}}\right\}$, căci $\xi_1'', \xi_2'' \in \left\{\frac{1}{eQ^4} < |\xi''| < \frac{1}{eQ^2}\right\}$ iar $\Theta(\xi'')$ verifică condiţiile cazului 1° atunci cînd $r_m \geqq \frac{1}{eQ^{m+2}}$, şi pe cele ale cazului 2° atunci cînd $r_m \leqq \frac{1}{eQ^{m+2}}$. Aceasta implică

$$\frac{|\chi[A(x_1')]|}{|\chi[A(x_2')]|} < 8B\,\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n},$$

pentru orice pereche de puncte x_1', x_2' aparţinînd la un inel oarecare din şirul format de perechile de elipsoizi avînd centrul în origine, caracteristicile (C) şi semiaxele maxime respectiv egale cu $\frac{1}{eQ^{m+2}}, \frac{1}{eQ^{m+4}}$. Dar atunci, raţionînd ca în cazul 1°, inegalitatea precedentă implică

$$\frac{|\psi(x'_1)|}{|\psi(x'_2)|} = \frac{|A'^{-1}\{\chi[A(x'_1)]\}|}{|A'^{-1}\{\chi[A(x'_2)]\}|} < 8BQ\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n}.$$

pentru orice pereche x'_1, x'_2 aparţinînd la un inel oarecare al şirului precedent, aşa că pentru $r' < \frac{1}{eQ^3}$, sfera $|x'| = r'$ va fi conţinută într-un inel din şirul menţionat şi deci, pentru un astfel de r', vom avea

$$\frac{\max\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|} = \frac{\max\limits_{|x'|=r'} |\psi(x')|}{\min\limits_{|x'|=r'} |\psi(x')|} < 8BQ\mathrm{e}^{(3BQ^4)^n},$$

unde $r = p_1 hr'$ (h de la începutul demonstraţiei). Această inegalitate are loc pentru orice r suficient de mic, şi deci continuă să aibă loc şi la limită, ceea ce stabileşte teorema noastră.

TEOREMA 13. *Orice reprezentare $\bar{x} = f(x)$, Q-cvasiconformă în D, este K-cvasiconformă în sensul lui Väisälä în D, cu $K = Q^n$.*

Fie x_0 un punct arbitrar din D. Din expresia dilatării δ_L (Väisälä [13]), deducem relaţia

$$\delta_L(x_0) = \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\dfrac{|f(x') - f(x_0)|}{|x' - x_0|}}{\dfrac{|f(x'') - f(x_0)|}{|x'' - x_0|}} \leqslant \frac{\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{|x' - x_0|}}{\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}} = \frac{\Lambda_f(x_0)}{\lambda_f(x_0)}, \tag{21}$$

unde am notat

$$\max_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)| = |f(x') - f(x_0)|,$$

$$\min_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)| = |f(x') - f(x_0)|.$$

Dar atunci, din relaţia lui Väisälä [13]:

$$\delta \leqq \delta_L^n, \tag{22}$$

în virtutea Q-cvasiconformităţii şi a relaţiei (10), rezultă că aproape peste tot în D

$$\delta(x) \leqq \delta_L^n(x) \leqq Q^n.$$

Pe de altă parte, în virtutea relaţiilor (22) şi (18), rezultă că dilatarea $\delta(x)$ este uniform mărginită în D. Şi cu aceasta am stabilit că $\bar{x} = f(x)$ este Q-cvasiconform în sensul lui Väisälä conform definiţiei 1°.

Observaţie. Incluziunea clasei reprezentărilor Q-cvasiconforme în clasa reprezentărilor K-cvasiconforme a lui Väisälä este strictă, căci de exemplu reprezentarea

$$f(z) = \begin{cases} \left(K + \dfrac{|z|}{\arg z}\right) z & \text{dacă } 0 < |z| < \arg z \leqq 2\pi, \\ \left[K + \dfrac{\arg z}{|z|} + \left(1 - \dfrac{\arg z}{|z|}\right)\dfrac{|z|}{2\pi}\right] z & \text{dacă } 0 < \arg z \leqq |z| \leqq 2\pi, \\ 0 & \text{dacă } \quad z = 0 \end{cases} \tag{23}$$

unde am presupus $K > 0$ şi $z = x + iy$ este o funcţie de variabilă complexă, omeomorfă în vecinătatea originii, avînd $\delta_L(0) = 1 + \dfrac{1}{K}$. Este deci o reprezentare $\left(1 + \dfrac{1}{K}\right)$-cvasiconformă în sens Väisälä în origine fără să fie Q-cvasiconformă (în sensul definiţiei noastre) în origine.

COROLAR. *Orice reprezentare cvasiconformă este local K-cvasiconformă în sens Väisälä.*

TEOREMA 14. *Un omeomorfism cvasiconform într-un domeniu D duce orice mulţime de măsură nulă tot într-o mulţime de măsură nulă.*

Väisälä [13] a demonstrat că un omeomorfism K-cvasiconform (după definiţia sa) duce orice mulţime închisă de măsură nulă tot într-o mulţime de măsură nulă. Dar, în virtutea corolarului precedent, o reprezentare cvasiconformă $\overline{x} = f(x)$ este K-cvasiconformă pe orice mulţime Δ, $\overline{\Delta} \subset D$ (evident, K depinde în acest caz de Δ). Fie $D = \bigcup\limits_k \Delta_k$, şi $E_k = E \cap \Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, unde E este o mulţime închisă de măsură nulă. Evident, $mE_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Atunci, în virtutea aditivităţii complete a funcţiei de mulţime $\Phi(E) = mf(E)$, vom avea

$$mf(E) = \Phi(E) = \sum_k \Phi(E_k) = \sum_k mf(E_k) = 0.$$

Deci un omeomorfism cvasiconform duce mulţimile închise de măsură nulă tot în mulţimi de măsură nulă.

Fie $G = \bigcap\limits_k D_k$ o mulţime de tipul G_δ (adică intersecţia unui număr numărabil de mulţimi deschise). Vom arăta că o reprezentare cvasiconformă (în sensul definiţiei noastre) duce mulţimi de tipul G_δ de măsură nulă tot în mulţimi de măsură nulă. Într-adevăr, o mulţime G de tipul G_δ este transformată de un omeomorfism tot într-o mulţime de tipul G_δ. Să presupunem că $mG = 0$ şi că totuşi $mf(G) = \alpha > 0$. Mulţimea $G' = f(G)$ fiind tot o mulţime de tipul G_δ, este evident măsurabilă, şi deci, în virtutea unui criteriu a lui de la Vallée-Poussin, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulţime închisă $F' \subset G'$ aşa fel încît $m(G' - F') < \varepsilon$. Dacă luăm $\varepsilon < \dfrac{\alpha}{2}$, atunci, în virtutea inegalității precedente, vom avea $mF' > \frac{\alpha}{2}$. Dar, pe de altă parte, $F = f^{-1}(F')$ va fi o mulțime închisă conținută în G și deci $mF = 0$, ceea ce implică, în virtutea primei părți a demonstrației, $mF' = 0$, care contrazice $mF' > \frac{\alpha}{2}$ și deci și $mG' = \alpha > 0$. Deci $mG' = 0$.

Fie acum E o mulțime oarecare din D de măsură nulă. Atunci există o mulțime G de tipul G_δ astfel ca $E \subset G$ și $mG = 0$. Dar aceasta implică, în virtutea celor ce preced, $mG' = 0$, unde $G' = f(G)$. Cum însă $E' = f(E) \subset G'$, rezultă $mE' = 0$.

COROLAR. *Jacobianul unei reprezentări cvasiconformă* $\bar{x} = f(x)$ *a unei mulțimi măsurabile* $E \subset D$ *verifică relația* (*12*).

Fie $E_0 \subset E$ mulțimea punctelor de diferențiabilitate a lui $f(x)$. Ținînd seama de faptul că $f(x)$ este slab monotonă și aproape peste tot diferențiabilă în E, atunci, în virtutea teoremei lui Kudriavțev [7] (citată cu ocazia teoremei 11), rezultă

$$\int_E |J(x)|\,d\tau = \int_{E_0} |J(x)|\,d\tau = mf(E_0) = mf(E_0) + mf(E - E_0) = mf(E),$$

deoarece, în virtutea teoremei precedente, $mf(E - E_0) = 0$.

TEOREMA 15. *Dilatările extreme ale unei reprezentări* $\bar{x} = f(x)$, *cvasiconforme în* D, *și ale reprezentării inverse* $x = f^{-1}(\bar{x})$ *verifică, aproape peste tot în* D, *relațiile*:

$$\Lambda_f(x),\ \Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) < \infty;\quad \lambda_f(t),\ \lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) \neq 0.$$

În lema 1 din [2], am stabilit că dilatarea maximă a unei reprezentări Q-cvasiconforme, cît și a inversei sale sînt finite aproape peste tot în D; dar această proprietate rămîne valabilă și pentru reprezentările cvasiconforme, căci dacă $\{V_\alpha\}$ este o acoperire numărabilă a lui D așa fel încît $\overline{V}_\alpha \subset D$, iar $\bar{x} = f(x)$ este cvasiconformă în D, ea este Q-cvasiconformă în fiecare $\overline{V}_\alpha$ (bineînțeles Q depizînd de $\overline{V}_\alpha$) și dacă, de exemplu, $\Lambda_f(x) < \infty$ aproape peste tot în fiecare V_α, vom avea de asemenea $\Lambda_f(x) < \infty$ aproape peste tot în D. Dacă ținem seama că $\{f(V_\alpha)\}$ este o acoperire a lui $f(D)$ așa fel încît $\overline{f(V_\alpha)} \subset f(D)$ și că $\Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) < \infty$ aproape peste tot în fiecare $f(V_\alpha)$ și raționînd ca mai sus, rezultă de asemenea că $\Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) < \infty$ aproape peste tot în $f(D)$.

Pentru a deduce că $\lambda_f(x) \neq 0$ aproape peste tot în D, observăm că relațiile $\lambda_f(\bar{x}) \neq 0$, $\Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) < \infty$ sînt echivalente, după cum rezultă din relația (8). Și atunci, în virtutea teoremei 14 și a faptului că $\Lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) = \infty$ cel mult pe o mulțime de măsură nulă, rezultă că nici relația $\lambda_f(x) = 0$ nu poate avea loc decît tot pe o mulțime de măsură nulă, imagine a celei dintîi prin reprezentarea $\bar{x} = f(x)$. Ultima relație rezultă prin același raționament relativ la relațiile echivalente $\Lambda_f(x) = \infty$, $\lambda_{f^{-1}}(\bar{x}) = 0$.

TEOREMA 16. *O reprezentare* $\bar{x} = f(x)$, *cvasiconformă în* D, *are jacobianul* $J \neq 0$ *aproape peste tot în* D.

În virtutea teoremei 11 din [3] şi a celei precedente, $J \neq 0$ aproape peste tot în mulţimea punctelor de diferenţiabilitate din D. Cum însă $f(x)$ este aproape peste tot diferenţiabilă în D, rezultă că $J \neq 0$ aproape peste tot în D.

TEOREMA 17. *Orice omeomorfism* $\overline{x} = f(x)$, *Q-cvasiconform în D (în sensul definiţiei noastre), este Q-cvasiconform în D în sens Gehring şi K-cvasiconform în D în sens Väisälä, cu* $K = Q^{n-1}$.

Într-adevăr, în virtutea teoremei 12, $\delta(x)$ este uniform mărginit în D. Pe de altă parte, dacă D_A este mulţimea A-punctelor din D, atunci $mD_A = mD$, căci, în virtutea teoremei 27 din [2] şi a celei precedente, atît mulţimea punctelor lui D, unde $f(x)$ nu-i diferenţiabilă, cît şi a acelora unde $J(x) = 0$, sînt de măsură nulă. Dar într-un A-punct al unei reprezentări cvasiconforme are loc relaţia (Väisälä [13]) :

$$\delta(x) \leqq \delta_L^{n-1}(x),$$

aşa că, ţinînd seama şi de relaţiile (21) şi (10), rezultă că

$$\delta(x) \leqq Q^{n-1},$$

aproape peste tot în D, ceea ce stabileşte partea a doua a teoremei. Cum însă un omeomorfism K-cvasiconform în sens Gehring [4] este K^{n-1}-cvasiconform în sens Väisälä, rezultă şi prima parte a teoremei.

Această teoremă, ţinînd seama de definiţiile 2° şi 3° ale lui Väisälä pentru reprezentările K-cvasiconforme, are următoarele consecinţe :

COROLARUL 1. *Orice reprezentare Q-cvasiconformă în D verifică relaţiile*

$$\frac{1}{Q^{n-1}} M(\Gamma) \leqq M(\Gamma') \leqq Q^{n-1} M(\Gamma),$$

pentru toate familiile de curbe $\{\Gamma\}$ *din D.*

COROLARUL 2. *Orice reprezentare* $\overline{x} = f(x)$, Q - *cvasiconformă în D, este* ACL *şi verifică aproape peste tot în D relaţia*

$$\frac{1}{Q^{n-1}} \max |f'(x)|^n \leqq |J(x)| \leqq Q^{n-1} \min |f'(x)|^n.$$

§ 3. ASUPRA CARACTERIZĂRII REPREZENTĂRILOR CONFORME

În acest paragraf vom da cîteva condiţii necesare şi suficiente pentru ca o reprezentare cvasiconformă să fie conformă şi vom stabili cîteva proprietăţi ale acestor reprezentări.

LEMĂ. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o reprezentare* $\overline{x} = f(x)$, *care duce elipsoizii infinitezimali* $E[(C), x_0]$ *în sfere infinitezimale şi admite un modul de dilatare* $\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s_0}\right|$ *într-o direcţie oarecare* s_0, *să ducă sferele infinitezimale de centru* x_0 *în sfere infinitezimale este ca să avem*

$$\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s}\right| : \left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s'}\right| = 1, \tag{24}$$

pentru orice cuplu de direcții s, s'.

Necesitatea este o consecință a relației (6), unde am pus $p_1(x_0) = p_1'(x_0) = 1$.

Suficiența rezultă din relația (1) care exprimă că $E[(C), x_0]$ este dus într-o sferă infinitezimală, căci

$$1 = \lim_{h\to 0}\frac{\max\limits_{x\in E_h} |\Delta f|}{\min\limits_{x\in E_h} |\Delta f|} \geqq \lim_{h\to 0}\left(\frac{|\Delta f|}{|\Delta x|_s} : \frac{|\Delta f|}{|\Delta x|_{s'}}\right)\frac{|\Delta x|_s}{|\Delta x|_{s'}} =$$

$$= p_1(x_0)\left[\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s}\right| : \left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial s'}\right|\right] = p_1(x_0) \geqq 1,$$

— s, s' fiind direcțiile semiaxelor extreme — de unde $p_1(x_0) = 1$.

TEOREMA 18. *O condiție necesară și suficientă pentru ca un omeomorfism* $\bar{x} = f(x)$, *cvasiconform cu un ansamblu de caracteristici în* D, *să fie conform în* D *este ca să fie verificată aproape peste tot în* D *una din condițiile* :

$$\Lambda_f(x) = \lambda_f(x) \tag{25}$$

$$\lim_{x'\to x}\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} = \sqrt[n]{|J(x)|}, \tag{26}$$

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial s}\right| = K(x). \tag{27}$$

Necesitatea este evidentă, căci o reprezentare conformă în $D \subset E^n$ ($n > 2$) este restricția la D a transformării lui Möbius, adică un produs finit de inversiuni (Reșetniak [9]) și deci este peste tot diferențiabilă în D; de asemenea și în cazul $n = 2$, reprezentările conforme sînt diferențiabile peste tot în D; dar în fiecare punct de diferențiabilitate, $f(x)$ admite o derivată direcțională $\frac{\partial f}{\partial s}$ în orice direcție s, și deci *a fortiori* un modul de dilatare $\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|$, așa că prima inegalitate (6), unde am pus $p_1 = 1$, implică relația (25), care la rîndul ei implică relația (27) și, ținînd seama de observația 5 relativă la teorema 10 din [2], implică și relația (26).

Pentru a stabili suficiența, observăm că, în virtutea teoremei 15, $\lambda_f \neq 0$ aproape peste tot în D, dar într-un astfel de punct, fiecare din condițiile (25), (26) și (27) implică condiția (24), care, în virtutea lemei precedente, implică la rîndul ei $p_1(x) = 1$ aproape peste tot în D, de unde, în virtutea continuității lui $p_1(x)$, obținem $p_1(x) = 1$ peste tot în D.

Observaţie. Afirmaţia teoremei relativă la relaţia (25) a fost îmbunătăţită de Gehring [4] în sensul înlocuirii ipotezei cvasiconformităţii reprezentării $\overline{x} = f(x)$ prin condiţia mărginirii uniforme a lui $\delta_L\ (x)$.

TEOREMA 19. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o reprezentare* $\overline{x} = f(x)$, *univalentă şi continuă în vecinătatea unui punct* x_0, *avînd un modul de dilatare* $\left|\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial s}\right|$ *într-o direcţie oarecare* s *şi verificînd condiţia* $\Lambda_f(x_0) \neq 0$, *să fie conformă în* x_0 *este ca relaţia (25) să fie verificată în* x_0.

Precizăm că o reprezentare se numeşte conformă într-un punct x_0, dacă transformă sfere infinitezimale de centru x_0 în sfere infinitezimale şi atunci x_0 se numeşte punct de analiticitate al reprezentării $\overline{x} = f(x)$.

Necesitatea este evidentă. Pentru a stabili suficienţa este de ajuns să stabilim relaţia

$$\lim_{r\to 0} \frac{\max\limits_{x\in S_r} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{x\in S_r} |f(x) - f(x_0)|} = 1, \tag{28}$$

unde S_r este o sferă de centru x_0 şi de rază r. Relaţia (28) se obţine din relaţia (1) atunci cînd elipsoidul E_h se reduce la o sferă S_r.

Fie x', $x'' \in S_r$ şi aşa fel încît

$$|f(x') - f(x_0)| = \max_{x\in S_r} |f(x) - f(x_0)|,$$

$$|f(x'') - f(x_0)| = \min_{x\in S_r} |f(x) - f(x_0)|$$

şi să considerăm relaţia evidentă

$$\frac{|f(x') - f(x_0)|}{|x' - x_0|} = \frac{|f(x') - f(x_0)|}{|f(x'') - f(x_0)|} \cdot \frac{|f(x'') - f(x_0)|}{|x'' - x_0|}.$$

Trecînd la limită pentru $r \to 0$ şi ţinînd seama de faptul că $\Lambda_f\ (x_0) \neq 0$, constatăm că relaţia (25) implică relaţia (28).

Observaţii. 1) Restricţia $\Lambda_f \neq 0$ este esenţială, după cum rezultă din următorul exemplu

$$\left.\begin{aligned} u &= x\sqrt{x^2 + a^2y^2}, \\ v &= ay\sqrt{x^2 + a^2y^2}, \end{aligned} \quad a^2 > 1, \right\} \tag{29}$$

deoarece reprezentarea este omeomorfă în vecinătatea originii şi $\Lambda_f\ (0) = \lambda_f\ (0)$ şi totuşi

$$\lim_{r\to 0} \frac{\max\limits_{z\in S_r} |\,\Delta f(0)\,|}{\min\limits_{z\in S_r} |\,\Delta f(0)\,|} = a^2 > 1.$$

unde $z = x + iy$.

2) Teorema precedentă încetează de a mai fi adevărată dacă înlocuim condiția (25) cu condiția (27), după cum rezultă din exemplul (23), căci această reprezentare, omeomorfă în vecinătatea originii, verifică în origine relația (27), unde $K(0) = K$, și în plus $\Lambda_f(0) \neq 0$. Dar, pe de altă parte, dacă alegem un șir de punte $\{z_n\}$, verificînd condițiile

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \text{ și } |z_n| = \arg z_n,$$

atunci vom avea

$$\Lambda_f(0) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{|f(z_n) - f(0)|}{|z_n|} = K + 1 > K \geqslant \lambda_f(0),$$

așa fel încît $\Lambda_f(0) \neq \lambda_f(0)$ și în virtutea teoremei precedente originea nu-i punct de analiticitate pentu $f(z)$.

TEOREMA 20. *Fie* $\overline{x} = f(x)$ *o reprezentare conformă în* $D \subset E_n$ $(n > 2)$. *Vectorii* $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *au o lungime egală* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x^t}\right| = \sqrt[n]{|J|}$ *și sînt doi cîte doi ortogonali în* D.

Aceasta este o consecință a sistemului (18) stabilit cu ocazia teoremei 10 din [2] și verificat de $f(x)$ în virtutea observației 3 de la teorema 10 din [2].

TEOREMA 21. *Orice reprezentare* $\overline{x} = f(x)$ *invariază unghiurile cu vîrful într-un A-punct de analiticitate* x_0.

Într-adevăr, cosinusul unghiului format de doi versori $e_s, e_{s'}$ este dat de produsul scalar

$$e_s \cdot e_{s'} = \frac{x - x_0}{|x - x_0|_s} \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|_{s'}} = \left(\frac{x^i - x_0^i}{|x - x_0|_s} e_i \cdot \frac{x^k - x_0^k}{|x - x_0|_{s'}} e_k \right) =$$

$$= [\cos(s, x^i) e_i] \cdot [\cos(s', x^k) e_k] = \delta_{ik} \cos(s, x^i) \cos(s', x^k) = \cos(s, s').$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial s} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} \cos(s, x^i) = \overline{x}_i^k (x_0) \cos(s, x^i)\, e_k,$$

unde, în virtutea teoremei 19 și ținînd seama de observația 3 a teoremei 10 din [2]:

$$\left| \frac{\partial f(x_0)}{\partial s} \right|^2 = \sqrt[n]{J(x_0)^2}.$$

Dar atunci, cosinusul unghiului dintre vectorii $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial s'}$ va fi dat de expresia

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial s} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial s'}}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial s}\right| \left|\dfrac{\partial f}{\partial s'}\right|} = \frac{\delta_{ik}\, \overline{x}_m^i\, \overline{x}_p^k \cos(s, x^m) \cos(s,' x^p),}{\sqrt[n]{J^2}},$$

de unde, în virtutea sistemului (18) de la teorema 10 din [2],

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial f}{\partial s'}}{\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|\left|\frac{\partial f}{\partial s'}\right|} = \cos(s, s') = e_s \cdot e_{s'}.$$

TEOREMA 22. *Fie* $\overline{x} = f(x)$ *o reprezentare cvasiconformă de caracteristici* (C) *şi* (C') *în* D *şi* $\{x_i\}$ *un şir de puncte din* D *aşa fel încît*

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x \in D,\ \lim_{i\to\infty} p_1(x_i) = 1 \quad \text{şi} \quad \lim_{i\to\infty} p_1'(x_i) = 1.$$

Atunci x *va fi un punct de analiticitate a lui* $f(x)$.

Această teoremă este o consecinţă a continuităţii lui $p_1(x)$ şi a lui $p_1'(x)$ în D.

TEOREMA 23. *O reprezentare conformă în* D *are* $\Lambda_f\,(x) \neq 0$ *peste tot în* D.

Într-adevăr, $\Lambda_f\,(x) = 0$ ar implica $\Lambda_{f^{-1}}(x) = \infty$, ceea ce ar contrazice — pentru $n > 2$ — diferenţiabilitatea lui $x = f^{-1}\,(\overline{x})$, care-i conformă în $f(D)$ — în virtutea corolarului 1 al teoremei 2 — şi deci este diferenţiabilă acolo.

Dar şi în cazul $n = 2$, conformitatea lui $x = f^{-1}(\overline{x})$ — în virtutea unei teoreme a lui Menşov [8] — implică olomorfia lui $f^{-1}(\overline{x})$ sau a lui $\overline{f^{-1}(\overline{x})}$, deci

$$\lim_{x'\to x}\frac{|f^{-1}(x') - f^{-1}(x)|}{|x' - x|} < \infty$$

care contrazice $\lambda_{f^{-1}}\,(x) = \infty$.

COROLARUL 1. *Orice reprezentare conformă în* D *are* $J\,(x) \neq 0$ *peste tot în* D.

Într-adevăr, $J(x) = 0$ ar implica (în virtutea teoremei 6 din [2]) $\left|\frac{\partial f(x)}{\partial s}\right| = 0$ cel puţin într-o direcţie s, dar atunci am avea $\lambda_f\,(x) = 0$, care ar implica la rîndul ei (în virtutea relaţiei (6)) $\Lambda_f\,(x) = 0$, ceea ce ar contrazice teorema precedentă.

COROLARUL 2. *O reprezentare* $\overline{x} = f(x)$, *conformă în* D, *nu poate avea o derivată direcţională* $\frac{\partial f}{\partial s} =$ const. *în nici un punct din* D.

În virtutea teoremei 15 din [3], aceasta ar implica $J\,(x) = 0$ în punctul respectiv, ceea ce ar contrazice corolarul 1.

TEOREMA 24. *Dacă* $\overline{x} = f(x)$ *este o reprezentare care transformă elipsoizii infinitezimali* $E[(C), x_0]$ *în sfere infinitezimale de centru* $\overline{x}_0 = f(x_0)$ *iar* $\xi = \varphi(\overline{x})$ *o reprezentare avînd un punct de analiticitate în* $\overline{x}_0$ *şi avînd un modul de dilatare* $\left|\frac{\partial \varphi(\overline{x}_0)}{\partial s_0}\right|$ *într-o direcţie oarecare* s_0, *atunci* *reprezentarea produs* $\xi = \psi(x) = \varphi[f(x)]$ *este o reprezentare care transformă elipsoizii infinitezimali* $E[(C), x_0]$ *în sfere infinitezimale.*

Din relația (24) deducem că

$$1 - \varepsilon_h \leqq \frac{\dfrac{|\varphi(\bar{x}') - \varphi(\bar{x})|}{|\bar{x}' - \bar{x}_0|}}{\dfrac{|\varphi(\bar{x}'') - \varphi(\bar{x}_0)|}{|\bar{x}'' - \bar{x}_0|}} \leqq 1 + \varepsilon_h,$$

unde am notat

$$\bar{x}' = f(x'), \qquad \bar{x}'' = f(x''),$$

$$|\varphi(\bar{x}') - \varphi(\bar{x}_0)| = \max_{x \in E_h} |\psi(x) - \psi(x_0)|$$

$$|\varphi(\bar{x}'') - \varphi(\bar{x}_0)| = \min_{x \in E_h} |\psi(x) - \psi(x_0)|,$$

și unde $\varepsilon_h \to 0$ în același timp cu h. Dar inegalitatea precedentă se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{|\bar{x}' - \bar{x}_0|}{|\bar{x}'' - \bar{x}_0|}(1 - \varepsilon_h) \leqq \frac{|\varphi(\bar{x}') - \varphi(\bar{x}_0)|}{|\varphi(\bar{x}_0'') - \varphi(\bar{x}_0)|} \leqq \frac{|\bar{x}' - \bar{x}_0|}{|\bar{x}'' - \bar{x}_0|}(1 + \varepsilon_h),$$

sau încă sub forma

$$\frac{|f(x') - f(x_0)|}{|f(x'') - f(x_0)|}(1 - \varepsilon_h) \leqq \frac{\max\limits_{x \in E_h} |\psi(x) - \psi(x_0)|}{\min\limits_{x \in E_h} |\psi(x) - \psi(x_0)|} \leqq \frac{|f(x') - f(x_0)|}{|f(x'') - f(x_0)|}(1 + \varepsilon_h)$$

și deci, dacă ținem seama că

$$\frac{\max\limits_{x \in E_h} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{x \in E_h} |f(x) - f(x_0)|} \geqslant \frac{|f(x') - f(x_0)|}{|f(x'') - f(x_0)|} \geqslant \frac{\min\limits_{x \in E_h} |f(x) - f(x_0)|}{\max\limits_{x \in E_h} |f(x) - f(x_0)|},$$

și că

$$\lim_{h \to 0} \frac{\max\limits_{x \in E_h} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{x \in E_h} |f(x) - f(x_0)|} = 1,$$

rezultă că

$$\lim_{h \to 0} \frac{\max\limits_{x \in E_h} |\psi(x) - \psi(x_0)|}{\min\limits_{x \in E_h} |\psi(x) - \psi(x_0)|} = 1.$$

§ 4. ASUPRA REPREZENTĂRILOR CVASICONFORME DIFERENŢIABILE

TEOREMA 25. *Orice reprezentare* $\overline{x} = f(x)$, *univalentă, diferenţiabilă, avînd* $J \neq 0$ *şi cu caracteristica principală* $p_1(x)$ *a transformării afine* (9) — *reprezentînd partea principală a lui* $f(x)$ — *continuă în* D, *este o reprezentare cvasiconformă cu un ansamblu de caracteristici în* D.

Într-adevăr, (9) este o transformare afină nedegenerată şi deci, în virtutea teoremei 4 din [2], care afirmă că

„*Dacă* x_0 *e un A-punct al reprezentării* $f(x)$, *iar* (C) *sînt caracteristicile transformării afine* (9), *atunci* $f(x)$ *reprezintă elipsoizii infinitezimali* $E[(C), x_0]$ *în sfere infinitezimale*", rezultă că $\overline{x} = f(x)$ va transforma elipsoizii infinitezimali $E[(C), x_0]$ — unde (C) sînt caracteristicile transformării afine (9) — în sfere infinitezimale. Aceasta, ţinînd seama de continuitatea lui $p_1(x)$, asigură cvasiconformitatea lui $\overline{x} = f(x)$.

Observaţia 1. Restricţia relativă la J este esenţială, deoarece dacă $J(x_0) = 0$, matricea funcţională avînd rangul diferit de zero, atunci reprezentarea corespunzătoare nu este cvasiconformă în x_0 cum rezultă din teorema 14 din [3]. Dacă $J(x_0) = 0$, matricea funcţională avînd rangul zero, atunci reprezentarea corespunzătoare poate să fie sau să nu fie cvasiconformă cu un ansamblu de caracteristici în x_0. Astfel, reprezentarea (29) este un exemplu din prima categorie, căci transformă elipsele $x^2 + a^2y^2 = \rho^2$ în cercuri iar $J(0) = 0$, pe cînd reprezentarea

$$\left.\begin{aligned} u &= x\sqrt{x^2 + y^2} \\ v &= ay\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad a^2 > 1, \right\} \qquad (30)$$

este un exemplu de-a doua categorie relativ la origine.

Observaţia 2. Restricţia relativă la diferenţiabilitate este de asemenea esenţială, după cum rezultă din considerarea reprezentării (23), care-i o reprezentare topologică în vecinătatea originii avînd $J(0) = K^2$ şi care totuşi nu-i cvasiconformă în origine. Aşadar clasa reprezentărilor topologice cu $J \neq 0$ este efectiv mai largă decît clasa reprezentărilor cvasiconforme cu $J \neq 0$.

Observaţia 3. După cum rezultă din teorema precedentă, clasa reprezentărilor cvasiconforme cu un ansamblu de caracteristici şi cea cu două ansambluri de caracteristici coincid în ansamblul lor dacă $J \neq 0$ şi caracteristica principală $p_1(x)$ a transformării afine (7) este continuă în D. Dar exemplul (30) ne arată că această echivalenţă încetează de a mai avea loc — contrar afirmaţiei eronate din teorema 21 din [2] — dacă $J(x_0) = 0$, $x_0 \in D$. Într-adevăr, reprezentarea (30) poate să fie considerată ca o reprezentare cvasiconformă cu două ansambluri de caracteristici în origine ce transformă cercurile avînd centrul în origine în elipse $u^2 + \frac{v^2}{a^2} = \rho^2$. Totuşi, nu există elipse infinitezimale cu centrul în origine şi care să fie transformate de (30) în cercuri infinitezimale.

Observaţia 4. În teorema 4 din [2] — citată mai sus — ipoteza relativă la diferenţiabilitate este de asemenea esenţială, căci dacă considerăm din nou reprezentarea (23), unde $K > 0$, transformarea (9) corespunzătoare va duce cercuri avînd centrul în origine în cercuri, pe cînd reprezentarea (23), nu numai că nu admite originea ca punct de analiticitate, dar nu există elipse cu centru în origine şi care să fie duse în cercuri infinitezimale.

COROLAR. *O reprezentare de clasă C^1 avînd $J \neq 0$ este cvasiconformă.*

Este o consecinţă a teoremei precedente, căci continuitatea lui $p_1(x)$ este o consecinţă a continuităţii derivatelor de ordinul întîi.

LEMĂ. *n-uplul ortogonal al direcţiilor principale ale unei reprezentări diferenţiabile $\overline{x} = f(x) = \overline{x}^i e_i$ într-un punct x_0 este transformat tot într-un n-uplu ortogonal.*

Reamintim (Hedrick şi Ingold [5]) că direcţiile principale ale unei reprezentări diferenţiabile în x_0 sînt direcţiile cărora le corespund valorile extreme ale modulului de dilatare

$$R = \frac{\delta_{ik}\, \overline{x}^i_m\, \overline{x}^k_p\, \mathrm{d}x^m\, \mathrm{d}x^p}{\delta_{ik}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^k}.$$

Ele sînt două cîte două ortogonale şi se obţin ca soluţii ale sistemului

$$\delta_{ik}\, \overline{x}^i_m\, \overline{x}^k_p\, \mathrm{d}x^m = R\mathrm{d}x^p, \qquad (p = 1, \ldots, n).$$

Dar, pe de altă parte, dacă $\mathrm{d}x$, δx sînt două direcţii principale, atunci în virtutea sistemului precedent şi a ortogonalităţii direcţiilor, obţinem :

$$\mathrm{d}\overline{x}\, \delta\overline{x} = \delta_{ik}\, \overline{x}^i_m \overline{x}^k_p\, \mathrm{d}x^m\, \delta x^p = R\, \delta_{mp}\, \mathrm{d}x^m\, \delta x^p = R\mathrm{d}x\, \delta x = 0.$$

Deci direcţiile $\mathrm{d}\overline{x}$, $\delta\overline{x}$ care le corespund sînt de asemenea ortogonale.

TEOREMA 26. *O reprezentare diferenţiabilă $\overline{x} = f(x)$, avînd $J \neq 0$ şi parametrii caracteristici p_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ transformă sferele infinitezimale în elipsoizi infinitezimali de parametri caracteristici*

$$p_1' = p_1, \quad p_k' = \frac{p_1}{p_{n+1-k}}, \qquad (k=2, \ldots, n-1). \tag{31}$$

Din faptul că, în virtutea teoremei precedente, orice reprezentare diferenţiabilă şi cu $J \neq 0$ transformă, pentru orice $x_0 \in D$, elipsoizii infinitezimali $E[(C), x_0]$ în sfere infinitezimale, rezultă că putem vorbi de parametri caracteristici ai unei astfel de reprezentări.

Fie $\xi = A(x)$ o transformare afină ce duce elipsoizii $E_h[(C), x_0]$ în sfere S . Evident, $A(x)$ duce sferele de centru x_0 în nişte elipsoizi de caracteristici (C'). Să demonstrăm că parametrii caracteristici p_i' $(i = 1, \ldots, n-1)$ sînt tocmai parametrii caracteristici (31).

Într-adevăr, evident

$$\frac{|A(x') - A(x_0)|_{s'}}{|A(x'') - A(x_0)|_{s''}} = 1,$$

unde $x', x'' \in E_h$ și $x' - x_0$, $x'' - x_0$ sînt vectori de direcții s', respectiv s''. Din această relație și din următoarea :

$$\frac{A(x'') - A(x_0)}{|x'' - x_0|_{s'}} = \frac{a_i(x_0)(x''^i - x_0^i)}{|x'' - x_0|_{s'}} = a_i(x_0)\cos(s', x^i) = \frac{A(x^*) - A(x_0)}{|x^* - x_0|_{s'}},$$

unde $x^* - x_0$ e un vector arbitrar de direcție s', deducem relația :

$$\frac{|x''-x_0|_{s''}}{|x'-x_0|_{s'}} = \frac{\dfrac{|A(x') - A(x_0)|}{|x' - x_0|_{s'}}}{\dfrac{|A(x'') - A(x_0)|}{|x'' - x_0|_{s''}}} = \frac{\dfrac{|A(x') - A(x_0)|}{|x' - x_0|_{s'}}}{\dfrac{|A(x^*) - A(x_0)|}{|x^* - x_0|_{s''}}} = \frac{|A(x'')-A(x_0)|_{s'}}{|A(x^*)-A(x_0)|_{s''}} \tag{32}$$

unde am ales pe x^* așa fel încît $|x^*-x_0| = |x'-x_0|$ și unde $|A(x)-A(x_0)|_s$ reprezintă dilatarea corespunzătoare unui vector $x - x_0$ de direcție s. În particular, dacă alegem pe s_n în direcția axei minime, iar pe s_1 în direcția axei maxime, vom avea :

$$\frac{|\Delta A(x_0)|_{s_n}}{|\Delta A(x_0)|_{s_1}} = p_1,$$

Dacă notăm cu λ'_i $(i = 1,\ldots, n-1)$ dilatările în direcțiile axelor, atunci din relația (32) va rezulta :

$$\lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n.$$

Dar, în virtutea lemei precedente, din relația (32) și din faptul că λ'_i $(i = 1,\ldots, n)$ sînt valorile extreme ale modulilor de dilatare, rezultă :

$$p'_k = \frac{\lambda'_{n+1-k}}{\lambda'_1} = \frac{|\Delta t|_{s_1}}{|\Delta t|_{s_{n+1-k}}} = \frac{a_1}{a_{n+1-k}} = \frac{\dfrac{a_1}{a_n}}{\dfrac{a_{n+1-k}}{a_n}} = \frac{p_1}{p_{n+1-k}},$$

unde s_i e direcția axei a_i.

Reprezentarea $\overline{x} = \varphi(\xi) = f[A^{-1}(\xi)]$ va transforma sferele infinitezimale de centru $\xi_0 = A(x_0)$ în sfere infinitezimale, căci $x = A^{-1}(\xi)$ transformă sferele S_r în elipsoizi E_h, iar $\overline{x} = f(x)$ elipsoizii E_h în sfere infinitezimale.

În virtutea celor ce preced, transformarea afină $\xi = A(x)$ va duce sferele de centru x_0 în elipsoizi de centru ξ_0 și de parametri caracteristici $p'_i(x_0)$ $(i = 1,\ldots, n-1)$. Pe de altă parte, în virtutea corolarului teoremei 32 din [3], rezultă că $\overline{x} = \varphi(\xi)$ va duce elipsoizii infinitezimali de centru ξ_0 și de parametri caracteristici $p'_i(x_0)$ $(i = 1,\ldots, n-1)$ în elipsoizi infinitezimali de centru $\overline{x}_0 = \varphi(\xi_0)$ avînd aceiași parametri caracteristici, așa fel încît, $\overline{x} = f(x) = \varphi[A(x)]$ va duce sferele infinitezimale de centru x_0 în elipsoizi infinitezimali de centru $\overline{x}_0$ și de parametri caracteristici (31). Cu aceasta teorema noastră e complet demonstrată, căci x_0 era un punct arbitrar din D.

TEOREMA 27. *Inversa unei reprezentări $\bar{x} = f(x)$, cvasiconforme cu un ansamblu de caracteristici (C), diferențiabile și cu $J \neq 0$ în D, este de asemenea o reprezentare cvasiconformă cu un ansamblu de caracteristici, diferențiabilă, cu $J \neq 0$ și parametri caracteristici* (31).

Reprezentarea $x = f^{-1}(\bar{x})$ este omeomorfă, diferențiabilă, și are $J \neq 0$, în virtutea proprietăților corespunzătoare ale lui $\bar{x} = f(x)$. Pentru a stabili cvasiconformitatea lui $x = f^{-1}(\bar{x})$, ne rămîne să mai arătăm că elipsoizii infinitezimali de parametri caracteristici (31) sînt duși în sfere infinitezimale.

În virtutea teoremei precedente, reprezentarea $\bar{x} = f(x)$ duce sfere infinitezimale în elipsoizi infinitezimali de parametri caracteristici (31). Fie $\xi = A(\bar{x})$ o transformare afină care duce elipsoizii de centru $\bar{x}_0$ și de parametri caracteristici (31) în sfere și fie S_r o sferă de centru x_0 și de rază r. Reprezentarea $\xi = A(\bar{x})$ va duce suprafața lui Jordan $f(S_r)$ într-o suprafață a lui Jordan $A[f(S_r)]$ conținută între două sfere concentrice cu raportul razelor tinzînd la zero pentru $r \to 0$. Să considerăm acum reprezentarea $\xi = \varphi(x) = A[f(x)]$. Ea va duce sfere infinitezimale de centru $x_0 = f^{-1}(\bar{x}_0)$ în sfere infinitezimale. Dar atunci, în virtutea teoremei 1, reprezentarea $x = \varphi^{-1}(\xi)$ va duce sferele infinitezimale de centru $\xi_0 = \varphi(x_0)$ în sfere infinitezimale de centru x_0, însă, în virtutea corolarului teoremei 24, rezultă că reprezentarea $x = f^{-1}(\bar{x}) = \varphi^{-1}[A(\bar{x})]$ va fi o reprezentare omeomorfă, care duce elipsoizii de centru $\bar{x}_0$ și de parametri caracteristici (31) în sfere infinitezimale. Dar $\bar{x}_0$ era un punct arbitrar din $f(D)$, așa că teorema e complet demonstrată.

Observație. Restricția $J \neq 0$ este esențială, căci, dacă $J(x_0) = 0$, $x_0 \in D$, atunci inversa poate să nu mai fie cvasiconformă cu un ansamblu de caracteristici, cum rezultă din exemplul (29), deoarece reprezentarea respectivă are $J(0) = 0$, duce elipsele $x^2 + a^2y^2 = \text{const.}$ în cercuri și totuși inversa nu-i cvasiconformă cu un ansamblu de caracteristici.

Krivov a introdus într-o notă recentă [6] clasa reprezentărilor (Q_1, Q_2)-cvasiconforme în E_3, ca fiind niște reprezentări univalente de clasă C^1, avînd $J \neq 0$ și a căror parte principală (9) duce pentru orice $x \in D \subset E_3$, sferele de centru x în elipsoizi de parametri caracteristici $p_i(x) \leqslant Q_i$ $(i = 1, 2)$.

Inversa unei reprezentări (Q_1, Q_2)-cvasiconforme nu-i — contrar afirmației lui Krivov [6] — o reprezentare (Q_1, Q_2)-cvasiconformă cu aceleași cantități Q_1, Q_2.

Într-adevăr, să considerăm într-un domeniu $D \subset E_n (n > 2)$ o reprezentare $(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$-cvasiconformă, definită în același mod ca și în cazul $n > 3$. Inversa unei astfel de reprezentări — în virtutea teoremei 2 — e cvasiconformă cu un ansamblu de caracteristici, avînd parametrii caracteristici p_i $(i = 1, \ldots, n - 1)$. Dar atunci — în virtutea teoremei 26 — ea va duce sfere infinitezimale în elipsoizi infinitezimali de parametri caracteristici (31) și va fi deci o reprezentare $(Q'_1, \ldots, Q'_{n-1})$-cvasiconformă, unde cantitățile Q'_i $(i = 1, \ldots, n - 1)$ se exprimă în funcție de cantitățile Q_i $(i = 1, \ldots, n - 1)$ prin relațiile (31). De altfel, afirmația lui Krivov nu-i adevărată nici măcar în cazul particular al unei transformări afine (contrar și propriei noastre afirmații din [2]).

Această afirmaţie eronată afectează de asemenea şi teorema 1 din aceeaşi notă [6] a lui Krivov şi care afirmă că fiind dat un domeniu cilindric $D\{(x^1, x^2) \in G,\ 0 \leqslant x^3 \leqslant H\}$, unde G este un domeniu închis mărginit din planul (x^1, x^2), şi o familie $\{C\}$ de curbe rectificabile conţinute în D şi avînd extremităţile pe cele două baze ale cilindrului, atunci modulii $M\{C\}$, $M\{C^*\}$ – unde $\{C^*\}$ este imaginea familiei $\{C\}$ prin reprezentarea (Q_1, Q_2)-cvasiconformă $\overline{x} = f(x)$ – verifică inegalitatea

$$\frac{M\{C\}}{Q_1 Q_2} \leqslant M\{C^*\} \leqslant Q_1 Q_2 M\{C\}.$$

Faptul că inegalitatea din membrul stîng nu-i corectă rezultă şi din exemplul următor:

Fie D paralelipipedul $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ şi $\overline{x} = f(x)$ transformarea afină

$$\begin{cases} u = ax, \\ v = by, \quad a \geqslant b \geqslant c, \quad ac > b^2. \\ w = cz, \end{cases}$$

Ea va duce paralelipipedul D în paralelipipedul $D^*: 0 \leqslant u \leqslant a$, $0 \leqslant v \leqslant b$, $0 \leqslant w \leqslant 0$. Dacă considerăm mulţimea $\{C\}$ de curbe rectificabile avînd extremităţile pe bazele $x = 0$ şi $x = 1$ ale paralelipipedului D, atunci vom avea (Şabat [10]): $M\{C\} = 1$, $M\{C^*\} = \dfrac{bc}{a^2}$, $Q_1 = \dfrac{a}{c}$, $Q_2 = \dfrac{b}{c}$ şi deci inegalitatea nu-i verificată.

Enunţul corect al acestei teoreme pentru cazul unei reprezentări $(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$-cvasiconforme este următorul:

TEOREMA LUI KRIVOV. *Fie D un cilindru n-dimensional, $\{C\}$ o familie de curbe rectificabile cu extremităţile pe cele două baze ale cilindrului D, iar $\{C^*\}$ imaginea lui $\{C\}$ prin reprezentarea $(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$-cvasiconformă $\overline{x} = f(x)$. Atunci modulii celor două familii de curbe $\{C\}$ şi $\{C^*\}$ verifică inegalitatea*

$$\frac{Q_1 \cdots Q_{n-1}}{Q_1^n} M\{C\} \leqslant M\{C^*\} \leqslant Q_1 \cdots Q_{n-1} M\{C\}.$$

Partea dreaptă a inegalităţii se demonstrează într-un mod analog cu cel indicat de Krivov [6] în cazul $n = 3$. Aplicînd această inegalitate reprezentării inverse şi ţinînd seama de relaţia (31), obţinem:

$$M(C) \leqslant Q_1' \cdots Q_{n-1}' M(C^*) = \frac{Q_1^n}{Q_1 \cdots Q_{n-1}} M(C^*).$$

Observaţie. Celelalte teoreme din Nota lui Krivov [6], deşi se bazează pe teorema despre care am arătat că este greşită, totuşi sînt corecte, deoarece se bazează pe partea dreaptă a inegalităţii stabilite prin această teoremă, parte care-i corectă.

TEOREMA 28. *O reprezentare diferenţiabilă* $\bar{x} = f(x)$ *cu* $J \neq 0$ *şi caracteristicile* (C), *duce elipsoizii infinitezimali de caracteristici arbitrare* (C') *în elipsoizi infinitezimali.*

Această teoremă este o consecinţă a teoremei 9, căci partea principală (9) a reprezentării $\bar{x} = f(x)$ duce elipsoizi de caracteristici (C') în elipsoizi.

Primită la redacţie la 13 ianuarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. CARAMAN PETRU, *Asupra reprezentărilor cvasiconforme n-dimensionale*. St. cerc. şt. mat. Iaşi, **14**, 91–126 (1963).
2. — *Contributions à l'étude des représentations quasi conformes n-dimensionnelles*. Rev. Math. Pures et Appl., Acad. R.P. Roumaine, **6**, 312–356 (1961).
3. — *Jacobianul şi dilatările reprezentărilor cvasiconforme n-dimensionale*. St. cerc. şt. mat. Iaşi, **13**, 61–86 (1962).
4. GEHRING F. W., *Quasiconformal mappings in space*. Bull. AMS, **69**, 146–164 (1963).
5. HEDRICK E. şi INGOLD L., *Analytic functions in three dimensions*. Trans. AMS, **27**, 551–555 (1925).
6. КРИВОВ В.В., *Об экстремальных квазиконформных отображениях в пространстве*. ДАН СССР, **145**, 516—518.
7. КУДРЯВЦЕВ Л.Д., *О сумируемости якобиана*. Матем. сб., **33**, 389—398 (1953).
8. MENCHOFF D., *Sur une généralisation d'un théorème de M. H. Bohr*. Матем. сб., **2** (**44**), 339–356 (1937).
9. РЕШЕТНЯК Ю. Г., *О конформных отображениях пространства*. ДАН СРРР, **130**, 1196—1198 (1960).
10. ШАБАТ Б.В., *Метод модулей в пространстве*, ДАН СССР, **130**, 1210—1212 (1960).
11. ТОЛСТОВ Т., *О частных производных*. Изв. Акад. Наук СССР, **13**, 424—446 (1949).
12. TOLSTOFF G., *Sur les fonctions bornées vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann*. Матнм. сб., **10**, 79–85 (1942).
13. VÄISÄLÄ JUSSI, *On quasiconformal mappings in space*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. I, A, 298 (1961).

CONTRIBUȚII LA INTEGRAREA ECUAȚIILOR ELASTICITĂȚII[1]

DE

GABRIELA TEODORESCU

În această lucrare se studiază o problemă la limită pentru ecuația $\Delta\Delta u - \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y)$, λ și μ fiind parametri reali. Se caută soluția care pentru $t = 0$ satisface condițiile $u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y)$ și $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x, y)$. Se dă soluția în cazul general și în cazul particular $\lambda = 0$.

INTRODUCERE

Se știe că în cazul vibrațiilor unei bare dreptunghiulare subțiri, fixată la o extremitate, problemă echivalentă cu cea a vibrațiilor proprii ale unui diapazon, determinarea formei acestor vibrații precum și a frecvenței lor se reduce la rezolvarea următoarei ecuații cu derivate parțiale de ordinul patru

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t).$$

Condițiile la limită pentru extremitatea încastrată sînt imobilitatea arei și tangenta orizontală, adică :

$$u\Big|_{x=0} = 0 \text{ și } \frac{\partial u}{\partial x} = \Big|_{x=0} = 0$$

Pentru extremitatea liberă condițiile sînt :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=l} = 0$$

---

[1] Versiunea în l. franceză va apare în Revue Roumaine de math. pures et appl. **10**, *2* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, P. 83–92, BUCUREȘTI, 1965.

adică momentul de încovoiere total al forțelor care acționează în secțiunea x să fie nul și forța tangențială

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

să fie nulă.

Pentru a determina mișcarea barei se dau condițiile inițiale:

$$U\Big|_{t=0}=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x)\qquad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Problema vibrațiilor unei plăci subțiri și fixată la margine, supusă unei forțe exterioare care este distribuită cu densitatea $f(x, y)$, conduce la o ecuație analogă, o ecuație cu derivate parțiale de ordinul patru, iar problema la limită pusă este următoarea:

Să se afle o funcție $u(x, y, t)$, soluție a ecuației

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,y) \tag{1}$$

în domeniul D — Fr D funcția u avînd derivate parțiale în raport cu variabilele spațiale x și y pînă la ordinul patru inclusiv și de ordinul doi în raport cu timpul t, și care satisface condițiile: $u=\Delta u=0$ pe frontiera lui D, funcția u fiind devierea unui punct $P(x, y)$ al plăcii sub acțiunea forței $f(x, y)$.

În afară de aceste condiții, funcția $u(x, y, t)$ trebuie să satisfacă condițiile inițiale

$$u(x,y,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x,y);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,y)$$

pentru orice punct $p(x, y)$ ce aparține domeniului

În cazul $a=0$, ecuația se reduce la următoarea

$$\Delta\Delta u=f(x,y) \tag{2}$$

care este ecuația încovoierii plăcilor plane sau ecuația Sophie Germain.

Scopul acestei lucrări este de a rezolva o problemă la limită pentru o ecuație mai generală decît ecuația (1) într-un domeniu mărginit de laturi rectilinii (ce corespunde unei plăci dreptunghiulare) în anumite condiții inițiale, problemă care conține, ca un caz particular, problema încovoierii plăcii plane dreptunghiulare.

În rezolvarea problemei propuse vom aplica metoda transformărilor integrale, alegerea transformării utilizate depinzînd de forma domeniului în care are loc fenomenul care ne-a condus la ecuația cu derivate parțiale studiată și de condițiile la limită impuse soluției problemei, astfel încît această transformare integrală să facă să intervină, în mod natural în calcule, condițiile la limită impuse.

Transformările integrale multiple sau mixte cum au fost numite de S. Vasilache [1], au fost folosite des în ultimii ani ca instrument de calcul în problemele fizicii matematice.

Mauro Picone [2] utilizează pentru integrarea ecuaţiilor cu derivate parţiale, liniare şi cu coeficienţi constanţi, transformata multiplă Laplace, dînd metode pentru rezolvarea problemei puse în anumite condiţii pe frontieră.

Huguette Delavault [3] face un studiu sistemtic al acestor transformări multiple, studiind cu ajutorul acestor transformări şi unele probleme care conduc la ecuaţii cu derivate parţiale, cu condiţii la limită, la ecuaţii integrale etc.

Ecuaţia pe care o considerăm în această lucrare este următoarea

$$\Delta \Delta u - \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y).$$

Pentru această ecuaţie se studiază o problemă la limită, dîndu-se soluţia în cazul general pentru λ şi μ oarecari, apoi se studiază cazul $\lambda = 0$, urmărindu-se mai mult natura analitică a problemei decît cea fizică.

§ 1. Să considerăm ecuaţia scrisă mai sus

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \lambda \frac{2\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y) \tag{3}$$

λ şi μ constante reale. Fie D domeniul din planul xOy mărginit de dreptele $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, în care domeniu vom presupune definită şi mărginită funcţia $f(x, y)$. Problema care ne-o punem este următoarea : Să se determine o funcţie $u(x, y, t)$ continuă, care admite derivate parţiale în raport cu variabilele spaţiale pînă la ordinul patru inclusiv şi în raport cu timpul t, pînă la ordinul doi inclusiv, care să verifice ecuaţia (3) în domeniul D — Fr D pentru orice $t > 0$, şi pe frontiera lui D condiţiile $u = \Delta u = 0$, condiţiile iniţiale fiind

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y). \tag{4}$$

În partea I a studiului acestei probleme vom transforma ecuaţia cu derivate parţiale (3) într-o ecuaţie diferenţială cu ajutorul transformatei Fourier finite în sinus în raport cu variabilele x şi y, care face ca condiţiile pe frontieră să fie introduse în mod natural. Apoi vom aplica transformata Laplace în raport cu variabila t, pe semidreapta $(0, +\infty)$, care ne va introduce condiţiile iniţiale şi care transformă ecuaţia diferenţială într-o ecuaţie algebrică.

În partea II a lucrării vom reveni la variabilele iniţiale cu ajutorul formulelor de inversiune şi vom da expresia funcţiei $u(x, y, t)$, sub forma unei serii care constituie soluţia formală a problemei.

În partea III, verificînd că funcţia aflată satisface în adevăr condiţiile problemei puse, vom determina şi condiţiile ce trebuie impuse funcţiilor date, $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$.

Verificarea este indispensabilă, calculul simplu formal nefiind suficient pentru a afirma că problema este efectiv rezolvată.

I. Să aplicăm transformata Fourier finită în sinus ecuaţiei (3). Vom utiliza notaţia

$$u_s(m, n, t) = \int_0^a \int_0^b u(\xi, \eta, t) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta$$

şi

$$f_s(m, n) = \int_0^a \int_0^b f(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta.$$

Vom avea, în condiţiile pe frontieră impuse funcţiei $u(x, y, t)$,

$$\int_0^a \int_0^b \Delta u(\xi, \eta, t) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = -\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \pi^2 u_s(m, n, t)$$

şi

$$\int_0^a \int_0^b \Delta \Delta u(\xi, \eta, t) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \pi^4 u_s(m, n, t)$$

căci

$$u(x, y, t)\Big|_{x=0} = u(x, y, t)\Big|_{x=a} = u(x, y, t)\Big|_{y=0} = u(x, y, t)\Big|_{y=b} = 0$$

$$\Delta u\Big|_{x=0} = \Delta u\Big|_{x=a} = \Delta u\Big|_{y=0} = \Delta u\Big|_{y=b} = 0$$

Ecuaţia (3) se transportă într-o ecuaţie diferenţială în variabila independentă t, cu coeficienţi constanţi, cu membrul doi

$$\mu^2 \frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} + \lambda^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \pi^2 \frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \pi^4 u_s(m, n, t) = f_s(m, n). \qquad (5)$$

Aplicăm acestei ecuaţii transformata Laplace în raport cu variabila t. Vom nota

$$\tilde{u}_s(m, n, p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} u_s(m, n, t) \, \mathrm{d}t.$$

Urmează că vom avea

$$\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = p\tilde{u}_s - u_s(m, n), \quad \frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} = p^2 \tilde{u}_s - p u_s(m, n, 0) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(m, n, 0).$$

Or, utilizînd condiţiile iniţiale (4), rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = p\tilde{u}_s - \varphi(m, n), \quad \frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} = p^2\tilde{u}_s - p\,\varphi_s(m, n) - \psi_s(m, n).$$

Ecuaţia (5) devine următoarea ecuaţie algebrică în $\tilde{u}_s$,

$$\mu^2 p^2 \tilde{u}_s + \lambda^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\tilde{u}_s + \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\pi^4\tilde{u}_s =$$

$$= \frac{f_s(m, n)}{p} + \lambda^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\varphi_s(m, n) + \mu^2 p\,\varphi_s(m, n) + \mu^2\psi_s(m, n)$$

a cărei soluţie se determină imediat

$$\tilde{u}_s(m, n, p) = \frac{\dfrac{f_s(m, n)}{p} + \left[\lambda^2\pi^2\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right) + \mu^2 p\right]\varphi_s(m,n) + \mu^2\psi_s(m,n)}{\mu^2 p^2 + \lambda^2\pi^2\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)p + \left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2\pi^4} \tag{6}$$

numitorul acestei fracţii poate fi scris sub forma

$$\mu^2\left[p + \lambda_1\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right]\left[p + \lambda_2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right],$$

unde

$$\lambda_1 = \frac{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^2}}{2\mu^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^2}}{2\mu^2}$$

λ_1 şi λ_2 fiind cantităţi > 0.

Urmează pentru $\tilde{u}_s$ următoarea expresie

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_s(m, n, p) = {} & \frac{f_s(m, n)}{\mu^2 p\left[p + \lambda_1\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right]\left[p + \lambda_2\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right]} + \\
& + \frac{p\,\varphi_s(m, n)}{\left[p + \lambda_1\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right]\left[p + \lambda_2\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right]} + \\
& + \frac{\lambda^2\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\varphi_s(m, n)}{\mu^2\left[p + \lambda_1\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right]\left[p + \lambda_2\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{a^2}\right)\pi^2\right]} + \\
& + \frac{\psi_s(m, n)}{\left[p + \lambda_1\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right]\left[p + \lambda_2\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right]}.
\end{aligned} \tag{7}$$

II. Pentru a reveni la funcţia originală $u\,(x, y, t)$ vom face mai întîi inversiunea în raport cu p, adică vom considera $\mathcal{L}\,[\tilde{u}_s\,(m, n, p)]$ şi apoi vom face inversiunea în raport cu m, n, a transformatei Fourier, vom avea deci

$$u\,(x, y, t) = \overset{-1}{\overline{\mathcal{L}_t\,\mathcal{F}_M\,(\tilde{u}_s)}} = \mathcal{F}_M^{-1} \circ \mathcal{L}_t^{-1}\,[\tilde{u}_s]. \tag{8}$$

Avem, aplicînd teorema produsului de compoziţie,

$$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{1}{p\,(p + \alpha)\,(p + \beta)}\right] = \frac{1}{\alpha\beta\,(\alpha - \beta)}[\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t} + \alpha - \beta],$$

$$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{p}{(p + \alpha)\,(p + \beta)}\right] = \frac{1}{\alpha - \beta}\,[\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}],$$

$$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{1}{(p + \alpha)\,(p + \beta)}\right] = \frac{1}{\alpha - \beta}\,[e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}]\,.$$

Aplicînd transformata $\mathcal{L}^{-1}$ funcţiei $\tilde{u}_s\,(m, n, p)$ dată de (7) şi ţinînd seama de (8) vom avea

$$\mathcal{L}^{-1}\,[\tilde{u}_s\,(m, n, p)] = u_s\,(m, n, t) =$$

$$= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 e^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 t}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \pi^4(\lambda_1 - \lambda_2)}\, f_s\,(m, n) +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)t}(\lambda_1\mu^2 - \lambda^2 - e^{-\lambda_2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)t}(\lambda_2\mu^2 - \lambda^2)}{\mu^2\,(\lambda_1 - \lambda_2)}\,\varphi_s(m, n, t) +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda_2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)t} - e^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)t}}{\pi^2\,(\lambda_1 - \lambda_2)\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}\,\psi_s\,(m, n, t). \tag{9}$$

Să aplicăm transformata Fourier inversă funcţiei dată de (9). Formula de inversiune este

$$u\,(x, y, t) = \frac{4}{ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_s(m, n, t)\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\,\sin\,\frac{n\pi y}{b},$$

$$u\,(x, y, t) = \frac{4}{ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t} - \lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\pi^4\,(\lambda_1-\lambda_2)}\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^a\!\!\int_0^b f(\xi, \eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta +$$

$$+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}(\lambda_1\mu^2-\lambda^2) - \mathrm{e}^{-\lambda_2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}(\lambda_2\mu^2-\lambda^2)}{\mu^2\,(\lambda_1-\lambda_2)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^a\!\!\int_0^b \varphi\,(\xi, \eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t} - \mathrm{e}^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}}{\pi^2(\lambda_1-\lambda_2)\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\cdot$$

$$\left.\cdot\int_0^a\!\!\int_0^b \psi(\xi, \eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,\mathrm{d}\xi\;\mathrm{d}\eta.\right\} \tag{10}$$

Seria obţinută este absolut şi uniform convergentă pentru orice $t > 0$, dacă presupunem funcţiile $f\,(x, y)$, $\varphi\,(x, y)$ şi $\psi\,(x, y)$ mărginite.

Rămîne să verificăm că această soluţie satisface ecuaţia (3), că seria obţinută este derivabilă de patru ori în raport cu x şi y şi de două ori în raport cu t şi că seriile care dau aceste derivate sînt convergente şi în ce condiţii pentru datele iniţiale.

III. Să presupunem că funcţia $f\,(x, y)$ este continuă în domeniul D şi că poate fi reprezentată printr-o serie trigonometrică de forma

$$f\,(x, y) = \frac{4}{ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\int_0^a\!\!\int_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{11}$$

Se ştie că dacă $f\,(x, y)$ este continuă şi cu variaţia mărginită în domeniul dreptunghiular D [(0,0) ; (a, b)] şi este identic nulă pe frontiera acestui domeniu, atunci seria (11) este uniform convergentă şi are ca sumă $f\,(x, y)$ în tot domeniul D.

În aceste condiţii pentru funcţia $f\,(x, y)$, funcţia $u\,(x, y, t)$ dată prin seria (10) verifică ecuaţia (3).

În adevăr, seria (10) împreună cu seriile care se obţin prin derivare de patru ori în raport cu x şi y şi de două ori în raport cu t, sînt absolut şi uniform convergente pentru orice $t > 0$ şi înlocuind în ecuaţia (3), vom avea în membrul întîi o serie în care coeficientul integralei

$$\int_0^a\!\!\int_0^b f(\xi, \eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

va fi egal cu 1, iar coeficienţii integralelor

$$\int_0^a\int_0^b \varphi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta \text{ şi } \int_0^a\int_0^b \psi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta$$

sînt identic nuli pentru orice n. Rămîne deci în membrul întîi numai termenii care conţin funcţia $f(x, y)$, adică

$$\frac{4}{ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\int_0^a\int_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\eta}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{b}\,d\xi\,d\eta$$

care în virtutea lui (11) este egală cu $f(x, y)$. Condiţiile la limită se vede imediat că sînt verificate. Să verificăm acum că condiţiile iniţiale sînt satisfăcute, adică

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x,y) \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,y)$$

în care $u(x, y, t)$ este dată de seria (10).

Să facem $t = 0$ în expresia lui $u(x, y, t)$ dată prin această serie. Vom avea, oricare ar fi m şi n, coeficienţii integralelor

$$\int_0^a\int_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta \text{ şi } \int_0^a\int_0^b \psi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta$$

identic nuli, iar coeficientul integralei

$$\int_0^a\int_0^b \varphi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta$$

egal cu unu. Deci, pentru $t = 0$, vom avea

$$u(x,y,0) = \frac{1}{4\,ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\int_0^a\int_0^b \varphi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta \equiv$$

$$\equiv \varphi(x,y),$$

dacă $\varphi(x, y)$ satisface aceloraşi condiţii impuse funcţiei $f(x, y)$, adică dacă $\varphi(x, y)$ este continuă şi cu variaţia mărginită în domeniul D şi dacă $\varphi(x, y)$ este identic nulă pe frontiera acestui domeniu.

Pentru a doua condiţie iniţială, să calculăm $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Vom avea

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{4}{ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left\{\frac{-\,e^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}+e^{-\lambda_2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}}{\mu^2(\lambda_1-\lambda_2)\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2}\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^a\int_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\left[(\lambda_1\lambda^2-\lambda_1^2\mu^2)\,e^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}+(\lambda_2^2\mu^2-\lambda_2\lambda^2)\,e^{-\lambda_2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}\right]}{(\lambda_1-\lambda_2)\,\mu^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^a\int_0^b\varphi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi d\eta+\frac{\lambda_1\,e^{-\lambda_1\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}-\lambda_2\,e^{-\lambda_2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)t}}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot$$

$$\left.\cdot\int_0^a\int_0^b\psi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta\right\}.$$

Făcînd $t=0$ în această serie, vom avea, pentru orice m şi n, coeficienţii primelor două integrale identic nuli iar coeficientul integralei $\int_0^a\int_0^b\psi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta$ egal cu 1 sau $\frac{\partial u(x,y,o)}{\partial t}=\psi(x,y)$ dacă funcţia $\psi(x,y)$ verifică aceleaşi condiţii impuse funcţiei $\varphi(x,y)$.

Deci funcţia $u(x,y,t)$ dată prin seria (10) verifică ecuaţia dată şi condiţiile iniţiale.

Am rezolvat astfel problema la limită pentru ecuaţia (3).

§ 2. *Caz particular.* Să considerăm cazul $\lambda=0$. Ecuaţia (3) se reduce la ecuaţia

$$\Delta\Delta u+\mu^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(\xi,\eta). \tag{12}$$

La această ecuaţie sîntem conduşi cînd studiem problema vibraţiilor unei plăci subţiri, fixate la margine, asupra căreia acţionează o forţă exterioară de densitate $f(x,y)$.

Condiţiile iniţiale le vom presupune următoarele

$$u\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$$

În acest caz valorile lui λ_1 şi λ_2 care intervin în expresia lui $u(x, y, t)$ dată de (10) vor avea valorile $\pm \frac{i}{\mu}\cdot$ Să luăm $\lambda_1 = \frac{i}{\mu}$, $\lambda_2 = -\frac{i}{\mu}\cdot$ Soluţia problemei va fi dată de seria

$$u(x, y, t) = \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \frac{1 - \cos\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \frac{\pi^2}{\mu} t}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \pi^2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^a \int_0^b f(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \, d\xi \, d\eta. \qquad (13)$$

Se verifică uşor că funcţia dată de această serie satisface ecuaţia (12) şi condiţiile pe frontieră şi iniţiale impuse.

În cazul particular în care $f(x, y)$ reprezintă o sarcină uniform repartizată pe placă, $f(x, y)$ se reduce la o constantă. Putem calcula uşor integralele care apar în seria (13). Vom avea

$$I = f \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \, d\xi \, d\eta = f \int_0^a \sin \frac{m\pi\xi}{a} \, d\xi \int_0^b \sin \frac{n\pi\eta}{b} \, d\eta =$$

$$= f \frac{ab}{mn\pi^2} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)$$

factorii care apar în paranteze sînt diferiţi de zero numai pentru valorile impare ale lui m şi n, deci pentru $m = 1, 3, 5, \ldots$, $n = 1, 3, 5 \ldots$ Vom avea

$$I = \frac{4\,ab}{mn\pi^2} f$$

şi funcţia $u(x, y, t)$ dată de (13) va avea expresia

$$u(x, y, t) = \frac{16 f}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \frac{\pi^2}{\mu} t}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (14)$$

pentru $m, n = 1, 3, 5, \ldots$

Se regăsesc astfel rezultatele cunoscute în elasticitate [4].

Primită la redacţie la 21 iulie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. S. Vasilache, *Sur le problème de Cauchy pour l'équation* $\frac{d^2\Delta u}{dt^2} + \mu^2 \frac{d^2u}{dt^2} - \lambda^2 u = f(x,y,z)$, Rev. math. pures et appl., Académie de la République Populaire Roumaine, **1**, *2* (1958).
2. M. Picone, *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni a derivate parziali e nuove applicazione della transformata multiple di Laplace nel caso delle equazioni a coefficenti constanti*, Atti Acc. Sc. Torino, **75** (1940).
3. Huguette Delavault, *Les transformations intégrales a plusieurs variables et leurs applications*, **CXL, VIII**, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule (1961).
4. Gabriela Bogdan-Teodorescu, *Asupra unei ecuaţii cu derivate parţiale de tip parabolic de ordin superior lui 2*, Bul. Inst. Politechnic Buc., **XXI**, fasc. I (1959).
5. Aldo Ghizzetti, *Sul metoda della transformata parziale di Laplace a intervalla de integrazione finita*, Publ. dell' Instituta per le applicazioni del calcolo, *167* (1946).
6. L. Amerio, *Sulla transformato doppia di Laplace*, Atti della Reale Acc. Ital., **12**, fasc. 14 (1941).
7. Miron Nicolescu, *Sur un type de problème bilocal pour les équations aux dérivées partielles*, Annali di matematica pura ed applicata, **XLIX**, serie IV (1960).
8. Rosa Bianca Ancora, *Problemi analitici connessi alla teoria della piastra elastica appoggiata*, Publ. dell' Istituto per le applicazioni del calcolo, **311** (1951).
9. A. N. Tihonov-A. A. Samarski, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
10. M. M. Filomenco-Borodici, *Teoria elasticităţii*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1947.
11. S. Timoshenko, *Théorie des vibrations à l'usage des ingénieurs*, Paris, 1954.

COMUTATORII FORMELOR BILINIARE COVARIANTE ALE CÎMPULUI SPINORIAL CUANTIFICAT[1]

DE

ANATOLIE P. HRISTEV
Universitatea Bucureşti, Facultatea de matematică şi mecanică

Tensorii Dirac (densităţile de curent, de moment magnetoelectric, de spin şi de mase) sînt forme biliniare de spinori. În „teoria-*q*" (cuantificarea a doua) spinorii devin operatori necomutativi de generare şi anihilare a particulelor. Tensorii Dirac definiţi ca produse normale (*N*) devin deci operatori necomutativi, ai căror comutatori sînt importanţi pentru teoria cuantică a electronilor şi fotonilor. Calculul acestor comutatori (în spaţiul E_6) constituie obiectul acestei lucrări.

§ 1. UNIFICAREA MATRICELOR ŞI TENSORILOR DIRAC

1. Fie γ_i $(i, j, k, l = 1, \ldots, 4)$ cele 4 matrice (constante) anticomutative Dirac (de ordinul IV):

$$\gamma_i\,\gamma_j + \gamma_j\,\gamma_i \equiv \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\,\delta_{ij}\,. \tag{1.1}$$

Se construieşte inelul de 16 matrice liniar independente:

$$I,\ \gamma_i,\ -i\,\gamma_j\,\gamma_k\ (j \neq k),\ -i\,\gamma_5\gamma_j,\ \gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \tag{1.2}$$

I — matricea unitate, $i \equiv \sqrt{-1}$ (pătratele tuturor matricelor sînt egale cu 1).

Geometria matricelor Dirac este *hexadimensională* (H. Mandel 1929, K. Nikolski 1930, 1933; J. Schouten, J. Haantjes 1933). Într-adevăr, matricele (1.2) (fără matricea unitate I) se unifică [1] într-un „tensor matricial" antisimetric $i_{(ab)} = -\,i_{(ba)}$ $(a, b, c, \ldots = 1, \ldots, 6)$ într-un spaţiu pseudoeuclidian E_6 de signatură $+ + + - + -$ (E_6 este definit prin con-

---

[1] Lucrare prezentată la Sesiunea de Comunicări a Facultăţii de Matematică-Fizică, Universitatea din Bucureşti, 5 mai 1962. Versiunea în l. franceză a acestui articol va apare în Revue Roumaine de math. pures et appl., **10**, *3* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, p. 95–104, BUCUREŞTI, 1965.

gruențele ortogonale ale lui V_6 riemannian; indicii între paranteze sînt ,,indici invarianți'' relativ la congruențele ortogonale ale lui V_6 [2]):

$$i_{(jk)} \equiv -i\gamma_j \gamma_k \; (j \neq k),\; i_{(5j)} \equiv -i\gamma_5\gamma_j,\; i_{(6j)} \equiv \gamma_j,\; i_{(65)} \equiv \gamma_5 \qquad (1.3)$$

sau

$$i_{(a'b')} \equiv -i\gamma_{a'}\gamma_{b'} \; (a' \neq b'),\; i_{(6a')} \equiv \gamma_{a'} \; (a', b' = 1,\ldots, 5), \qquad (1.3')$$

$$(i_{(ab)})^2 = 1 \text{ (fără sumare).}$$

E_6 este spațiul reprezentării hexadimensionale *tensoriale* (*vectoriale*) a grupului *conform* al spațiului-timp E_4, acest din urmă grup fiind izomorf cu grupul rotațiilor lui E_6. Grupul conform propriu admite de asemenea două reprezentări *cvadridimensionale spinoriale* (cvadrispinorii pe care îi considerăm mai jos). Matricele (1.3) sînt matricele momentului (conform) într-una din aceste reprezentări spinoriale (cea de-a doua reprezentare se obține prin substituția $\gamma_{a'} \rightarrow -\gamma_{a'}$, v. de ex. [4]). Fie deci φ cvadrispinorii acestui spațiu de reprezentare (φ, φ^* — spinori complex conjugați). Să punem:

$$\begin{aligned} &(a)\ \varphi^+ \equiv \varphi^*\gamma_4 \equiv -i\varphi^-\gamma_5;\ \varphi^- \equiv \varphi^*\alpha_5 \equiv i\varphi^+\gamma_5, \\ &(b)\ i^+_{(ab)} \equiv \gamma_4 i_{(ab)} \equiv i\gamma_5 i^-_{(ab)};\ i^-_{(ab)} \equiv \alpha_5 i_{(ab)} \equiv -i\gamma_5 i^+_{(ab)}, \qquad (1.4) \\ &(c)\ \alpha_5 \equiv i\gamma_4\gamma_5 \equiv -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\ \varphi^* i^\pm_{(ab)} \equiv \varphi^\pm i_{(ab)}; \end{aligned}$$

peste tot se subînțelege suma după indicii spinoriali (matriciali), de exemplu:

$$\varphi^+_j \equiv \varphi^*_i (\gamma_4)_{ij},\ \varphi^+ i_{(ab)}\varphi \equiv \varphi^+_i (i_{(ab)})_{ij}\, \varphi_j \text{ etc.} \qquad (1.4')$$

În teoria *clasică* (,,teoria *c*'') funcțiile de undă (spinorii φ) nu sînt operatori, deci *comută* între ele și definiția variabilelor dinamice este simplă: unificarea (1.3) dă automat unificarea în E_6 a tensorilor Dirac în doi tensori antisimetrici ,,duali'' *sarcină-curent* sau moment propriu sau de acțiune $\varphi^\pm_{(ab)} = -\varphi^\pm_{(ba)}$ [1,3]:

$$\begin{aligned} &(a)\ \varphi^+_{(ab)} \equiv \varphi^*\gamma_4 i_{(ab)}\varphi \equiv \varphi^+ i_{(ab)}\varphi \equiv \varphi^* i^+_{(ab)}\varphi, \\ &(b)\ \varphi^-_{(ab)} \equiv \varphi^*\alpha_5 i_{(ab)}\varphi \equiv \varphi^- i_{(ab)}\varphi \equiv \varphi^* i^-_{(ab)}\varphi, \qquad (1.5) \\ &(c)\ J^+_{(0)} \equiv \varphi^+\varphi \equiv \varphi^*\gamma_4\varphi;\ J^-_{(0)} \equiv \varphi^-\varphi \equiv i\varphi^*\gamma_4\gamma_5\varphi. \end{aligned}$$

Fie $\varepsilon_{(ijkl)} \equiv \pm 1$ după paritatea permutării respective a indicilor — pseudotensorul unitate complet antisimetric al lui Levi-Cività în E_4, $[A, B] \equiv AB - BA$ — comutatorul, $\{A, B\} \equiv AB + BA$ — anticomutatorul operatorilor A, B. Atunci semnificația componentelor $\varphi^\pm_{(ab)}$ în spațiul-timp relativist (pseudoeuclidian) E_4 este următoarea (facem abstracție de factorii dimensionali $eh/2m$, $h/2$, e, m etc.):

$M_{(jk)} \equiv -\dfrac{i}{2}\varphi^+[\gamma_j, \gamma_k]\varphi \equiv \varphi^+_{(jk)} = \dfrac{i}{2}\varepsilon_{(jkil)}\varphi^-_{(il)}$ — densitatea momentului magnetoelectric (tensor antisimetric în E_4),

$S_{(j)} \equiv i\,\varphi^{+}\gamma_5\gamma_j\,\varphi \equiv -\,\varphi^{+}_{(5j)} = \varphi^{-}_{(6j)}$ — densitatea de spin (pseudovector în E_4),

$C_{(j)} \equiv i\,\varphi^{+}\gamma_j\,\varphi \equiv i\,\varphi^{+}_{(6j)} = i\,\varphi^{-}_{(5j)}$ — densitatea de curent electric (vector în E_4),

$J_{(0)} \equiv J^{+}_{(0)} \equiv \varphi^{+}\,\varphi = i\varphi^{-}_{(56)}$ şi $I_{(0)} \equiv J^{-}_{(0)} \equiv \varphi^{-}\varphi = i\varphi^{+}\gamma_5\varphi = -\,i\varphi^{+}_{(56)}$ — densităţile ,,maselor'' proprii (scalară şi pseudoscalară).

Expresiile de mai sus ne dau de asemenea relaţiile de ,,dualitate'' verificate de cei doi tensori ,,duali'' $\varphi^{\pm}_{(ab)}$.

În virtutea identităţilor matriciale rezultă anumite identităţi pentru $\varphi^{\pm}_{(ab)}$ [3].

E_6 fiind definit de congruenţele ortogonale ale lui V_6 riemannian [2]:

$$\mathrm{d}s^{(a)} \equiv l^{(a)}_{b}\,\mathrm{d}x^{b}, \quad \mathrm{d}s^{2} \equiv G_{ab}\,\mathrm{d}x^{a}\,\mathrm{d}x^{b} = \mathrm{d}s^{(a)2}, \tag{1.6}$$

vom omite în paragrafele următoare parantezele relativ la indicii pe congruenţele ortogonale.

2. În ,,*teoria q*'' (cuantificarea a doua) funcţiile de undă (spinorii) devin *operatori* de generare şi anihilare a particulelor, acţionînd asupra funcţiei de undă a sistemului (în reprezentarea ,,numerelor de ocupare''). *Starea de ,,vid'' se defineşte ca stare de cîmp material* (*continuu*) *fără particule.* Deoarece energia, impulsul, sarcina etc. ale ,,vidului'' (infinite şi fără sens fizic în teoria cuantică relativistă uzuală, liniară şi locală) nu ne interesează, variabilele dinamice trebuie definite astfel încît valorile lor medii în starea de ,,vid'' să fie *nule.* Pentru aceasta operatorii de anihilare trebuie să fie plasaţi la dreapta tuturor operatorilor de generare, adică trebuie să avem *produsul normal* (*N*) al operatorilor de cîmp.

Prin urmare, *toate variabilele dinamice care depind pătratic de operatori cu aceleaşi argumente*, ca energia, impulsul, curentul, lagrangeanul etc., *trebuie definite ca produse normale ale operatorilor de cîmp.*

Prin aceasta se elimină mărimile pseudofizice ca energia de zero, sarcina de zero etc., care apar de obicei la cuantificare. De altfel condiţia ca valorile medii în starea de ,,vid'' să fie nule este legată de invarianţa relativistă (v. de exemplu [10]).

Pentru definiţiile şi noţiunile ,,teoriei *q*'' (cuantificării a doua) a se vedea de exemplu [5, 6].

§ 2. ANTICOMUTATORII SPINORILOR

3. Vom considera operatorii de cîmp luaţi în *acelaşi moment de timp* (în particular în acelaşi punct spaţio-temporal). În acest caz funcţia cauzală (contracţia cronologică) devine incomodă din cauza singularităţilor sale speciale, de aceea noi vom prefera să utilizăm contracţiile necronologice şi teorema respectivă de descompunere [9].

4. Fie $x \equiv \{x_i\}$, $x' \equiv \{x'_i\}$ $(x_4 \equiv ict)$ coordonatele a două evenimente în spaţiul-timp E_4. Atunci pentru cîmpul *spinorial* (par-

ticule de spin 1/2, fermioni) avem relaţiile de anticomutativitate bine cunoscute :

$$\begin{gathered}\{\varphi_i(x),\ \varphi_k(x')\} = 0,\quad \{\varphi_i^+(x),\ \varphi_k^+(x')\} = 0,\\ \{\varphi_i(x),\ \varphi_k^+(x')\} = -\,iS_{ik}(x-x').\end{gathered}\tag{2.1}$$

Produsul ordinar a doi spinori se descompune astfel :

$$\begin{gathered}\varphi_i(x)\,\varphi_k^+(x') = N(\varphi_i(x)\,\varphi_k^+(x')) - iS_{ik}^+(x-x'),\\ \varphi_i^+(x)\,\varphi_k(x') = N(\varphi_i^+(x)\,\varphi_k(x')) - iS_{ki}^-(x'-x),\end{gathered}\tag{2.2}$$

unde $-\,iS_{ik}^{\pm}(x-x')$ sînt contracţiile necronologice. Descompunerea comutatorului este :

$$\frac{1}{2}[\varphi_i^+(x),\ \varphi_k(x')] = N(\varphi_i^+(x)\,\varphi_k(x')) - \frac{1}{2}S_{ki}^1(x'-x),\tag{2.3}$$

unde

$$S_{ik}(x) \equiv S_{ik}^+(x) + S_{ik}^-(x),\quad iS_{ik}^1(x) \equiv S_{ik}^+(x) - S_{ik}^-(x).\tag{2.4}$$

Din (2.1)—(2.3) se deduc uşor relaţiile corespunzătoare pentru spinorul $\varphi^- \equiv i\varphi^+\gamma_5$ şi spinorul complex conjugat $\varphi^\star \equiv \varphi^+\,\gamma_4 \equiv i\varphi^-\gamma_4\gamma_5$.

5. Fie notaţiile :

$$\partial_i \equiv \partial/\partial x_i,\ \Box \equiv \partial_i^2 \equiv \partial^2/\partial x_i^2.\tag{2.5}$$

În teoria *clasică* a lui Dirac spinorii verifică ecuaţia Dirac :

$$(\gamma_i\,\partial_i + m)\,\varphi = 0,\quad \varphi^{\pm}(\gamma_i\,\partial_i \mp m) = 0,\tag{2.6}$$

$$(\gamma_i\,\partial_i - m)(\gamma_j\,\partial_j + m) \equiv (\Box - m^2).\tag{2.6'}$$

În acest caz funcţiile (matricele) de comutare S sînt legate de funcţiile respective Δ ale operatorului d'alembertian prin relaţia :

$$S(x) = -\,(\gamma_i\,\partial_i - m)\,\Delta(x),\quad (\Box - m^2)\,\Delta(x) = 0.\tag{2.7}$$

Fie $\boldsymbol{r} \equiv \{x_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$; $\delta(\boldsymbol{r})$ — funcţia singulară a lui Dirac. Se cunosc proprietăţile funcţiilor de comutare Δ (v. de exemplu [6]) :

$$\begin{gathered}\Delta(\boldsymbol{r}, t) = \Delta(-\boldsymbol{r}, t) = -\,\Delta(\boldsymbol{r}, -t),\ \Delta(\boldsymbol{r}, 0) = 0,\\ \partial_\alpha\,\Delta(x)|_{t=0} = 0,\quad \partial_t\,\Delta(x)|_{t=0} = \delta(\boldsymbol{r});\end{gathered}\tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}\Delta_1(x) = \Delta_1(-x),\quad \partial_l\Delta_1(x) = \Delta_{1l}'(x) = -\,\Delta_{1l}'(-x),\\ \partial_l\,\Delta_1(x)|_{x=0} = 0,\end{gathered}\tag{2.8'}$$

de unde rezultă proprietăţile funcţiilor (matricelor) S :

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\qquad -iS(\boldsymbol{r}, 0) = \gamma_4\,\delta(\boldsymbol{r}),\quad \mathrm{Tr}\,S(x)|_{x=0} = 0,\\ &\text{(b)}\qquad S^1(x)|_{x\to 0} = m\,\Delta_1(x)|_{x\to 0}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

§ 3. TENSORII DIRAC ÎN „TEORIA q"

6. DEFINIŢIE. *În „teoria q" definim tensorii* $\varphi^{\pm}_{ab}$ *ca produse normale :*

$$\begin{gathered}\varphi^{\pm}_{ab} \equiv N(\varphi^{\pm} i_{ab} \varphi) \equiv N(\varphi^{\star} i^{\pm}_{ab} \varphi) \equiv (i_{ab})_{ik} N(\varphi^{\pm}_{i} \varphi_{k}) \equiv (i^{\pm}_{ab})_{ik} N(\varphi^{\star}_{i} \varphi_{k}),\\ \mathrm{J}^{\pm}_{0} \equiv N(\varphi^{\pm} \varphi) \quad (\mathrm{J}^{+}_{0} \equiv \mathrm{J}_{0}, \quad \mathrm{J}^{-}_{0} \equiv \mathrm{I}_{0}).\end{gathered} \tag{3.1}$$

TEOREMA A. *Cu aproximaţia unei constante aditive, nematrice şi neoperator („număr c"), independent de orice ecuaţie de cîmp verificată de spinori, avem :*

$$\begin{gathered}\varphi^{\pm}_{ab} \sim \frac{1}{2}[\varphi^{\pm}, i_{ab}\varphi] \equiv \frac{1}{2}[\varphi^{\star}, i^{\pm}_{ab}\varphi] \equiv \frac{1}{2}(i_{ab})_{ik}[\varphi^{\pm}_{i}, \varphi_{k}] \equiv\\ \equiv \frac{1}{2}(i^{\pm}_{ab})_{ik}[\varphi^{\star}_{i}, \varphi_{k}],\\ \mathrm{J}^{\pm}_{0} \sim \frac{1}{2}[\varphi^{\pm}, \varphi].\end{gathered} \tag{3.2}$$

Într-adevăr, (2.3) dă (Tr — urma matricei) :

$$\begin{gathered}\varphi^{\pm}_{ab} \equiv \frac{1}{2}[\varphi^{\pm}, i_{ab}\varphi] + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\gamma_4 i^{\pm}_{ab} S^1(x'-x)]_{x'\to x},\\ \mathrm{J}_0 \equiv \frac{1}{2}[\varphi^{+}, \varphi] + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, S^1(x'-x)|_{x'\to x},\\ \mathrm{I}_0 \equiv \frac{1}{2}[\varphi^{-}, \varphi] + \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\,\gamma_5 S^1(x'-x)|_{x'\to x},\end{gathered} \tag{3.3}$$

ultimii termeni fiind nematrice şi neoperatori (deci „numere c").

Faptul că $\varphi^{\pm}_{ab}$, $\mathrm{J}^{\pm}_{0}$ diferă de comutatorii respectivi (3.2) printr-un „număr c" rezultă din definiţia (3.1) a lui $\varphi^{\pm}_{ab}$, din teorema de descompunere a produsului operatorilor de cîmp în sumă de produse N şi din proprietăţile contracţiei necronologice. Suma matricială conţinută în definiţia (3.1) conduce la urma matricei de comutare, astfel încît constanta aditivă menţionată nu este matrice.

Cum ne propunem să calculăm *comutatorii* tensorilor $\varphi^{\pm}_{ab}$, $\mathrm{J}^{\pm}_{0}$, orice constantă aditivă, nematrice şi neoperator („număr c"), se elimină totdeauna şi nu prezintă deci aici nici o importanţă.

7. În teoria *clasică* Dirac, în virtutea proprietăţilor (2.9) şi ţinînd seama de Tr $i_{ab} = 0$ [3], avem

TEOREMA A′. *În teoria clasică Dirac, constanta aditivă „număr c" din teorema A este diferită de zero numai pentru* $\mathrm{J}_0 = i\varphi^{-}_{56}$, *şi anume* $2m\,\Delta_1(x)$ $(x \to 0)$.

Scalarul J_0 este legat de urma tensorului energie-impuls Θ_{ik} din teoria clasică Dirac [10] prin relaţia :

$$\Theta_{ii}/mc^2 = -\frac{1}{2}[\varphi^+, \varphi] = -J_0 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, S^1(0) = -J_0 + 2m\,\Delta_1(0). \qquad (3.4)$$

Valoarea medie a lui Θ_{ii} în starea de ,,vid'' este infinită. Printr-o renormalizare adecvată a lui Θ_{ik}, urma sa va diferi de J_0 numai prin semn.

§ 4. COMUTATORII TENSORILOR DIRAC

8. Ţinînd seamă de teorema A şi de regula de comutare (2.1), obţinem pentru comutatori expresiile generale (acolo unde semnele +, — apar etajate, se iau simultan fie semnele superioare, fie cele inferioare) :

Teorema B. *Avem*

$$\text{(a)} \quad [\varphi^{\pm}_{ab}(x), \varphi^{\pm}_{cd}(x')] = -i\,[\varphi^{\star}(x) i^{\pm}_{ab} S(x-x')\gamma_4 i^{\pm}_{cd}\varphi(x') - \varphi^{\star}(x') i^{\pm}_{cd} S(x'-x)\gamma_4 i^{\pm}_{ab}\varphi(x)],$$

$$\text{(b)} \quad [\varphi^{\pm}_{ab}(x), \varphi^{\mp}_{cd}(x')] = -i\,[\varphi^{\star}(x) i^{\pm}_{ab} S(x-x')\gamma_4 i^{\mp}_{cd}\varphi(x') - \varphi^{\star}(x') i^{\mp}_{cd} S(x'-x)\gamma_4 i^{\pm}_{ab}\varphi(x)], \qquad (4.1)$$

$$\text{(c)} \quad [J_0(x), \varphi^{\pm}_{ab}(x')] = -i\,[\varphi^{\star}(x)\gamma_4 S(x-x')\gamma_4 i^{\pm}_{ab}\varphi(x') - \varphi^{\star}(x') i^{\pm}_{ab} S(x'-x)\varphi(x)],$$

$$\text{(d)} \quad [I_0(x), \varphi^{\pm}_{ab}(x')] = -i\,[\varphi^{\star}(x)\alpha_5 S(x-x')\gamma_4 i^{\pm}_{ab}\varphi(x') - \varphi^{\star}(x') i^{\pm}_{ab} S(x'-x)\gamma_4\alpha_5\varphi(x)]$$

sau în particular

$$\begin{aligned} [\varphi^{+}_{ab}(x), \varphi^{+}_{cd}(x')] &= -i\,[\varphi^{+}(x) i_{ab} S(x-x') i_{cd}\varphi(x') - \varphi^{+}(x') i_{cd} S(x'-x) i_{ab}\varphi(x)], \\ [\varphi^{-}_{(ab)}(x), \varphi^{-}_{cd}(x')] &= \varphi^{-}(x) i_{ab} S(x-x')\gamma_5 i_{cd}\varphi(x') - \varphi^{-}(x') i_{cd} S(x'-x)\gamma_5 i_{ab}\varphi(x). \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Pentru *acelaşi moment de timp* $t = t'$ ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ arbitrari), avem regula generală de comutare :

$$\{\varphi_i(\mathbf{r}, 0), \varphi^{\star}_k(\mathbf{r}', 0)\} = \delta_{ik}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad -iS(\mathbf{r}, 0) = \gamma_4\delta(\mathbf{r}) \qquad (4.3)$$

şi comutatorii (4.1) devin deci :

Teorema B′. *Avem*

$$\text{(a)} \quad [\varphi^{\pm}_{ab}(x), \varphi^{\pm}_{cd}(x')]_{t=t'} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\varphi^{\star}\,[i^{\pm}_{ab}, i^{\pm}_{\mathrm{cd}}]\,\varphi,$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{b}) \quad [\varphi^{\pm}_{ab}(x),\ \varphi^{\mp}_{cd}(x')]_{t=t'} = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\varphi^{*}\,[i^{\pm}_{ab},\, i^{\mp}_{cd}]\,\varphi, \qquad (4.4)\\
&(\mathrm{c}) \quad [\mathrm{J}_0(x),\ \varphi^{\pm}_{ab}(x')]_{t=t'} = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\varphi^{*}\,[\gamma_4,\, i^{\pm}_{ab}]\,\varphi,\\
&(\mathrm{d}) \quad [\mathrm{I}_0(x),\ \varphi^{\pm}_{ab}(x')]_{t=t'} = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\varphi^{*}\,[\alpha_5,\, i^{\pm}_{ab}]\,\varphi.
\end{aligned}
$$

Aici membrii doi se descompun în produse normale plus contracții necronologice. Se obține astfel totdeauna în membrul doi una din componentele $\varphi^{\pm}_{ab}$. Componenta $\varphi^{+}_{64} \equiv -i\,\mathrm{C}_4 = \rho$ (densitatea de sarcină) *nu* poate niciodată să apară ! Această concluzie este importantă (v. mai jos).

TEOREMA B″. *În teoria clasică Dirac membrii doi din* (4.4) *coincid cu produsele normale respective, cu excepția lui* J_0, *anume* : $\mathrm{J}_0 - 2m\,\Delta_1(0)$.

Aplicînd relațiilor (4.4) simbolul N, se elimină termenii nedoriți care dau valori medii infinite în starea de „vid" și n-au nici un sens fizic.

9. Pentru a calcula comutatorii matricelor i_{ab} care figurează în (4.4), putem folosi formula [3] :

$$[i_{ab}, i_{cd}] = 2i\,(\delta_{ac}\, i_{bd} + \delta_{bd}\, i_{ac} - \delta_{ad}\, i_{bc} - \delta_{bc}\, i_{ad}). \qquad (4.6)$$

În E_3 (E_4) formulele (4.4) dau regulile de comutare (peste tot tensorii sînt considerați în *acelaș i moment* $t = t'$, dar în puncte spațiale $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ arbitrare) :

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) \quad N(\mathbf{I}\times\mathbf{I}) = N(\mathbf{J}\times\mathbf{J}) = N(\mathbf{C}\times\mathbf{C}) = N(\mathbf{S}\times\mathbf{S}) = 2i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathbf{S},\\
&(\mathrm{b}) \quad N(\mathbf{I}\times\mathbf{S}) = N\,[-i\mathrm{S}_4, \mathbf{J}] = N\,[\mathbf{C}, \mathrm{I}_0] = 2i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathbf{I},\\
&(\mathrm{c}) \quad N(\mathbf{J}\times\mathbf{S}) = N\,[\mathbf{I}, -i\mathrm{S}_4] = N\,[\mathrm{J}_0, \mathbf{C}] = 2i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathbf{J},\\
&(\mathrm{d}) \quad N(\mathbf{S}\times\mathbf{C}) = N\,[\mathrm{I}_0, \mathbf{I}] = N\,[\mathbf{J}, \mathrm{J}_0] = 2i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathbf{C},\\
&(\mathrm{e}) \quad N[\mathbf{J}, \mathbf{I}] = N\,[\mathrm{I}_0, \mathrm{J}_0] = 2\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathrm{S}_4,\\
&(\mathrm{f}) \quad N\,[\mathbf{I}, \mathbf{C}] = N\,[\mathrm{J}_0, -i\mathrm{S}_4] = 2i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathrm{I}_0, \qquad (4.7)\\
&(\mathrm{g}) \quad N\,[\mathbf{C}, \mathbf{J}] = N\,[\mathrm{I}_0, -i\mathrm{S}_4] = 2i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathrm{J}_0,\\
&(\mathrm{h}) \quad N(\mathbf{I}\times\mathbf{J}) = N(\mathbf{I}\times\mathbf{C}) = N\,[\mathbf{I}, \mathrm{S}] = N\,[\mathbf{I}, \mathrm{C}_4] = N\,[\mathbf{I}, \mathrm{J}_0] = 0,\\
&(\mathrm{i}) \quad N(\mathbf{J}\times\mathbf{C}) = N\,[\mathbf{J}, \mathrm{S}] = N\,[\mathbf{J}, \mathrm{C}_4] = N\,[\mathbf{J}, \mathrm{I}_0] = 0,\\
&(\mathrm{j}) \quad N\,[\mathbf{C}, \mathrm{S}] = N\,[\mathbf{C}, \mathrm{S}_4] = N\,[\mathbf{C}, \mathrm{C}_4] =\\
&\qquad\quad = N\,[\mathrm{C}_4, \mathrm{S}] = N\,[\mathrm{C}_4, \mathrm{S}_4] = N\,[\mathrm{C}_4, \mathrm{I}_0] = N\,[\mathrm{C}_4, \mathrm{J}_0] = 0,\\
&(\mathrm{k}) \quad N\,[\mathrm{S}, \mathrm{S}_4] = N\,[\mathrm{S}, \mathrm{I}_0] = N\,[\mathrm{S}, \mathrm{J}_0] = 0.
\end{aligned}
$$

În teoria *clasică* Dirac se poate suprima simbolul N în (4.7) peste tot afară de (4.7g).

Rezultatele obținute sînt reprezentate comod în tablou.

Tablou

Comutatorii tensorilor Dirac

(pe linia A și coloana B se află $N\,[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ fără factorul $2i\,\delta\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$)

	I_1	I_2	I_3	J_1	J_2	J_3	S_1	S_2	S_3	$-iS_4$	C_1	C_2	C_3	$-iC_4$	I_0	J_0
I_1	0	S_3	$-S_2$	iS_4	0	0	0	I_3	$-I_2$	J_1	I_0	0	0	0	$-C_1$	0
I_2	$-S_3$	0	S_1	0	iS_4	0	$-I_3$	0	I_1	J_2	0	I_0	0	0	$-C_2$	0
I_3	S_2	$-S_1$	0	0	0	iS_4	I_2	$-I_1$	0	J_3	0	0	I_0	0	$-C_3$	0
J_1	$-iS_4$	0	0	0	S_3	$-S_2$	0	J_3	$-J_2$	$-I_1$	$-J_0$	0	0	0	0	C_1
J_2	0	$-iS_4$	0	$-S_3$	0	S_1	$-J_3$	0	J_1	$-I_2$	0	$-J_0$	0	0	0	C_2
J_3	0	0	$-iS_4$	S_2	$-S_1$	0	J_2	$-J_1$	0	$-I_3$	0	0	$-J_0$	0	0	C_3
S_1	0	I_3	$-I_2$	0	J_3	$-J_2$	0	S_3	$-S_2$	0	0	C_3	$-C_2$	0	0	0
S_2	$-I_3$	0	I_1	$-J_3$	0	J_1	$-S_3$	0	S_1	0	$-C_3$	0	C_1	0	0	0
S_3	I_2	$-I_1$	0	J_2	$-J_1$	0	S_2	$-S_1$	0	0	C_2	$-C_1$	0	0	0	0
$-iS_4$	$-J_1$	$-J_2$	$-J_3$	I_1	I_2	I_3	0	0	0	0	0	0	0	0	J_0	$-I_0$
C_1	$-I_0$	0	0	J_0	0	0	0	C_3	$-C_2$	0	0	S_3	$-S_2$	0	I_1	$-J_1$
C_2	0	$-I_0$	0	0	J_0	0	$-C_3$	0	C_1	0	$-S_3$	0	S_1	0	I_2	$-J_2$
C_3	0	0	$-I_0$	0	0	J_0	C_2	$-C_1$	0	0	S_2	$-S_1$	0	0	I_3	$-J_3$
$-iC_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I_0	C_1	C_2	C_3	0	0	0	0	0	0	$-J_0$	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	0	0	$-iS_4$
J_0	0	0	0	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	0	0	0	I_0	J_1	J_2	J_3	0	iS_4	0

§ 5. CONCLUZII

10. Rezultatul fundamental este exprimat de teorema:

Teorema C. *Densitatea de sarcină* $\rho \equiv \varphi^{+}_{64}$ *comută cu toţi tensorii Dirac*:

$$[\rho, \varphi^{\pm}_{ab}] = 0, \quad [\rho, J^{\pm}_{0}] = 0. \tag{5.1}$$

Aceasta înseamnă că operatorul densităţii de sarcină poate fi adus la forma diagonală *simultan* cu oricare componentă $\varphi^{\pm}_{ab}$, deci densitatea de sarcină ia o valoare bine determinată simultan cu oricare componentă a oricărui tensor Dirac. Acest fapt remarcabil nu este întîmplător, ci legat de: 1) signatura $+++-+-$ spaţiului E_6 (spaţiul reprezentării vectoriale hexadimensionale a grupului conform al spaţiului-timp), anume $\varphi^{+}_{64} \equiv \rho$ are amîndoi indici de tip ,,temporal'' (sau ,,negativ''), 2) legile de conservare, anume conservarea în $x_4 \equiv ict$ (în teoria clasică, care se obţine considerînd toate mărimile independente de x_6, ,,conservarea'' în $x_6 \equiv il'$ are loc automat), 3) unicitatea cuantumului de sarcină $(\pm e, 0)$ pentru toate particulele elementare, spre deosebire de mase, spini, momente magnetice, izospini etc. care au mai multe valori printre particulele elementare. Chiar existenţa celor două semne pentru sarcinile elementare (particule şi antiparticule) (caz particular $\pm e$) poate fi legată de antisimetria tensorului φ_{ab} $(\rho \equiv \varphi^{+}_{64} \equiv -\varphi^{+}_{46})$.

Teorema C'. *Densitatea de sarcină nu poate constitui comutatorul vre-unor componente ale tensorilor Dirac.*

Acest rezultat a fost semnalat mai sus.

Teorema D. *Comutatorii componentelor oricărui vector Dirac sînt daţi de vectorul spin*:

$$\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \mathbf{J} \times \mathbf{J} = \mathbf{C} \times \mathbf{C} = \mathbf{S} \times \mathbf{S} = 2i\delta\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\mathbf{S}. \tag{5.2}$$

Teorema D'. *Densitatea de spin* $-i\mathrm{S}_4$ *constituie comutatorul numai pentru* $[\mathbf{J}, \mathbf{I}]$ *şi* $[\mathrm{I}_0, \mathrm{J}_0]$.

Teorema E. *Comutatorul vectorului de spin* $\mathbf{S}$ *cu oricare vector Dirac reproduce acest din urmă vector.*

Comutatorul curentului $\mathbf{C}$ cu $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ dă $-\mathrm{I}_0$, J_0, iar cu I_0, J_0 dă $\mathbf{I}$, $-\mathbf{J}$.

În sfîrşit, proprietatea interesantă:

Teorema F. *Toţi comutatorii sînt invarianţi în raport cu permutarea ciclică a celor trei operatori*, anume

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = 2i\delta\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\mathrm{C} \rightarrow \begin{cases} [\mathrm{B}, \mathrm{C}] = 2i\delta\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\mathrm{A}, \\ [\mathrm{C}, \mathrm{A}] = 2i\delta\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\mathrm{B}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Cu ajutorul tabloului se pot calcula uşor comutatorii de tipul $[\mathbf{A}^2, \mathbf{B}]$ care dau un *anticomutator*.

Primită la redacţie la 27 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Popovici, Rev. math. pur. et appl., **IV**, *4*, 577 (1959); **V**, *2*, 411 (1960); Bull. Math R.P.R., **3**, *1*, 93 (1959); Comunic. Acad. R.P.R., **VIII**, *9*, 877 (1958); **IX**, 7 671 (1959).
2. G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*, vol. I, 1962, vol. II, 1951, București.
3. A. P. Hristev, Lucrările Consfătuirii Internaționale de Geometrie și Topologie, Iași, 1958, p. 203; Comunic. Acad. R.P.R., **XI**, *7*, 755 și 761 (1961); Bull. Math. R.P.R., **4**, *1–2*, 23 (1961); A. Popovici, A. P. Hristev, J. Popovici, Comptes Rendus Paris, **257**, 3120 (1963).
4. A. P. Hristev, Rev. Roum. math. pures et appl., **IX**, *7* (1964); St. cerc. mat., **XVI**, *7* (1964); Analele Univ. București, seria mat., *2* (1964).
5. A. P. Hristev, Rev. Roum. math. pures et appl., **X**, *3* (1965).
6. G. Wentzel, *Quantum theory of fields*, New York, 1949; W. Heitler, *The quantum theory of radiation*, 3rd ed., Oxford, 1954; S. S. Schweber, H. A. Bethe, F. Hoffmann, *Mesons and fields*, vol. I, II, Row, Peterson & Co., N. Y., 1955; J. M. Jauch, F. Rohrlich, *The theory of photons and electrons*, Cambridge, 1955; H. Umezawa, *Quantum field theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1956; N. N. Bogoliubov, D. V. Șirkov, *Introducere în teoria cîmpurilor cuantificate*, GITTL, M. 1957; P. T. Matthews, *The relativistic quantum theory of elementary particle interactions*, Rochester, N. Y., 1957; W. Thirring, *Principles of quantum electrodynamics*, N. Y., 1958; A. I. Ahiezer, V. B. Berestețki, *Electrodinamica cuantică* ed. 2-a, GIFML, M, 1959; R. E. Marshak, E. C. G. Sudarshan, *Introduction to elementary particle physics*, Rochester, N. Y., 1961; S. S. Schweber, *An introduction to relativistic quantum field theory*, Row, Peterson & Co., Elmsford,, N. Y., 1961; G. Heber, *Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Quantenfeldtheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1961.
7. R. P. Feynmann, Phys. Rev., **76**, 749 și 769 (1949); F. J. Dyson, Phys. Rev., **75**, 486 și 1736 (1949); E. C. G. Stückelberg, D. Rivier, Helv. Phys. Acta, **22**, 265 (1949); M. Fierz, Helv. Phys. Acta, **23**, 731 (1950); J. Schwinger, Phys. Rev., **76**, 790 (1949).
8. G. C. Wick, Phys. Rev., **80**, 268 (1950).
9. F. J. Dyson, Phys. Rev. **82**, 428 (1951); **83**, 608 (1951).
10. J. Schwinger, Phys. Rev., **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949).

ȘIRUL LUI KÜNNETH PENTRU COMPLEXE GENERALIZATE

DE

OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ și ALEX. RADU
Institutul de matematică, București, str. M. Eminescu nr. 47

Remarcînd că proprietățile morfismului α se refac pentru complexe generalizate, în nota de față construim pentru acestea șirul exact al lui Künneth.

Introducere. În [4] am tratat chestiunea morfismului α pentru module cu diferențială generalizată. În nota de față, remarcăm mai întîi că această chestiune se poate reface imediat pentru complexe generalizate și restabilim în condiții asemănătoare celor clasice [1] șirul exact al lui Künneth.

Limbajul folosit în lucrare este propriu categoriilor abeliene.

1. Considerăm categoria $\mathcal{C}(\wedge, n)$ ale cărei obiecte sînt familii $A = (A^m, d_A^m)_{m \in Z}$ de $\wedge$ — module A^m și $\wedge$ — omomorfisme $d_A^m : A^m \to A^{m+1}$ cu proprietatea că pentru orice $i \in Z$ are loc relația : $d_A^{i+n-1} \circ d_A^{i+n-2} \circ \ldots \circ d_A^i = 0$, iar pentru obiectele $A = (A^m, d_A^m)_{m \in Z}$, $C = (C^m, d_c^m)_{m \in Z}$ din $\mathcal{C}(\wedge, n)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\wedge, n)}(A, C)$ este mulțimea familiilor $f = (f^m)_{m \in Z}$ de $\wedge$ — omomorfisme : $f^m : A^m \to C^m$ astfel încît, oricare ar fi $m \in Z$, este comutativ pătratul :

$$\begin{tikzcd} A^m \arrow[r, "d_A^m"] \arrow[d, "f^m"'] & A^{m+1} \arrow[d, "f^{m+1}"] \\ C^m \arrow[r, "d_C^m"'] & C^{m+1} \end{tikzcd}$$

Categoria $\mathcal{C}(\wedge, n)$ se poate asimila cu o categorie de diagrame peste categoria abeliană a $\wedge$ — modulelor ; așadar, conform teoremei de permanență, este ea însăși categorie abeliană.

Obiectele categoriei $\mathcal{C}(\wedge, n)$ se numesc *complexe generalizate de ordin n*.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, P. 105–109, BUCUREȘTI, 1965.

Oricărui complex generalizat $A = (A^m, d^m)_{m \in Z}$ îi asociem $\wedge$ — modulul graduat $A = \bigoplus_{m \in Z} A^m$ şi endomorfismul $\partial : A \to A$ definit prin $\partial = \bigoplus_{m \in Z} d^m_A$. Se arată cu uşurinţă că $\underbrace{\partial \circ \partial \circ \ldots \circ \partial}_{n \text{ ori}} = 0$, aşadar A este definit astfel ca obiect al categoriei $K(d, n)$ [4]. Cu notaţiile din [3], $Z_i(A), B_i(A), Z'_i(A), B'_i(A), H_i(A)\,(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ definim module graduate (cu diferenţiala generalizată nulă) cu graduarea indusă sau graduarea-cît, după cum este cazul. Fie A, C obiecte din $\mathcal{C}(\wedge_1, n)$, respectiv $\mathcal{C}(\wedge_2, n)$ şi $T(|A|, |C|)$ un functor defint pe categoriile $\mathcal{C}(\wedge_1, n), \mathcal{C}(\wedge_2, n)$ cu valori în categoria $\wedge$ — modulelor, *contravariant în primul argument şi covariant în al doilea.* (Prin $|A|$ înţelegem modulul negraduat cu acelaşi grup aditiv ca al lui A).

Modulul $T(|A|, |C|)$ se poate organiza ca $\wedge$ — modul bigraduat definind componentele biomogene prin : $T^{p,q}(A, C) = T(A^{-p}, C^q)$. Notăm $T(A, C) = \bigoplus_{(p,q) \in Z \times Z} T^{p,q}(A, C)$. Modulul $T(A, C)$ se înzestrează în mod natural cu diferenţiala δ generalizată de ordin n, ale cărei bicomponente sînt date prin $\delta^{p,q} = \delta_1^{p,q} + \delta_2^{p,q}$ cu $\delta_1^{p,q} = T(d_A^{-p-1}, 1_{C^q})$, $\delta_2^{p,q} = (-1)^p\, T(1_{A^{-p}}, d_{C^q})$

2. În cele ce urmează, stabilim şirul lui Künneth pentru cazul complexelor generalizate.

Presupunem functorul T exact la dreapta. În ipoteza că morfismele :

$$\alpha_i^{(1)} : T(H_i(A), B_i(C)) \to H_i\, T(A, B_i(C))$$

$$\alpha_i^{(2)} : T(H_i(A), Z_i(C)) \to H_i\, T(A, Z_i(C))$$

sînt izomorfisme, iar $S_1 T(A, B_i(C)) = 0$, $S_1 T(H_i(A), Z_i(C)) = 0$ (A fix, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ (i fix dar arbitrar)), vom arăta că are loc *şirul exact al lui Künneth* :

$$0 \to T(H_i(A), H_i(C)) \xrightarrow{\alpha_{n-i}} H_{n-i}\; T(A, C) \xrightarrow{\beta_i} S_1\, T(H_i(A), H_i(C)) \to 0, \tag{1}$$

în care α_{n-i} are gradul 0, iar β_i are gradul 1. (Morfismele α care intervin sînt cele definite în [4]).

3. *Arătăm în prealabil că, în ipotezele de mai sus, şirul de aplicaţii canonice* $C \to \beta_i(C) \xrightarrow[\text{(incluz)}]{u_i} Z_i(C) \to 0$ *induce şirul exact* : $\ldots \to H_i\; T(A, C) \to$

$$\to H_i\, T(A, B_i(C)) \xrightarrow{u_i^*} H_{n-i}\; T(A, Z_i(C)) \to H_{n-i}\; T(A, C) \to \ldots$$

Într-adevăr, T fiind exact la dreapta, şirul exact

$$0 \to Z_i(C) \to C \to B_i(C) \to 0$$

induce şirul exact :

$$0 \to T(A, Z_i(C)) \to T(A, C) \to T(A, B_i(C)) \to 0. \tag{2}$$

Aplicaţia $T(A, Z_i(C)) \to T(A, C)$ este monomorfism căci are loc şirul exact

$$\ldots \to S_1 T(A, B_i(C)) \to T(A, Z_i(C)) \to T(A, C) \to T(A, B_i(C)) \to 0$$

iar

$$S_1 T(A, B_i(C)) = 0.$$

Remarcăm totodată că teoria clasică a sateliţilor refăcută pentru categorii abeliene se aplică în particular la categoria $\mathcal{C}(\wedge, n)$.

Şirul (1) diferă de şirul omologic exact corespunzător şirului exact (2):

$$\ldots \to H_i T(A,C) \to H_i T(A,B_i(C)) \xrightarrow{\Delta_{i,n-i}} H_{n-i} T(A,Z_i(C)) \to H_{n-i} T(A,C) \to \ldots$$

numai prin aceea că morfismul de legătură $\Delta_{n-i,i}$ este înlocuit cu u^*_{n-i}. Este suficient deci să arătăm că aceste morfisme sînt egale, or, conform propoziţiei 3 din [4], are loc diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
T(H_i(A), B_i(C)) \arrow[r, "{T(H_i(A),\, \delta_{i,n-i})}"] \arrow[d, "\alpha_i^{(1)}"'] & T(H_i(A) Z_i(C)) \arrow[d, "\alpha_{n-i}^{(2)}"] \\
H_i T(A, B_i(C)) \arrow[r, "\Delta_{i,n-i}"'] & H_{n-i} T(A, Z_i(C))
\end{tikzcd}$$

unde $\delta_{i,n-i}$ este morfismul de legătură în şirul omologic corespunzător şirului exact $0 \to Z_i(C) \to C \to B_i(C) \to 0$. Exprimînd proprietatea de functorialitate a lui α_i, are loc diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
T(H_i(A), B_i(C)) \arrow[r, "{T(H_i(A),\, u_i)}"] \arrow[d, "\alpha_i^{(1)}"'] & T(H_i(A), Z_i(C)) \arrow[d, "\alpha_{n-i}^{(2)}"] \\
H_i T(A, B_i(C)) \arrow[r, "u_i^*"] & H_{n-i} T(A, Z_i(C))
\end{tikzcd}$$

Cum $\alpha_i^{(1)}$ este în particular epimorfism, din comutativitatea ultimelor două diagrame rezultă tocmai $\Delta_{i,n-i} = u_i^*$, dacă vom fi arătat că $u_i = \delta_{i,n-i}$.

Pentru aceasta, considerăm diagrama comutativă cu linii şi coloane exacte:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & Z_i(C) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id"'] & Z_i(C) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & B_i(C) \arrow[d, "id"'] & \\
0 \arrow[r] & Z_i(C) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "d^i"'] & B_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_i(C) \arrow[r] & C \arrow[r, "d^{n-i}"] & B_i(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De aici rezultă că aplicaţia $Z_i(C) \to B_i(C)$ este aplicaţia nulă. Şirul exact $0 \to Z_i(C) \to C \to B_i(C) \to 0$ induce diagrama comutativă cu linii şi coloane exacte:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Z_i(C) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & H_{n-i}(C) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & Z_i(C) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & Z_i(C) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d}_i"'] & B_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & Z_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & B_i(C) \arrow[d] & \\
 & Z_i(C) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & H_i(C) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & B_i(C) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

De aici rezultă că aplicaţia $H_i(C) \to B_i(C)$ este aplicaţia nulă şi conform lemei serpentinei obţinem şirul exact:

$$H_i(C) \xrightarrow{0} B_i(C) \xrightarrow{\delta_{i,n-i}} Z_i(C) \longrightarrow H_{n-i}(C) \xrightarrow{0} B_i(C)$$

(am schimbat i cu $n-i$ la nivelul omologiei). Pe de altă parte, are loc, în mod evident, şirul exact:

$$H_i(C) \xrightarrow{0} B_i(C) \xrightarrow{u_i} Z_i(C) \longrightarrow H_{n-i}(C) \xrightarrow{0} B_i(C)$$

Din unicitatea nucleului unei aplicaţii, rezultă $\delta_{i,n-i} = u_i$.

4. Trecem acum la construirea şirului lui Künneth în condiţiile impuse (2). Considerăm diagrama (D):

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d, dashed] & & \\
T(H_i(A),B_i(C)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i^{(1)}"'] & T(H_i(A),Z_i(C)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-i}^{(2)}"'] & T(H_i(A),H_i(C)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-i}"'] & 0 \arrow[d] & \\
H_iT(A,B_i(C)) \arrow[r] & H_{n-i}T(A,Z_i(C)) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-i}T(A,C) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_i"', "①"] & H_{n-i}T(A,B_i(C)) \arrow[r] \arrow[d, "{[\alpha_{n-i}^{(1)}]^{-1}}"'] & H_iT(A,Z_i(C)) \arrow[d, "{[\alpha_i^{(2)}]^{-1}}"'] \\
 & 0 \arrow[r] & S_1T(H_i(A),H_i(C)) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & T(H_i(A),B_i(C)) \arrow[r] & T(H_i(A),Z_i(C)) \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Comutativitatea acestei diagrame este asigurată de faptul că morfismul α este functorial (T este functor exact la dreapta!), iar din cele demonstrate mai sus (3), rezultă că linia mediană a diagramei (D) este şir exact. Cum $S_1T(H_i(A), Z_i(C)) = 0$, linia de jos rezultă şir exact.

Într-adevăr, este suficient să scriem şirul exact al sateliţilor corespunzător şirului exact

$$0 \to B_i(C) \to Z_i(C) \to H_i(C) \to 0$$

şi să ţinem seama că T este în particular semiexact.

Aşadar, diagrama (D) este comutativă cu toate liniile exacte. Din definiţia nucleului unui morfism, rezultă că există β_i unic : $H_i T(A, C) \to S_1 T(H_i(A), H_i(C))$, compatibil cu comutativitatea diagramei (D). Din „lema celor cinci morfisme", α_{n-i} rezultă monomorfism iar β_i epimorfism şi se arată imediat că şirul

$$0 \to T(H_i(A), H_i(C)) \xrightarrow{\alpha_{n-i}} H_{n-i}\, T(A, C) \xrightarrow{\beta_i} S_1\, T(H_i(A), H_i(C)) \to 0$$

este exact. Am obţinut astfel şirul (1) al lui Künneth. Din citirea pătratului ① al diagramei (D), rezultă că β_i are gradul 1.

5. Pentru şirul exact al lui Künneth astfel stabilit se extinde proprietatea de naturaleţe, în sensul Cartan-Eilenberg ([1], ch. IV, § 8). Dacă A', C' este o altă pereche de complexe generalizate satisfăcînd condiţiile din 2 (i fix, arbitrar), iar $f : A' \to A$, $g : C \to C'$ morfisme de complexe generalizate, atunci are loc diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(H_i(A), H_i(C)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & H_i\, T(A, C) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & S_1\, T(H_i(A), H_i(C)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(H_i(A'), H_i(C')) \arrow[r] & H_i\, T(A', C') \arrow[r] & S_1\, T(H_i(A'), H_i(C')) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comutativitatea pătratului I rezultă din proprietatea de functorialitate a morfismului α. Comutativitatea pătratului II rezultă din comutativitatea cubului :

$$\begin{tikzcd}
 & & H_i\, T(A, C) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, dashed] & & H_i\, T(A, B_i(C)) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
0 \arrow[r] & S_1 T(H_i(A), H_i(C)) \arrow[rr] \arrow[dd] & & T(H_i(A), B_i(C)) \arrow[dd] & \\
 & & H_i\, T(A', C') \arrow[rr] \arrow[dl, dashed] & & T(H_i(A'), B'_i(C')) \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & S_1 T(H_i(A'), H_i(C')) \arrow[rr] & & T(H_i(A'), B'_i(C')) &
\end{tikzcd}$$

Primită la redacţie la 7 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra.* Princeton University Press, 1956.
2. D. Bucksbaum, *Exact Categories and dualites.* Trans. Amer. Math. Soc., 1—34 (1955) **80**.
3. C. Bănică şi N. Popescu, *Diferenţiale generalizate.* Comunic. Acad. R.P.R., **XII**, *6*, 523—528 (1963).
4. A. Radu şi O. Stănăşilă, *Morfismul α pentru module cu diferenţială generalizată.* Math. Revews (sub tipar).

DESPRE SUPRAPUNEREA A DOUĂ FUNCŢII CRESCĂTOARE, UNA CONVEXĂ IAR CEALALTĂ CONCAVĂ

DE

TUDOR ZAMFIRESCU

În acest articol este urmat, în mare, următorul plan :

1° Se amintesc şi se compară unele rezultate deja cunoscute.

2° Se demonstrează o teoremă de suficienţă pentru apartenenţa la tipul K.

3° Se introduc subclase de funcţii K, pentru care se adaptează în mod corespunzător teorema de la punctul 2°.

Centrul de greutate al lucrării cade asupra acestei teoreme, dar consider nu lipsite de interes nici, de pildă, evaluările funcţiilor φ şi ψ din definiţia tipului K, evaluări care devin posibile doar în condiţiile actualei teoreme de suficienţă.

1. INTRODUCERE *)

În lucrarea sa [2], S. Marcus a introdus clasa funcţiilor de tip K, a cărei definiţie o reamintim :

Se numeşte funcţie de tip K o aplicaţie $f : (a, b) \to R$ cu proprietatea că există funcţiile φ definită, reală, strict crescătoare şi convexă pe (a, b) şi ψ definită, reală, strict crescătoare şi concavă pe $(\varphi(a), \varphi(b))$, astfel încît

$$f(x) = \psi(\varphi(x)).$$

În lucrarea citată, S. Marcus dă următoarea condiţie suficientă pentru apartenenţa la tipul K :

TEOREMA A. *Fie o funcţie reală f, definită pe (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$. Presupunem că f este derivabilă pe (a, b) şi că $f'(x) > 0$ pentru $a < x < b$. Presupunem de asemenea că $f''(x)$ există, finită, în fiecare punct din (a, b) şi că f'' este sumabilă pe fiecare interval compact conţinut în (a, b). Atunci f este, pe (a, b), o funcţie de tip K.*

---

*) Versiunea în l. franceză va apare în Revue Romaine de math. pures et appl., **10**, *5* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, P. 113–120, BUCUREŞTI, 1965.

De asemenea se mai cunoaște [5] următorul rezultat:

TEOREMA B. *Pentru ca o funcție* $f : (a, b) \rightarrow R$ *să fie de tip* K *este suficient ca următoarele patru condiții să fie satisfăcute* [1]:

1° f *este continuă pe* (a, b),

2° f^{+} (f^{-}) *este definită pe* (a, b) *și cu variație mărginită pe fiecare* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

3° *marginea inferioară a funcției* f^{+} (f^{-}) *este strict pozitivă pe fiecare* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

4° $\mathcal{D}''_{f^+} \subseteq \{a, b\}$ $(\mathcal{D}''_{f^-} \subseteq \{a, b\})$,

(*prin* $\mathcal{D}_g$ *înțelegem mulțimea punctelor de discontinuitate sau de extrem relativ strict ale funcției* g).

Nici una dintre aceste două teoreme nu reprezintă o extensiune a celeilalte. În privința derivabilității, condițiile teoremei B sînt mai puțin restrictive ([5], 4). Însă se pot da exemple de funcții care să nu verifice condițiile teoremei B și totuși să fie de tip K, satisfăcîndu-le pe cele ale teoremei A. Iată un astfel de exemplu:

Definim funcția $F : (-\zeta(2), \zeta(2)) \rightarrow R$, unde $\zeta(z)$ este cunoscuta funcție a lui Riemann, prin

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{[|x| - \zeta(2) + 1]^3} \sin^2 \dfrac{\pi}{\sqrt{|x| - \zeta(2) + 1}} \text{ dacă } |x| \in (\zeta(2) - 1, \zeta(2)), \\[2ex] \sqrt{\left[|x| - \zeta(2) + \sum\limits_{k=1}^{j+1} k^{-2}\right]^3} \sin^2 \dfrac{\pi}{\sqrt{|x| - \zeta(2) + \sum\limits_{k=1}^{j+1} k^{-2}}} \text{ dacă} \\ \qquad\qquad |x| \in \left(\zeta(2) - \sum\limits_{k=1}^{j+1} k^{-2},\ \zeta(2) - \sum\limits_{k=1}^{j} k^{-2}\right], \\[2ex] 0 \text{ dacă } x = 0; \end{cases}$$

funcția

$$f(x) = x + \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$$

ne procură exemplul dorit. Într-adevăr, f este derivabilă și $f'(x) = 1 + F(x) > 0$ deoarece $F(x) \geqslant 0$; f'' există și este finită în $(-\zeta(2), \zeta(2))$ iar f'' este sumabilă pe orice $[\alpha, \beta] \subset (-\zeta(2), \zeta(2))$ deoarece, pe $[\alpha, \beta]$, F' este mărginită, prin urmare F este lipschitziană, deci absolut continuă și deci cu variația mărginită [2]. În același timp, însă, avem

$$\mathcal{D}''_{f^+} = \{0\} \not\subseteq \{-\zeta(2), \zeta(2)\}.$$

---

[1] Utilizăm semnele $\subset$ și $\supset$ pentru incluziunea strictă iar $\subseteq$ și $\supseteq$ pentru incluziunea nestrictă.

[2] Se poate verifica și direct că F este cu variație mărginită pe $[\alpha, \beta]$. În adevăr, variația $\mathcal{V}F$ a lui F satisface inegalitatea

$$\mathcal{V}F \leqslant 4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{h^3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 4\ \zeta(2) = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Prin urmare funcţia f satisface condiţiile teoremei A fără a le satisface şi pe cele ale teoremei B.

Am ales exemplul acesta şi pentru motivul că el constituie o probă a superiorităţii teoremei A faţă de teorema lui Szekeres (v. mai departe, la punctul 4) în privinţa apartenenţei la tipul K. Într-adevăr, f'' nu este continuă, deoarece F' are punctele de discontinuitate (bineînţeles, de speţa a doua)

$$\pm\left[\zeta(2)-\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^2}\right],\ (j\in N).$$

2. CONDIŢII SUFICIENTE

Teorema care urmează constituie o extindere a teoremei B şi utilizează rezultatele acesteia. Ea prezintă tot condiţii suficiente de apartenenţă la tipul K.

Teorema 1. *Dacă funcţia* $f:(a, b)\to R$ *satisface condiţiile*:

1° f *este continuă pe* (a, b),

2° f^+ *există şi este cu variaţie mărginită pe orice* $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$,

3° $\inf f^+ > 0$ *pe orice* $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$,

4° $\mathcal{D}_{f^+}$ *este reductibilă* (*în sensul din* [1], *p. 322*),

atunci f *este de tip* K.

Observaţie. Se obţine o teoremă asemănătoare schimbînd derivata la dreapta f^+ a funcţiei f, prin derivata ei la stînga, f^-.

Demonstraţie. Mulţimea $\mathcal{D}_{f^+}$ fiind reductibilă, există $n\in N$ astfel încît $\mathcal{D}_{f^+}^{(n)}\neq\emptyset$ iar $\mathcal{D}_{f^+}^{(n+1)}=\emptyset$.

Fie şirul de intervale $\{I_i^p\}_{i\in N}$ cu proprietăţile: $\bigcap_{s=1}^{\infty} I_s^p=\emptyset$, $\bigcup_{s=1}^{\infty} I_s^p = (a, b)-\mathcal{D}_{f^+}^{(p)}$. Conform celor arătate în [5] la demonstraţia teoremei 1, fiecărui interval I_i^1 îi putem ataşa cîte două funcţii, $g_i(x)$ şi $h_i(x)$. Aceste funcţii pot fi identificate în singurul punct din I_i^1 în care sînt ambele definite; se obţine funcţia crescătoare $f_i^1 : I_i^1\to R$ care satisface inegalităţile

$$\lim_{x\to\inf I_i^1} f_i^1(x) > 0 \text{ şi } \lim_{x\to\sup I_i^1} f_i^1(x)<\infty,$$

dacă $\inf I_i^1 > a$ şi, respectiv, $\sup I_i^1 < b$.

Făcînd uz de această proprietate a funcţiilor f_i^1, funcţiile $f_{i_{j_2}}^1$ corespunzînd subşirului $\{I_{i_{j_2}}^1\}$ al lui $\{I_i^1\}$, pentru care $\bigcup_{s=1}^{\infty} I_{i_s}^1 = I_i^2$, amplificate cu factori convenabili, pot fi prelungite prin continuitate în extremităţile intervalelor $I_{i_{j_2}}^1$ astfel încît acolo ele să se suprapună, obţinîndu-se astfel funcţiile $F_{k_i}^i$ (3, [5]), pe care le vom renota acum, renunţînd la indicarea constantelor k_i, cu f_i^2.

Să presupunem că funcţia f_i^k obţinută prin prelungirea prin continuitate a funcţiilor $f_{i_{j_k}}^{k-1}$ corespunzînd intervalelor $I_{i_{j_k}}^{k-1}$ pentru care $\bigcup_{s=1}^{\infty} I_{i_s}^{k-1} = I_i^k$, are proprietăţile

$$\lim_{x\to\inf I_i^k} f_i^k(x) > 0 \text{ şi } \lim_{x\to\sup I_i^k} f_i^k(x) < \infty,$$

dacă inf $I_i^k > a$ şi, respectiv, sup $I_i^k < b$. Atunci funcţiile $f_{i_{j_{k+1}}}^k$, amplificate cu factori convenabili, pot fi prelungite prin continuitate în extremităţile intervalelor $I_{i_{j_{k+1}}}^k$, obţinîndu-se astfel funcţia f_i^{k+1}.

Să arătăm că

$$\lim_{x\to\inf I_i^{k+1}} f_i^{k+1}(x) > 0 \text{ şi } \lim_{x\to\sup I_i^{k+1}} f_i^{k+1}(x) < \infty,$$

dacă inf $I_i^{k+1} > a$ şi, respectiv, sup $I_i^{k+1} < b$.

În adevăr, utilizînd notaţiile din demonstraţia teoremei B (teorema 1, [4]),

$$\frac{\lim\limits_{x\to\sup I_i^1} f_i^1}{\lim\limits_{x\to\inf I_i^1} f_i^1} = \frac{g_i(x_i^n\infty)}{h_i(x_i^n\infty)} = \frac{g_i(x_i^{n_1})}{h_i(x_i^{n_1})}\left[1+\frac{a_i^1}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1}\pm 0)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1+\frac{a_i^2}{(f^{-1})^+(x_i^{p_2}\pm 0)}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\frac{b_i^1}{(f^{-1})^+(x_i^{q_1})}\right]\cdot\left[1+\frac{b_i^2}{(f^{-1})^+(x_i^{q_2})}\right]\cdot\ldots=$$

$$=\frac{g_i(x_i^{n_1})}{h_i(x_i^{n_1})}\left[1+\frac{a_i^1}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1}\pm 0)}\right]\cdot\left[1+\frac{b_i^1}{(f^{-1})^+(x_i^{q_1})}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1+\frac{a_i^2}{(f^{-1})^+(x_i^{p_2}\pm 0)}\right]\cdot\left[1+\frac{b_i^2}{(f^{-1})(x_i^{q_2})}\right]\cdot\ldots<\infty$$

în virtutea absolut convergenţei produsului infinit de mai sus, care, la rîndul ei, se datorează convergenţei seriei

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_i^{j_1}}{(f^{-1})^+(x_i^{p_{j_1}}\pm 0)}+\frac{b_i^{j_1}}{(f^{-1})^+(x_i^{q_{j_1}})},$$

$(f^{-1})^+$ fiind cu variaţie mărginită pe orice $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Vom omite mai departe raportul $\dfrac{g_i(x_i^{n_1})}{h_i(x_i^{n_1})}$, întrucît el se reduce la, cel mult, doi factori de forma $\left[1+\dfrac{a}{(f^{-1})^+(x_i^p\pm 0)}\right]$. Avem $\dfrac{\lim\limits_{x\to\sup I_i^2} f_i^2}{\lim\limits_{x\to\inf I_i^2} f_i^2} = \prod\limits_{j_2=1}^{\infty}\dfrac{\lim\limits_{x\to\sup I_{i_{j_2}}^1} f_{i_{j_2}}^1}{\lim\limits_{x\to\inf I_{i_{j_2}}^1} f_{i_{j_2}}^1} =$

$$= \prod_{j_2=1}^{\infty} \prod_{j_1=1}^{\infty} \left[1 + \frac{a_{i j_2}^{j_1}}{(f^{-1})^{+} (x_{i\, j_2}^{p_{j_1}} \pm 0)}\right] \cdot \left[1 + \frac{b_{i j_2}^{j_1}}{(f^{-1})^{+} (x_{i_{j_2}}^{q_{j_1}})}\right] < \infty$$

ş.a.m.d.; în fine

$$\frac{\lim\limits_{x \to \sup I_i^{k+1}} f_i^{k+1}}{\lim\limits_{x \to \inf I_i^{k+1}} f_i^{k+1}} = \prod_{j_{k+1}=1}^{\infty} \frac{\lim\limits_{x \to \sup I_{i_{j_{k+1}}}^{k}} f_{i_{j_{k+1}}}^{k}}{\lim\limits_{x \to \inf I_{i_{j_{k+1}}}^{k}} f_{i_{j_{k+1}}}^{k}} = \prod_{j_{k+1}=1}^{\infty} \prod_{j_k=1}^{\infty} \cdots \prod_{j_1=1}^{\infty} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{i j_2 j_3 \ldots j_{k+1}}^{j_1}}{(f^{-1})^{+} (x_{i\, j_2 j_3 \ldots j_{k+1}}^{p_{j_1}} \pm 0)}\right] \cdot \left[1 + \frac{b_{i j_2 j_3 \ldots j_{k+1}}^{j_1}}{(f^{-1})^{+} (x_{i\, j_2 j_3 \ldots j_{k+1}}^{q_{j_1}})}\right] < \infty,$$

din aceleaşi motive ca cele expuse în cazul $p = 1$; rezultă inegalităţile ce trebuiau stabilite.

Atunci, avem, pentru orice $m \in N$,

$$\lim_{x \to \inf I_i^m} f_i^m (x) > 0 \text{ şi } \lim_{x \to \sup I_i^m} f_i^m (x) < \infty,$$

dacă $\inf I_i^m > a$ şi, respectiv, $\sup I_i^m < b$.

Aceste inegalităţi, scrise pentru $m = n$, permit ca funcţiile f_i^n să poată fi prelungite prin continuitate în extremităţile intervalelor I_i^n, obţinîndu-se astfel funcţia f_1^{n+1} pe care o vom nota din nou cu F_k, întrucît depinde de o constantă multiplicativă k, după cum este lesne de observat. Funcţia $\bar{\varphi}(x) = \int_{x_0}^{f(x)} F_k(t)\, dt$, unde $x_0 \in (f(a), f(b))$ iar $x \in (a, b)$, este convexă şi strict crescătoare pe (a, b); inversa $\bar{\psi}(u)$ a funcţiei $\int_{x_0}^{x} F_k(t)\, dt$ este concavă şi strict crescătoare pe $(\bar{\varphi}(a), \bar{\varphi}(b))$ iar $\bar{\psi}(\bar{\varphi}(x)) = f(x)$, evident. Deci f este de tip K.

3. CLASELE DE FUNCŢII φ ŞI ψ

Fie funcţia $f : (a, b) \to (c, d)$, de tip K.

Considerăm funcţia F_h construită mai sus şi o funcţie crescătoare şi strict pozitivă $h : (c, d) \to R$, altfel arbitrară. Funcţia $F_k \cdot h$ este integrabilă Riemann; notăm

$$\Psi_h(x) = \int_{x_0}^{x} F_k(t) \cdot h(t)\, dt + C,$$

unde x_0, $x \in (c, d)$ iar C este o constantă oarecare.

Convenim ca semnificaţiile funcţiilor φ şi ψ să fie de acum încolo cele conţinute în definiţia apartenenţei la tipul K.

Teorema 2. *Dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei 1, atunci există o funcție h pentru care* $\varphi(x) = \Psi_h(f(x))$ *iar* $\psi(x) = \Psi_h^{-1}(x)$.

Teorema 2′. *În condițiile teoremei 1, funcțiile* φ *coincid cu funcțiile* $\varphi^* : (a, b) \to R$, *cu proprietatea că pentru fiecare* $\rho \in (a, b)$, *dacă* $\varphi^{*+}(\rho) = \bar{\varphi}^+(\rho)$, *atunci* $\varphi^{*+}(\iota) \leqslant \bar{\rho}^+(\iota)$ *pentru* $\iota < \rho$ (*și* $\varphi^{*+}(\iota) \geqslant \bar{\varphi}^+(\iota)$ *pentru* $\iota > \rho$) *iar funcțiile* ψ *coincid cu funcțiile* $\psi^* : I \to (c, d)$ *cu proprietatea că pentru fiecare* $\tau \in (c, d)$, *dacă* $(\psi^{*-1})^+(\tau) = (\bar{\psi}^{-1})^+(\tau)$, *atunci* $(\psi^{*-1})^+(\nu) \leqslant (\bar{\psi}^{-1})^+(\nu)$ *pentru* $\nu < \tau$ (*și* $(\psi^{*-1})^+(\nu) \geqslant (\bar{\psi}^{-1})^+(\nu)$ *pentru* $\nu > \tau$), *I fiind un interval deschis arbitrar al lui R.*

Demonstrațiile teoremelor 2 și 2′ sînt întrutotul analoage demonstrațiilor teoremelor 2 și 4 din [5].

4. NOI TIPURI DE FUNCŢII K

Introducem următoarele definiții:

DEFINIŢIA 1. *O funcție* $f : (a, b) \to R$ *este de tip* K_1 *dacă există o funcție reală* φ *definită, strict crescătoare, derivabilă și cu derivata crescătoare pe* (a, b) *și o funcție reală* ψ *definită, strict crescătoare, derivabilă și cu derivata descrescătoare pe* $(\varphi(a), \varphi(b))$, *astfel încît* $f(x) = \psi(\varphi(x))$.

DEFINIŢIA 2. *O funcție* $f : (a, b) \to R$ *este de tip* K_2 *dacă există o funcție reală* φ *definită, strict crescătoare, de două ori derivabilă și cu* $\varphi''(x) \geqslant 0$ *pentru* $a < x < b$, *și o funcție reală* ψ *definită, strict crescătoare, de două ori derivabilă și cu* $\psi''(u) \leqslant 0$ *pentru* $\varphi(a) < u < \varphi(b)$, *astfel încît* $f(x) = \psi(\varphi(x))$.

DEFINIŢIA 3. *O funcție este de tip* $K_{\bar{1}}$ ($K_{\bar{2}}$) *dacă ea este de tip* K_1(K_2) *și are, peste tot, derivata (derivata secundă) continuă.*

Vom numi, pentru simplitate, tot cu $K, K_1, K_{\bar{1}}, K_2$ și $K_{\bar{2}}$ mulțimile de funcții de tip $K, K_1, K_{\bar{1}}, K_2$ și, respectiv, $K_{\bar{2}}$.

PROPOZIŢIE. *Între mulțimile introduse mai sus avem relațiile:*

$$K \supset K_1 = K_{\bar{1}} \supset K_2 \supset K_{\bar{2}}.$$

Demonstrație. Este evident, din definiții, că avem

$$K \supseteq K_1 \supseteq K_{\bar{1}} \supseteq K_2 \supseteq K_{\bar{2}}.$$

Exemplul de la punctul 4 din [5], ne procură o funcție de tip K nederivabilă într-un punct al intervalului de definiție. Deci $K \supset K_1$.

Dacă $f \in K_1$, atunci f' are limite laterale finite în orice punct din intervalul de definiție, deoarece φ' și ψ' sînt monotone, deci, cum f' nu poate avea discontinuități de prima speță, ea este continuă; prin urmare $K_1 = K_{\bar{1}}$.

Funcția $f : (0,2) \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } x \in (0,1] \\ 2x - 1 & \text{pentru } x \in (1,2) \end{cases}$$

este de tip K_1 deoarece se poate scrie

$$f(x) = i(f(x)),$$

unde $i : (0,3) \rightarrow (0,3)$ este funcţia identică iar f şi i sînt derivabile, cu f' crescătoare şi $i' = 1$. Dar f' nu este derivabilă în punctul $1 \in (0,2)$. Deci $K_1 \supset K_2$.

O funcţie de tip K_2 cu derivata a doua discontinuă este dată de exemplul de la punctul 1. Apartenenţa ei la tipul K_2 este asigurată de teorema 4 ce va fi stabilită la punctul următor. Astfel a rezultat şi ultima incluziune strictă de demonstrat, $K_2 \supset K_{\bar{2}}$.

5. TEOREME DE SUFICIENŢĂ

TEOREMA 3. *Dacă funcţia* $f : (a, b) \rightarrow R$ *satisface condiţiile :*
1° f *este derivabilă pe* (a, b),
2° f' *este cu variaţie mărginită pe orice* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,
3° $f' > 0$ *pe* (a, b),
4° $\mathcal{D}_{f'}$ *este reductibilă,*
atunci f *este de tip* K_1.

Remarcă. Aici $\mathcal{D}_{f'}$, înseamnă mulţimea punctelor de extrem relativ strict ale lui f' (această funcţie nu are puncte de discontinuitate : $K_1 = K_{\bar{1}}$).

Demonstraţie. Funcţia f' fiind continuă, avem $\inf f' > 0$ pe orice $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Deci f îndeplineşte condiţiile teoremei 1 şi, prin urmare, este de tip K. Construcţia funcţiilor $\bar{\varphi}$ şi $\bar{\psi}$, efectuată ca în demonstraţia teoremei 1, duce, ţinînd seama de derivabilitatea lui f, la funcţii $\bar{\varphi}$ şi $\bar{\psi}$ derivabile. Funţia $\bar{\varphi}$ fiind convexă, $\bar{\varphi}'$ este crescătoare iar $\bar{\psi}$ fiind concavă, $\bar{\psi}'$ este descrescătoare. Deci $f \in K_1$.

TEOREMA 4. *Dacă funcţia* $f : (a, b) \rightarrow R$ *satisface condiţiile teoremei 3 şi este, în plus, de două ori derivabilă pe* (a, b), *atunci* f *este de tip* K_2.

Demonstraţie. Satisfăcînd condiţiile teoremei 3, functia f este de tip K_1. Construcţia despre care am vorbit a funcţiilor $\bar{\varphi}$ şi $\bar{\psi}$ arată, în acest caz, că $\bar{\varphi}'$ şi $\bar{\psi}'$, pe lîngă că sînt prima crescătoare iar a doua descrescătoare, sînt şi derivabile, deci $\bar{\varphi}'' \geqslant 0$ iar $\bar{\psi}'' \leqslant 0$. Prin urmare $f \in K_2$.

TEOREMA LUI SZEKERES. *Dacă funcţia* $f : (a, b) \rightarrow R$ *satisface condiţiile :*
1° f *este de două ori derivabilă pe* (a, b),
2° f'' *este continuă pe* (a, b),
3° $f' > 0$ [3]),
atunci f *este de tip* $K_{\bar{2}}$ [4]).

6. CLASELE DE FUNCŢII φ_1, ψ_1 ŞI φ_2, ψ_2

Notăm cu φ_i şi ψ_i funcţiile ce joacă rolul funcţiilor φ şi ψ utilizate în definiţia tipului K_i $(i = 1, 2)$.

Fie $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ o funcţie de tip K_1.

---

[3]) Completarea teoremei cu condiţia 3° a fost adusă de S. Marcus [2].

[4]) Pentru demonstraţie se vor consulta [4], [2].

Considerăm funcţia $F_k : (c, d) \to R$ construită în demonstraţia teoremei 1, corespunzînd condiţiilor pentru f din teorema 3 şi funcţia continuă, crescătoare şi strict pozitivă $h_1 : (c, d) \to R$, altfel arbitrară. Notăm

$$\Psi_{h_1}(x) = \int_{x_0}^{x} F_k(t) \cdot h_1(t) \, \mathrm{d}t + C$$

unde $x_0, x \in (c, d)$ iar C este o constantă oarecare.

TEOREMA 5. *În condiţiile teoremei 3, există o funcţie h_1 astfel încît $\varphi_1(x) = \Psi_{h_1}(f(x))$ iar $\psi_1(x) = \Psi_{h_1}^{-1}(x)$.*

Fie acum funcţia $f : (a, b) \to (c, d)$ de tip K_2.

Considerăm din nou funcţia $F_k : (c, d) \to R$, construită în demonstraţia teoremei 1, corespunzînd de data aceasta condiţiilor pentru f din teorema 4 şi funcţia derivabilă $h_2 : (c, d) \to R$ cu $h_2 > 0$ şi $h_2' \geqslant 0$, altfel arbitrară. Introducînd exact ca mai sus funcţia Ψ_{h_2}, putem enunţa

TEOREMA 6. *În condiţiile teoremei 4, există o funcţie h_2 astfel încît $\varphi_2(x) = \Psi_{h_2}(f(x))$ iar $\psi_2(x) = \Psi_{h_2}^{-1}(x)$.*

Lăsăm demonstraţiile teoremelor 5 şi 6 în seama cititorului, efectuarea lor urmînd modelul demonstraţiei teoremei 2 din [5].

Primită la redacţie la 6 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. LEBESGUE, H., *Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives*, 2. ed., Paris, Gauthier-Villars, 1950.
2. MARCUS, S., *Sur un théorème de G. Szekeres, concernant les fonctions monotones et convexes*, Canad. J. of Math, **11**, 521–526 (1959).
3. NICOLESCU, M., *Analiză matematică*, vol. II, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
4. SZEKERES, G., *On a property of monotone and convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 351–353 (1956).
5. ZAMFIRESCU T., *Sur quelques théorèmes de G. Szekeres et S. Marcus concernant les fonctions monotones et convexes*, Revue Roum. de math. pures et appl., **10**, *1* (1965).

GRUPURI DISCRETE ÎN SPAŢIUL EUCLIDIAN

DE

G. VRĂNCEANU

Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, 47, Bucureşti

Se ştie că în planul euclidian E_2 o deplasare poate constitui un grup discret, numai dacă este o translaţie, ceea ce conduce la o clasificare foarte simplă a grupurilor discrete ale planului euclidian, arătîndu-se că există 4 asemenea grupuri[1]. În cazul spaţiului euclidian, W. Novacki a făcut de asemenea clasificarea grupurilor discrete arătînd că există 17 asemenea grupuri[2]. În această lucrare vrem să arătăm cum se poate face o clasificare a acestor grupuri pe o cale directă.

I

Să plecăm de la faptul că în spaţiul E_3 cu 3 dimensiuni, o transformare T ortogonală formează un grup discret G_1 dacă este o rototranslaţie deci dacă se poate scrie sub forma canonică

$$\begin{aligned} x' &= x + a \ (a \neq 0), \\ y' &= y \cos\theta - z \sin\theta, \\ z' &= y \sin\theta + z \cos\theta, \end{aligned} \tag{1}$$

în cazul cînd T este o transformare directă, deci are determinantul 1. Avem de-a face deci cu o rotaţie de unghi θ în jurul axei Ox şi o translaţie de-a lungul acestei axe de lungime a. Evident, dacă $\theta = 0$, avem o translaţie pură. Dacă transformarea T este indirectă, atunci ea se poate reduce la forma canonică

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= -y \cos\theta + z \sin\theta, \\ z' &= y \sin\theta + z \cos\theta. \end{aligned}$$

---

[1] G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. III, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti 1960, p. 426.

[2] W. Novacki, *Die euclidischen, drei dimensionalen geschlosenen und offenen Raumformen.* Comentarii Math. Helvetici, **7**, 81–93 (1934), vezi, de asemenea, W. Hantzsche und H. Wendt, *Drei dimensionale euclidischen Raumformen*, Math. Ann., **110**, 593–611 (1935).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, P. 119–129, BUCUREŞTI, 1965.

În cazul transformărilor directe (1), ele pot forma un grup discret G_3, avînd grupul H al translaţiilor ca subgrup, numai dacă $\theta = \frac{2\pi}{m}$, unde m are una din valorile 1, 2, 3, 4, 6[3]. Există deci 5 varietăţi închise ce se obţin identificînd în E_3 punctele lăsate invariante de grupul G_3 corespunzător. În cazul $m = 1$, transformarea(1) este o translaţie, deci grupul G_3 este format numai din translaţii iar varietatea închisă corespunzătoare este torul cu 3 dimensiuni. În afară de tor, avem încă patru varietăţi închise, să zicem M_2, M_3, M_4, M_5 care corespund grupurilor G_3 ce conţin o transformare T dată de (1),în care θ are valorile

$$180°, 120°, 90°, 60° \tag{2}$$

Ţinînd seama că transformata T^2 se scrie

$$\begin{aligned} x' &= x + 2a, \\ y' &= y \cos 2\,\theta - z \sin 2\,\theta \\ z' &= y \sin 2\theta + z \cos 2\,\theta, \end{aligned} \tag{2'}$$

rezultă că grupul G, corespunzător varietăţii M_4, conţine, abstracţie făcînd de valoarea constantă a, grupul corespunzător varietăţii M, pentru care $\theta = 180°$, deci avem

$$x' = x + a, \quad y' = -y, \; z' = -z \tag{3}$$

Altfel spus, cazul $m = 4$ conţine cazul $m = 2$. De asemenea, cazul $m = 6$ conţine cazul $m = 2$, precum şi cazul $m = 3$. Este vorba bineînţeles de rotaţii în jurul aceleiaşi axe.

Să arătăm însă că fiind dat un grup discret direct G_3, el nu poate conţine rotaţii de axe diferite, decît dacă rotaţiile sînt de 180°. Într-adevăr, să presupunem că ni se dă o rototranslaţie R care împreună cu T dat de familia (1) să constituie un grup discret G_2. Deci R va fi dat de formule de forma

$$\begin{aligned} x' &= a_1^1\, x + a_2^1\, y + a_3^1\, z + \lambda \\ y' &= a_1^2\, x + a_2^2\, y + a_3^2\, z + \mu \\ z' &= a_1^3\, x + a_2^3\, y + a_3^3\, z + \gamma, \end{aligned} \tag{4}$$

unde $|a_j^i|$ formează un determinant ortogonal egal cu unitatea.

Ţinînd seama că ecuaţia în ρ relativă la R se scrie

$$\rho^3 - [a_1^1 + a_2^2 + a_3^3]\,\rho^2 + \mu\rho - 1 = 0$$

şi că trebuie să fie o rotaţie de unghi, să zicem, σ_0, rezultă că rădăcinile acestei ecuaţii trebuie să fie date de formulele

$$\rho_1 = 1, \;\; \rho_2 = e^{i\sigma_0}, \;\; \rho_3 = e^{-i\sigma_0} \quad (i = \sqrt{-1})$$

---

[3] G. Vrănceanu, *Groupes discrets orthogonaux dans E_3*. Revue Roumaine de math. pures et appl., **10**, *3* 1965.

şi prin urmare avem

$$a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = 1 + 2\cos\sigma_0. \tag{4'}$$

Pe de altă parte, ţinînd seama că transformarea (1) rămîne invariantă la o transformare ortogonală în planul y, z, putem utiliza o asemenea transformare pentru a duce la zero coeficientul a. În acest caz transformarea R se scrie

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + \lambda \\ y' &= (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\cos\psi - z\sin\psi + \mu \\ z' &= (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\sin\psi + z\cos\psi + \nu \end{aligned} \tag{5}$$

şi formula (4') se scrie

$$(1 + \cos\varphi)(1 + \cos\psi) = 2(1 + \cos\sigma_0). \tag{5'}$$

De asemenea, făcînd produsul RT^n avem formula

$$(1 + \cos\varphi)[1 + \cos(\psi + n\theta)] = 2(1 + \cos\sigma_n) \tag{5''}$$

unde σ_n este unghiul de rotaţie al lui RT^n.

Să presupunem că printre transformările RT^n $(n = 1, 2, \ldots, m - 1)$ este una de tipul $m = 2$, deci pentru care $\sigma_n = \pi$. Putem presupune că aceasta este chiar R, deci că $\sigma_0 = \pi$ şi formulele (5') şi (5'') se scriu

$$\begin{aligned} &(1 + \cos\varphi)(1 + \cos\psi) = 0, \\ &(1 + \cos\varphi)[1 + \cos(\psi + n\theta)] = 2(1 + \cos\sigma_n). \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă $\cos\varphi = -1$, deci toate RT^n sînt de tipul $m = 2$, transformarea R se scrie

$$\begin{aligned} x' &= -x + \lambda, \\ y' &= -y\cos\psi - z\sin\psi + \mu, \\ z' &= -y\sin\psi + z\cos\psi + \nu. \end{aligned} \tag{7}$$

Dacă facem o transformare ortogonală de variabile

$$\begin{aligned} u &= x + k, \\ v &= y\cos\rho - z\sin\varphi \\ w &= y\sin\varphi + z\cos\varphi \end{aligned} \tag{8}$$

este uşor de văzut că alegînd k şi ρ aşa ca să avem

$$\lambda + 2k = 0 \quad \rho = \pi - \frac{\psi}{2},$$

transformarea (7) se reduce la cazul cînd am avea $\psi = 0$, $\lambda = 0$ deci R se scrie

$$x' = -x, \quad y' = -y + b, \quad z' = z + c. \tag{9}$$

Dacă $\cos\varphi \neq -1$, prima formulă (6) ne spune că $\psi = \pi$ şi ultimele formule (6) se scriu

$$(1+\cos\varphi)(1-\cos n\theta) = 2(1+\cos\sigma_n). \tag{9'}$$

Să presupunem că $m = 6$ şi $n = 1$. Aceste formule ne dau

$$\cos\varphi = 3 + 4\cos\sigma_1.$$

Ţinînd cont că $4\cos\sigma_1$ are una din valorile $4, -4, -2, 0, 2$, rezultă că singura valoare acceptabilă este -2, cînd $\cos\varphi = 1$ şi transformarea R se scrie

$$x' = x + \lambda,\quad y' = -y + \mu,\quad z' = -z + \nu \tag{10}$$

deci R este o rotaţie de unghi π, cu aceeaşi axă ca T, deci $R = AT^3$, unde A este o translaţie, prin urmare T şi R nu au axe diferite. Să presupunem că $m = 4$. În acest caz formulele (9′) pentru $n = 1$ ne dau

$$\cos\varphi = 1 + 2\cos\sigma_1$$

şi cum $2\cos\sigma_1$ are una din valorile $2, -2, -1, 0, 1$, rezultă că valorile acceptabile cu $\cos\varphi \neq -1$ sînt $0, -1$, cînd $\cos\varphi$ are valorile $1, 0$, şi transformarea R este dată de formulele (10) deci R şi T au aceeaşi axă sau R este dată de formulele

$$x' = -y + \lambda,\quad y' = -x + \mu,\quad z' = -z + \nu \tag{11}$$

Dacă $m = 3$, atunci formulele (9′) pentru $n = 1$ ne dau

$$3\cos\varphi = 1 + 4\cos\sigma_1$$

şi deci valorile acceptabile pentru $4\cos\sigma_1$ sînt $-4, -2, 0, 2$ cînd $\cos\varphi$ are valorile $-1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 1$, deci lăsînd la o parte prima şi ultima valoare ce corespund formelor (9) şi (10), rezultă că avem formulele

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + \lambda,\\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi + \mu,\\ z' &= -z + \nu, \end{aligned} \tag{12}$$

unde $\cos\varphi = \pm\dfrac{1}{3}\cdot$

Să presupunem acum că printre rototranslaţiile T, R şi produsele lor, nu exista nici una de tipul $m = 2$, deci nici de tipul $m = 4$, $m = 6$, deoarece aceste ultime tipuri conţin în ele tipul $m = 2$. Rezultă deci că atît T cît şi R sînt de tipul $m = 3$. În acest caz formulele (3), (4) se scriu

$$\begin{aligned} &(1+\cos\varphi)(1+\cos\psi) = 2 + 2\cos\sigma_0,\\ &(1+\cos\varphi)\left[1 - \frac{\cos\psi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\psi\right] = 2 + 2\cos\sigma_1,\\ &(1+\cos\varphi)\left[1 - \frac{\cos\psi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\psi\right] = 2 + 2\cos\sigma_2, \end{aligned} \tag{13}$$

unde $2 \cos \sigma_0$ are valoarea -1, iar $2 \cos \sigma_1$ şi $2 \cos \sigma_2$ au valorile 2 sau -1. Dacă $2 \cos \sigma_1$ sau $2 \cos \sigma_2$ ar avea valoarea 2, atunci TR sau TR^2 ar fi translaţii, deci T, R nu ar fi distincte. Dacă însă $2 \cos \sigma_1$, $2 \cos \sigma_2$ ar fi egale cu -1 ar rezulta $\sin \psi = 0$, şi am avea formulele

$$(1 + \cos \varphi)(1 + \cos \psi) = 1 \tag{14}$$

$$(1 + \cos \varphi)\left(1 - \frac{\cos \psi}{2}\right) = 1$$

ceea ce ne conduce la ecuaţia $\cos \varphi = 0$, $\cos \psi = 0$, deci avem o contrazicere.

Avem deci un prim rezultat:

Nu există grupuri discrete G cu rototranslaţii T, R, de axe diferite şi care să nu conţină rototranslaţii de tipul $m = 2$.

În ceea ce priveşte grupurile G ce ar putea avea rototranslaţii de tip $m = 2$, ele au una din transformări R de forma (9), sau una de forma (11) şi T de tipul $m = 4$ sau R de forma (12) şi T de tipul 3. Trebuie să demonstrăm însă că formulele (9), (11), (12) pot fi asociate numai cu T de tipul $m = 2$ şi că celelalte cazuri nu există. În ceea ce priveşte cazul cînd R este de forma (9) şi T este de tipul $m = 2$, deci T este de forma

$$x' = x + a, \quad y' = -y, \quad z' = -z \tag{15}$$

rezultă, notînd cu $U = TR$, deci considerînd transformarea

$$x' = -x + \mathrm{a}, \quad y' = y + \mathrm{b}, \quad z' = -z + \mathrm{c}$$

că avem atunci rezultatul că U^2 este o translaţie de-a lungul axei y de lungime $2b$. Grupul este deci definit de transformările T, R cu a, b, c diferit de zero. Avem deci următoarea teoremă:

Transformările (9) şi (15) cu a, $b \neq 0$, generează un grup discret G_3.

Să observăm de asemenea că (15) este o rotaţie de unghi π în jurul axei y, în timp ce (9) este o rotaţie de unghi π în jurul unei axe ce trece prin punctul 0, $\frac{b}{2}$ 0 şi este paralelă cu axa z.

Avem deci o altă varietate închisă care se obţine identificînd punctele lăsate invariante de grupul G_3, definit de (9), (15).

II

Să presupunem acum că în grupul G_3 definit de rotaţiile (9) şi (15) vrem să inserăm o nouă transformare V dată de formulele

$$x' = x + \frac{\mathrm{a}}{2}, \quad y' = -z, \quad z' = y \tag{16}$$

ceea ce revine a presupune că T este de tipul $m = 4$, căci V^2 este tocmai transformarea (15).

Să considerăm atunci transformarea VR.

Avem formulele

$$x' = -x + \frac{a}{2}, \quad y' = -z - c, \quad z' = -y + \mathrm{b}.$$

astfel că pătratul acestei transformări se scrie

$$x' = x,\ y' = y - b - c,\quad z' = z + \mathrm{b} + \mathrm{c}. \tag{17}$$

De asemenea dacă considerăm produsul VR, deci transformarea

$$x' = -x + \frac{3a}{2},\quad y' = z - \mathrm{c},\quad z' = y + \mathrm{b}$$

pătratul acestei transformări este

$$x' = x,\quad y' = y + \mathrm{b} - \mathrm{c},\quad z' = z + \mathrm{b} - \mathrm{c}. \tag{17'}$$

Din formulele (17) şi (17') rezultă că nici $b + c$ şi nici $b - c$ nu pot fi zero, căci altfel în grup ar exista rotaţii pure, deci puncte fixe. Pe de altă parte translaţiile (17) şi (17') împreună cu translaţiile R^2, V^2 trebuie să aibă o bază comună.

Dacă R^2, V^2 ar fi această bază, trebuie să existe numere întregi m, n, p, q aşa fel ca să avem

$$-(b + c) = 2mb,\qquad b + c = 2\,nc,$$
$$b - c = 2pb,\qquad b - c = 2qc.$$

Din primele ecuaţii rezultă că trebuie să avem

$$(1 + 2\,m)(1 - 2\,n) = 1.$$

Cum m şi n sînt numere întregi, rezultă că $1 + 2\,m$, $1 - 2\,n$ trebuie să fie egale cu ± 1, deci $m = -n$ astfel încît avem

$$m(b - c) = 0$$

deci sau $m = 0$ şi atunci $b + c = 0$ sau $b - c = 0$.

Rezultă deci că o transformare T de tipul $m = 4$ nu poate forma cu R dat de formula (9) un grup discret pentru care R^2 să fie translaţii de bază.

În mod analog se poate arăta că două dintre translaţiile (17), (17'), R^2, V^2, nu pot constitui o bază pentru celelalte.

Într-adevăr, să presupunem că (17), (17') sînt o bază pentru R^2. Trebuie să avem atunci formule de forma

$$2b = -m\,(b + c) + n\,(b - c),\qquad 0 = m\,(b + c) + n\,(b - c),$$
$$0 = -p\,(b + c) + q\,(b - c),\qquad 2c = p\,(b + c) + q\,(b - c),$$

unde m, n, p, q sînt numere întregi.

Primele ecuaţii ne dau prin adunare şi scădere

$$b\,(1 - n) + nc = 0,\ b\,(1 + n) + mc = 0.$$

ceea ce ne spune că trebuie să avem

$$m - n = 2n\,m.$$

Avem deci

$$m = \frac{n}{1-2n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2n}$$

ceea ce ne spune că sau $n = 1$, $m = -1$ sau $n = 0$, $m = 0$, însă ambele soluţii nu sînt acceptabile, deoarece în primul caz obţinem $c = 0$, iar în al doilea caz $b = 0$.

Dacă una dintre (17) şi (17′) şi una dintre R^2, n^2 ar fi translaţii de bază, de exemplu (17′) şi R^2, atunci trebuie să avem

$$-(b+c) = 2\,mb + n\,(b-c), \qquad b + c = n\,(b-c),$$

$$0 = 2pb + q\,(b-c), \qquad 2c = q\,(b-c).$$

Primele se pot încă scrie

$$(m+n)\,b - nc = 0, \quad b\,(1-n) + c\,(1+n) = 0.$$

şi prin urmare trebuie să avem

$$m + 2n + mn = 0.$$

deci

$$m = -\frac{2n}{1+n} = -2\,t - \frac{2}{1+n}$$

ceea ce ne spune că în afară de soluţii neacceptabile $m = n = 0$ putem să avem $n = 1$, $m = 1$ care ne dă $c = 0$ ceea ce nu convine.

Să presupunem acum că luăm ca transformare V, aceea dată de formulele

$$x' = x + \frac{a}{3}, \quad y' = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} z, \quad z' = \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{z}{2},$$

ceea ce revine la a presupune transformarea T de tipul $m = 6$, căci în acest caz V^3 este transformarea (15). Să considerăm şi în acest caz transformările VR, VU, unde R, U sînt date de formulele (9) şi (15). Obţinem pentru VR formulele :

$$x' = -x + \frac{a}{3}, \quad y' = -\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} z + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} c,$$

$$z' = -\frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{z}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{c}{2}$$

astfel că $(VR)^2$ este translaţie :

$$x' = x, \quad y' = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} c, \quad z' = -\frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{c}{2}.$$

În mod analog $(VU)^2$ ne dă translaţia de componente

$$\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} b + \frac{c}{2}$$

pe axele y, z. Rezultă deci că presupunînd R, U translații de bază, trebuie să avem

$$\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2mb, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} b + \frac{c}{2} = 2nc \tag{18}$$

deci trebuie să avem

$$(1 - nm)(1 - nu) + 3 = 0.$$

Rezultă deci că sau avem

$$1 - nm = \pm 3, \quad 1 - un = \mp 1$$

sau se inversează situația numerelor m, n. Aceste ecuații însă se scriu:

$$4m = 1 \mp 3, \quad 4n = 1 \pm 1 \tag{18'}$$

și deci nu pot fi satisfăcute cu m, n numere întregi, deoarece dacă avem semnul $+$, ultima ecuație nu poate fi satisfăcută, în timp ce dacă avem semnul $-$, prima ecuație nu poate fi satisfăcută.

Rezultă deci că nici o transformare T de tipul $m = 6$ nu poate forma cu R dat de formulele (9) un grup discret.

Să presupunem acum R dat de formulele (9) și T de tipul $m = 3$ deci de formulele

$$x' = x + \frac{a}{3}, \quad y' = -\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} z, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{z}{2}. \tag{19}$$

Să considerăm transformarea RT. Avem

$$x' = -x + \frac{a}{3}, \quad y' = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} z - \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} c,$$

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{z}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b - \frac{c}{2}$$

astfel că pătratul acestei transformări este translația de componente

$$-\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} b - \frac{c}{2}. \tag{19'}$$

În mod analog considerăm $(RT^2)^2$; se obține translația de componente

$$-\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c - \frac{\sqrt{3}}{2} b - \frac{c}{2}.$$

Rezultă deci că există în grup o translație de componente b, c. Ținînd seama că R^2 este translația de componente $0, 2c$, rezultă că avem și translații de componente $2b$, 0. Rezultă atunci că trebuie să avem formulele (18'), care am văzut că nu pot avea loc cu m, n întregi.

Rezultă deci că o transformare T de tipul $m = 3$ nu poate fi asociată cu R dat de formula (9) pentru a forma un grup discret.

Să considerăm acum cazul cînd T este de tipul 4 şi R este dat de formulele (11).

Putem presupune că printr-o transformare de variabile

$$u = x + k, \quad v = y, \quad w = z$$

am redus λ la zero, deci că avem R dat de formulele

$$x' = -y, \; y' = -x + \mu, \quad z' = -z + \nu. \tag{20}$$

În acest caz R este dat de formulele

$$x' = x - \mu, \quad y' = y + \mu, \quad z' = z. \tag{20'}$$

deci μ trebuie să fie diferit de zero, căci în caz contrar R ar fi o rotaţie pură.

Să considerăm transformarea T dată de formulele

$$x' = x + \frac{a}{2}, \quad y' = z, \quad z' = -y$$

şi deci T^2 este dat de formulele

$$x' = x + a, \quad y' = -y, \quad z' = -z.$$

Să considerăm transformarea RT^2. Avem

$$x' = -z, \quad y' = -x + \mu - \mathrm{a}, \quad z' = z + \nu$$

astfel că pătratul acestei transformări este dat de formulele

$$x' = -x + \mu - a, \quad y' = -y + \mu - a, \; z' = z + 2\nu$$

deci făcînd abstracţie de schimbarea variabilei y cu z o transformare de tipul (9) şi sîntem reduşi la un caz deja considerat cînd am arătat că nu poate exista un grup discret care să conţină (9) şi o transformare T de tipul $m > 2$.

În mod analog se arată că nu există grupuri discrete pentru care T să fie de tipul $m = 3$ şi R dat de formulele (12), formulă în care putem presupune $\lambda = 0$ printr-o translaţie a variabilei x.

În acest caz R^2 este translaţia :

$$x' = x - \frac{2\sqrt{2}}{3}\mu, \; y' = y + \frac{4}{3}\mu, \; z' = z$$

deci μ nu poate fi zero.

Cum RT, RT^2 sînt de tipul 3, atunci $(RT)^3$ şi $(RT^2)^3$ sînt translaţii. Avem deci patru translaţii

$$T^3, \; R^2, \; (RT)^3, \; (RT^2)^3$$

care se arată că nu au bază comună.

Rezultă deci teorema :

Un grup G_3 discret format din transformări directe este format sau din translaţii, sau conţine o unică rototranslaţie de tipul $m = 2, 3, 4, 6$, sau conţine două rototranslaţii de tipul $m = 2$, date de formulele (9) şi (15).

Avem deci şase varietăţi închise orientabile de dimensiune 3 pe care se poate da o metrică definitivă euclidiană.

III

Să presupunem că sîntem în cazul unei transformări T indirecte, deci în cazul cînd T este dat de formulele (1'). Putem atunci, ca şi în cazul formulelor (7), utilizînd o transformare (8) cu $k = 0$, să facem ca transformarea (1') să se scrie

$$x' = x + a, \quad y' = -y, \quad z' = z. \tag{21}$$

deci T^2 este translaţia

$$x' = x + 2a, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Dacă asociem transformării (21) o translaţie

$$x' = x, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c,$$

se obţine un grup discret şi avem două cazuri de considerat după cum una sau alta din cantităţile b, c este nulă sau $b \neq 0$, $c \neq 0$. Prin înmulţirea variabilelor cu cîte un factor se poate considera grupul G_3 definit în primul caz de transformările

$$\begin{aligned} &x' = x + 1, \quad y' = -y, \quad z' = z, \\ &x' = x, \quad y' = y + 1, \quad z' = z, \\ &x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 1. \end{aligned} \tag{22}$$

În al doilea caz grupul G_3 este definit de transformările

$$\begin{aligned} &x' = x + 1, \quad y' = -y, \quad z' = z, \\ &x' = x, \quad y' = y + 1, \quad z' = z + 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Atît în formulele (22) cît şi (23) unghiurile (x, y), (y, z) sînt drepte, în timp ce (x, z) poate fi oarecare.

Avem deci două varietăţi închise neorientabile să zicem M_7, M_8 ce corespund grupurilor (22), (23).

Există de asemenea două grupuri discrete G_3 ce se obţin din (22) înlocuind ultima transformare cu o rotaţie în jurul unei axe paralele cu axa z de unghi π, deci dată de una sau alta din formulele

$$\begin{aligned} &x' = 1 - x, \quad y' = -y, \quad z' = z + 1, \\ &x' = 1 - x, \quad y' = 1 - y, \quad z' = z + 1. \end{aligned} \tag{23'}$$

Avem deci alte două varietăţi închise neorientabile M_9, M_{10}.

În ceea ce priveşte varietăţile deschise orientabile, ele corespund grupurilor discrete şi directe G_2 dacă posedă două translaţii independente. Cel mai simplu caz este desigur acela format din două translaţii

$$x' = x + 1, \quad y' = y, \quad z' = z; \quad x' = x, \quad y' \pm y + 1, \quad z' = z, \tag{24}$$

în care caz grupul este evident abelian şi varietatea corespunzătoare un cilindru deschis în lungul variabilei z.

Un al doilea caz este definit de transformările

$$x' = -x,\ y' = y + 1,\ z' = -z,\ x' = x + 1,\ y' = y,\ z' = z \qquad (25)$$

şi grupul este necomutativ.

Avem deci două varietăţi deschise orientabile M_{11}, M_{12}.

Avem de asemenea cazul unei singure rototranslaţii (1) cînd θ poate fi un unghi oarecare. Dacă $\theta = \frac{2\pi}{n}$, unde n este raţional, există translaţii pure în grup şi ele sînt date de anumite puteri a lui T. Dacă θ este iraţional, nu există translaţii pure. Dacă notăm cu M_{13} varietatea orientabilă deschisă corespunzătoare, toate aceste varietăţi sînt izomorfe, deşi grupurile lor nu sînt afin echivalente.

Menţionăm de asemenea că se notează cu M_{14} spaţiul euclidian, deci în care grupul discret este identitatea.

În ceea ce priveşte spaţiile neorientabile cu două translaţii avem trei tipuri M_{15}, M_{16}, M_{17}, corespunzătoare grupurilor

$$x' = x + 1,\ y' = y,\ z' = z; \quad x' = x,\ y' = y + 1,\ z' = -z.$$

$$x' = x + 1,\ y' = y,\ z' = z; \quad x' = -x,\ y' = y + 1,\ z' = z.$$

$$x' = x + 1,\ y' = y,\ z' = -z; \quad x' = -x,\ y' = y + 1,\ z' = -z.$$

şi, în sfîrşit, avem grupul cu o singură translaţie definit de transformarea (21) şi se notează cu M_{18} varietatea corespunzătoare.

În concluzie avem deci 6 varietăţi închise orientabile între care şi torul cu trei dimensiuni, 4 varietăţi închise neorientabile, 4 varietăţi deschise orientabile, între care şi spaţiul euclidian şi 4 varietăţi deschise neorientabile. Pe toate aceste varietăţi se poate da o metrică euclidiană regulată.

Primită la redacţie la 14 septembrie 1964

UNELE APLICAŢII ALE TEORIEI GRAFELOR LA STUDIUL GRUPURILOR CONSONANTICE FINALE DIN LIMBA ROMÂNĂ

DE

CORNEL CÂŞLARU
Institutul politehnic, Bucureşti

Lucrarea [1]) de faţă cuprinde studiul sistemului consonantic final al limbii romîne şi se bazează, ca metodă de lucru, pe [2]. Am studiat o parte din problemele articolului [2], rezultatele obţinute le-am comparat cu cele din [2], comparaţia aducînd aspecte care ni s-au părut interesante.

Cu aceleaşi metode pot fi studiate grupurile mediale, grupurile de consoane la jonctură de sufixe şi prefixe, aderenţa la vocale; toate acestea vor da o imagine cît mai completă asupra consonalismului limbii române.

DEFINIŢII ŞI REZULTATE PRELIMINARE

Vom da aici rezultatele din teoria grafelor care nu au fost date în [2] şi au fost folosite în prezenta lucrare.

Vom numi lungimea unui drum (lanţ), numărul arcelor (muchiilor) drumului (lanţului).

Prin distanţa dintre două noduri (vîrfuri, puncte) înţelegem lungimea celui mai scurt lanţ.

Depărtarea unui nod este cea mai mare distanţă de la nod la celelalte noduri.

Nodurile cu depărtarea minimă se numesc puncte semicente, cele cu depărtarea maximă puncte semiperiferice.

Cea mai mică depărtare a nodurilor se numeşte semirază, iar cea mai mare semidiametru.

Într-un graf conex un nod se numeşte punct de articulare dacă după înlăturarea sa subgraful obţinut nu este conex.

---

[1]) Mulţumesc şi pe această cale conf. S. Marcus pentru că mi-a atras atenţia asupra acestui articol şi pentru ajutorul acordat.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, P. 131–145, BUCUREŞTI, 1965.

O mulţime de articulare într-un graf conex este mulţimea după a cărei înlăturare subgraful obţinut nu este conex.

Pe un graf (X, Γ) definim o funcţie Grundy în felul următor: Fie o funcţie g definită pe mulţimea X cu valori întregi nenegative, $g(x)$ funcţia lui Grundy, dacă pentru orice $x \in X$ $g(x)$ e cel mai mic întreg nenegativ care nu se găseşte în mulţimea:

$$g(\Gamma x) = \{g(y) \mid y \in \Gamma x\}$$

Pentru calculul numărului cromatic întrebuinţăm o formulă din [1] şi anume:

$$\max_{x \in X} g(x) \leqslant p - 1,$$

unde $p = \gamma(\Delta)$ este numărul cromatic asociat grafului Δ.

POSIBILITĂŢILE COMBINATORII ALE CONSOANELOR ÎN GRUPURILE CONSONANTICE FINALE

Vom organiza perechile de cîte două consoane ce apar în grupurile consonantice finale ca un graf, în felul următor: nodurile vor fi consoanele ce apar în grupurile finale, un arc mergînd de la X la Y, dacă XY apare într-un grup consonantic final. Graful, notat cu Λ, are 19 noduri şi 74 arce. Dăm mai jos toate grupurile de două consoane aşa cum apar în lucrarea [5], comparînd cu apariţia lor în grupurile consonantice iniţiale din [2], arcele comune vor fi subliniate:

BT, *BZ*, *KS*, $\underline{KT}$, *DV*, $\underline{FT}$, *GD*, $\underline{GL}$, $\underline{GN}$, *HT*, *YB*, *YF*, *YL*, *YN*, *YM*, *YP*, *YT*, *ʒB*, *ʒD*, *LB*, *LK*, *LD*, *LF*, *LG*, *LM*, *LP*, *LS*, *LT*, *LŢ*, *LZ*, *MB*, *MF*, $\underline{MN}$, *MP*, *MS*, *MT*, *MZ*, *NK*, *ND*, *NF*, *NG*, *Nʒ*, *NS*, *NT*, *NZ*, *PK*, $\underline{PS}$, $\underline{PT}$, *RB*, *RK*, *RD*, *RF*, *RG*, *RH*, *Rʒ*, *RL*, *RM*, *RN*, *RP*, *RS*, *Rʃ*, *RT*, *RV*, *RZ*, $\underline{SK}$, $\underline{SM}$, $\underline{SN}$, $\underline{SP}$, $\underline{ST}$, *ʃK*, $\underline{ʃT}$, [*TM*, *ZD*.

Observăm că arcele comune grafurilor Λ şi Δ (în tot cursul lucrării vom înţelege prin graful Δ, graful din lucrarea [2]) în număr de 14: *KT*, *FT*, *GL*, *GN*, *MN*, *PS*, *PT*, *SK*, *SM*, *SN*, *SP*, *ST*, *ʃT*, *ZD* reprezintă un număr destul de mic comparativ cu acela al arcelor grafului Δ sau Λ.

Înainte de a începe studiul coeziunii sistemului consonantic final, vom da în tabelul 1 clasificarea consoanelor după ordinul de multiplicitate.

Observăm că semivocala *W*, cea mai ataşată de grupurile consonantice iniţiale, nu apare în grupurile consonantice finale, prezintă deci un caracter iniţial. Acest fapt ne sugerează să cercetăm pentru fiecare consoană în parte, preferinţa sa pentru grupurile iniţiale sau pentru cele finale. În acest scop vom lua în considerare numai ordinul de multiplicitate al consoanelor grafului Δ din [2] şi ordinul de multiplicitate al consoanelor grafului Λ. Diferenţa dintre aceste două ordine de multiplicitate notată cu $i(X)$ va defini o aplicaţie de la mulţimea consoanelor la mulţimea numerelor întregi. Obţinem următorul rezultat:

Tabelul 1

Consoana	Grad	Valenţă	Ordin de multiplicitate
R	16	0	16
L	12	3	15
N	8	5	13
T	1	12	13
M	7	5	12
S	5	6	11
K	2	6	8
P	3	5	8
B	2	5	7
D	1	6	7
Y	7	0	7
F	1	5	6
G	3	3	6
Z	1	5	6
ʒ	2	2	4
ʃ	2	1	3
V	0	3	3
H	1	1	2
Ţ	0	1	1

$$
\begin{array}{llll}
|i(X)| = 18, & i(W) = 18, & & \\
|i(X)| = 5, & i(Y) = i(\text{ʃ}) = 5; & i(T) = -5, & \\
|i(X)| = 4, & i(R) = i(M) = & i(\mathrm{N}) = -4, & \\
|i(X)| = 3, & i(V) = 3; & i(D) = -3, & \\
|i(X)| = 2, & i(F) = i(Z) = 2; & i(L) = i(B) = i(\text{ʒ}) = -2, & \\
|i(X)| = 1, & i(P) = i(H) = & i(\c{T}) = 1;\ i(S) = i(G) = -1, & \\
|i(X)| = 0, & i(K) = 0. & &
\end{array}
$$

Cu ajutorul acestei funcţii vom spune că: *W* este o consoană specifică grupurilor consonantice iniţiale;

Y, ʃ au un pronunţat caracter iniţial;

T, *R*, *M*, *N* au pronunţat caracter final;

K, *S*, *G*, *P*, *H*, *Ţ* consoane indiferente grupurilor iniţiale sau finale;

F, *Z*, consoane cu caracter slab iniţial;

L, *B*, ʒ consoane cu slab caracter final;

V consoană cu caracter mediu iniţial;

D consoană cu caracter mediu final.

Graful Λ nu este simetric nici antisimetric; astfel nodurile S şi P, S şi N, S şi M, M şi T, S şi K, N şi G, G şi L sînt legate fiecare cu cîte două arce. De asemenea graful nu este tare conex. Nu există nici un drum începînd de la o consoană oarecare diferită de R şi să sfîrşească în R. Graful este conex, adică nu există două noduri care să nu poată fi unite printr-un lanţ.

Studiind depărtarea nodurilor obţinem următoarele rezultate: $d(L) = d(R) = d(T) = d(M) = d(S) = d(K) = d(P) = d(B) = d(D) = d(Y) = d(F) = d(G) = d(Z) = d(V) = 2$ adică 14 puncte semicentre;

$d(N) = d(Ţ) = d(ʒ) = d(ʃ) = d(H) = 3$ şi 5 puncte semiperiferice.

Graful are semidiametrul 3 şi semiraza 2. Aceasta înseamnă că două consoane pot fi unite printr-un lanţ de lungime cel mult egală cu 3; spre deosebire de graful Δ, unde semidiametrul şi semiraza erau egale cu 2.

Din faptul că două consoane X, Y apar într-un grup consonantic final (într-o ordine oarecare) şi consoanele Y, Z apar în alt grup final, nu rezultă că există şi grupul final X, Z. Totuşi se spune [2] că X şi Z se pot juxtapune prin tranzitivitate. Consoana Y care apare la trecerea de la X la Z poartă numele de consoană de mediaţie. Graful Δ avea proprietatea că trebuia o singură consoană de mediaţie. Pentru graful Λ al cărui semidiametru este 3, sînt necesare cel mult două consoane intermediare. Trebuie efectiv două numai în cazul în care cele două consoane care se juxtapun sînt puncte semiperiferice; dacă cel puţin o consoană este semicentru, atunci este suficientă o singură consoană de mediaţie. Consoana care mediază cele mai multe juxtapuneri este R, datorită ordinului său mare de multiplicitate.

Pe graful Λ o funcţie a lui Grundy este următoarea:

$g(V) = g(Ţ) = g(T) = g(Z) = g(G) = 0,$

$g(F) = g(H) = g(B) = g(ʃ) = g(S) = g(D) = 1,$

$g(K) = g(M) = 2 \qquad g(P) = g(N) = 3,$

$g(L) = 4 \qquad . \ g(Y) = g(R) = 5.$

De aici rezultă că numărul cromatic $\gamma(\Lambda) = 6$. O mulţime interior stabilă maximală este $\{F, H, B, ʃ, S, D, Ţ\}$, numărul de stabilitate internă fiind $\alpha(\Lambda) = 7$.

O mulţime exterior stabilă minimală este $\{Ţ, V, T, D\}$, deci $\beta(\Lambda) = 4$. Mulţimea $\{Ţ, D, T\}$ este un nucleu. Numărul ciclomatic $\nu(\Lambda) = 56$.

COEZIUNEA SISTEMULUI CONSONANTIC FINAL

Graful Λ prezintă un singur punct de articulare L. Prin eliminarea lui se obţin două componente conexe: una formată din unicul nod $Ţ$, cealaltă $\Lambda_1 = \Lambda - \{Ţ, L\}$.

Din studiul lui Λ_1 rezultă o situaţie asemănătoare celei de la Λ. Astfel depărtarea nodurilor este dată de egalităţile:

$d(R) = d(N) = d(T) = d(M) = d(S) = d(K) = d(P) = d(B) =$
$= d(D) = d(F) = d(G) = d(Z) = d(\text{ʒ}) = 2;$
$d(Y) = d(\text{ʃ}) = d(V) = d(H) = 3.$

Valorile semirazei şi semidiametrului au rămas aceleaşi. O funcţie a lui Grundy este următoarea:

$g(V) = g(T) = g(Z) = g(\text{ʒ}) = g(G) = 0;$
$g(F) = g(H) = g(B) = g(S) = g(\text{ʃ}) = g(D) = 1;$
$g(K) = g(M) = 2; \quad g(P) = g(N) = 3$
$g(Y) = g(R) = 4.$

Numărul cromatic $\gamma(\Lambda_1) = 5$. Numărul ciclomatic $\nu(\Lambda_1) = 43$.

O mulţime interior stabilă maximală $\{F, H, B, S\ \text{ʃ}, D\}$ deci $\alpha(\Lambda_1) = 6$, o mulţime exterior stabilă minimală $\{T, V, D\}$ $\beta(\Lambda_1) = 3$. Subgraful Λ_1 nu este articulat, este un graf 2 — conex. Există două mulţimi de articulare minime $\{R, D\}$ şi $\{R, T\}$.

Prin eliminarea mulţimii $\{R, T\}$ se obţine nodul H izolat şi subgraful $\Lambda_2 = \Lambda_1 - \{R, T, H\}$. Λ_2 prezintă mai multe deosebiri faţă de subgraful Λ_1. N este singurul semicentru $d(N) = 2$, punctele semiperiferice sînt $\{P, B, \text{ʃ}, V\}$; semiraza este 2 şi semidiametrul 4. Posibilităţile de mediere sînt mai reduse.

O funcţie a lui Grundy este:

$g(V) = g(F) = g(Z) = g(\text{ʒ}) = g(\text{ʃ}) = g(S) = 0;$
$g(D) = g(B) = g(K) = 1;$
$g(P) = g(N) = 2; \quad g(M) = 3; \quad g(Y) = 4.$

Numărul cromatic $\gamma(\Lambda_2) = 5$ a rămas neschimbat; numărul ciclomatic $\nu(\Lambda_2) = 20$ arată că numărul lanţurilor s-a redus la mai puţin de jumătate şi se datoreşte faptului că Λ_2 a fost 2-conex şi a trebuit să eliminăm trei noduri faţă de două anterioare.

O mulţime interior stabilă maximală este $\{V, F, Z, G, S, \text{ʒ}, \text{ʃ}\}$ deci $\alpha(\Lambda_2) = 7$, număr ce a crescut cu toate că numărul nodurilor s-a micşorat, arătînd că posibilităţile de combinare a consoanelor din subgraful Λ_2 sînt reduse.

Λ_2 are două puncte de articulare K şi D. Eliminînd pe K, rămîn două componente conexe; una formată din unicul nod ʃ, a doua $\Lambda_3 = \Lambda_2 - \{K, \text{ʃ}\} = \{N, M, S, P, B, D, Y, F, Z, G, V, \text{ʒ}\}$. Avem două puncte semicentre N, Z şi două puncte semiperiferice P, V. Semiraza este 2 şi semidiametrul 4, structura subgrafului Λ_3 este asemănătoare cu a lui Λ_2, ceea ce rezultă şi din numărul ciclomatic $\nu(\Lambda_3) = 17$.

O funcţie a lui Grundy este următoarea:

$g(V) = g(F) = g(Z) = g(\text{ʒ}) = g(S) = g(G) = 0;$
$g(P) = g(D) = g(B) = 1;$
$g(N) = 2; \quad g(M) = 3; \quad g(Y) = 4.$

Ea dă numărul cromatic $\gamma(\Lambda_3) = 5$ şi o mulţime interior stabilă maximală $\{V, F, Z, S, G, \text{ʒ}\}$ adică $d(\Lambda_3) = 6$.

Subgraful Λ_3 are punct de articulare pe D, eliminat rămîne V izolat şi componenta conexă $\Lambda_4 = \Lambda_3 - \{D, V\} = \{N, M, S, P, B, Y, F, Z, G, \text{ʒ}\}$.

Semicentrele sînt N, M, S, Y, F, Z şi punctele semiperiferice $P, B, G, \text{ʒ}$, semiraza 2, semidiametrul 3, numărul ciclomatic $\nu(\Lambda_4) = 14$. Se constată o îmbunătăţire a posibilităţilor de combinare a consoanelor subgrafului Λ_4. Funcţia lui Grundy:

$$g(F) = g(Z) = g(\text{ʒ}) = g(G) = g(S) = 0,$$
$$g(B) = g(P) = g(N) = 1; \quad g(M) = 2; \quad g(Y) = 3,$$

dă numărul cromatic $\gamma(\Lambda_4) = 4$; mulţimea interior stabilă maximală $\{F, Z, G, S, \text{ʒ}\}$ dă $\alpha(\Lambda_4) = 5$.

Λ_4 este articulat prezentînd pe N drept punct de articulare. Prin eliminarea lui N rămîne nodul G izolat şi componenta conexă $\Lambda_5 = \Lambda_4 - \{G, N\} = \{M, S, Y, P, B, Z, F\ \text{ʒ}\}$. Ca puncte semicentre: M, B, Y, Z, iar puncte semiperiferice $F, P, S, \text{ʒ}$, semiraza subgrafului este 2, semidiametrul 3, numărul ciclomatic $\nu(\Lambda_5) = 7$; funcţia lui Grundy

$$g(F) = g(Z) = g(\text{ʒ}) = g(S) = 0;$$
$$g(P) = g(B) = 1; \quad g(M) = 2; \ g(Y) = 3 \text{ deci } \gamma(\Lambda_5) = 4.$$

Subgraful Λ_5 are o situaţie asemănătoare cu a lui Λ_4. Ca punct izolat Λ_5 îl are pe B, prin a cărui eliminare rămîne ʒ izolat şi $\Lambda_6 = \Lambda_5 - \{B, \text{ʒ}\} = \{M, S, P, Y, F, Z\}$.

Subgraful Λ_6 are ca punct semicentru pe M şi puncte semiperiferice pe S, P, Z, F, Y; semiraza fiind 1, iar semidiametrul 2. În acest subgraf, M poate să medieze orice pereche de consoane. Este singurul subgraf care are semiraza egală cu 1. Numărul ciclomatic $\nu(\Lambda_6) = 5$; o funcţie a lui Grundy

$$g(Z) = g(F) = g(S) = 0;$$
$$g(P) = 1; \quad g(M) = 2;$$

$g(Y) = 3$ dă drept număr cromatic $\gamma(\Lambda_6) = 4$; o mulţime interior stabilă maximală $\{Z, F, S\}$ $\alpha(\Lambda_6) = 3$. Valoarea mică a lui $\alpha(\Lambda_6)$ arată tocmai posibilitatea mare de combinare a consoanelor acestui subgraf.

Graful are un singur punct de articulare M prin a cărui eliminare se obţine punctul izolat Z şi $\Lambda_7 = \Lambda_6 - \{M, Z\} = \{P, S, Y, F\}$; P, Y puncte semicentre; S, F puncte semiperiferice; numărul ciclomatic $\nu(\Lambda_7) = 1$; o funcţie a lui Grundy:

$$g(F) = g(S) = 0; \quad g(P) = 1; \quad g(Y) = 2 \text{ adică } \gamma(\Lambda_7) = 3.$$

Λ_7 are două puncte de articulare P, Y. Prin eliminarea lui P se obţine punctul izolat S şi subgraful $\Lambda_8 = \{F, Y\}$ ce conţine un singur arc. În Λ_8 eliminăm pe F şi rămîne un singur nod Y terminînd astfel disconectarea grafului.

Observăm că de-a lungul procesului de disconectare din sistemul consonantic final, pentru disconectare au fost necesare cel mult două consoane pentru a forma o mulţime de articulare, rezultat stabilit şi în cazul grafului Δ. Pentru graful Λ o mulţime de articulare din două consoane a fost necesară o singură dată, disconectarea grafului s-a făcut pe parcursul a nouă paşi faţă de şapte paşi necesari grafului Δ. Acest lucru denotă o coeziune mai strînsă a sistemului consonantic iniţial. O explicaţie ar constitui-o faptul că numărul consoanelor care mediază juxtapunerile este în general mic; subgrafele obţinute după disconectare aveau semidiametrul mai mare sau egal cu 3, cu o singură excepţie.

De-a lungul disconectării punctele de articulare sau mulţimea de articulare înlăturate au fost următoarele: *L*, {*R*, *T*}, *K*, *D*, *N*, *B*, *M*, *P*, *Y*, adică acelea care se găsesc pe primele locuri ale tabelului 1 şi se explică prin numărul mare al ordinului de multiplicitate. Prin înlăturarea punctelor sau mulţimii de articulare, una din componentele conexe era un nod izolat: *Ṭ*, *H*, ʃ, *V*, *G*, ʒ, *Z*, *S*, *F*; adică acelea care ocupă partea de la sfîrşit a tabelului 1 datorită ordinului de multiplicitate mic.

Cele mai rezistente consoane, nodurile subgrafului Λ_5: *M*, *S*, *P*, *Z*, *F*, *Y*, *B*, ʒ ocupă partea de mijloc a tabelului 1 şi alcătuiesc sîmburele sistemului consonantic final şi în special *P*, *S*, *Y*, *F* (nodurile subgrafului Λ_7).

O comparaţie cu sîmburele sistemului consonantic iniţial scoate la iveală următoarele lucruri: 4 consoane *M*, *S*, *P*, *F* se găsesc şi în sîmburele sistemului consonantic iniţial. Dintre acestea *S* şi *P* sînt indiferente, *F* cu slab caracter iniţial, iar *M* cu pronunţat caracter final. Celelalte 4 consoane: *B*, ʒ cu slab caracter final, *Z* cu slab caracter iniţial, *Y* cu pronunţat caracter iniţial. Se observă că domină consoanele indiferente şi slab indiferente; numai una este cu pronunţat caracter final şi alta cu pronunţat caracter iniţial.

O situaţie analogă o au şi consoanele ce alcătuiesc sîmburele sistemului consonantic iniţial.

Să studiem puţin şi arcele comune sistemului consonantic iniţial şi final. Cele 14 arce sînt date de 12 noduri: *S*, *P*, *F*, *M*, *T*, *Z*, *K*, ʃ, *N*, *G*, *D*, *L*.

Dintre acestea — *S*, *P*, *F*, *M*, adică toate consoanele comune ambilor sîmburi — au următoarea structură: *S*, *P* indiferente; *M* pronunţat caracter final şi *F* slab caracter iniţial. Consoanele *T* şi *Z* aparţin sîmburelui sistemului consonantic final, *T* cu pronunţat caracter final, *Z* cu slab caracter iniţial. Consoanele *K* şi ʃ aparţin sîmburelui sistemului consonantic iniţial cu următoarea structură: ʃ pronunţat caracter iniţial şi *K* indiferent.

Restul consoanelor *N*, *G*, *D*, *L* se caracterizează prin faptul că au un ordin de multiplicitate mare într-unul din sistemele consonantice.

În concluzie se observă o echilibrare a numărului consoanelor cu un pronunţat caracter final sau iniţial. Rezultatul era de aşteptat deoarece aceste consoane alcătuiesc arcele comune celor două grafe.

DIFERENŢIEREA CONSOANELOR DUPĂ LOCUL DE ARTICULARE, DUPĂ MODUL DE ARTICULARE ŞI DUPĂ SONORITATE

În transmiterea unui mesaj vorbit este de dorit ca să nu apară alăturate două consoane avînd aceeaşi trăsătură fonetică, înţelegînd prin trăsătură fonetică modul de articulare, locul de articulare sau sonoritatea. Faţă de aceste trăsături fonetice, vom studia două clasificări: una mai săracă, a doua mai fină. Rezultatele clasificărilor după [2] sînt date în tabelele 2 şi 3.

Tabelul 2

loc / mod de articulare	Labial		Dental		Palatal		Velar	
	Surd	Sonor	Surd	Sonor	Surd	Sonor	Surd	Sonor
Ocluziv	*P*	*B, M*	*T*	*D, N*			*K*	*G*
Continue	*F*	*V*	*S, ʃ*	*L, R* *Z, ʒ*		*Y*	*H*	
Semiocluziv			*Ţ*					

Tabelul 3

	Bilabial			Labiodental			Dental			Lateral			Anteropalatal			Mediopalatal			Velar		
	Surd	Neutru	Sonor	Surd	Neutru	Sonor	Surd	Neutru	Sonor	Surd	Neutru	Sonor	Surd	Neutru	Sonor	Surd	Neutru	Sonor	Surd	Neutru	Sonor
Ocluziv	*P*	*M*	*B*				*T*	*N*	*D*										*K*		*G*
Semiocluziv								*Ţ*													
Fricativ				*F*		*V*	*S*		*Z*					*Y*						*H*	
Şuerător																*ʃ*		*ʒ*			
Vibrant																	*R*				
Continue											*L*										

Pentru semnificaţia lingvistică a noţiunilor se poate consulta [4]. Din punct de vedere matematic problema se pune în felul următor: o trăsătură fonetică (sau mai multe) împarte mulţimea consoanelor în mulţimi disjuncte; avem de-a face cu o relaţie de echivalenţă în mulţimea consoanelor. Asociem cîte o culoare fiecărei clase de echivalenţă care, cu ajutorul arcelor grafului Λ, poate genera un subgraf şi căutăm să vedem dacă subgraful este monocromatic. Dacă o clasă de echivalenţă nu poate fi colorată cu o singură culoare, căutăm cel mai mic număr de noduri după a căror eliminare se obţine un subgraf monocromatic. Acest lucru revine la calcularea numărului de stabilitate internă pentru fiecare subgraf generat de clasa de echivalenţă. Dacă este egal cu numărul nodurilor subgrafului generat de clasa de echivalenţă, atunci subgraful se poate colora cu o singură culoare; în caz contrar, cel mai mic număr de consoane eliminate este diferenţa dintre numărul nodurilor şi numărul de stabilitate internă.

Ne propunem să găsim o trăsătură sau o combinaţie de trăsături faţă de care subgrafurile generate de clasele de echivalenţă să fie monocromatice.

Începem studiul diferenţierii consoanelor după locul de articulare în prima clasificare. Avem următoarele clase de echivalenţă: labial: $\{P, B, M, F, V\}$ colorat cu roşu; dental: $\{T, D, N, S, ʃ, L, R, Z, ʒ, Ț\}$ cu albastru; palatal: $\{Y\}$ cu galben; velar: $\{K, G, H\}$ cu verde.

De la început trebuie să remarcăm că nu ne putem aştepta ca faţă de această trăsătură fonetică subgrafele să fie monocromatice, deoarece numărul cromatic al grafului Λ a fost stabilit anterior egal cu 6; aici avem numai 4 culori.

În găsirea numărului de stabilitate internă vom întrebuinţa o funcţie Grundy definită pe fiecare subgraf:

Labial $g(V) = g(F) = g(B) = g(P) = 0$; $g(M) = 1$.

Elimin consoana M şi subgraful devine monocromatic

Palatal $g(Y) = 0$ este monocromatic.

Velar $g(K) = g(G) = g(H) = 0$ monocromatic

Dental

$$g(Ț) = g(T) = g(D) = g(S) = 0,$$
$$g(Z) = g(ʒ) = g(ʃ) = 1,$$
$$g(N) = g(L) = 2; \quad g(R) = 3.$$

O mulţime interior stabilă maximală este: $\{Z, S, ʃ, Ț, S\}$.

Trebuie eliminate T, D, N, L, R.

În concluzie, graful Λ faţă de clasificarea privind locul de articulare conţine un subgraf cromatic în raport cu coloriajul dat obţinut prin eliminarea a şase consoane M, T, D, N, L, R.

Studiem aceeaşi trăsătură în clasificarea fină. Avem următoarele clase de echivalenţă:

Bilabial: $\{P, M, B\}$

$$g(P) = g(B) = 0; \quad g(M) = 1. \text{ Se elimină } M.$$

Labio-dental: $\{F, V\}$ $g(F) = g(V) = 0$ monocromatic.

Dental: $\{D, N, S, T, Z, Ț\}$, $g(T) = g(D) = g(Ț) = g(S) = 0$; $g(Z) = 1$; $g(N) = 2$. Se elimină Z şi N.

Laterale: $\{L\}$ monocromatic

Medio-palatal: $\{ʃ, ʒ, R\}$

$$g(ʃ) = g(ʒ) = 0; \quad g(R) = 1. \text{ Se elimină } R.$$

Velar : $\{K, G, H\}$, $g(K) = g(G) = g(H) = 0$ monocromatic.

Nici faţă de acest coloriaj graful Λ nu a devenit cromatic cu toate că au fost utilizate şase culori ca şi pentru graful Λ. Pentru obţinerea unui subgraf cromatic trebuie eliminate consoanele M, Z, N, R.

Trecem la diferenţierea consoanelor după modul de articulare. În prima clasificare avem următoarele clase de echivalenţă :

Ocluzive : $\{P, B, M, T, D, N, K, G\}$, $g(D) = g(T) = 0$

$g(N) = g(P) = 2$; $g(G) = g(K) = g(B) = 1$

$g(M) = 3$. O mulţime interior stabilă maximală este $\{G, K, B\}$.

Trebuie eliminate consoanele D, T, N, P, M.

Continue :

$\{F, V, S, \text{ʃ}, L, R, Y, H, Z, \text{ʒ}\}$

$g(V) = g(H) = g(\text{ʒ}) = g(S) = g(\text{ʃ}) = g(Z) = g(F) = 0$

$g(L) = 1$; $g(Y) = g(R) = 2$. Se elimină L, Y, R.

Semiocluzive : $\{\text{Ţ}\}$ monocromatic

În raport cu coloriajul dat, pentru a obţine un subgraf cromatic este suficient să eliminăm opt consoane : D, T, N, P, M, Y, R, L. De remarcat că s-au eliminat mai puţine consoane continue decît ocluzive ; aceasta arată că este mai greu de întîlnit o combinaţie de două consoane continue, decît două consoane ocluzive.

Să trecem la clasificarea fină după modul de articulare. Vom avea următoarele clase — culori :

Ocluziv : $\{P, B, M, T, D, N, K, G\}$ aceleaşi consoane ca şi în clasificarea anterioară ; se elimină aceleaşi consoane.

Semiocluziv : $\{\text{Ţ}\}$ monocromatic.

Şuerător : $\{\text{ʃ}, \text{ʒ}\}$; $g(\text{ʃ}) = g(\text{ʒ}) = 0$ monocromatic.

Fricativ : $\{F, V, S, Z\}$, $g(F) = g(V) = g(S) = g(Z) = 0$ monocromatic.

Continue : $\{L\}$ monocromatic.

Vibrant : $\{R\}$ monocromatic.

Pentru obţinerea unui subgraf cromatic trebuie eliminate cinci consoane D, T, N, P, M, toate provenind de la consoanele ocluzive.

Ultima trăsătură fonetică — sonoritatea — în prima clasificare dă următoarele clase de echivalenţă.

Sonor : $\{B, M, V, D, N, L, R, Z, \text{ʒ}\ Y, G\}$.

Surd : $\{P, F, T, S, \text{ʃ}, \text{Ţ}, K, H\}$.

Avem 33 alăturări sonor — sonor, 12 alăturări surd — surd şi 29 alăturări sonor — surd sau surd — sonor. De remarcat numărul mare de alăturări sonor — sonor. Vor trebui eliminate prea multe noduri pentru a obţine un subgraf cromatic, aşa că renunţăm.

În clasificarea fină după sonoritate distingem următoarele clase de echivalenţă :

Sonor : $\{B, V, D, Z, \text{ʒ}, G\}$

$g(V) = g(G) = g(Z) = g(\text{ʒ}) = 0$; $g(D) = g(B) = 1$.

Trebuie eliminate D, B.

Neutru : $\{M, N, \text{Ţ}, L, Y, H\}$; $g(H) = g(\text{Ţ}) = g(N) = 0$,

$g(M) = 1$; $g(L) = 2$; $g(Y) = g(R) = 3$

Trebuie eliminate M, L, Y, R.

Surd : $\{P, F, T, S, K, \text{ʃ}\}$, $g(T) = 0$; $g(F) = g(K) = 1$

$g(\text{ʃ}) = g(S) = 2$; $g(P) = 3$.

O mulţime interior stabilă maximală este $\{S, F, \text{ʃ}\}$; vor trebui eliminate consoanele P, T, K. În total se elimină nouă consoane.

Considerînd o singură trăsătură fonetică n-am reuşit să obţinem pe Λ ca un graf cromatic în raport cu coloriajul definit de acea trăsătură.

Vom considera în cele ce urmează cîte două trăsături : o trăsătură desemnînd sonoritatea, cealaltă modul de articulare. După prima clasificare clasele de echivalenţă sînt următoarele :

Sonor — ocluziv : $\{B, M, D, N, G\}$; $g(B) = g(D) = 0$

$g(N) = 1$; $g(G) = g(M) = 2$. Se elimină G, M, N.

Surd — ocluziv : $\{P, T, K\}$; $g(T) = 0$; $g(K) = 1$

$g(P) = 2$. Trebuie eliminate K şi P.

Sonor — continue : $\{V, L, R, Y, Z, \text{ʒ}\}$; $g(V) = g(\text{ʒ}) = g(Y) = g(Z) = 0$; $g(L) = 1$; $g(R) = 2$.

Se elimină L, R.

Surd — continue : $\{F, S, \text{ʃ}, H\}$

$g(F) = g(S) = g(\text{ʃ}) = g(H) = 0$ monocromatic.

Surd — semiocluziv : $\{\text{Ţ}\}$ monocromatic.

Pentru a colora pe Λ cu cele cinci culori date este necesară eliminarea a şapte consoane.

În clasificarea fină după aceleaşi trăsături se obţine :

Sonor — ocluziv : $\{B, D, G\}$

$g(B) = g(G) = 0$; $g(D) = 1$. Se elimină D

Sonor — fricativ : $\{V, Z\}$; $g(V) = g(Z) = 0$ monocromatic.

Sonor — şuerător : $\{\text{ʒ}\}$ monocromatic.

Neutru — ocluziv : $\{M, N\}$; $g(M) = 0$; $g(N) = 1$.

Se elimină N.

Neutru — semiocluziv : $\{Ţ\}$ monocromatic.
Neutru — fricativ : $\{Y, H\}$; $g(Y) = g(H) = 0$ monocromatic.
Neutru — vibrant : $\{R\}$ monocromatic
Neutru — continue : $\{L\}$ monocromatic
Surd — ocluziv : $\{P, T, K\}$; $g(T) = 0$; $g(K) = 1$;
$g(P) = 2$. Se elimină K şi P.
Surd — fricativ : $\{F, S\}$, $g(F) = g(S) = 0$ monocromatic
Surd — şuerător : $\{ʃ\}$ monocromatic.

Sînt folosite 11 culori şi cu toate acestea mai trebuie eliminate 4 consoane ; se obţine acelaşi rezultat ca şi în diferenţierea după locul de articulare în clasificarea fină, utilizînd aproape un număr dublu de culori.

Trecem la studiul combinaţiei sonoritate — loc de articulare. În prima clasificare :

Sonor — labial : $\{B, M, V\}$; $g(B) = g(V) = 0$; $g(M) = 1$.

Se elimină M.

Surd — labial : $\{P, F\}$; $g(P) = g(F) = 0$ monocromatic.
Sonor — dental : $\{D, N, L, R, Z, ʒ\}$; $g(D) = 0$;
$g(Z) = g(ʒ) = 1$; $g(N) = g(L) = 2$;
$g(R) = 3$. Se elimină D, N, L, R.
Surd — dental : $\{T, S, ʃ, Ţ\}$; $g(S) = g(ʃ) = g(Ţ) = 0$.
$g(T) = 1$. Se elimină T.
Sonor — palatal : $\{Y\}$ monocromatic.
Surd — velar : $\{K, H\}$; $g(K) = g(H) = 0$ monocromatic.
Sonor — velar : $\{G\}$ monocromatic.

În total se elimină şase consoane utilizînd şapte culori.

În clasificarea fină se obţin următoarele rezultate :

Sonor — bilabial : $\{B\}$ monocromatic.
Sonor — labiodental : $\{V\}$ monocromatic.
Sonor — dental : $\{D, Z\}$; $g(Z) = 0$; $g(D) = 1$

Se elimină D.

Sonor — medio — palatal : $\{ʒ\}$ monocromatic.
Neutru — bilabial : $\{M\}$ monocromatic.
Neutru — dental : $\{N, Ţ\}$; $g(N) = g(Ţ) = 0$ monocromatic.
Neutru — antero — palatal : $\{Y\}$ monocromatic.

Neutru — medio — palatal : $\{R\}$ monocramatic.
Neutru — velar : $\{H\}$ monocromatic.
Surd — bilabial : $\{P\}$ monocromatic.
Surd — labiodental : $\{F\}$ monocromatic.
Surd — dental : $\{T, S\}$; $g(S) = 0$; $g(T) = 1$

Se elimină T.

Surd — medio — palatal : $\{ʃ\}$ monocromatic.
Surd — velar : $\{K\}$ monocromatic.

În total se elimină două noduri utilizîndu-se 14 culori. Este cea mai bună diferenţiere de pînă acum. Trecem la ultima pereche de trăsături fonetice : mod de articulare şi loc de articulare. În prima clasificare se obţine :

Ocluziv — labial : $\{P, B, M\}$; $g(P) = g(B) = 0$; $g(M) = 1$

Se elimină M.

Ocluziv — detal : $\{T, D, N\}$; $g(T) = g(D) = 0$;
$g(N) = 1$. Se elimină N.

Ocluziv — velar : $\{K, G\}$; $g(K) = g(G) = 0$ monocromatic.
Continue — labial : $\{P, V\}$; $g(P) = g(V) = 0$ monocromatic.
Continue — dental : $\{S, ʃ, L, R, Z, ʒ\}$;
$g(Z) = g(ʃ) = g(ʒ) = g(S) = 0$; $g(L) = 1$;
$g(R) = 2$. Se elimină L şi R.

Continue — palatal : $\{Y\}$ monocromatic.
Continue — velar : $\{H\}$ monocromatic.

Se folosesc şapte culori şi se elimină patru consoane. În clasificarea fină se obţin rezultatele :

Ocluziv — bilabial : $\{P, M, B\}$; $g(P) = g(B) = 0$
$g(M) = 1$. Se elimină M.

Ocluziv — dental : $\{T, N, D\}$; $g(T) = g(D) = 0$;
$g(N) = 1$. Se elimină N.

Ocluziv — velar : $\{K, G\}$; $g(K) = g(G) = 0$ monocromatic.
Semiocluziv — dental : $\{Ţ\}$ monocromatic.
Fricativ — labiodental : $\{F, V\}$; $g(F) = g(V) = 0$ monocromatic.
Fricativ — dental : $\{S, Z\}$; $g(S) = g(Z) = 0$ monocromatic.
Fricativ — antero — palatal : $\{Y\}$ monocromatic.
Fricativ — velar : $\{H\}$ monocromatic.
Şuerător — medio — palatal : $\{ʃ, ʒ\}$; $g(ʃ) = g(ʒ) = 0$ monocromatic.
Vibrant — medio — palatal : $\{R\}$ monocromatic.
Continue — lateral : $\{L\}$ monocromatic.

Şi în această clasificare trebuie eliminate două noduri. Pentru sistemul consonantic iniţial faţă de acest coloriaj graful corespunzător Δ este cromatic. Faptul că graful Λ nu devine cromatic faţă de nici un coloriaj prezentat ne face să tragem următoarea concluzie : Dacă la sistemul consonantic iniţial acest lucru se putea face aceasta se datora faptului că un cuvînt prin partea sa iniţială conţine o informaţie mai bogată decît partea sa finală. Dacă ni se dă un text şi sîntem nevoiţi să ghicim cuvîntul următor se observă că probabilitatea de a ghici corect fiecare literă creşte. Pentru limba engleză rezultatul se datorează lui Shannon. Acelaşi principiu stă şi la baza abrevierilor [3].

Rezultă că pentru sistemul consonantic iniţial este necesară o diferenţiere cît mai bună a consoanelor întrebuinţate, lucru ce nu este absolut necesar pentru sistemul consonantic final.

O ultimă diferenţiere ce se poate face este să utilizăm toate cele trei trăsături. În prima clasificare se obţine :

Ocluziv — labial — sonor : $\{B, M\}$; $g(M) = 0$, $g(B) = 1$.

Se elimină B.

Ocluziv — labial — surd : $\{P\}$ monocromatic.
Ocluziv — dental — sonor : $\{D, N\}$; $g(N) = 0$; $g(D) = 1$.

Se elimină D.

Ocluziv — dental — surd : $\{T\}$ monocromatic.
Ocluziv — velar — surd : $\{K\}$ monocromatic.
Continue — labial — sonor : $\{V\}$ monocromatic.
Continue — dental — sonor : $\{L, R, Z, \text{ʒ}\}$; $g(\text{ʒ}) = g(Z) = 0$; $g(L) = 1$; $g(R) = 2$. Se elimină L şi R.
Continue — dental — surd : $\{S, \text{ʃ}\}$; $g(S) = g(\text{ʃ}) = 0$ monocromatic.
Continue — palatal — sonor : $\{Y\}$ monocromatic.
Continue — velar — surd : $\{H\}$ monocromatic.
Semiocluziv — dental — surd ; $\{\text{Ţ}\}$ monocromatic.

Se elimină 4 consoane.

Utilizînd clasificarea fină, adică colorînd fiecare consoană cu o culoare obţinem un graf cromatic. Rezultatele obţinute pot fi sintetizate în tabelul 4. După prima clasificare diferenţierea cea mai apropiată de un graf cromatic este cea după locul şi modul de articulare. După clasificarea a doua, cele mai apropiate de un graf cromatic sînt diferenţierile după locul şi modul de articulare şi după locul de articulare şi tipul de sonoritate. De remarcat că diferenţierea după o singură trăsătură fonetică nu reuşeşte să ne apropie prea mult de un graf cromatic ; cu două trăsături ne apropiem de un graf cromatic şi, în sfîrşit, cu trei trăsături fonetice obţinem un graf cromatic.

Observaţia din [2] cu privire la regularitatea modurilor de diferenţiere a consoanelor, tradusă prin faptul că suma dintre numărul culorilor şi numărul minim de noduri care trebuie eliminate rămîne aproximativ aceeaşi, se păstrează şi pentru graful Λ. Astfel avem diferitele valori ale sumei : 10, 11, 12, 13, 12, 17, 11, 11, 13, 12, 18, 15, 19. Eliminînd ultimele trei şi pe 17 se obţine o sumă aproximativ constantă.

Tabelul 4

	Diferenţierea consoanelor după	Nr. de culori	Nr. arcelor ce unesc, noduri de aceiaşi culoare	Nr. minim de arce ce trebuie înlăturate pentru a obţine un graf cromatic	Nr. culorilor care nu formează noduri adiacente de aceiaşi culoare
Tabel 2	loc de articulare	4	26	6	2
	mod de articulare	3	28	8	1
	tip sonoritate	2	45	?	0
	loc, mod de articulare	8	10	4	5
	loc de articulare, tip sonoritate	7	15	6	4
	mod de articulare, tip sonoritate	5	16	7	1
	loc, mod de articulare, tip sonoritate	13	6	4	10
Tabel 3	loc de articulare	7	11	4	4
	mod de articulare	6	14	5	5
	tip sonoritate	3	27	9	0
	loc, mod de articulare	11	4	2	9
	loc de articulare, tip sonoritate	16	2	2	14
	mod de articulare, tip sonoritate	11	5	4	8
	loc, mod de articulare, tip sonoritate	19	0	0	19

Primită la redacţie la 12 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Claude Berge, *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod, Paris, 1958.

2. S. Marcus, Em. Vasiliu, *Mathématiques et phonologie. Théorie des graphes et consonantisme de la langue roumaine.* Revue de mathématiques pures et appliquées, 5, *2*, 319–340 ; *3–4*, 681–704 (1960).

3. R. G. Piotrovski, *Problema locului în cuvînt a elementelor purtătoare de informaţie.* Probleme de lingvistică matematică, 1960.

4. Al. Rosetti, *Introducere în fonetică.* Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1957.

5. Em. Vasiliu, *Une classification des consonnes roumaines d'après le critère de la distribution.* Mélanges linguistiques publiées a l'occasion du VIII Congrès International des linguistes à Oslo, du 5 au 9 août 1957, Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1957, p. 97–112.

RECENZIE

N. MIHĂILEANU, *Geometrie diferenţială neeuclidiană*. Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, p. 305, 1964.

Gauss este acela care a întrebuinţat pentru prima dată numele de Geometrie neeuclidiană, pentru a descrie o geometrie care diferă de a lui Euclid în proprietăţile de paralelism

Acest sistem, dezvoltat prima dată de către Lobacevski şi de Bolyai, independent unul de altul, a fost reluat mai tîrziu de către Riemann în Germania şi Cayley în Anglia.

Tot acest material neeuclidian a fost unificat în 1871 de către Felix Klein care a dat numele de *parabolic*, *hiperbolic* şi *eliptic* respectiv sistemelor Euclidiene, Bolyai-Lobacevski şi Riemann-Cayley.

De atunci s-a acumulat o vastă literatură şi cartea prof. N. Mihăileanu are în primul rînd meritul de a umple o lacună în literatura matematică romînă, fiind prima carte care tratează în mod sistematic diferitele capitole de geometrie diferenţială neeuclidiană.

În tot cursul expunerii sale, şi aceasta constituie o caracteristică a cărţii, autorul confruntă teoriile neeuclidiene cu cele euclidiene.

Pentru tehnica calculului erau mai multe metode la dispoziţie, dar s-a preferat cea a normelor a căror proprietăţi sînt înrelabil stabilite. În fine, principiul dualităţii care este fundamental în spaţiul eliptic tridimensional a fost mereu pus în evidenţă. De altfel, acest spaţiu este, pentru a-l cita pe E. Cartan, deosebit de bogat în conţinut geometric, prin diferitele apropieri cu alte ramuri matematice. Cartea lui N. Mihăileanu se compune din cinci părţi, în care sînt dezvoltate elementele de bază ale geometriei neeuclidiene, după cum urmează.

Primul capitol este consacrat Geometriei analitice şi trigonometriei neeuclidiene.

Sînt definite noţiunile de produs scalar a două puncte, unghi, distanţă, normă şi proprietăţile sale, precum sînt studiate şi proprietăţi de geometrie riglată proiectivă şi metrică Cayleiană.

Capitolul se încheie cu definiţia cercului, oriciclului, sferei şi orisferei.

În capitolele II şi III se studiază elementele clasice ale teoriei curbelor plane sau strîmbe şi a suprafeţelor din spaţiul neeuclidian tridimensional în următoarea ordine :

Curbe. Arc, tangentă, normală, binormală, formulele lui Frenet generalizate (sau ale lui Fubini). Elemente osculatoare, reperul autodual intrinsec legat de curbă, ecuaţia diferenţială asociată şi cazul Euclidian limită.

Suprafeţe. Cele trei forme pătratice, reper, linii principale pe suprafaţă, cele două curburi, ecuaţiile lui Gauss şi ale lui Codazzi adaptate spaţiului considerat. Sînt de asemenea studiate diferite clase de suprafeţe care constituie o generalizare a celor din spaţiul Euclidian, ca suprafețele : minima, Weingarten Țițeica. În sfîrșit, sînt definite cîteva suprafețe specifice spațiului cayleian, ca suprafața lui Clifford sau paracilindru circular, echidistanța și orisfera.

În capitolul IV sînt dezvoltate elemente din teoria generală a congruențelor de drepte după modelul Euclidian, utilizînd ca metodă de cercetare un tetraedru mobil. Singura terminologie nouă introdusă fiind aceea de congruență pseudonormală. (Congruența pentru care focarele pe fiecare rază sînt conjugate față de cuadrica absolut).

Capitolul V cuprinde cîteva anexe cum este, în primul rînd, aceea foarte importantă de paralelism eliptic, sau paralelism Clifford sau încă parataxie (termen împrumutat din teoria cercurilor paratactice în spațiul Euclidian).

În al doilea rînd sînt considerate cîteva formații invariante, printre care și formula lui Barbilian.

În al treilea rînd sînt dezvoltate cîteva considerații asupra spațiului Cayleian, ca încadrat în spațiul riemannian de curbură constantă. Cu această ocazie, se dau, după prof. Gh. Vrănceanu, diferite noțiuni împrumutate din teoria spațiilor riemanniene, ca : covarianță, contravarianță, simbolurile lui Riemann, congruențe, coeficienți de rotație ai lui Ricci și probleme de cufundare.

Autorul termină acest capitol cu trecerea de la euclidian la neeuclidian și vice-versa și cîteva formule diferențiale.

Fără îndoială că și la ora actuală, orice autor care tratează acest subiect este obligat să facă apel la tratatul clasic al lui Coolidge (*The Elements of Non-Euclidean Geometry*), lucru pe care-l face și N. Mihăileanu.

La sfîrșitul cărții figurează o destul de bogată bibliografie străină și indigenă, precum și un mic istoric al Geometriei neeuclidiene.

Atît ordinea materialului, bine ales, cît și grija de considerațiuni didactice și teoretice, relativ la aplicațiile incluse, ne fac să fim siguri că această carte va aduce cele mai mari servicii învățămîntului.

Radu Roșca

F762

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tom. 16 1964

INDEX ALFABETIC

	Tom.	Nr.	Pag.
ALBU, TOMA, Asupra aplicaţiilor monotone între spaţii topologice	16	7	915
BERŢI, ŞTEFAN N., O extindere a noţiunii de şir de distribuţie uniformă	15	3	413
BERŢI, ŞTEFAN N., Extinderea unei teoreme a lui H. Weyl privitoare la şirurile de distribuţie uniformă	15	4	537
CAMENSCHI, G. şi ŞANDRU, N., Acţiunea unui izvor termic şi a unui cîmp termic discontinuu în interiorul semiplanului elastic cu frontiera încastrată	15	1	3
COHN, H., Despre eficienţa funcţiilor de estimaţie a probabilităţilor de trecere ale unui lanţ Markov	16	8	1059
COHN, H., Asupra consistenţei testului raportului de verosimilităţi	16	10	1249
COLOJOARĂ, ION, Operatori spectrali generalizaţi	15	4	499
CONSTANTINESCU, FLORIN, Asupra fixării unei variabile într-o distribuţie de două variabile	15	5	653
CONSTANTINESCU, P., LULEA, C. şi NICULESCU, S., Algoritm pentru determinarea nucleului grafului asociat jocului NIM	15	1	77
CORBAN, ADRIAN, Un model multidimensional de transport	16	8	953
CRĂCIUN, CONSTANTIN N., O generalizare a noţiunii de categorie gramaticală în sensul lui Dorbuşin	16	9	1147
CREANGĂ-SÎMBOAN, ANCA, Asupra planurilor optime de estimaţie	15	2	275
CREANGĂ-SÎMBOAN, ANCA, Funcţii sumă vectoriale	16	10	1243
CRISTEA, ION I., O extindere a transformărilor conforme în spaţiul tridimensional	16	8	1033
CRISTESCU, ROMULUS, Funcţiile sumă ale lui Onicescu ca elemente ale unui spaţiu ordonat	15	3	331
CRISTESCU, ROMULUS, Familii compozabile de distribuţii şi sisteme fizice liniare	16	8	937
DAVIDESCU MOISIL, ANA, Asupra unui caz de echilibru al corpurilor elastice izotrope	15	2	225
DAVIDESCU MOISIL, ANA, Asupra ecuaţiilor elasticităţii anizotrope	15	2	231
DUCARU, ANA, Asupra soluţiei problemei mişcărilor de tip Poiseuille, în anumite cazuri particulare	15	5	635
ENE, DUMITRU, Asupra K-grupurilor infinite	15	4	455
ENE, HORIA I. şi OPRICĂ, MIHAI I., O mişcare plană cu vîrtej constant în prezenţa unui obstacol plan	15	4	471
FOIAŞ, CIPRIAN, Asupra teoremelor de medie ale acad. M. Nicolescu privind funcţiile policalorice	16	8	947
FOIAŞ, CIPRIAN, Asupra unei teoreme din lucrarea mea: Descompuneri în operatori şi vectori proprii. I	16	9	1067
GAŞPAR, DUMITRU, Asupra semigrupurilor complet neunitare	16	6	753

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 1, P. 149–152, BUCUREŞTI, 1965.

	Tom.	Nr.	Pag.
GAŞPAR, TOMA, Numărul tipurilor de sinonimie a claselor de dipoli, funcţional echivalenţi cu selectori	16	9	1153
GHEORGHIŢĂ, ŞT. I., Asupra mişcării fluidelor într-un mediu poros nelimitat cu o cavitate sferică	15	3	349
GOGONEA, SORIN, Cîteva mişcări în medii poroase în prezenţa unor contururi de alimentare finite	16	7	825
GORCIU, V. G., Asupra unor algebre neasociative A_3	16	6	747
GRECU, EFTIMIE, Asupra spaţiilor Riemann cu conexiune constantă de genul doi	15	2	253
HRISTEV, ANATOLIE, P., Teoria covariantă a relaţiilor algebrice spinoriale ale cîmpurilor de spin maxim 1 şi 1/2	16	7	849
ION, ION, D., Radicalul limitei proiective de inele asociative	16	9	1141
IONESCU, D. V., Construirea unor formule practice de cvadratură . . .	16	6	757
IONESCU, D .V., Generalizarea formulelor de cvadratură ale lui Simpson şi Newton	16	8	1001
ISTRĂŢESCU, V., Asupra operatorilor nucleari	15	5	661
ISTRĂŢESCU, V., Asupra spaţiilor Banach cu bază numărabilă. II . . .	15	5	665
KECS, WILHELM, Asupra unor aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanica teoretică şi aplicată	15	1	83
KECS, WILHELM, Reprezentarea cîmpurilor vectoriale cu ajutorul funcţiilor generalizate	15	2	265
KRIVOSEIN, L. E. vezi: MANGERON, D. şi, Contribuţii la studiul ecuaţiilor polivibrante. II. Comportarea calitativă a soluţiilor unei noi clase de probleme de contur integro-diferenţiale neliniare	16	8	967
KRIVOSEIN, L. E. vezi: MANGERON D. şi, Probleme de contur pentru ecuaţii integro-diferenţiale cu operatori exteriori de tip parabolic	16	9	1071
LEŢ, LUPU, Grupuri de mişcări ale spaţiilor V_3 cu metrica indefinită	15	2	235
LULEA, C. vezi: CONSTANTINESCU, P. şi NICULESCU, S., Algoritm pentru determinarea nucleului grafului asociat jocului NIM	15	1	77
MANGERON, D. şi ŞESTOPAL, A. E., Contribuţii la studiul funcţiilor lui Green. I. Dezvoltarea funcţiilor lui Green relative la operatori diferenţiali liniari cu derivate parţiale după soluţii fundamentale	16	6	727
MANGERON, D., Contribuţii la studiul ecuaţiilor polivalente. I. Metode de calcul numeric al unor noi clase de probleme de contur neliniare	16	7	811
MANGERON, D. şi KRIVOSEIN, L. E., Contribuţii la studiul ecuaţiilor polivibrante. II. Comportarea calitativă a soluţiilor unei noi clase de probleme de contur integro-diferenţiale neliniare	16	8	967
MANGERON, D. şi KRIVOSEIN, L. E., Probleme de contur pentru ecuaţii integro-diferenţiale cu operatori exteriori de tip parabolic	16	9	1071
MIHĂILESCU, M. P., O metodă de aproximare a deformării curbelor de încărcare. I	15	1	145
MIHĂILESCU. M. P., O metodă de aproximare a deformării curbelor de încărcare. II	15	2	217
MUNTEAN, ION, Contribuţii la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte şi relee (I)	15	4	477
MURGULESCU, ELENA, Asupra devierii unui jet de lărgime finită printr-un obstacol diedric	15	3	417
NICOLESCU, L. J., Asupra unei teoreme de medie	16	8	987
NICULESCU, S. vezi: CONSTANTINESCU P. şi LULEA, C., Algoritm pentru determinarea nucleului grafului asociat jocului NIM	15	1	77
NÉMETI, LADISLAU, Asupra tratării matematice a unor probleme de planificare a dezvoltării macroeconomiei socialiste . . .	16	10	1281

	Tom.	Nr.	Pag.
ONICESCU, O. şi SĂCUIU, I., Extinderea noţiunii de moment şi de coeficient de corelaţie la variabile oarecare	15	3	325
OPRICĂ, MIHAI I. vezi : ENE, HORIA I. şi, O mişcare plană cu vîrtej constant în prezenţa unui obstacol plan	15	4	471
PASCALI, DAN, O nouă reprezentare a polinoamelor areolare în plan	15	2	249
PASCALI, DAN, Monogeneitatea Fedorov în plan	16	10	1231
PASCALI, DAN, Reprezentarea soluţiilor unui sistem cu derivate areolare de ordinul întîi, în plan	15	3	343
PETCU, A., Definirea laticelor numai cu ajutorul legilor de asociativitate şi absorbţie	16	10	1147
POPESCU, NICOLAE, Module cu diferenţială generalizată	16	6	791
POPOVICI, A. vezi : VRĂNCEANU, G. şi, Fundamentele teoriei generale a relativităţii. I.	15	3	285
POPOVICI, A. vezi : VRĂNCEANU, G. şi, Fundamentele teoriei generale a relativităţii. II	15	5	547
POPOVICI, IULIAN şi POPOVICI, ANDREI, Determinarea cvadrispinorilor ataşaţi cîmpurilor de spin maxim 1 şi 1/2 . . .	16	7	837
POPOVICI, ANDREI, vezi : POPOVICI, IULIAN şi, Determinarea cvadrispinorilor ataşaţi cîmpurilor de spin maxim 1 şi 1/2	16	7	837
POPP, S., Schema Vâlcovici Birkhoff la mari viteze subsonice	15	2	149
PRAPORGESCU, N., O generalizare a funcţiei θ şi folosirea ei la studiul funcţiilor eliptice, II	16	9	1163
RADU, N., Intersecţii de ideale în unele inele	15	2	209
RĂDESCU, EUGEN, Studiul ansamblurilor statistice cu ajutorul congruenţelor pseudoortogonale în relativitatea generală . . .	16	6	741
ROSINGER, ELMER, O extindere a noţiunii de categorie în sens Eilenberg-Mac Lane	16	8	997
ROSINGER, ELMER, Structuri pseudotopologice. II	16	9	1085
ROŞCULEŢ, MARCEL, N., Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. VI. Problema lui Cauchy pentru ecuaţia $\frac{du}{dt} + a_{ij}\frac{d^2u}{dx^i dx^i} = F\left(x, y, t, u, \frac{du}{dx^i}, \frac{du}{dy^k}\right)$	15	1	97
ROŞCULEŢ, MARCEL, N., Operatori integrali care generalizează ecuaţiile diferenţiale. V. Formulele de medie pentru soluţiile analitice ale ecuaţiilor cu derivate parţiale, liniare cu coeficienţi constanţi	16	7	885
ROŞCULEŢ, MARCEL, N., Cercetări asupra seriilor trigonometrice. O clasă de serii trigonometrice divergente pe *R* cu şirul coeficienţilor convergent către zero	16	9	1175
RUS, T., Asupra unui sistem formal (I)	15	4	459
RUS, T., Asupra unui sistem formal (II)	15	5	595
RUS, T., Asupra reprezentării matriciale a arborilor	16	9	1179
RUS, T., Algoritmi de prelucrare a expresiilor formale cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul	16	9	1129
ŞABAC, MIHAI, $\mathfrak{S}$ — topologii compatibile cu structura spaţiului vectorial	15	5	617
SĂCUIU, I. vezi : ONICESCU, O. şi, Extinderea noţiunii de moment şi de coeficient de corelaţie la variabile oarecare	15	3	325
SĂCUIU, I., Asupra *q*-derivabilităţii şi *q*-integrabilităţii funcţiilor aleatoare	15	5	645
SINGER, IVAN, Baze în spaţii Banach. II	15	2	157
SINGER, IVAN, Baze în spaţii Banach. III	16	6	675
SOÓS, EUGEN, O problemă mixtă pentru un cilindru elastic circular, anizotrop cu neomogeneitate discontinuă	16	7	871

	Tom.	Nr.	Pag.
SOLIAN, ALEXANDRU, Teoria tranzi-grupurilor. I. Relaţii de echivalenţă şi subgrupuri asociate	16	9	1111
STAVRE, P., Asupra formulelor lui Frenet pentru curbe de spaţii cu conexiune afină L_n	16	10	1257
STERE, IANUŞ, Asupra scufundării spaţiului-timp Reissener-Weyl V_4 într-un spaţiu pseudoeuclidian. E_6	16	6	771
SUCIU, I., Algebre Banach analitice	15	1	55
SUCIU, I., Reprezentări spectrale dilatabile ale unei algebre Banach comutative	16	10	1211
ŞANDRU, N. vezi : CAMENSCHI, G. şi, Acţiunea unui izvor termic şi a unui cîmp termic discontinuu în interiorul semiplanului elastic cu frontiera încastrată	15	1	3
ŞESTOPAL, A. F. vezi : MANGERON, D. şi, Contribuţii la studiul funcţiilor lui Green. I. Dezvoltarea funcţiilor lui Green relative la operatori diferenţiali liniari cu derivate parţiale după soluţii fundamentale	16	6	722
TEODORESCU, P. P., Consideraţii în legătură cu formularea matematică a problemei plane a teoriei elasticităţii	15	3	335
TEODORESCU, P. P., O sută de ani de cercetări în problema plană a a teoriei elasticităţii	15	3	375
ŢARINĂ, MARIAN, Spaţii de $n-3$ ori subproiective cu grup maxim de mişcări	16	6	777
UDRESCU, VALERIU ŞT., Asupra spaţiilor fibrate Serre	16	7	861
UNGUREANU, ELENA, Despre aproximarea unor mişcări plane pe sub baraje	15	5	639
UNGUREANU, ELENA, O metodă de aproximaţie a soluţiei ecuaţiei lui Boussinesq	16	7	909
VASILACHE, SERGIU, Structuri algebrice de operaţii algebrice formale. Partea a II-a. Aplicaţii	15	4	433
VÂLCOVICI, V., Asupra mişcării de rotaţie a unui fluid vîscos	16	10	1081
VODNEV, V., Asupra unei clase de spaţii riemanniene parţial proiective	15	5	621
VODNEV, V., Asupra unei clase de spaţii riemanniene cu geodezice plane	16	7	927
VRĂNCEANU, G., Interpretări geometrice în teoria proceselor Markov	15	1	15
VRĂNCEANU, G. şi POPOVICI, A., Fundamentele teoriei generale a relativităţii. I	15	3	285
VRĂNCEANU, G. şi POPOVICI, A., Fundamentele teoriei generale a relativităţii. II	15	5	547
VRĂNCEANU, G., Despre corespondenţa izometrică a două spaţii riemanniene de categoria $n-1$	16	10	1207
WIESLER, HERWART, Despre convexitatea unor coordonate baricentrice generalizate	15	3	369
ZAMFIRESCU, TUDOR, Construcţii geometrice cu rigla, compasul şi trisectorul	15	3	405
ZAMFIRESCU, TUDOR, Asupra compunerii funcţiilor monotone şi convexe	16	10	1221

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 1960, 619 p., 25,50 lei (epuizat).

D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)** 1956, 380 p., 7 lei.

JANKÓ BELA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 1961, 223 p., 8,85 lei.

N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU şi A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow (1959—1960). Teoria potenţialului pe suprafeţe riemanniene**, 1962, 160 p., 5 lei.

G. CIUCU şi R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 1960, 232 p., 9,85 lei (epuizat).

C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculce, Teoria mulţimilor**, 1962, 108 p., 3,25 lei (epuizat).

C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape periodice**, 1961, 191 p., 8,30 lei (epuizat).

ROMULUS CRISTESCU, **Spaţii liniare ordonate**, 1959, 332 p., 11,10 lei.

I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 1962, 148 p., 5,15 lei.

C. FOIAŞ, **Seminar M. Nicolescu 1959—1960, Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă**, 1962, 82 p., 2,85 lei.

ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară, fundamente : mulţimi şi operaţii, divizibilitate, spaţii liniare, forme patratice**, 1958, 455 p., 24,50 lei.

GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 1961, 180 p., 7,85 lei.

M. GHERMĂNESCU, **Ecuaţii funcţionale**, 1960, 523 p., 25,60 lei (epuizat).

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1959, 1288 p., 66,50 lei (epuizat).

TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuaţiilor integrale**, 1956, 135 p., 5,90 lei.

LEON LIVOVSCHI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

* * * **Lucrările celui de al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 1960, 228 p., 8,55 lei (epuizat).

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie şi topologie Iaşi 2—5 iunie 1958**, 1962, 264 p., 9,75 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secţia de ştiinţe matematice şi fizice a Academiei R.P.R.**, 1956, 368 p., 9,50 lei.

G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale normate**, 1956, 295 p., 6 lei.

G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice**, 1959, 219 p., 8,80 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometria neeuclidiană**, 1954, 144 p., 4,30 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă**, 1958, 496 p., 25,90 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

GH. MIHOC şi V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 1962, 732 p., 34,70 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 1961, 142 p., 8,55 lei (epuizat) ; vol. II, 1962, 155 p., 8,25 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 1960, 279 p., 12 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele și ideale**, vol. I, 1954, 256 p., 9,10 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 1950, 64 p., 1,20 lei.

GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte și relee**, 1959, 205 p., 9,65 lei (epuizat).

ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 1959, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.

VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecții de algebră**, 1953, 396 p., 8,75 lei (epuizat).

MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 1953, 420 p., 11,90 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Numere și sisteme aleatoare**, 1962, 260 p., 11,20 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor. Cu aplicații la programarea liniară**, 1961, 228 p., 8,45 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU și colab., **Calculul probabilităților și aplicații**, 1956, 788 p., 15 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 1956, 496 p., 24,20 lei.

DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 1959, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.

N. RANCU și L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicații în producție**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor și ale algebrelor boolene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Teoria funcțiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 1954, 308 p., 10 lei (epuizat), vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 1958, 379 p., 25,70 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, vol. I, 1961, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

GHEORGHE ȚIȚEICA, **Geometria diferențială proiectivă a rețelelor**, 1956, 287 p., 8 lei.

DRAGOȘ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 1961, 76 p., 3,15 lei.

SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulțimilor și structurilor algebrice**, 1956, 235 p., 5 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géométrie différentielle**, vol. I, 1957, 407 p., 26,50 lei ; vol. II, 1957, 428 p., 27,60 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Lecții de geometrie diferențială**, vol. III, 1960, 454 p., 15 lei.

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu nr. 47, Bucureşti.

B

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 1, P. 1—152, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informaţia" — c. 4868

43831 Lei 12. —

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

TOMUL 17
1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — **redactor responsabil;**
Acad. GR. C. MOISIL — **redactor responsabil adjunct;**
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. H. HAIMOWICI;
G. MARINESCU — membru corespondent al Academiei R.P.R.
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

Pentru a se asigura colecţia completă şi primirea la timp a revistei, reînnoiţi abonamentul dv. pe anul 1965.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie, pe adresa: str. Mihail Eminescu nr. 47,
Bucureşti
Revista apare de 10 ori pe an

TOM. 17, Nr. 2
1965

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
18833

SUMAR

Pag.

G. VRĂNCEANU, Varietăţi diferenţiabile şi metrica naturală a spaţiilor sferice şi proiective 155

CAIUS IACOB, Cercetări asupra mişcării la mari viteze subsonice în jurul unor profile date 173

H. BODNĂRESCU, Spaţii de incidenţă. II 189

H. COHN, Probleme de verificare statistică a ipotezelor la procesele staţionare 209

D. MANGERON, LIL. MATEESCU şi A. F. ŞESTOPAL, Contribuţii la studiul funcţiilor lui Green. II. Problema unicităţii inversiunii integralei lui Schwartz-Christoffel relativă la poligoane rectilinii simplu conexe 215

SILVIU GUIAŞU, Asupra repartiţiei limită pentru procesele stocastice cu timp discret aleator 227

CONSTANTIN V. CRĂCIUN, Asupra noţiunii de rădăcină din teoria algebrică a gramaticii 253

V. ISTRĂŢESCU, Asupra unei proprietăţi ale operatorilor complet continui 265

L. NEGRESCU şi I. PĂVĂLOIU, Asupra verificării formale a schemelor logice de algoritmi 271

TUDOR ZAMFIRESCU, Asupra lemelor fundamentale ale calculului variaţional 287

C. TUDOR, Asupra unei teoreme a lui Aronszajn 295

D. B. ION, Asupra algebrelor Jordan de tip *A* 301

T. RUS, Un algoritm de decidere în teoria arborilor. 311

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 153–320, BUCURESTI, 1965

VARIETĂȚI DIFERENȚIABILE ȘI METRICA NATURALĂ A SPAȚIILOR SFERICE ȘI PROIECTIVE[1]

DE

G. VRĂNCEANU
Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, nr. 47, București

În această lucrare vom considera cîteva probleme despre varietățile diferențiabile, probleme care se pot rezolva prin metodele obișnuite ale geometriei diferențiale.

I

Să reamintim că un spațiu topologic definit de un număr oarecare de vecinătăți V, V', ... devine varietate diferențiabilă dacă în fiecare din aceste vecinătăți putem introduce o geometrie diferențială și dacă se dau legile de transformare de la o vecinătate la alta.

Astfel, fiind dată una din aceste vecinătăți V, să presupunem că în V a fost introdus un sistem de coordonate reale $x^1, \ldots, x^n$, ceea ce înseamnă că V este un spațiu cu n dimensiuni. Dacă $x'^1, \ldots, x'^n$ sînt coordonatele unei alte vecinătăți V', trecerea de la x la x' pentru punctele comune lui V și V' este dată de transformările

$$x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{1}$$

unde se presupune că x'^i sînt funcții continue de $x^1, \ldots, x^n$, derivabile de ordinul $r > 0$ sau sînt infinit derivabile sau analitice, dacă x'^i se pot dezvolta în serie de puteri ale variabilelor $x^1, \ldots, x^n$. Evident, se presupune în plus că determinantul funcțional $\Delta = \left|\dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|$ este diferit de zero.

---

[1] Prima parte a acestei lucrări a făcut obiectul a două conferințe ținute la Universitățile din Milano și Genova în noiembrie 1962 (Vezi G. Vrănceanu, *Varieta diferensiabili e immersioni degli spazi proiettivi*, Rend. del Seminario Mat. e Fizico di Milano, **XXXIII**, 1–17 (1963).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 155–172, BUCUREȘTI, 1965

Dată fiind o proprietate geometrică într-una din vecinătăţi V, se pune întrebarea dacă aceasta se poate extinde la toate vecinătăţile care definesc varietatea, deci la întreaga varietate diferenţiabilă.

Este bine cunoscut un rezultat al lui Hopf, în care se spune că pe o varietate diferenţiabilă, nu poate exista un vector contravariant regulat, adică nenul în fiecare punct, decît dacă spaţiul topologic al varietăţii este de caracteristică Euler nulă. Un rezultat fundamental în această direcţie a fost dat de Whitney 2). Acesta spune că o varietate de clasă ∞, deci pentru care funcţiile (1) sînt infinit derivabile, se poate întotdeauna înzestra cu o metrică Riemann de clasă ∞, ceea ce înseamnă că se poate da un tensor covariant a_{ij} infinit derivabil aşa ca metrica

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1'}$$

să fie pozitiv definită în tot spaţiul.

Rezultate analoge au loc în cazul varietăţilor analitice cînd putem avea o metrică analitică 3).

Se spune că metrica ds^2 este pozitiv definită în vecinătatea V dacă se poate pune sub forma canonică

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^n)^2, \tag{2}$$

unde am pus

$$ds^a = \lambda^a_i\, dx^i\,;\; dx^i = \mu^i_a\, ds^a,\; \lambda^a_i \mu^i_b = \delta^a_b \tag{2'}$$

în care λ^a_i sînt funcţii de variabilele $x^1, \ldots, x^n$. Deci ds^a sînt forme Pfaff, sau forme cu diferenţiale totale. Presupunînd că ds^a sînt toate nule afară de una, se defineşte o congruenţă de curbe, aşa că introducerea a n forme ds^a echivalează cu a introduce pe varietatea considerată ca spaţiu Riemann, un sistem de congruenţe ortogonale, congruenţe care au fost foarte mult utilizate de Ricci şi Levi-Civita, cei doi fondatori ai calculului diferenţial absolut. Evident, formele ds^a sînt determinate abstracţie făcînd de o transformare ortogonală

$$d\bar{s}^a = c^a_b\, ds^b, \quad (c^a_b c^a_c = \delta^b_c), \tag{3}$$

unde c^a_b sînt funcţii de variabile $x^1, \ldots, x^n$.

Vrem să arătăm că rezultatul poate fi negativ 4), dacă se admite că metrica nu este pozitiv definită.

Pentru demonstraţie să presupunem că este posibilă definirea unei metrici de tip hiperbolic, deci că această metrică se poate scrie

$$\Phi = (d\sigma^1)^2 + \ldots + (d\sigma^{n-1})^2 - (d\sigma^n)^2, \tag{4}$$

unde $d\sigma^1, \ldots, d\sigma^n$ sînt forme Pfaff.

---

2) H. Whitney, Annals of Mathematics, **37**, 865 (1936).

3) B. Malgrange, *Plongement de variétés analitiques réeles*. Bul. Soc. Math., **85**, 101 (1959). P. H. Grauert, *On Levi's problem and the imbeding of real analitic manifolds*. Annals of Mathematics, **68**, 46 (1959).

4) A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Roma, 1955, p. 17.

Utilizînd una din formele pătratice pozitiv definite a cărei existenţă este asigurată de rezultatul lui Whitney, aşadar o formă (2), şi ţinînd seama de o teoremă relativă la două forme pătratice, dintre care una este pozitiv definită, rezultă că putem alege un sistem de congruenţe ortogonale în (2) care reduce pe (4) la forma canonică

$$\Phi = h_1^2 (\mathrm{d}s^1)^2 + \ldots + h_{n-1}^2 (\mathrm{d}s^{n-1})^2 - h_n^2 (\mathrm{d}s^n)^2, \qquad (4')$$

unde $h_1, \ldots, h_n$ sînt funcţii de variabilele $x^1, \ldots, x^n$ care sînt toate diferite de zero deoarece în caz contrar Φ ar fi degenerată.

Rezultă astfel că ecuaţia caracteristică relativă la formele pătratice (2) şi (4) posedă o rădăcină simplă negativă $-h_n^2$.

Din aceasta rezultă că forma $\mathrm{d}s^n$ în (2) şi (4′) este un invariant. Altfel spus, grupul transformărilor ortogonale de congruenţe (3) ce conservă această formă invariantă se scrie

$$\mathrm{d}\bar{s}^h = c_k^h \, \mathrm{d}s^k, \quad \mathrm{d}\bar{s}^n = \mathrm{d}s^n, \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

unde c_k^h $(h, k = 1, \ldots, n-1)$ satisfac condiţiile de ortogonalitate.

Ţinînd seama de formulele (2′) rezultă că avem

$$\mu_h^i = \bar{\mu}_k^i \, c_h^k, \quad \bar{\mu}_n^i = \mu_n^i,$$

deci vectorul contravariant μ_n^i este complet determinat în orice punct al spaţiului şi el nu poate fi nul în nici un punct al varietăţii; în caz contrar metrica (2) nu ar fi pozitiv definită.

De aici rezultă că o varietate diferenţiabilă ce posedă o metrică hiperbolică (4), posedă un vector V^i, regulat pe varietate. Pe de altă parte, după rezultatul lui Hopf, o varietate nu poate avea această proprietate decît în cazul în care caracteristica lui Euler a varietăţii este nulă.

Acest rezultat ne dă un exemplu interesant de relaţie între invarianţi diferenţiali ca vectorul V^i şi metrica (4) şi un invariant topologic, caracteristica lui Euler.

Se ştie că pentru o suprafaţă închisă, caracteristica lui Euler este dată de numărul 2 $(1-p)$, unde p este genul suprafeţei. Rezultă aşadar că pe o sferă care este simplu conexă, deci de gen zero, nu este posibil a se da o metrică de tip hiperbolic regulată pe toată sfera, dar că aceasta este posibil pe tor al cărui gen este unitatea, deci caracteristica lui Euler este zero.

În ceea ce priveşte existenţa vectorilor pe varietăţi diferenţiabile, se cunoaşte un rezultat foarte interesant pentru sfera S_{n-1} a spaţiului euclidian E_n, care ne spune că numai în cazul în care

$$n = (2\,a + 1)\, 2^{c+4d}, \quad (0 \leqslant c \leqslant 3),$$

unde a, c, d sînt numere întregi, există $p = 2^c + 8\,\mathrm{d} - 1$ vectori independenţi în S_{n-1}, şi nu mai mult ⁵). Rezultă că pentru $c = d = 0$ avem $p = 0$, deci pe sfera S_{2a} nu există vectori regulaţi, deci pentru $a = 1$

---

⁵) J. F. Adams, *Vectors fields on spheres*, Annals of Mathematics, 75, 103 (1962).

obţinem rezultatul precedent şi anume că pe sfera obişnuită nu sînt vectori regulaţi.

Rezultă de asemenea că pentru $a = d = 0$, numărul de vectori independenţi este maxim, fiind egal cu numărul de dimensiuni al spaţiului $2^c - 1$, c avînd valorile 1, 2, 3.

Rezultă astfel că numai pe sferele S_1, S_3, S_7 există numărul maxim de vectori, deci respectiv 1, 3 şi 7 vectori independenţi regulaţi.

Rezultatul este evident pentru S_1, deci pentru cerc. De fapt cercul poate fi definit de două vecinătăţi $V(x)$, $V'(x')$ cu

$$x = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad x' = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

unde φ este un unghi.

Dacă $u(x)$ este componenta unui vector contravariant în vecinătatea $V(x)$ şi $u'(x')$ este componenta acestui vector în $V'(x')$, atunci în punctele comune ale lui $V(x)$ şi $V'(x')$, deci pentru $x' = -\frac{1}{x}$ avem formula

$$u' = \frac{u}{x^2}.$$

Deci dacă $u = 1 + x^2$, atunci rezultă

$$u' = 1 + x'^2,$$

deci se obţine un vector nenul pe întregul cerc.

Rezultatul lui Whitney care ne spune că se poate da pe o varietate diferenţiabilă o metrică pozitiv definită, este legat de un alt rezultat al lui Whitney, care afirmă că o varietate diferenţiabilă de dimensiune n poate fi scufundată într-un spaţiu euclidian avînd cel mult $2n - 1$ dimensiuni. De fapt acest al doilea rezultat cuprinde pe primul care spune că varietatea poate fi înzestrată cu o metrică pozitiv definită, căci această metrică poate fi chiar metrica indusă pe varietate de spaţiul euclidian de scufundare.

Date deci diferite varietăţi diferenţiabile, se poate considera problema de a găsi efectiv spaţiile euclidiene de scufundare.

II

Să considerăm mai întîi spaţiul proiectiv complex P_n definit cu ajutorul a $n + 1$ coordonate omogene complexe $y_0, \ldots, y_n$.

După un rezultat obţinut de Manoury ⁶), acest spaţiu se poate considera ca un loc geometric în spaţiul Euclidian E cu $(n + 1)^2$ dimen-

---

⁶) G. Manoury, Niew Archief voor Wiskunde 2, 4, 112 (1898).

siuni, considerînd drept coordonate ale spaţiului E cantităţile X_h, Y_h, X_{hk}, Y_{hk} date de formulele

$$X_h + iY_h = y_h \overline{y}_h, \quad X_{hk} + iY_{hk} = \sqrt{2}\, y_h \overline{y}_k, \quad (h<k;\ h, k = 0, \ldots, n), \tag{5}$$

Să presupunem că y_h sînt normalizate prin condiţia

$$y_0\overline{y}_0 + \cdots + y_n \overline{y}_n = 1 \tag{5'}$$

unde $\overline{y}_h$ sînt cantităţile conjugate ale cantităţilor y_h.

Atunci se vede uşor că în acest caz avem formula

$$X_h^2\, Y_h^2 + X_{hk}^2 + Y_{hk}^2 = 1, \tag{6}$$

aşadar locul geometric (5) se găseşte pe o sferă de rază 1 în spaţiul $E(n+1)(n+2)$ şi că la orice punct al locului corespunde un singur punct al spaţiului P_n şi invers.

Să considerăm un punct al spaţiului proiectiv complex P_n, pentru care $y_0 \neq 0$. Putem lua atunci drept coordonate ale acestui punct coordonatele complexe neomogene

$$z_h = \frac{y_h}{y_0}, \quad (h = 1, \ldots, n). \tag{6'}$$

Găsim atunci că metrica locului (5) a spaţiului E

$$ds^2 = dX_h^2\, dY_h^2 + dX_{hk}^2 + dY_{hk}^2$$

se poate scrie

$$ds^2 = \frac{dz_h\, d\overline{z}_h}{1 + z_h \overline{z}_h} - \frac{z_h\, d\overline{z}_h\, \overline{z}_h\, dz_h}{(1 + z_h\overline{z}_h)^2}, \tag{7}$$

care constituie metrica naturală a spaţiului proiectiv complex [7]). Nu facem calculele pentru că sînt destul de lungi şi pentru că regăsim această metrică încă pe o altă cale.

Putem observa că această metrică a fost obţinută presupunînd $y_0 \neq 0$, adică presupunînd că punctul P se găseşte într-o vecinătate pentru care z_h $(h = 1, \ldots, n)$ sînt coordonate neomogene; dar acest rezultat este acelaşi pentru diferite alte vecinătăţi, pentru care una din variabilele $y_1, \ldots, y_n$ nu sînt nule. Altfel spus, metrica (7) este invariantă la o transformare proiectivă de forma

$$z_1' = \frac{1}{z_1}, \quad z_h' = \frac{z_h}{z_1}$$

adică forma canonică (7) este aceeaşi şi în variabilele z'.

Punînd

$$z_h = x^{2h-1} + i\, x^{2h},$$

---

[7]) W. D. Hodge, *The Theory and applications of harmonic integrals*, Univ. Press. Cambridge, 1952.

unde x sînt coordonate reale, rezultă că metrica (7) se scrie

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}x^s)^2}{\rho} - \frac{(x^s\,\mathrm{d}x^s)^2 + w^2}{\rho^2}, \tag{7'}$$

unde am pus

$$\rho = 1 + (x^1)^2 + \ldots + (x^{2n})^2,$$

$$w = x^1\,\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}x^1 + \ldots + x^{2n-1}\,\mathrm{d}x^n - x^{2n}\,\mathrm{d}x^{2n-1}.$$

Aşadar spaţiul proiectiv complex P_n este dat ca o varietate diferenţiabilă definită de $n+1$ vecinătăţi, o vecinătate conţinînd punctele pentru care una din coordonatele y nu este nulă. Spaţiul P_n este înzestrat în coordonate complexe cu metrica naturală (7), care în coordonate reale devine metrica (7').

Putem observa de asemenea că în cazul spaţiului proiectiv real definit de $n+1$ coordonate omogene reale $y_0, \ldots, y_n$, putem utiliza drept coordonate ale spaţiului euclidian, coordonatele X_h, X_{hk}, date de formulele (5), deci spaţiul euclidian E are $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ dimensiuni.

În ceea ce priveşte metrica naturală, ea este dată de formula

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}x^i)^2}{1 + (x^i)^2} - \frac{(x^i\,\mathrm{d}x^i)^2}{[1 + (x^i)^2]^2}. \tag{7''}$$

Putem observa de asemenea că aceste consideraţii sînt valabile considerînd spaţiul proiectiv cuaternionic definit de $n+1$ coordonate cuaternionice

$$y_h = a_h + ib_h + jc_h + kd_h, \tag{8}$$

unde unităţile hipercomplexe i, j, k satisfac condiţiile binecunoscute

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{aligned} \tag{8'}$$

În acest caz cantităţile conjugate $\overline{y}_h$ sînt date de formulele

$$\overline{y}_h = a_h - ib_h - jc_h - kd_h$$

şi în loc de Y_{hk} din (5) vom considera coeficienţii lui i, j, k din expresia pur complexă

$$y_h\overline{y}_k - \overline{y}_h y_k.$$

Aşadar spaţiul euclidian E are $(n+1)(2n+1)$ dimensiuni, iar metrica spaţiului proiectiv cuaternionic este dată de formula (7), unde z_h sînt cantităţi cuaternionice.

Înainte de a merge mai departe să observăm că metrica naturală a spaţiului proiectiv complex poate fi considerată de asemenea ca metrica unui spaţiu neolonom V_{2n+1}^{2n} situat pe sfera S_{2n+1} a spaţiului euclidian E_{2n+2}. Într-adevăr, punînd

$$y_h = v^{2h+1} + i\, v^{2h+2}, \quad (h = 0, \ldots, n)$$

unde v sînt cantităţi reale, ecuaţia (5′) defineşte în spaţiul euclidian $E_{2n+2}(v^1, \ldots, v^{2n+2})$ o sferă S_{2n+1}. Dacă considerăm ecuaţia simplectică

$$v^1 \mathrm{d}v^2 - v^2 \mathrm{d}v^1 + \ldots + v^{2n+1}\, \mathrm{d}v^{2n+2} - v^{2n+2}\, \mathrm{d}v^{2n+1} = 0, \qquad (8'')$$

această ecuaţie defineşte pe S_{2n+1} o varietate neolonomă V_{2n+1}^{2n} a cărei metrică este dată de formula (7′).

Se poate interpreta acest rezultat spunînd că am realizat astfel o scufundare neolonomă a spaţiului proiectiv complex în spaţiul euclidian E_{2n+2}, definită de ecuaţiile lui Pfaff (8) şi de ecuaţia integrabilă

$$v^i\, \mathrm{d}v^i = 0. \qquad (8''')$$

Putem aşadar spune că această scufundare neolonomă este de speţa 2, în timp ce scufundarea olonomă a lui Manoury este de speţa $n^2 + 1$.

Consideraţii analoge sînt valabile pentru spaţiul proiectiv cuaternionic cînd scufundarea neolonomă se poate obţine cu ecuaţiile (8‴), unde i variază de la 1 la 4 n şi cu 3 ecuaţii ale lui Pfaff formînd un sistem ce nu este complet integrabil [8]).

III

Ne putem întreba cum se poate obţine o caracterizare intrinsecă, deci o caracterizare cu ajutorul celor $n + 1$ vecinătăţi care definesc spaţiul proiectiv real P_n, spaţiul proiectiv complex P_{2n} sau spaţiul proiectiv cuaternionic P_{4n}.

Relativ la spaţiul proiectiv real P_n a cărui metrică este dată de (7″), putem observa că această metrică are o simetrie sferică, adică are ca grup de stabilitate al originei grupul ortogonal. În general o metrică ce are această proprietate se poate scrie sub forma

$$\mathrm{d}s^2 = a(\rho)(\mathrm{d}x^i)^2 + b(\rho)(x^i\, \mathrm{d}x^i)^2, \quad \rho = 1 + (x^i)^2, \qquad (9)$$

unde $a(\rho)$ şi $b(\rho)$ sînt funcţii oarecare de variabila ρ. Acest lucru rezultă din teorema lui Weyl care spune că singurii invarianţi ai unui sistem de vectori ai grupului ortogonal sînt daţi de lungimile şi de produsul scalar al acestor vectori. Deci fiind daţi vectorii x^i, $\mathrm{d}x^i$, avem invarianţii ortogonali

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2, \quad x^1 \mathrm{d}x^1 + \ldots + x^n\, \mathrm{d}x^n, \quad (\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2.$$

Să presupunem acum că metrica (9) este regulată în toată vecinătatea $V(x^1, \ldots, x^n)$ şi să căutăm condiţiile în care această metrică este regulată şi în celelalte vecinătăţi ale spaţiului proiectiv. Pentru aceasta observăm că notînd cu ψ metrica naturală (7″), putem scrie (9) sub forma

---

[8]) G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, vol. I., Bucureşti, 1957, chap. VI.

$$ds^2 = A(\rho)\psi + B(\rho)(x^i\,dx^i)^2. \tag{10}$$

Considerînd așadar formulele de transformare de la vecinătatea V la vecinătatea V':

$$x^1 = \frac{1}{x'^1}, \quad x = \frac{x'^s}{x'^1}, \quad (s > 1), \tag{11}$$

obținem formulele

$$\psi = \psi', \quad \rho = \frac{\rho'}{(x'^1)^2}, \quad x^i\,dx^i = \frac{x'^i\,dx'^i}{(x'^1)^2} - \rho'\frac{dx'^1}{(x'^1)^3}. \tag{11'}$$

Rezultă deci că pentru x'^1 tinzînd la zero, deci pentru $\rho \to \infty$, metrica (10) va fi regulată dacă avem

$$\lim_{\rho\to\infty} A(\rho) = k > 0, \qquad \lim_{\rho\to\infty} B(\rho)\rho^3 = l, \tag{12}$$

unde k, l sînt constante.

Rezultă așadar teorema:

O metrică cu simetrie sferică (10) în vecinătatea $V(x^1, \ldots, x^n)$ este regulată în tot spațiul proiectiv dacă $A(\rho)$ și $B(\rho)$ satisfac la infinit condițiile (12).

Rezultă în particular că există o infinitate de metrici (10) regulate care sînt conforme cu metrica naturală, adică pentru care $B(\rho) = 0$.

Observăm de asemenea că printr-o transformare (11) metrica (10), este invariantă, deci rămîne aceeași numai dacă $B(\rho) = 0$ și $A(\rho) = k$; așadar rezultă teorema:

Singura metrică cu simetrie sferică în vecinătatea V, care rămîne aceeași pentru orice vecinătate a lui P_n, este metrica naturală.

Rezultă deci că metrica naturală este caracterizată prin a avea aceeași formă în cele $n + 1$ vecinătăți ale lui P_n. Obținem astfel un mod de definire a spațiului P_n ca spațiu al lui Riemann, asociindu-i aceeași metrică (5) în orice vecinătate a lui P_n.

Aceeași proprietate are loc pentru spațiile P_{2n} și P_{4n} considerînd că metricile lor sînt date în vecinătatea $V(z^1, \ldots, z_n)$ de formula

$$ds^2 = a(\rho)\psi + b(\rho)\,z^h\,d\bar{z}^h\,\bar{z}^k\,d\bar{z}^k, \tag{13}$$

unde ψ e dată de formula (4).

Putem spune că formula (13) are o simetrie simplectică sau cuaternionică, pentru că rămîne invariantă la o transformare de variabile

$$z'^h = a^h_k\,z^k, \quad a^h_k\,\bar{a}^h_l = \delta^k_l$$

iar a^h_k sînt cantități complexe sau cuaternionice [9]).

---

[9]) G. Vranceanu, *Sopra una coratterizazione delle metriche naturali degli spazi sferici o proiettivi.* Boll. dell'Unione Mat. Italiana, **15**, 357 (1960).

Considerăm acum cazul spaţiului sferic, ce este definit de 2 vecinătăţi $V\,(x^1,\ldots, x^n)$, $V'(x'^1,\ldots,x'^n)$, coordonatele fiind legate în punctele comune din V, V' prin formulele

$$x'^i = \frac{x^i}{r^2}, \quad r^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Obţinem atunci formulele

$$\rho' = \frac{\rho}{r^2}, \quad (\mathrm{d}x'^i)^2 = \frac{(\mathrm{d}x^i)^2}{r^4}, \quad x'^i\,\mathrm{d}x'^i = -\,\frac{x^i\,\mathrm{d}x^i}{r^4}$$

astfel încît metrica

$$\Phi = \frac{(\mathrm{d}x^i)^2}{\rho^2} \tag{14}$$

este un invariant şi constituie ceea ce se cheamă metrica naturală a spaţiului sferic. Rezultă astfel că metrica cu simetrie sferică (9) se transformă într-o metrică cu simetrie sferică şi avem

$$a\rho^2 = a'\rho'^2, \quad b\rho^4 = b'\rho'^4,$$

ceea ce spune că $a\rho^2$, $b\rho^4$ sînt invarianţi.

Obţinem aşadar teorema:

Metrica (9) *este regulată pe spaţiul sferic dacă avem*

$$\lim_{\rho\to\infty} a\rho^2 = k, \quad \lim_{\rho\to\infty} l\rho^4 = l, \tag{14'}$$

unde k, l sînt constante.

Rezultă astfel că metrica

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}x^i)^2}{\rho^2} + \frac{l}{\rho^4}\,(x^i\,\mathrm{d}x^i)^2, \tag{15}$$

unde l este o constantă este regulată şi invariantă pe spaţiul sferic.

Această metrică coincide cu metrica naturală (14) dacă $l = 0$. Rezultă că în cazul spaţiului sferic există o infinitate de metrici cu simetrie sferică invariante la schimbarea unei vecinătăţi în alta.

IV

Am vorbit mai sus de teorema lui Whitney, că o varietate diferenţială de dimensiune n poate fi scufundată în spaţiul euclidian E_{2n}. Am dat de asemenea scufundarea lui Manoury pentru spaţii proiective, scufundare care însă nu satisface teorema lui Whitney. Într-adevăr, în cazul spaţiilor proiective reale, această scufundare este dată de formulele

$$\begin{aligned} X_h &= y_h^2, \quad (h = 0,1,\ldots, n) \\ X_{hk} &= \sqrt{2}\,y_h\,y_k \quad (h \neq k), \end{aligned} \tag{16}$$

unde y_h sînt $n+1$ coordonate reale satisfăcînd condiţia

$$y_0^2 + \dots + y_n^2 = 1. \tag{16'}$$

Întrucît spaţiul euclidian E (X_h, X_{hk}) are $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ dimensiuni, rezultă că N întrece numărul $2n$ dat de Whitney; altfel zis rezultă că speţa acestei scufundări este

$$N - n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

deci este mai mare ca n. Totuşi această scufundare are proprietăţi importante deoarece ea conduce la metrica naturală a spaţiului P_n.

Să arătăm explicit că (16) scufundă global spaţiul P_n în E_N. În primul rînd rezultă imediat că la 2 puncte opuse de pe sfera (16') de coordonate y_h şi $-y_h$, deci la un punct din P_n, corespund aceleaşi valori pentru X_h şi X_{hk}.

Reciproca este încă adevărată, adică la puncte X_h, X_{hk} ale locului geometric (16), (16') corespund 2 puncte opuse y_h şi $-y_h$ de pe sfera (16'). Într-adevăr, dacă x_h x_{hk} este un punct al locului geometric (16), (16'), cel puţin una din cantităţile X_h este diferită de zero.

Presupunem că X_0 este diferită de zero. Atunci rezultă formulele inverse al formulelor (16), (16'):

$$y_0 = \pm\sqrt{X_0}$$
$$y_i = \pm\frac{X_{i0}}{\sqrt{2X_0}} \tag{17}$$

adică obţinem 2 soluţii

$$y_h \text{ şi } -y_h.$$

Rezultă deci că la un punct din P_n corespunde un punct al locului (16), (16') şi invers.

Formulele (16), (16') realizează aşadar o corespondenţă biunivocă între punctele lui P_n şi locul geometric (16), (16') al spaţiului euclidian E_N (X_h, X_{hk}). Se poate de asemenea observa că la orice sistem de diferenţiale $\mathrm{d}X_h$, $\mathrm{d}X_{hk}$, corespunde un singur sistem de ecuaţii diferenţiale $\mathrm{d}y_0, \dots,$ $\mathrm{d}y_n$ dat de formulele

$$\mathrm{d}y_0 = \frac{\mathrm{d}X_0}{\pm\sqrt{2X_0}}, \quad \mathrm{d}y_i = \frac{\mathrm{d}X_{i0}}{\pm\sqrt{2X_0}} - \frac{X_{i0}\,\mathrm{d}X_0}{\pm\sqrt{2X_0}}, \tag{17'}$$

ceea ce se exprimă zicînd că scufundarea este regulată. Evident, locul geometric (16), (16') este un loc algebric definit de ecuaţiile pătratice

$$2X_h X_k = X_{hk}^2, \qquad (h < k), \tag{18}$$

şi de ecuaţia liniară

$$X_0 + \dots + X_n = 1, \tag{19}$$

unde $X_0, \dots, X_n$ sînt cantităţi pozitive.

V

Faptul că scufundarea lui Manoury este de speţă superioară lui n, pune problema de a găsi scufundări care să fie de speţă n.

Această problemă a fost rezolvată recent de James[10]). Scufundarea lui James în cazul spaţiului proiectiv real se poate obţine în modul următor:

Fie $x_0, x_1, \dots, x_n$ coordonate proiective ale spaţiului P_n; putem aşadar presupune că satisfac la condiţia pătratică:

$$x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1 \tag{20}$$

şi fie z_r coordonatele unui spaţiu euclidian E_{2n+1}. Considerăm în E_{2n+1} locul geometric definit de formulele

$$z_r = \sum_{s+t=r} x_s x_t, \quad (0 \leqslant r \leqslant 2n,\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant n). \tag{20'}$$

Este uşor de văzut că două puncte opuse ale sferei (20) corespund la acelaşi punct z.

Reciproca este de asemenea adevărată. Într-adevăr, formulele (20′) se scriu explicit sub forma

$$\begin{aligned}
&z_0 = x_0^2, z_1 = x_0x_1, z_2 = x_0x_2 + x_1^2, \dots \\
&z_{2p-1} = x_0x_{2p-1} + x_1x_{2p-2} + \dots + x_{p-1}\, x_p, \\
&z_{2p} = x_0x_{2p} + x_1x_{2p-1} + \dots + x_p^2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&z_n = x_0\ x_n + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&z_{2n} = x_n^2,
\end{aligned}$$

unde termenii care conţin x_0 sînt toţi scrişi.

Presupunînd că z_0 este diferit de zero, el trebuie să fie pozitiv, deci obţinem

$$x_0 = \pm\sqrt{z_0}, \quad x_i = \frac{P_i(z)}{x_0}, \tag{21}$$

---

[10]) I. M. James, *Some embedings of projective spaces*. Proceedings of the Cambridge Phl. Soc., 55, 294 (1959).

unde $P_i(z)$ sînt polinoame în $z_1, \ldots, z_i$ şi sînt funcţii omogene de grad 1 în $z_0, z_1, \ldots, z_i$ definite de relaţiile de recurenţă :

$$P_{2p-1} = z_{2p-1} - \frac{P_1 P_{2p-2} + \ldots + P_{p-1} P_p}{z_0},$$

$$P_{2p} = z_{2p} - \frac{P_1 P_{2p-1} + \ldots + P_p^2}{z_0}.$$

Rezultă aşadar că fiind dat z_0 cu $z_0 \neq 0$, ecuaţiile (20′) admit numai două soluţii x_s şi $-x_s$.

Dacă $z_0 = 0$, atunci z_1 este nul şi primul z nenul este de ordin par, z_{2i}, şi atunci avem $z_{2i} = x_i^2$ şi în acest caz coordonata x_i joacă rolul lui x_0.

Rezultă deci că oricărui punct din P_n, deci unui punct x_s sau $-x_s$, îi corespunde un punct diferit de origine în E_{2n+1} pentru că dacă x_i este prima coordonată nenulă din P_n, avem $z_{2i} = x_i^2 \neq 0$. Aşadar vectorul z_r din E_{2n+1} este vector nenul, astfel că dacă punem

$$z^2 = z_0^2 + \ldots + z_{2n}^2, \tag{22}$$

cantitatea z este totdeauna diferită de zero.

Punînd atunci

$$y_r = \frac{z_r}{z}, \quad (r = 0, \ldots, 2n) \tag{22′}$$

punctul y_r este un punct al sferei unitate S_{2n} din spaţiul euclidian E_{2n+1}. Rezultă deci că spaţiul proiectiv P_n este definit ca un loc geometric situat pe sfera S_{2n}.

Pentru a demonstra că corespondenţa între acest loc şi P_n este biunivocă, presupunem mai întîi că $z_0 \neq 0$ deci $y_0 \neq 0$, obţinem atunci formulele

$$x_0^2 = y_0 z, \quad x_i = \frac{P_i z}{x_0}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

unde P_i sînt polinoamele (21) de variabilele y.

Introducînd în ecuaţia pătratică (20) rezultă formulele

$$z \left(y_0 + \frac{P_1^2}{y_0} + \ldots + \frac{P_n^2}{y_0} \right) = 1, \quad z = \frac{y_0}{y_0^2 + P_1^2 + \ldots + P_n^2}$$

şi prin urmare avem formulele :

$$x_0^2 = \frac{y_0^2}{y_0^2 + P_1^2 + \ldots + P_n^2}, \quad x_i = \frac{P_i \, y_0}{x_0 [y_0^2 + P_1^2 + \ldots + P_n^2]}$$

formule care demonstrează că un punct $(y_0, \ldots, y_{2n})$ cu $y_0 \neq 0$ al sferei unitate, corespunde unui singur punct din P_n.

Dacă $y_0 = 0$, $x_0 = 0$ şi dacă x_1 este prima coordonată nenulă, atunci x_1 joacă acelaşi rol ca x_0 şi proprietatea se conservă. Deci spaţiul P_n este astfel scufundat în sfera S_{2n}.

Cum S_{2n} nu poate coincide cu P_n, se obţine rezultatul lui James. Într-adevăr se ştie că sfera S_{2n} în afară de un punct, se poate scufunda prin proiecţie stereografică în E_{2n}.

Putem găsi formulele explicite ale unei scufundări, observînd că putem cu uşurinţă găsi puncte ale lui S_{2n} care să nu corespundă unui punct din P_n, cum este de exemplu punctul

$$y_1 = 1, \quad y_i = 0, \quad (i \neq 1).$$

Dacă facem proiecţia stereografică a sferei S_{2n} din acest punct se obţin formulele

$$y_0 = \frac{2\xi_1}{1+\xi}, \quad y_1 = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad y_s = \frac{2\,\xi_s}{1+\xi}, \quad (s = 2, 3, \ldots, 2\,n),$$

unde am pus

$$\xi = \xi_1^2 + \ldots + \xi_{2n}^2.$$

Ţinînd seama de (22′) şi (20′) rezultă formulele :

$$\xi_1 = \frac{z_0}{z - z_1}, \quad \xi_s = \frac{z_s}{z - z_1}, \tag{23}$$

care ne dau o scufundare a lui P_n în spaţiul euclidian E_{2n} ($\xi_1, \ldots, \xi_2$).

Obţinem astfel teorema :

Dat fiind spaţiul proiectiv P_n ($x_0, \ldots, x_n$), *se obţine o scufundare a acestui spaţiu în spaţiul euclidian* E_{2n}, *considerînd formulele* (23) *în care* z_r *sînt definite de formulele* (20′) *şi* z *definit de formula* (21).

Scufundarea dată de (23) nu este simetrică în diferite variabile $x_0, \ldots, x_n$ din P_n, deci metrica rezultată nu poate fi metrica naturală.

Pentru calculul metricii vecinătăţii din P_n pentru care $x_0 \neq 0$ putem lua ca mai sus coordonatele neomogene

$$u_i = \frac{x_i}{x_0}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23′}$$

În acest caz formulele (23) se scriu

$$\xi_1 = \frac{1}{U - U_1}, \quad \xi_s = \frac{U_s}{U - U_1}, \quad (s = 2, \ldots, 2n), \tag{24}$$

unde am pus :

$$U = \frac{z}{x_0^2}, \quad U_i = \frac{z_i}{x_0^2}, \quad (i = 1, \ldots, 2n).$$

Rezultă că U şi U_i sînt funcţii numai în variabilele $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ căci avem

$$U_1 = u_1, \; U_2 = u_2 + u_1^2, \; U_3 = u_3 + u_1 u_2, \; \ldots, \; U_{2n} = u_n^2.$$

Metrica acestei scufundări este dată de formula

$$ds^2 = d\xi_i^2, \qquad (i = 1, \dots, 2n)$$

unde ξ_i sînt date de (24); această metrică nu coincide cu metrica naturală, ea avînd o expresie mai complicată.

Consideraţii analoge se pot face pentru spaţiul proiectiv $P_n(x_0,\dots,x_n)$, unde $x_0, \dots, x_n$ sînt cantităţi cuaternionice sau complexe; James a arătat că acestea se pot scufunda în spaţii euclidiene cu $4n - 1$ şi $8n - 3$ dimensiuni.

VI

Să arătăm că se poate obţine direct o scufundare în spaţiul E_{2n}, a spaţiului proiectiv P_n, fără a trece prin sfera S_{2n}, scufundare care are astfel proprietatea de a fi raţională[11]. Pentru aceasta considerăm aceleaşi ecuaţii (20''), dar fără ultima ecuaţie.

Aceasta înseamnă a considera în spaţiul euclidian $E_{2n}(z_0, \dots, z_{2n-1})$ locul geometric definit de formulele

$$z_r = \sum_{s+t=r} x_s x_t, \quad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant n), \quad r = 0,1,\dots, 2n-1. \tag{25}$$

Vrem să arătăm că există o corespondenţă biunivocă între punctele acestui loc şi spaţiul P_n. În primul rînd se vede uşor că formulele (21) sînt valabile şi în acest caz dacă $x_0 \neq 0$. Formulele analoge sînt valabile dacă $x_0 = 0$, dar prima x_i nenulă, corespunde lui $i \leqslant n - 1$. Rămîne aşadar de considerat singurul caz în care avem $x_0 = \dots = x_{n-1} = 0$. Dar în acest caz toate z_r $(r = 0, \dots, 2n - 1)$ sînt nule şi formula (20) arată că $x_n = \pm 1$. Deci originea din E_{2n} corespunde unui singur punct din P_n şi corespondenţa este biunivocă fără excepţie.

Obţinem deci teorema:

Formulele (25) constituie o scufundare regulată a spaţiului P_n în spaţiul euclidian E_{2n}.

E interesant de reţinut că această scufundare este raţională. Într-adevăr, dacă $x_0 \neq 0$, utilizînd formulele (23') obţinem

$$z_0 = \frac{1}{1+u}, \qquad u = u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$z_r = \frac{U_r}{1+u} \qquad (r = 1,2,\dots, 2n-1)$$

şi cum U_r sînt polinoame în $u_1, u_2, \dots, u_n$, această scufundare este dată de formule raţionale în variabilele u. Proprietatea este evident valabilă dacă $x_0 = 0$ însă prima x_i nenulă este x_i $(i = n - 1)$. De asemenea este valabilă pentru cazul în care $x_0 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = \pm 1$.

---

[11] G. Vranceanu, *Sur le plongement des espaces projectifs*, C.R., **251**, 192 (1961).

Vrem acum să arătăm cum formulele analoge formulelor (25) se pot utiliza şi în cazul spaţiului proiectiv complex şi cuaternionic.

Presupunem în primul rînd că $x_0, \ldots, x_n$ sînt cantităţi complexe. Ele se pot normaliza punînd

$$x_0\bar{x}_0 + \ldots + x_n\bar{x}_n = 1 \tag{26}$$

unde $\bar{x}_i$ sînt cantităţile conjugate cantităţilor x_i. Normalizarea aceasta determină x_i, abstracţie făcînd de înmulţirea cu o cantitate complexă de modul 1, deci abstracţie făcînd de o înmulţire cu $\pm\, e^{i\theta}$ unde θ este un unghi oarecare. Putem dispune de acest unghi pentru a presupune că x_i care nu este nul, este real. Interpretarea acestui fapt constă în aceea că spaţiul proiectiv complex P_n se obţine din sfera E_{2n+2} identificînd punctele unor cercuri mari. Ţinînd seama de acest fapt, coordonatele spaţiului proiectiv complex P_n $(x_0, \ldots, x_n)$ sînt complet determinate de ecuaţiile (26) şi dacă se face abstracţie de schimbare de semn, putem lua

$$x_s = \xi_s + i\eta_s \tag{26'}$$

astfel încît considerînd în spaţiul euclidian

$$E_{4n-1}(z_0, \ldots, z_{2n-1}, y_1, \ldots, y_{2n-1})$$

locul geometric

$$\left.\begin{aligned} z_r &= \sum_{s+t=r} \xi_s\,\xi_t + \eta_s\,\eta_t, && (r = 0,1,\ldots,2n-1)\\ y_p &= \sum_{s+t=p} \xi_s\,\eta_t - \xi_t\,\eta_s, && (p = 1, 2, \ldots, 2n-1) \end{aligned}\right. \tag{27}$$

putem demonstra că există o corespondenţă biunivocă între punctele spaţiului proiectiv complex P_n şi acest loc geometric.

Pentru aceasta presupunem că $x_0 \neq 0$. Putem presupune deci că x_0 este real, deci $\xi_0 \neq 0$, $\eta_0 = 0$ şi formulele (27) ne dau

$$z_0 = \xi_0^2,\; z_1 = \xi_0\,\xi_1,\; y_1 = \xi_0\,\eta_1$$

$$z_2 = \xi_0\xi_2 + \xi_1^2 + \eta_1^2,\; y_2 = \xi_0\,\eta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n = \xi_0\xi_n + \xi_1\xi_{n-1} + \eta_1\,\eta_{n-1} + \ldots$$

$$y_n = \xi_0\eta_n + \xi_1\eta_{n-1} - \eta_1\xi_{n-1} + \ldots$$

formule care ne permit să determinăm $\xi_0, \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n$ abstracţie făcînd de schimbare de semn. Dacă $x_0 = 0$ şi prima x nenulă corespunde la un $i \leqslant n-1$, presupunînd x_i real, ceea ce este posibil, cum am arătat mai sus, obţinem acelaşi rezultat. Dacă $x_0=0, \ldots, x_{n-1}=0$ sînt nule, acestea corespund unui singur punct din P_n; pentru că presupunînd x_n real, avem $x_n = \pm 1$.

Rezultă deci teorema:

Formulele (27) *realizează o scufundare a spaţiului proiectiv complex* P_n *în spaţiul euclidian* E_{4n-1}.

Această scufundare este rațională ca și scufundarea (25) a spațiului proiectiv real cu care de altfel coincide, dacă η_i sînt nule.

Să considerăm acum spațiul proiectiv cuaternionic definit de $n+1$ coordonate omogene $x_0, x_1, \ldots, x_n$; avem

$$x_s = a_s + ib_s + jc_s + kd_s, \quad (s = 0, 1, \ldots, n),$$

unde i, j, k sînt unitățile cuaternionice și în acest caz obținem relația (26) cu

$$\bar{x}_s = a_s - ib_s - jc_s - k\mathrm{d}_s.$$

Cum x_s sînt determinați de (26), abstracție făcînd de înmulțirea cu o cantitate cuaternionică de modul 1, putem utiliza aceste cantități pentru înmulțirea la stînga pentru a presupune că una din x_i ce nu este nulă, este reală și atunci coordonatele spațiului sînt complet determinate de normalizarea (26).

Să considerăm atunci formulele:

$$z_0 = a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2$$

$$z_r + iy_r + ju_r + kv_r = \sum_{\substack{s+t=r \\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant n}} x_s x_t, \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{28}$$

Aceste formule definesc o scufundare a spațiului proiectiv cuaternionic $P_n(x_0, \ldots, x_n)$ în spațiul euclidian $E_{8n-3}(z_0, z_r, y_r, u_r, v_r)$, unde r variază de la 1 la $2n-1$.

Presupunînd că x_0 nu este zero, putem atunci presupune că este real, deci $a_0 \neq 0$, $b_0 = c_0 = d_0 = 0$ și atunci formulele (28) ne dau:

$$z_0 = a_0^2, \quad z_1 = a_0 a_1, \quad y_1 = a_0 b_1, \quad u_1 = a_0 c_1, \quad v_1 = a_0 d_1$$

. . . .

care definesc $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$, abstracție făcînd de semn. Considerații analoge avem și în cazul în care $x_0 = 0$ însă un alt x_i este nenul.

Obținem astfel teorema:

Formulele (28) realizează o scufundare a spațiului proiectiv cuaternionic în spațiul euclidian E_{8n-3} și această scufundare este rațională.

Am obținut așadar scufundări raționale ale spațiilor P_n proiective (reale, complexe, cuaternionice) în spațiile euclidiene cu $2n$, $4n-1$ și cu $8n-3$ dimensiuni.

În toate aceste scufundări, teorema lui Whitney este verificată, deoarece spațiile proiectiv reale, complexe, cuaternionice sînt respectiv de dimensiune reală n, $2n$, $4n$, iar spațiile euclidiene de scufundare au dimensiunile $2n$, $4n-1$, $8n-3$ deci nu întrec dublul dimensiunii reale a spațiului și este inferior acestui număr în cazul complex și cuaternionic respectiv cu o unitate sau cu trei unități.

James a arătat de asemenea că spațiile proiective reale de dimensiune impară n se pot scufunda în spații euclidiene de dimensiune $2n-1$.

Într-adevăr, să presupunem că sîntem în primul rînd în cazul $n = 3$, deci avem patru coordonate omogene x_0, x_1, x_2, x_3 care nu pot fi toate nule. Să punem atunci

$$\begin{aligned} &z_0 = x_0^2 - x_1^2, \ z_1 = 2x_0x_1 \\ &z_2 = \sqrt{2}(x_0 x_2 + x_1x_3) \ z_3 = \sqrt{2}(x_1 x_2 - x_0x_3) \\ &z_4 = x_2^2 - x_3^2, \quad z_5 = 2x_2 x_3. \end{aligned} \tag{29}$$

Avem o scufundare a spaţiului proiectiv P_3 în spaţiul euclidian E_6. Într-adevăr, dacă $x_0 \neq 0$, atunci avem

$$x_1 = \frac{z_1}{2x_0}, \quad x_0^4 - z_0 x_0^2 - \frac{z_1^2}{4} = 0 \tag{29'}$$

ceea ce ne dă

$$x_0^2 = \frac{z_0 \pm \sqrt{z_0^2 + z_1^2}}{2}, \tag{29''}$$

deci avem numai două valori reale $x_0, -x_0$ corespunzînd semnului $+$ pentru radical, a treia şi a patra formulă (29) ne arată că avem şi două soluţii diametral opuse pentru x_2, x_3.

Într-adevăr, a treia şi a patra formulă (29) ne dau

$$x_2 = \frac{x_0 z_2 + x_1 z_3}{\sqrt{2}(x_0^2 + x_1^2)} = \frac{x_0^2 z_2 + z_1 z_3}{2\sqrt{2}\, x_0 \sqrt{z_0^2 + z_1^2}}$$

şi o formulă analogă pentru x_3, deci ţinînd seama de formula (29''), cu semnul $+$ pentru radical, rezultă că avem două soluţii diametral opuse, deci un singur punct al spaţiului P_3.

Evident, acelaşi lucru se verifică dacă $x_1 \neq 0$. Dacă $x_0 = x_1 = 0$, ultimele formule ne arată că x_2, x_3 au doar două soluţii x_2, x_3 şi $-x_2$, $-x_3$.

Să observăm acum că formulele (29) ne dau

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 1,$$

deci scufundarea este pe sfera S_5 din E_6 şi prin proiecţie stereografică avem o scufundare într-un E_5.

În ceea ce priveşte cazul spaţiilor proiective reale P_n cu n impar mai mare ca 3, vom observa că luînd $n = 2p + 1$ şi presupunînd spaţiul raportat la coordonatele omogene $x_0, \ldots, x_{2p+1}$, unde

$$x_0^2 + \ldots + x_{2p+1}^2 = 1,$$

se poate obţine o scufundare a spaţiului proiectiv P_{2p+1} în spaţiul euclidian E_{4p+2}, luînd

$$\begin{aligned} &z_0 = x_0^2 - x_1^2, \ z_1 = x_0 x_1 \\ &z_2 = x_0x_2 + x_1x_3, \ z_3 = x_0x_3 - x_1x_2 \end{aligned}$$

$$z_4 = x_0x_4 + x_1x_5 + x_2^2 - x_3^2,\ z_5 = x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 \tag{30}$$

$$z_6 = x_0x_6 + x_1x_7 + x_2x_4 + x_3x_5,\ z_7 = x_0x_7 - x_1x_6 + x_2x_5 - x_3x_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_{4p} = x_{2p}^2 - x_{2p+1}^2,\quad z_{4p+1} = x_{2p}\ x_{2p+1},$$

termenii generali z_{4q}, z_{4q+1}, z_{4q+2}, z_{4q+3} cu $q < p$ scriindu-se

$$\begin{aligned} z_{4q} &= x_0\,x_{4q} + x_1x_{4q+1} + x_2x_{4q-2} + x_3x_{4q-1} + \ldots + x_{2q}^2 - x_{2q+2}^2 \\ z_{4q+1} &= x_0x_{4q+1} - x_1x_{4q} + x_2x_{4q-1} - x_3x_{4q-2} + \ldots + x_{2q}x_{2q+1} \\ z_{4q+2} &= x_0x_{4q+2} + x_1x_{4q+3} + \ldots + x_{2q}x_{2q+2} + x_{2q+1}x_{2q+3} \qquad (30') \\ z_{4q+3} &= x_0x_{4q+3} - x_1x_{4q+2} + \ldots + x_{2q}x_{2q+3} - x_{2q+1}x_{2q+2}, \end{aligned}$$

unde termenii x_k $(k > 2p + 1)$ sînt considerați nuli.

Într-adevăr, dacă x_0, x_1 nu sînt ambii nuli, de exemplu, și dacă $x_0 \neq 0$, atunci primele ecuații ne dau, ca și primele ecuații (29), soluții pentru x_0 și x_1.

Ecuațiile a treia și a patra, a cincea și a șasea etc. ne dau două soluții pentru toate necunoscutele $x_0, x_1, \ldots, x_{2p+1}$, soluții care corespund la un singur punct din spațiul P_{2p+1}, și aceleași considerente sînt valabile dacă $x_0 = x_1 = \ldots x_{2i} = x_{2i+1} = 0$, însă una din x_{2i+2}, x_{2i+3} nu este nulă, ceea ce are desigur loc, deoarece x_i nu pot fi toate nule.

De asemenea este ușor de văzut că originea O în spațiul euclidian E_{4p+2} nu este un punct al locului geometric (27), deci considerînd cantitățile

$$y_r = \frac{z_r}{z},\quad (z^2 = z_0^2 + \ldots + z_{2p+1}^2),$$

se obține o scufundare pe o sferă S_{4p+1} de rază 1, și deci prin proiecție stereografică, o scufundare în spațiul euclidian E_{4p+1} și teorema lui James este demonstrată.

Putem enunța deci teorema :

Formulele (30), (30′) *reprezintă o scufundare rațională a spațiului proiectiv* P_{2p+1} *într-un spațiu euclidian* E_{4p+2} *care conduc prin proiecția stereografică la o scufundare în spațiul euclidian* E_{4p+1}.

Se poate spune deci că spațiile proiective de dimensiune impară n admit două feluri de scufundări raționale în spații euclidiene E_{2n}, scufundarea (25) și scufundarea (30). Această ultimă scufundare permite prin proiecție stereografică scufundarea într-un spațiu euclidian E_{2n-1}.

Primită la redacție la 1 octombrie 1964

CERCETĂRI ASUPRA MIŞCĂRII LA MARI VITEZE SUBSONICE ÎN JURUL UNOR PROFILE DATE

DE

CAIUS IACOB

Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

În acest articol, după o schiţare a principalelor cercetări privind mişcarea compresibilă subsonică în jurul unui obstacol, autorul arată cum determinarea celei de-a doua aproximaţii poate să fie redusă la o problemă Dirichlet regulată pe care a rezolvat-o efectiv pentru un caz foarte general [38]. Metoda propusă este foarte simplă pentru clasa de profile aerodinamice ce se obţin ca imagini ale circumferinţei $|\zeta| = a$ cu ajutorul transformării definită de (5.4).
Se dă o aplicaţie pentru cazul profilelor obţinute cu ajutorul transformării (6.3).

§ 1. INTRODUCERE

Problema mişcării la mari viteze subsonice în jurul unor profile de aripă date a fost studiată de noi cu ajutorul metodelor hodografice încă din anul 1938. Astfel, am considerat mişcările fluidelor compresibile care admit o lege de compresibilitate apropiată de cea reală, în speţă legea de compresibilitate a lui Ciaplîghin [15], [16].

Cu acest prilej s-a introdus noţiunea de transformare a lui Ciaplîghin [17] prin care la o mişcare fluidă incompresibilă plană, în planul $\zeta = \xi + i\eta$, definită de potenţialul complex $f(\zeta)$, se asociază mişcarea unui fluid compresibil în planul $z = x + iy$. Formula de transformare obţinută este

$$z = C_1\zeta + C_2 \overline{\int \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \mathrm{d}\zeta}, \tag{1.1}$$

unde C_1 şi C_2 sînt două constante care depind de viteza la infinit [16], [17], [35].

Ceva mai tîrziu s-a arătat că prin alegerea convenabilă a constantelor C_1 şi C_2 se poate regăsi, ca o variantă a metodei generale, metoda propusă

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 173–187, BUCUREŞTI, 1965

de Th. v. Kármán [44] şi H.S.Tsien [64], care fusese considerată pînă atunci în literatură ca o metodă independentă [23]. De asemenea s-a propus o altă variantă, denumită ,,varianta coardei'' susceptibilă de a da rezultate mai bune. Metoda aceasta de aproximare a fost aplicată la studiul mişcării bidimensionale în jurul unui cilindru circular [18] dîndu-se în 1940 prima teoremă de existenţă bazată pe teorema de punct fix a lui Leray şi Schauder. Problema a fost reluată mai tîrziu de L.Bers [1], [2], pentru cazul unui obstacol oarecare, din punctul de vedere al stabilirii existenţei soluţiei, precum şi de I. Filimon, din punctul de vedere al construirii efective a ei [6], [7], [8].

Studiul comparat al variantelor metodei lui Ciaplîghin, iniţiat de noi [28], a înregistrat importante rezultate date de Simona Popp [61], [62], [63], în legătură cu mişcarea în jurul unui obstacol situat într-un canal.

În 1946 s-a dezvoltat la noi şi o altă metodă de studiu a mişcărilor fluide, pentru a ţine seamă de efectele compresibilităţii. Această metodă este bazată pe utilizarea variabilelor independente $\bar{f} = \varphi + i\psi$, $\bar{f} = \varphi - i\psi$ şi a funcţiilor lui Levi-Cività complexe conjugate $\omega = \theta + i\ln V$, $\overline{\omega} = \theta - i\ln V$, $\varphi(x,y)$ fiind potenţialul vitezelor, $\psi(x,y)$ funcţia de curent, θ unghiul vitezei cu axa absciselor, iar V modulul vitezei [19], [20]. Ecuaţia cu derivate parţiale, neliniară, a problemei poate fi rezolvată cu ajutorul unei metode de aproximaţii succesive. Dezvoltarea în serie a lui $\omega(f,\bar{f})$ după puterile numărului Mach al curentului neperturbat de obstacol, permite să se depăşească în precizie variantele metodei lui Ciaplîghin menţionate mai sus. Această metodă a fost aplicată la studiul problemei jeturilor [20] şi la studiul mişcărilor cu circulaţie în jurul profilelor [29] [41]. Recent, C. S. Ioan [14] a aplicat-o pentru determinarea corecţiei de compresibilitate în cazul jeturilor cu pînze de jet laterale.

În legătură cu probleme la limită la care conduc metodele menţionate, am căutat să dezvoltăm teoria problemei lui Dirichlet modificată [34], [36] şi să studiem diferite probleme la limită mixte [25],[27], şi în special problema lui Volterra [40] cu aplicaţii la aerodinamica subsonică [32], [33], [40] [41] sau la aerodinamica supersonică [26], [31] [40], acestea fiind chiar primele cercetări de aerodinamică supersonică din ţara noastră, care au fost continuate de Elena Murgulescu [50], [51], [52], [53], [54].

Metodele utilizate de noi au fost considerabil extinse şi aplicate recent de L. Dragoş, pentru construirea teoriei aripei subţiri în magnetoaerodinamică [3], [4], [5]. De asemenea, I.L.Popescu [60] a studiat probleme de aerodinamică subsonică pentru reţele de profile.

§ 2. CORECŢIA DE COMPRESIBILITATE PENTRU MIŞCAREA LA MARI VITEZE SUBSONICE ÎN JURUL UNUI PROFIL DAT

Se ştie că principalul inconvenient pe care-l prezintă metodele hodografice în studiul mişcării în jurul unui profil de aripă este acela că dacă se pleacă de la mişcarea incompresibilă în jurul unui profil dat, ele conduc la mişcarea compresibilă în jurul unui profil deformat şi deformarea acestuia depinde de viteza curentului la infinit. Pe de altă parte, dacă se impune condiţia ca obstacolul din mişcarea compresibilă să fie cel dat *a priori*, atunci aceste metode conduc la rezolvarea unor ecuaţii funcţionale de un tip foarte complicat [1], [2], [18]. De aceea, problema mişcării în jurul unei aripi de avion a fost atacată şi pe o cale directă, care utilizează ca variabile independente coordonatele carteziene din planul fizic al mişcării. Vom aminti aici în special cercetările lui H. Lamb [46], E. Pistolesi [55], L. Poggi [56], [57], C. Kaplan [42], [43], I. Imai [10], [11], I. Imai şi T.Aihara [12], E. Lamla [47], [48], [49], E. Krahn [45]. Aceşti autori au dezvoltat diferite variante ale metodei lui Janzen-Rayleigh. Vom trimite pentru bibliografia corespunzătoare la [21], [22], [24], la tratatul nostru [41], la o expunere a lui I. Imai [13], precum şi la o lucrare pe care am prezentat-o recent la al 6-lea Simpozion de mecanica fluidelor de la Zakopane [38].

Cazul special al profilelor subţiri şi puţin curbate, plasate la o mică incidenţă a fost de asemenea considerat de numeroşi cercetători.

În cele ce urmează ne vom ocupa de studiul mişcării în jurul unei clase largi de profile, utilizînd metoda directă menţionată mai sus, precum şi rezultatele pe care le-am dat anterior [30], [37].

Mişcarea are loc în planul Oxy, în prezenţa profilului de aripă C, format dintr-un arc analitic care prezintă un vîrf ascuţit P_0 (x_0, y_0). Viteza curentului la infinit este V_∞ ; ea face unghiul α cu axa Ox. Domeniul exterior lui C va fi însemnat prin D.

Fie $\varphi(x, y)$ potenţialul vitezelor şi ψ (x, y) funcţia de curent ; fie de asemenea ρ densitatea şi ρ_0 valoarea sa în punctul de impact. Avem sistemul fundamental

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2.1}$$

unde u şi v reprezintă proiecţiile vitezei pe axele de coordonate precum şi relaţiile

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V^2}{c_0^2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \tag{2.2}$$

definind pe ρ şi pe c^2 ca funcţii de $V^2 = u^2 + v^2$, V fiind modulul vitezei. Aici γ înseamnă constanta adiabatică ($\gamma \approx 1{,}4$ pentru aer), c_0 este viteza sunetului în punctul de viteză nulă iar c este viteza sunetului în punctul de viteză V.

Dacă se introduce ca parametru numărul adimensional $M_0 = V_\infty / c_0$ care este legat de numărul lui Mach la infinit $M_\infty = V_\infty / c_\infty$ prin relaţia

$$M_0 = M_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{-1/2},$$

în loc de (2.2) se va scrie

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V^2}{V_\infty^2} M_0^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \tag{2.2'}$$

Este avantajos de a trece la variabilele complexe conjugate

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy$$

şi de a introduce operatorii

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

cu ajutorul cărora punînd

$$f = \varphi + i\psi,\ \bar{f} = \varphi - i\psi,$$

sistemul (2.1) devine

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 + \rho}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \tag{2.3}$$

unde

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 + \rho} = r(V^2,\ M_0^2)$$

este o funcţie analitică de M_0^2, care este olomorfă în vecinătatea punctului $M_0^2 = 0$.

Avînd

$$V^2 = (u - iv)(u + iv) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right), \tag{2.4}$$

o formulă fundamentală a lui D. Pompeiu [84], [85] permite reducerea lui (2.3) la ecuaţia integro-diferenţială

$$f(z,\ \bar{z}) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{r\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\zeta}}\right),\ M_0^2\right]}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + G(z), \tag{2.5}$$

unde $\zeta = \xi + i\eta$ este afixul punctului de integrare Q. Funcţia $G(z)$ urmează a fi determinată prin condiţiile la limită ale problemei.

Aceste condiţii revin la

$$\psi = \operatorname{Im}\{f(z,\bar{z})\} = 0 \qquad \text{pe } C \tag{2.6}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}(u - iv) = V_\infty \mathrm{e}^{-i\alpha} = w_\infty. \tag{2.7}$$

După o teoremă a lui F.I.Frankl şi M.V.Keldîş [9] care poate fi regăsită şi plecînd de la (2.5), avem dezvoltările în serie

$$f(z,\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} M_0^{2n} f_n(z,\bar{z}),\quad \bar{f}(z,\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} M_0^{2n} \bar{f}_n(z,\bar{z}) \tag{2.8}$$

care sînt valabile pentru M_0 destul de mic.

Să punem

$$f_n(z,\bar{z}) = \varphi_n(x,y) + i\,\psi_n(x,y). \tag{2.9}$$

În virtutea lui (2.6) şi (2.7) va trebui ca

$$\psi_n = \operatorname{Im}\{f_n(z,\bar{z})\} = 0 \quad \text{pe } C \tag{2.10}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\left(\frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial z}\right) = w_\infty, \quad \lim_{|z|\to\infty}\left(\frac{\partial f_n}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial z}\right) = 0, (n = 1,2,\cdots) \tag{2.11}$$

În plus funcţia $\psi(x, y) = \operatorname{Im}\{f(z, \bar{z})\}$ trebuie să fie uniformă, după cum se poate stabili uşor. Aceeaşi condiţie trebuie deci să o îndeplinească şi funcţiile $\psi_n(x, y)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$

§ 3. PRIMA ŞI A DOUA APROXIMAŢIE

Introducînd dezvoltările (2.8) în (2.3) se obţine

$$f_0 = f_0(z) \tag{3.1}$$

$$f_1(z,\bar{z}) = \frac{1}{4V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z} + \frac{1}{4}\,g(z), \ldots \tag{3.2}$$

unde $g(z)$ este o funcţie ce urmează a fi determinată prin condiţiile la limită.

Aproximaţia întîi $f_0(z)$ va reprezenta potenţialul complex al mişcării incompresibile în prezenţa profilului C, cu aceeaşi viteză complexă w_∞ la infinit, dată de (2.7).

Dacă se cunoaşte reprezentarea conformă $\zeta = \zeta(z)$ a lui D pe exteriorul Δ al circumferinţei Γ $(|\zeta| = a)$ din planul $\zeta = \xi + i\eta$ cu corespondenţa punctelor de la infinit, atunci $f_0(z)$ se determină imediat. Presupunînd reprezentarea conformă normată la infinit, ceea ce impune o valoare bine determinată pentru a, vom avea la mari distanţe

$$z = \zeta + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta} + \frac{\beta_2}{\zeta^2} + \ldots \tag{3.3}$$

Cu ajutorul transformării (3.3), expresia lui $f(z)$ se va scrie

$$f_0(z) = \frac{k_0}{2\pi i}\ln\zeta + w_\infty\zeta + \frac{\overline{w}_\infty a^2}{\zeta} + \text{const.}, \tag{3.4}$$

unde

$$k_0 = -\,4\pi a V_\infty \sin(\alpha - \beta) \tag{3.5}$$

este circulaţia în jurul profilului C, care a fost aleasă conform regulei lui Jukowski şi Ciaplîghin. S-a notat prin $\zeta_0 = a\,e^{i\beta}$ afixul imaginii punctului P_0, vîrful profilului.

Fie $\zeta_1 = -\,a\,e^{i(2\alpha-\beta)}$ afixul celui de-al doilea punct de intersecţie al circumferinţei prin paralela la viteza de la infinit, dusă prin punctul ζ_0.

Un calcul simplu ne dă

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\zeta} = w_\infty \frac{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)}{\zeta^2}. \tag{3.6}$$

Condiția ca $\psi_1(x,y)$ să fie uniformă, ne-a condus să luăm [41]

$$g(z) = -\frac{2\overline{w}_\infty}{V_\infty^2}[f_0(z) + G(z)]\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} + H(z), \tag{3.7}$$

unde $G(z)$ este o funcție olomorfă în $D + C$ cu excepția punctului $z = \infty$, în timp ce $H(z)$poate fi multiformă, dar cu o perioadă reală k_1 în jurul lui C.

În vecinătatea punctului de la infinit avem dezvoltările

$$G(z) = g_{-1} z + g_0 + \frac{g_1}{z} + \frac{g_2}{z^2} + \ldots \tag{3.8}$$

$$H(z) - \frac{k_1}{2\pi i}\ln z = h_{-1} z + h_0 + \frac{h_1}{z} + \ldots \tag{3.9}$$

Cu această alegere a lui g (z), conform lui (3.7), vom putea scrie

$$f_1(z, \overline{z}) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{V_\infty^2}\frac{df_0}{\mathrm{d}z}N(z, \overline{z}) + H(z)\right], \tag{3.10}$$

punînd

$$N(z, \overline{z}) = \overline{\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} - 2\,\overline{w}_\infty[f_0(z) + G(z)]. \tag{3.11}$$

Funcția N $(z, \overline{z})$ este uniformă în D. Dacă luăm G $(z_0) = 0$ și adoptăm ca valoare inițială a lui $f_0(z)$ pe $f_0(z_0) = 0$, atunci vom avea $N(z_0, \overline{z}_0) = 0$. Vom alege în plus pe G (z) astfel ca G' (z_0) să fie finit.

Calculul lui

$$u - iv = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} + M_0^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f}_1}{\partial z}\right) \tag{3.12}$$

ne arată că condiția de la infinit (2.7) va fi îndeplinită pentru a doua aproximație dacă

$$h_1 = 2g_{-1} + w_\infty. \tag{3.13}$$

În plus, condiția de pe obstacol (2.6) cere să avem

$$\mathrm{Im}\{H(z)\}_C = -V_\infty^{-2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}N(z, \overline{z})\right\}_C \cdot \tag{3.14}$$

În fine, constanta k_1 trebuie să fie determinată prin condiția ca viteza să fie finită în punctul P_0, ceea ce revine la

$$\lim_{z \to z_0} H'(z) = \text{finită}. \tag{3.15}$$

Acest lucru este posibil [30].

În felul acesta, determinarea celei de-a doua aproximaţii conduce la rezolvarea problemei lui Dirichlet (3.14) cu singularităţi date la infinit, o dată ce funcţia $G(z)$ a fost aleasă. În aplicaţii, această funcţie va trebui să fie aleasă în modul cel mai convenabil, pentru simplificarea calculelor. Se poate arăta uşor că aproximaţia a doua nu depinde de alegerea lui $G(z)$.

§ 4. REDUCEREA LA O PROBLEMĂ DIRICHLET FĂRĂ SINGULARITĂŢI

Să considerăm potenţialul complex $F_1(z)$ al mişcării incompresibile în jurul profilului C, cu o viteză complexă la infinit egală cu h_{-1}, dat de relaţia (3.13) şi cu circulaţia k_1, încă nedeterminată.

Diferenţa

$$H_1(z) = H(z) - F_1(z) = P_1(x, y) + iQ_1(x, y) \tag{4.1}$$

va fi olomorfă în D şi dacă alegem constanta aditivă ce intră în expresia lui $F_1(z)$ aşa ca să avem

$$\operatorname{Im}\{F_1(z)\}_C = 0 \tag{4.2}$$

va rezulta din (3.14) şi (4.2) că

$$\operatorname{Im}\{H_1(z)\}_C = -V_\infty^{-2} \operatorname{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} N(z, \bar{z})\right\}_C. \tag{4.3}$$

În felul acesta totul revine la determinarea funcţiei olomorfe $H_1(z)$ printr-o problemă Dirichlet. Avem de altfel, dacă trecem la planul ζ,

$$F_1(z(\zeta)) = h_{-1}\zeta + \frac{a^2\bar{h}_{-1}}{\zeta} + \frac{k_1}{2\pi i}\ln\frac{\zeta}{a}. \tag{4.4}$$

În vecinătatea punctului ζ_0, imagine a lui z_0, avem în general

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = (\zeta - \zeta_0)^{-\mu} h(\zeta), \quad h(\zeta_0) \neq 0, \tag{4.5}$$

notînd prin $\mu\pi$ $(0 < \mu < 1)$ unghiul semitangentelor în vîrful P_0 al profilului, orientate în sensul de parcurs care lasă interiorul lui C la stînga.

În virtutea lui (4.5), condiţia (3.15) se reduce la

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0}\left(\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}\zeta} + \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}\zeta}\right) = 0. \tag{4.6}$$

Rezultă de aici, ţinînd seamă şi de (4.4),

$$k_1 = 2\pi a\left[\left(\frac{\partial Q_1}{\partial n}\right)_{\zeta=\zeta_0} - i\left(h_{-1}\mathrm{e}^{i\beta} - \bar{h}_{-1}\mathrm{e}^{-i\beta}\right)\right], \tag{4.7}$$

normala la Γ fiind orientată pozitiv spre Δ. Circulaţia în jurul profilului va fi deci

$$k = k_0 + M_0^2 k_1 + \dots \tag{4.8}$$

Să mai remarcăm aici că prin transformarea conformă efectuată vom avea

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} = w_\infty \frac{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)}{\zeta^2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}. \tag{4.9}$$

§ 5. REZOLVAREA PROBLEMEI LUI DIRICHLET PENTRU O CLASĂ DE PROFILE AERODINAMICE

În lucrarea deja citată [38] am considerat cazul cînd derivata $\mathrm{d}z/\mathrm{d}\zeta$ este o funcţie raţională de ζ, de forma

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = (\zeta - \zeta_0)\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(\zeta - \zeta'_j)^{m_j}}{\prod\limits_{k=1}^{q}(\zeta - \zeta''_k)^{n_k}}, \tag{5.1}$$

unde ζ'_j şi ζ''_k $(\zeta'_j \neq \zeta''_k)$ se găsesc în interiorul lui Γ iar numerele întregi pozitive sau nule m_j şi n_k verifică condiţiile

$$\sum_{k=1}^{q} n_k = 1 + \sum_{j=1}^{p} m_j \tag{5.2}$$

şi

$$\sum_{k=1}^{q} n_k \zeta''_k = \zeta_0 + \sum_{j=1}^{p} m_j \zeta'_j. \tag{5.3}$$

Aceste condiţii rezultă din comportamentul lui $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}$ la mari distanţe ca urmare a lui (3.3).

Profilele obţinute din (5.1) cuprind clasa profilelor cu puncte de înapoiere în P_0 pentru care $\mu = 1$. Prin urmare, profilele lui Jukowski, profilele lui von Mises cu punct de înapoiere, profilele lui Girault, fac parte din clasa considerată de noi. De exemplu, vom obţine profilele de tipul lui von Mises, cu punct de înapoiere, luînd $m_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ şi $\xi''_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$, de unde conform lui (5.2)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)\prod_{j=1}^{p}\left(1 - \frac{\zeta'_j}{\zeta}\right), \quad |\zeta'_j| < a.$$

În cele ce urmează vom considera o nouă clasă de profile, obţinută prin particularizarea relaţiei (5.1), în care se va lua $\zeta'_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, cu $\zeta''_k \neq 0$. Vom avea atunci

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)\prod_{k=1}^{q}\left(1 - \frac{\zeta''_k}{\zeta}\right)^{-n_k}, \tag{5.4}$$

numerele ζ_k'' îndeplinind condiţia

$$\sum_{k=1}^{q} n_k \zeta_k'' = \zeta_0, \tag{5.3'}$$

care rezultă din (5.3).

Vom avea deci, conform lui (4.9),

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} = w_\infty \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \prod_{k=1}^{q} \left(1 - \frac{\zeta_k''}{\zeta}\right)^{n_k}, \tag{5.5}$$

deci viteza complexă este o funcţie raţională de ζ, care nu are singularităţi în domeniul Δ.

Această alegere are avantajul că duce la o simplificare considerabilă a rezolvării problemei lui Dirichlet considerate la § 4.

Avem, într-adevăr, în cazul acesta, pe cercul Γ,

$$\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z = \left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}\zeta = w_\infty^2 \frac{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)^2 \prod\limits_{k=1}^{q} (\zeta - \zeta_k'')^{n_k}}{\zeta^{3+n}}\, \mathrm{d}\zeta,$$

unde

$$n = \sum_{k=1}^{q} n_k. \tag{5.6}$$

Deci, observînd că $\zeta\bar{\zeta} = a^2$, $(\zeta \in \Gamma)$, putem să scriem

$$\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} = \lambda \zeta^{-2} (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)^2 \prod_{k=1}^{q} (\zeta - \eta_k)^{n_k}\, \mathrm{d}\zeta, \tag{5.7}$$

unde constanta λ este definită prin

$$\lambda = (-1)^n \overline{w}_\infty^2\, \bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_1^2\, a^{-4-2n} \prod_{k=i}^{q} \bar{\zeta}_k''^{\,n_k}, \tag{5.8}$$

iar η_k reprezintă afixul punctului simetric lui ζ_k'' faţă de Γ, care este dat de

$$\eta_k = \frac{a^2}{\bar{\zeta}_k''}. \tag{5.9}$$

Să punem

$$P(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)^2 \prod_{k=1}^{q} (\zeta - \eta_\kappa)^{n_k}. \tag{5.10}$$

Vom avea apoi

$$\{N(z, \bar{z})\}_C = N(\zeta) = \lambda \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{P(\zeta)}{\zeta^2}\, \mathrm{d}\zeta - 2\overline{w}_\infty \{f_0[z(\zeta)] + G[z(\zeta)]\}, \tag{5.11}$$

unde $\zeta \in \Gamma$.

Să considerăm acum funcţia $N(\zeta)$, definită de (5.11), însă pentru ζ oarecare. Se constată imediat că ea admite singularităţi polare pentru $\zeta = 0$ şi $\zeta = \infty$ iar singularitatea logaritmică pentru $\zeta = 0$ nu este decît aparentă.

Avem într-adevăr

$$\frac{P(\zeta)}{\zeta^2} = a_0 \zeta^{n+1} + a_1 \zeta^n + \ldots + a_{n+1} + \frac{b_0}{\zeta^2} + \frac{b_1}{\zeta}, \quad (a_0 = 1) \tag{5.12}$$

şi un calcul simplu ne arată că

$$\lambda b_1 = -\frac{i}{\pi} k_0 \overline{w}_\infty, \tag{5.13}$$

deci termenul în $\ln \zeta/\zeta_0$ dispare, după cum era de aşteptat.

Avînd, conform lui (3.4),

$$f_0(z) = \frac{k_0}{2\pi i} \ln \frac{\zeta}{\zeta_0} + w_\infty (\zeta - \zeta_0) + \overline{w}_\infty a^2 \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0} \right)$$

vom alege pe $G(z)$ astfel ca

$$2 \overline{w}_\infty G(z) = (\lambda a_{n+1} - 2V_\infty^2)(\zeta - \zeta_0) - [\lambda (b_0 + b_0') + 2\overline{w}_\infty^2 a^2] \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0} \right),$$

unde constanta b_0' este aleasă aşa ca să avem $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\zeta} = 0$ pentru $\zeta = \zeta_0$ luînd

$$\lambda (b_0 + b_0') = (2V_\infty^2 - \lambda a_{n+1}) \zeta_0^2 - 2 a^2 \overline{w}_\infty^2. \tag{5.14}$$

Prin urmare

$$2 \overline{w}_\infty G(z) = (\lambda a_{n+1} - 2V_\infty^2) \left[\zeta - \zeta_0 + \zeta_0^2 \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0} \right) \right]. \tag{5.15}$$

Cu această alegere a lui $G(z)$, din (5.11) rezultă

$$N(\zeta) = N_1(\zeta) + N_2(\zeta), \tag{5.16}$$

unde

$$N_1(\zeta) = \lambda \left(\frac{a_0}{n+2} \zeta^{n+2} + \ldots + a_n \frac{\zeta^2}{2} \right), \tag{5.17}$$

$$N_2(\zeta) = \lambda b_0' \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0} \right) - N_1(\zeta_0). \tag{5.18}$$

În felul acesta problema la limită (4.3) se reduce la

$$\operatorname{Im} \left\{ H_1(z) + V_\infty^{-2} \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} N_2(\zeta) \right\}_\Gamma = - V_\infty^{-2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} N_1(\zeta) \right\}_\Gamma \tag{5.19}$$

unde în membrul întîi funcţia dintre paranteze este olomorfă în Δ. Funcţia raţională

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} N_1(\zeta)$$

nu are în Δ decît o singularitate polară pentru $\zeta = \infty$, care este un pol de ordinul $n + 2$. Partea principală referitoare la acest pol este

$$S(\zeta) = \lambda w_\infty \left[\frac{\zeta^{n+2}}{n+2} + s_1 \zeta^{n+1} + \ldots + s_{n+1} \zeta\right]. \tag{5.20}$$

Prin urmare, cu aproximaţia unei constante reale, avem

$$H_1(z) = - V_\infty^{-2} \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} N_2(\zeta) - V_\infty^{-2} \left\{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} N_1(\zeta) - S(\zeta) - \overline{S}\left(\frac{a^2}{\overline{\zeta}}\right)\right\} \tag{5.21}$$

şi aceasta rezolvă problema lui Dirichlet.

§ 6. APLICAŢIE

Vom considera cazul particular în care $\zeta_1'' = \mu_1$, $\zeta_2'' = \mu_2$, $\zeta_k'' = 0$ pentru $k > 2$. Numerele complexe μ_1 şi μ_2, de modul mai mic ca a, verifică condiţia

$$\mu_1 + \mu_2 = \zeta_0 \tag{6.1}$$

ca urmare a lui (5.3′).

Transformarea definită de (5.4), în care luăm $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_k = 0$ pentru $k > 2$, se reduce la

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = 1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\zeta - \mu_1)(\zeta - \mu_2)}, \tag{6.2}$$

de unde

$$z = \zeta - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \ln \frac{\zeta - \mu_1}{\zeta - \mu_2} + \text{const.} \tag{6.3}$$

În cazul de faţă avem $n = 2$ şi

$$P(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)^2 (\zeta - \eta_1)(\zeta - \eta_2) \tag{6.4}$$

cu

$$\eta_1 = \frac{a^2}{\overline{\mu}_1}, \quad \eta_2 = \frac{a^2}{\overline{\mu}_2}. \tag{6.5}$$

Prin urmare

$$\frac{P(\zeta)}{\zeta^2} = \zeta^3 + a_1 \zeta^2 + a_2 \zeta + a_3 + \frac{b_0}{\zeta^2} + \frac{b_1}{\zeta}, \tag{6.6}$$

unde, punînd

$$q_1 = \zeta_0 + 2\zeta_1, \quad q_2 = \zeta_1 + 2\,\zeta_0,$$

avem

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\,(q_1 + \eta_1 + \eta_2),\ a_2 = q_1\,(\eta_1 + \eta_2) + q_2\zeta_1 + \eta_1\eta_2$$

$$a_3 = -\,q_1\,\eta_1\,\eta_2 - q_2\,\zeta_1\,(\eta_1 + \eta_2) - \zeta_0\,\zeta_1^2$$

$$b_0 = -\,\zeta_0\,\zeta_1^2\,\eta_1\,\eta_2,\ b_1 = \zeta_0\,\zeta_1^2\,(\eta_1 + \eta_2) + q_2\,\zeta_1\,\eta_1\,\eta_2.$$

Avem apoi

$$\lambda = a^{-8}\,\overline{w}_\infty^2\,\bar{\zeta}_0\,\bar{\zeta}_1^2\,\bar{\mu}_1\,\bar{\mu}_2. \tag{6.7}$$

Prin urmare

$$N_1\,(\zeta) = \lambda\left(\frac{1}{4}\,\zeta^4 + \frac{1}{3}\,a_1\,\zeta^3 + \frac{1}{2}\,a_2\,\zeta^2\right), \tag{6.8}$$

iar partea principală a funcției $\dfrac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\,N_1\,(\zeta)$ pentru $\zeta = \infty$ este

$$S\,(\zeta) = \lambda\,w_\infty\left(\frac{1}{4}\,\zeta^4 + s_1\,\zeta^3 + s_2\,\zeta^2 + s_3\,\zeta\right), \tag{6.9}$$

unde

$$s_1 = \frac{1}{3}\,a_1 - \frac{1}{4}\,(\zeta_0 + \zeta_1)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\,a_2 - \frac{1}{3}\,a_1\,(\zeta_0 + \zeta_1) + \frac{1}{4}\,(\zeta_0\,\zeta_1 + \mu_1\mu_2)$$

$$s_3 = -\,\frac{1}{2}\,a_2\,(\zeta_0 + \zeta_1) + \frac{1}{3}\,a_1\,(\zeta_0\zeta_1 + \mu_1\mu_2) - \frac{1}{4}\,\mu_1\,\mu_2\,\zeta_1.$$

Făcînd calculele se găsește

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\,N_1\,(\zeta) - S\,(\zeta) = \lambda\,w_\infty\left(A - \frac{B}{\zeta}\right),$$

unde

$$A = \frac{1}{2}\,a_2\,(\zeta_0\zeta_1 + \mu_1\mu_2) - \frac{1}{3}\,a_1\,\mu_1\mu_2\,\zeta_1$$

$$B = -\,\frac{1}{2}\,a_2\,\mu_1\mu_2\,\zeta_1.$$

În definitiv

$$H_1\,(z) = -\,V_\infty^{-2}\,w_\infty\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{\mu_1}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{\mu_2}{\zeta}\right)N_2\,(\zeta) -$$

$$-\,V_\infty^{-2}\left[\lambda\,w_\infty\left(A - \frac{B}{\zeta}\right) - \overline{S}\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}\right)\right], \tag{6.10}$$

unde $N_2(\zeta)$ este dat de (5.18) iar b_0' este scos din (5.14), relaţie în care se va face $n = 2$. A doua aproximaţie este astfel complet determinată prin cunoaşterea lui $H_1(z)$.

Primită la redacţie la 15 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bers, *Existence and Uniqueness of a Subsonic Flow past a given Profile.* Communications on Pure and Applied Mathematics, **7**, 441—504 (1954).
2. L. Bers, *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*, J. Wiley, New York, 1958.
3. L. Dragoş, *Theory of Thin Airgfoils in Magnetohydrodynamics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **13**, *4*, 262—278 (1963).
4. L. Dragoş, *Theorie des profils minces en magnétoaérodynamique.* Journal de Mécanique, Paris, **2**, *3*, 223—243 (1963).
5. L. Dragoş, *Mouvement en espace d'un fluide compressible, parfaitement conducteur.* Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, **256**, 2524—2527 (1963).
6. I. Filimon, *Asupra corecţiilor de compresibilitate la mişcări continue subsonice în jurul unui obstacol dat.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe mat. şi fiz., **9**, *2*, 431—449 (1957).
7. I. Filimon, *L'application correcte de la méthode de Tchapliguine aux mouvements gazeux subsoniques autour d'un obstacle elliptique.* Bulletin math., de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **1** **(49)**, *3*, 269—279 (1957).
8. I. Filimon, *Asupra ecuaţiei integro-diferenţiale a lui Prandtl* Bul. ştiinţ. al Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe, mat. şi fiz., **9**, *2*, 381—385 (1957).
9. Ф. Франкль-М. Келдыш, *Внешняя задача Неймана для нелинейных эллиптических уравнений с приложением к теории крыла в сжимаемом потоке.* Изв. Акад. наук СССР, VII серия, Отделение мат. и естеств. наук, *4*, 561—600 (1934).
10. I. Imai, *On the Flow of a compressible Fluid past a circular Cylinder.* Proc. Phys. Math. Soc. of. Japan **20**, 636—645 (1938).
11. I. Imai, *On the Flow of a compressible Fluid past a circular Cylinder II.* Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, **23**, 180—193 (1941).
12. I. Imai-T. Aihara, *On the subsonic Flow of a compressible Fluid past an elliptic Gylinder.* Rep. Aeron. Res. Institute, Tokyo Imperial University, *144*, 15 (1940).
13. I. Imai, *Approximate Methods in Compressible Fluid Dynamics.* Univ. of Maryland, Techn. Note, B. N., **95** (1957).
14. C. S. Ioan, *Jeturi plane compresibile mărginite de pînze de jet subţiri.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **14**, *6*, 1449—1463 (1963).
15. C. Iacob, *Sulla generalizzazione di una formula di Cisotti e sua applicazione allo studio dei movimenti lenti di un fluido comprimibile.* Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche i naturali, serie VI, **27**, 176—181 (1938).
16. C. Iacob, *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles.* Portugaliae Mathematica, Lisboa, **I**, fasc. 3, 209—257 (1939).
17. C. Iacob, *Sur quelques propriétés de la correspondance de M. Tchapliguine en dynamique des fluides compressibles.* Bulletin mathématique de la Soc. Roumaine des Sciences, **42**, 19—31 (1940).
18. C. Iacob, *Sur l'écoulment lent d'un fluide parfait compressible autour d'un obstacle circulaire.* Mathematica, Cluj-Timişoara, **17**, 1—18 (1941).
19. C. Iacob, *Sur une méthode d'approximation en mécanique des fluides compressibles.* Comptes rendus, Académie des Sciences, Paris, **222**, 81—89 (1944).
20. C. Iacob, *Sur l'emploi de la méthode hodographique en mécanique des fluides compressibles.* Mathematica, **22**, 170—181 (1946).
21. C. Iacob, *Sur la méthode approchée de M. Lamla en dynamique des fluides compressibles.* Bulletin scientifique de l'Académie Roumaine, **28**, 637—641 (1946).

22. C. Iacob, *Sur la seconde approximation dans le problème des jets gazeux.* Comptes rendus, Académie des Sciences de Paris, **222**, 1427—1429 (1946).

23. C. Iacob, *Remarques sur la méthode approchée de Tchapliguine.* Comptes rendus, Académie des Sciences de Paris, **223**, 714—716 (1946).

24. C. Iacob, *De l'influence de la compressibilité sur les écoulements fluids.* Disquisitiones Mathematicae et Physicae, **6**, 193—223 (1948).

25. C. Iacob, *Sur un problème mixte pour le plan muni de coupures rectilignes.* Comptes rendus, Académie des Sciences, de Paris, **228**, 355—357 (1949).

26. C. Iacob, *Teoria aripei unghiulare la viteze supersonice.* Analele Academiei R.P.R., seria Mat. Fiz. Chimie **3**, 349—373 (1950).

27. C. Iacob, *Rezolvarea unor probleme la limită pentru planul cu tăieturi rectilinii asociate.* Studii şi cercetări matematice, **1**, 393—417 (1950).

28. C. Iacob, *Studiul comparat al variantelor metodei de aproximaţie a lui S. A. Ciaplighin în problema mişcării subsonice în jurul cilindrului circular.* Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R., **3**, 293—302 (1951).

29. C. Iacob, *Asupra mişcărilor subsonice cu circulaţie ale fluidelor compresibile.* Comunicările Academiei R.P.R., **1**, 741—746 (1951).

30. C. Iacob, *Asupra unei generalizări a regulei lui Jukovski pentru determinarea circulaţiei.* Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R., **6**, 221—227 (1954).

31. C. Iacob. *Cercetări asupra teoriei mişcărilor conice supersonice.* Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R., Secţia de ştiinţe mat. şi fiz., **6**, 603—622 (1954).

32. C. Iacob, *Calculul presiunii exercitate asupra unui solid mobil de un curent lichid variabil cu înălţimea.* Buletinul ştiinţific al Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe mat. şi fiz., **6**, 801—809 (1954).

33. C. Iacob, *Asupra mişcării unei plăci plane paralel cu solul într-un curent fluid variabil cu înălţimea,* Studii şi cercetări matematice, **5**, 333—349 (1954).

34. C. Iacob, *Sur le problème de Dirichlet modifié.* Atti del Sesto Congresso dell'Unione Matematica Italiana Napoli, 1959, (ed. Cremonese, Roma, 1960), 309—311.

35. C. Iacob, *Sur la réversibilité de la transformation de Tchapliguine.* Revue de math. pures et appliquées **6**, 25—30 (1961).

36. C. Iacob, *Sur le problème de Dirichlet à singularités données.* Journal de Math. pures et appliquées, **40**, 9e série, 157—188 (1961).

37. C. Iacob, *Determinarea celei de a doua aproximaţii în mişcarea compresibilă subsonică în prezenţa unui profil Jukovski simetric.* Comunicările Academiei R.P.R., **11**, 901—907 (1961).

38. C. Iacob, *Détermination de la seconde approximation de l'écoulement compressible subsonique autour d'un profil donné.* Archiwum Mechaniki Stosowanej, *2* (1964) (sub tipar).

39. C. Iacob, *Sur quelques applications de la théorie des fonctions à l'Aérodynamique subsonique* (Actele Colocviului internaţional IUTAM, Tbilissi, Sept. 1963, sub tipar).

40. C. Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor,* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.

41. C. Iacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des Fluides,* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti-Gauthier-Villars, Paris, 1959.

42. C. Kaplan, *Compressible Flow about Symmetrical Joukowsky Profiles,* NACA, Techn. Report, 621 (1938).

43. C. Kaplan, *Two-dimensional subsonic compressible flow past elliptic Cylinders,* NACA, Techn. Report, 624 (1938).

44. Th. von Kármán, *Compressibility Effects in Aerodynamics.* Journal of the Aeronautical Sciences, **8**, 337—356 (1941).

45. E. Krahn, *Die Janzen-Rayleigsche zweite Näherung der kompressiblen Strömung um ein beliebiges Profil.* ZAMM, **23**, 33—35 (1943).

46. H. Lamb, *On the flow of a compressible fluid past on Obstacle.* Reports and Memoranda, 1156 (1928).

47. E. Lamla, *Die symmetrische Potentialströmmung eines kompresiblen Gases um einen Kreszylinder in Kanal im unterkritischen Gebiet.* Luftfahrtforschung, **17**, 329—334 (1940).

48. E. Lamla, *Die symmetrische Potentialströmmung eines kompressiblen Gases um einen Kreiszylinder im unterkritischen Gebiet,* Luftfahrtforschung **19**, 358—362 (1942).

49. E. Lamla, *Uber die ebene Potentialströmung um ein Profil, dass sich konform auf einen Kreis abbilden lässt im unterkritischen Gebiet.* Jahrbuch 1940 der Deutschen Luftfahrtforschung.

50. ELENA MURGULESCU, *Asupra unor probleme la limită din teoria mişcărilor conice.* Comunicările Acad. R.P.R., **1**, *6* 447–453 (1951).
51. ELENA MURGULESCU, *Problema la limită din teoria mişcărilor conice în cazul aripii subţiri de secţiune dată.* Comunicările Acad. R.P.R., **2**, *9–10* 489–494 (1952).
52. ELENA MURGULESCU, *Mişcarea supersonică în jurul unei aripi în Δ cu fuselaj conic.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe mat. şi fiz., **6**, *4*, 741–753 (1954).
53. ELENA MURGULESCU, *Asupra mişcării conice în cazul aripii subţiri, exterioară conului caracteristic al vîrfului.* Comunicările Academiei R.P.R., **6**, *10*, 1179–1185 (1956).
54. ELENA MURGULESCU, *Asupra teoriei mişcărilor conice în cazul aripilor subţiri de secţiune dată.* Studii şi cercetări matematice, **11**, *1*, 61–94 (1960).
55. E. PISTOLESI, *La portanza alle alte velocità inferiori a quella del suono.* Atti del Convengo Volta, Roma, 283–328 (1935).
56. L. POGGI, *Campo di velocità in una corrente difluido compressibile.* L'Aerotecnica, **12**, 1579–1593 (1932).
57. L. POGGI, *Caso dei profili ottenuti con rappresentazione conforme dal cerchio ed in particolare dei profili di Joukowski.* L'Aerotecnica, **14**, 532–549 (1934).
58. D. POMPEIU, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **33**, 108–113 (1912).
59. D. POMPEIU, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **35**, 277–281 (1913).
60. I. L. POPESCU, *Asupra mişcării nepermanente a unui fluid într-o reţea de profile.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe mat. şi fiz., **9**, *1*, 121–137 (1957).
61. SIMONA POPP, *Mişcarea subsonică a unui fluid compresibil, într-un canal în jurul unui cilindru cvasicircular.* Comunicările Acad. R.P.R., **9**, *3*, 223–228 (1959).
62. SIMONA POPP, *Cercetări asupra determinării corecţiilor de compresibilitate la mişcări plane în regim subsonic.* Studii şi cercetări matematice, **12**, *1*, 37–90 (1961).
63. SIMONA POPP, *Cercetări asupra mişcării subsonice în jurul unui obstacol situat într-un canal.* Studii şi cercetări matematice, **14**, *2*, 213–221 (1963).
64. H. S. TSIEN, *Two-dimensional subsonic Flow of compressible Fluids.* Journal of the Aeronautical Sciences, **6**, 399–407 (1939).

SPAŢII DE INCIDENŢĂ. II

DE

H. BODNĂRESCU
Institutul de Petrol şi Gaze, Bucureşti

În partea a doua a lucrării „Spaţii de incidenţă" în cadrul Cap. III se consideră o mulţime S, ale cărei părţi A^i, B^i,... sînt grupate în clase H^i conform axiomelor L^i 1—4.

Se definesc noţiunile de „elemente independente" şi de „dimensiune".

Se definesc clasele H°, H^1,... ale spaţiilor de incidenţă S^3 şi S^4 şi se demonstrează că acestea sînt tridimensionale, respectiv patrudimensionale.

În Cap. IV se studiază spaţiile de incidenţă n-dimensionale S^n. Sistemul de axiome L^i este completat de axioma de închidere L_0^n.

Se definesc: simplexul Σ^n şi spaţiile de incidenţă n-dimensionale omogene de putere p.

CAPITOLUL III

Mulţimi S şi clase H^i

1°. GENERALITĂŢI

Fie S o mulţime ale cărei elemente le notăm cu A°, B°, ... şi le denumim puncte ale mulţimii S. Mulţimea unor părţi (submulţimi) ale lui S este organizată în clase H^i ($i = 1, 2, 3, \ldots$), fiecare clasă H^i conţinînd părţile A^i, B^i, ... conform axiomelor L^i (cu i finit). Părţile A^i, B^i, ... din S, sînt considerate ca elemente ale clasei H^i. Pentru mulţimea S folosim şi exprimarea: spaţiu S. Prin definiţie mulţimea S nu este vidă: $S \neq \Phi$.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 189 – 207, BUCUREŞTI, 1965

2°. AXIOME L^i

Fiecare parte A^i satisface relațiile (axiomele):

(H^i)

L^i *1. Pentru oricare parte* A^{i-1} *există o parte* A^i *cu relația* $A^{i-1} \subset A^i$ *— oricare parte* A^i *conține o parte* A^{i-1}.

L^i *2. Pentru oricare părți* A^{i-1} *și* A^i *există relația* $A^i \not\subset A^{i-1}$.

L^i *3. Pentru oricare* A° *și* A^{i-1} *cu relația* $A^\circ \notin A^{i-1}$ *există o parte unică* A^i *cu relația*: $(A^\circ \in A^i$ *și* $A^{i-1} \subset A^i)$.

Axioma L^i 3 *este echivalentă cu*

$$(A^\circ \notin A^{i-1};\ A^\circ \in A^i;\ A^{i-1} \subset A^i;\ A^\circ \in B^i;\ A^{i-1} \subset B^i) \Rightarrow (A^i = B^i).$$

L^i *4. Pentru oricare elemente independente* $A_1^0, A_2^0, A_3^0, \ldots, A_i^0$ *și părți* A^{i-1}, A^i *exită relația*:

$$(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0 \in A^{i-1} \text{ și } A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0 \in A^i) \Rightarrow (A^{i-1} \subset A^i).$$

În enunțarea axiomei L^i 4 se folosește definiția:

Oricare i elemente $(i > 2)$ ce nu aparțin nici unei părți A^{i-2} se numesc independente.

Se convine a se nota cu H° clasa părților $[A^\circ]$, $[B^\circ]$, ...; pentru $i = 1$ relațiile L^i sînt:

(H^1)

L^1 *1. Pentru oricare element* A° *există o parte* A^1 *cu relația* $A^\circ \in A^1$.

L^1 *2. Pentru oricare element* A° *și parte* A^1 *există relația* $A^1 \not\subset [A^\circ]$.

L^1 *3 Pentru oricare elemente* A° *și* B° $(A^\circ \neq B^\circ)$, *există o parte unică* A^1 *cu relația*: $(A^\circ,\ B^\circ \in A^1)$.

Pentru $i = 2$ relația L^2 4 se scrie:

$$(A^\circ \neq B^\circ;\ A^\circ,\ B^\circ \in A^1 \text{ și } A^\circ,\ B^\circ \in A^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2).$$

Axiomele L^i 1—4 generalizează axiomele de legătură L și L′; într-adevăr:

Axiomele L1 și L′1 sînt echivalente cu L^{1}1, axiomele L2 și L′2 cu L^{1}2, axiomele L3 și L′3 cu L^{1}3, axiomele L4, și L′4 cu L^{2}1, axiomele L5 și L′5 cu $L^2$2, axiomele L6 și L′6 cu L^{2}3, axiomele L7 și L′7 cu L^{2}4, axiomele L8 și L′9 cu L^{3}2, axioma L′8 cu L^{3}1, axioma L′10 cu L^{3}3, axioma L′11 cu L^{3}4, axioma L′12 cu L^{4}2.

3°. TEOREME REZULTÎND DIN AXIOMELE L^i

Din cele arătate mai sus rezultă că teoremele ce au fost demonstrate în cadrul sistemelor L și L′, și în care s-au folosit axiomele enumerate, sînt valabile în cadrul sistemului L^i.

Teorema 1. *Pentru oricare parte A^k există o parte A^i, $i > k$, astfel ca $A^k \subset A^i$ și $A^i \neq A^k$.*

Demonstrație. Axiomele $L^i 1$ garantează existența părților:

$$[A^\circ] \subset A^1 \subset A^2 \subset A^3 \ldots A^k \subset A^{k+1} \ldots \subset A^i$$

incluziunea fiind strictă în sensul că $A^{k+1} \neq A^k$, inegalitate garantată de $L^i 2$ ($i = k + 1$).

O consecință a relațiilor $L^k 1$ și $L^k 2$ este și aceea că pentru oricare parte A^{k-1} există un punct A° cu relația $A^\circ \notin A^{k-1}$. Axiomele L^i conduc de asemenea la:

Teorema 2. *Pentru oricare părți A^k și A^i ($k < i$) există relația $A^i \not\subset A^k$ (și deci și: $A^i \neq A^k$).*

Teorema 3. *Pentru oricare parte A^i exită o parte A^k ($k < i$) cu relația $A^k \subset A^i$ (și evident $A^i \neq A^k$).*

Teorema 4. *Dacă i puncte $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0$ sînt independente, atunci oricare k puncte ($k < i$) dintre acestea sînt independente.*

Demonstrație. Să presupunem că punctele $A_1^0, A_2^0, A_3^0, \ldots, A_k^0$ nu sînt independente; există deci o parte A^{k-2} astfel ca $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_k^0 \in A^{k-2}$, și fie $A_{k+1}^0, A_{k+2}^0, \ldots, A_i^0 \notin A^{k-2}$; $(A_{k+1}^0 \notin A^{k-2}) \Rightarrow$ (există A^{k-1} cu relația $A_{k+1}^0 \in A^{k-1}$ și $A^{k-2} \subset A^{k-1}$) conform $L^{k-1} 3$. Presupunem $A_{k+2}^0 \notin A^{k-1}$; există o parte A^k cu relația $A_{k+2}^0 \in A^k$ și $A^{k-1} \subset A^k$. Fie $A_{k+3}^0 \notin A^k$; există o parte A^{k+1} cu relația $A_{k+3}^0 \in A^{k+1}$ și $A^k \subset A^{k+1}$. Și prin extindere se ajunge la: $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0 \in A^{i-2}$, ceea ce contrazice ipoteza și deci oricare k puncte $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_k^0$ sînt independente, c.c.t.d.

În demonstrație s-a presupus că există totdeauna un punct $A_{k+j}^0 \notin A^{k+j-2}$ $(1 < j < i - k)$. Dacă nu ar exista un asemenea punct, ar rezulta $A_1^0, A_2^0, , \ldots, A_i^0 \in A^{k+j-2}$ și cum există o parte A^{i-2} cu relația $A^{k+j-2} \subset A^{i-2}$, se deduce: $(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0 \in A^{k+j-2}$ și $A^{k+j-2} \subset A^{i-2}) \Rightarrow$ $(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0 \in A^{i-2})$ ceea ce contrazice ipoteza.

Se precizează că două puncte diferite sînt considerate independente.

Teorema 5. *Oricare parte A^i conține cel puțin $i + 1$ puncte.*

Demonstrație. Teorema este demonstrată pentru $i=1$ (conf. teoremei 1, cap. I) și $i = 2$ (conf. teoremei 2, cap. I); să arătăm că dacă este adevărată pentru oricare parte A^i, atunci este adevărată și pentru A^{i+1}. Într-adevăr, există parte $A^i \subset A^{i+1}$ (conf. $L^{i+1} 1$), și există punctele A_1^0, $A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0 \in A^i$ conform ipotezei. Există un punct $A_{i+2}^0 \in A^{i+1}$ și $A_{i+2}^0 \notin A^i$ (căci dacă pentru oricare $A_{i+2}^0 \notin A^{i+1}$ am avea $A_{i+2}^0 \in A^i$ ar rezulta $A^{i+1} = A^i$ și deci s-ar contrazice $L^{i+1} 2$). Avem

$$(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0 \in A^i \text{ şi } A^i \subset A^{i+1}) \Rightarrow (A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0 \in A^{i+1})$$

și deci $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0, A_{i+2}^0 \in A^{i+1}$, ceea ce trebuie demonstrat.

Din teorema 5 rezultă:

Teorema 5′. *Oricare parte A^i conține j puncte, unde $j \leqslant i + 1$.*

Teorema 6. *Pentru oricare puncte diferite $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0$ există o parte A^{i-1} care le conține.*

Demonstrație. Teorema este adevărată pentru $i = 2$ și $i = 3$ (conf. L^1 3 și teorema 3, cap. I). Să arătăm că, dacă este adevărată pentru i, este adevărată și pentru $i + 1$.

Fiind date deci punctele $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0, A_i^0$, să arătăm că dacă există o parte A^{i-1} cu relația $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0, A_i^0 \in A^{i-1}$, atunci există o parte A^i care conține punctele $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}^0$. Există o parte A^i cu relația $A^{i-1} \subset A^i$ conform L^i 1.

Dacă $A_{i+1}^0 \in A^{i-1}$, atunci:

$$(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0, A_{i+1} \in A^{i-1} \text{ și } A^{i-1} \subset A^i) \Rightarrow (A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0 \in A^i).$$

Dacă $A_{i+1}^0 \notin A^{i-1}$, atunci există o parte A^i cu relația

$$(A_{i+1}^0 \in A^i \text{ și } A^{i-1} \subset A^i) \text{ conf. } L^i\,3.$$

$$(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0 \in A^{i-1} \text{ și } A^{i-1} \subset A^i) \Rightarrow (A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0 \in A^i)$$

și deci există A^i cu relația: $(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0, A_{i+1}^0 \in A^i)$, c.c.t.d.

Din teorema 6 rezultă:

TEOREMA 6′. *Pentru oricare puncte diferite* $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_k^0$ *există o parte* A^i $(i \geqslant k - 1)$ *care le conține.*

TEOREMA 7. *Pentru oricare puncte independente* $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0$ *există o parte unică* A^{i-1} *care le conține.*

Demonstrație. Teorema este adevărată pentru $i = 2$ și $i = 3$ (conf. L^1 3 și teorema 4, cap. I). Să arătăm că, dacă este adevărată pentru $(i-1)$, este adevărată și pentru i.

Fie deci punctele independente $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0, A_i^0$ și partea unică A^{i-2} definită de punctele $A_{1\,1}^0 A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0$ adică:

$$(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0 \text{ sînt independente și } A_1, A_2, \ldots, A_{i-1} \in A^{i-2}) \Rightarrow (A^{i-2} \text{ unică}).$$

Există o parte A^{i-1} cu relația $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0, A_i^0 \in A^{i-1}$ (conf. teoremei 6). Deoarece $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0$ sînt independente, avem:

$$(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0 \in A^{i-2} \text{ și } A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i-1}^0 \in A^{i-1}) \Rightarrow (A^{i-2} \subset A^{i-1}$$

conf. L^{i-1} 4. Deoarece $A_i^0 \notin A^{i-2}$ (în caz contrar punctele nu ar fi independente), avem:

$$(A_i^0 \notin A^{i-2};\ A_i^0 \in A^{i-1} \text{ și } A^{i-2} \subset A^{i-1}) \Rightarrow (A^{i-1} \text{ unică}) \text{ conf. } L^{i-1}\,3.$$

Există deci o parte unică A^{i-1} ce conține cele i puncte independente, c.c.t.d.

Teorema 7 justifică expresia „partea definită de punctele $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0$" sau partea $A_1^0 A_2^0 \ldots A_i^0$.

TEOREMA 8. *Oricare parte* A^i *conține* $(i + 1)$ *puncte independente.*

Demonstrație. Teorema este adevărată pentru $i = 1$ și $i = 2$ (conf. teoremelor 1 și 2, cap. I). Să arătăm că, dacă este adevărată pentru $i - 1$, atunci este adevărată pentru i.

Fie o parte oarecare A^i; există o parte $A^{i-1} \subset A^i$ (conf. L^i 1) şi conform ipotezei există punctele independente $A_1^0, A_2^0, \dots, A_i^0 \in A^{i-1}$. Să arătăm că partea A^i conţine $(i+1)$ elemente independente. Avem

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_i^0 \in A^{i-1} \text{ şi } A^{i-1} \subset A^i) \Rightarrow (A_1^0, A_2^0, \dots, A_i^0 \in A^i).$$

Există punctul $A_{i+1}^0 \in A^i$ şi $A_{i+1}^0 \notin A^{i-1}$ (căci dacă pentru oricare punct $A_{i+1}^0 \in A^i$ am avea $A_{i+1}^0 \in A^{i-1}$, ar rezulta $A^i = A^{i-1}$ ceea ce contrazice L^i 1). Punctele $A_1^0, A_2^0, \dots, A_i^0, A_{i+1}^0$ sînt independente căci dacă ar exista o parte B^{i-1} cu relaţia $A_1^0, A_2^0, \dots, A_i^0, A_{i+1}^0 \in B^{i-1}$ am avea:

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_i^0 \text{ independente şi } A_1^0, A_2^0, \dots, A_i^0 \in A^{i-1}$$
$$\text{şi } A_1^0, A_2^0, \dots, A_i^0 \in B^{i-1}) \Rightarrow (A^{i-1} = B^{i-1}) \text{ conf. teoremei 7;}$$

$$(A^{i-1} = B^{i-1} \text{ şi } A_{i+1}^0 \in B^{i-1}) \Rightarrow (A_{i+1}^0 \in A^{i-1})$$

şi deci s-ar contrazice relaţia $A_{i+1}^0 \notin A^{i-1}$, şi deci există, în A^i, $(i+1)$ puncte independente, c.c.t.d. Este evident că nu pot exista în oricare parte A^i mai mult de $i+1$ puncte independente.

TEOREMA 9. *Există relaţia* $(A^i \subset B^i) \Rightarrow (A^i = B^i)$.

Demonstraţie. Există punctele independente $A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0$ cu relaţia $A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^i$:

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^i \text{ şi } A^i \subset B^i) \Rightarrow (A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in B^i);$$

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \text{ independente şi } A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^i \text{ şi}$$
$$A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in B^i) \Rightarrow (A^i = B^i)$$

conform teoremei 7, c.c.t.d.

TEOREMA 10. *Pentru elementele independente* $A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0$ *şi părţile* A^i, A^j *cu* $i < j$, *avem*:

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^i \text{ şi } A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^j) \Rightarrow (A^i \subset A^j).$$

Demonstraţie. Relaţia este adevărată pentru $j = i+1$ (conf. L^{i+1} 4); să arătăm că dacă este adevărată pentru j, este adevărată şi pentru $j+1$ (evident $j > 1$).

Conform ipotezei avem deci:

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^i \text{ şi } A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^j) \Rightarrow (A^i \subset A^j) - j > i$$

Să arătăm că atunci:

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^i \text{ şi } A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0 \in A^{j+1}) \Rightarrow (A^i \subset A^{j+1}).$$

Într-adevăr:

Există în A^{j+1} în afara punctelor independente $A_1^0, A_2^0, \dots, A_{i+1}^0$, încă şi punctele $A_{i+2}^0, A_{i+3}^0, \dots, A_{j+1}^0, A_{j+2}^0$ astfel încît punctele $A_1^0, A_2^0, \dots, A_{j+1}^0, A_{j+2}^0$ sînt independente (vezi teorema 8).

Există o parte unică A^j astfel ca $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{j+1}^0 \in A^j$ (conf. teoremei 7) şi conform ipotezei:

$$(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0 \in A^i \text{ şi } A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0 \in A^j) \Rightarrow (A^i \subset A^j).$$

Însă:

$$(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{j+1}^0 \in A^j \text{ şi } A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{j+1}^0 \in A^{j+1}) \Rightarrow (A^j \subset A^{j+1}) \text{ conf. } \mathrm{L}^{j+1}4,$$

$$(A^i \subset A^j \text{ şi } A^j \subset A^{j+1}) \Rightarrow (A^i \subset A^{j+1}), \text{ c.c.t.d.}$$

★

Necontradicția sistemului L^i poate fi demonstrată pe baza unor modele analoage celor din Cap. I—4 sau Cap. II—4.

4°. NOȚIUNILE DE „DIMENSIUNE" ȘI „ELEMENTE INDEPENDENTE"

S-a definit în Cap. I—3 noțiunea de elemente independente; teorema 5 garantează existența unor relații ca cele din membrul întîi al implicației de la axioma L^i 4, şi aduce justificarea definiției date pentru „elemente independente".

TEOREMA 11. *Dacă o mulțime S este astfel încît există o parte $A^j = S$, atunci clasa H^{j+1} este vidă de elemente.*

Demonstrație. Dacă clasa H^{j+1} nu este vidă, ea conține cel puțin un element A^{j+1} cu relația $A^j \subset A^{j+1}$ şi $A^{j+1} \neq A^j$ (vezi axioma $\mathrm{L}^{j+1}1$ şi teorema 3) şi deci ($S \subset A^{j+1}$ şi $S \neq A^{j+1}$); se contrazice astfel relația $A^{j+1} \subset S$ şi deci nu poate exista partea A^{j+1}. Aşadar clasa H^{j+1} este vidă de elemente (părți ale lui S), c.c.t.d.

Se demonstrează fără dificultate că toate părțile H^{j+2}, $H^{j+3}, \ldots$, sînt, în această ipoteză, vide de elemente. De asemenea dacă o clasă H^j nu este vidă, atunci nici una din clasele H^{j-1}, $H^{j-2}, \ldots$ nu este vidă.

TEOREMA 12. *Dacă clasa H^{j+1} este vidă de elemente şi clasa H^j nu este vidă, atunci clasa* H^j *conține un singur element A^jşi $A^j = S$.*

Demonstrație. Clasa H^j nefiind vidă, rezultă că există un element A^j din H^j; $A^j \subset S$. Să arătăm că nu există nici un element $A^0 \in S$ şi $A^0 \notin A^j$; într-adevăr, dacă ar exista un asemenea element, ar exista o parte A^{j+1} cu relația: $A^0 \in A^{j+1}$ şi $A^j \subset A^{j+1}$ conf. $\mathrm{L}^{j+1}3$, ceea ce contrazice ipoteza. Deoarece pentru oricare $A^0 \in S$ avem: $A^0 \in A^j$, rezultă $S \subset A^j$. Avem

$$(S \subset A^j \text{ şi } A^j \subset S) \Rightarrow (A^j = S), \text{ c.c.t.d.}$$

În cazul $A^j = S$ sistemul L^i este valabil, deci pentru $i = 1, 2, \ldots, j$.

DEFINIȚIA 1. *Dacă $A^j = S$, atunci mulțimea (spațiul) S se numeşte j-dimensională (j-dimensional); sau: mulțimea (spațiul) S are dimensiunea j ($j \geqslant 2$)*

DEFINIŢIA 2. *Oricare parte $A^i \subset S$ se numeşte parte sau submulţime i-dimensională, sau subspaţiu i-dimensional; partea $[A^0]$ se numeşte zero-dimensională.*

Din teorema 8 rezultă :

TEOREMA 13. *Dacă $A^j = S$, atunci spaţiul S conţine $(j+1)$ puncte independente (şi nu mai multe).*

Se poate demonstra fără dificultate teorema :

TEOREMA 14. *Dacă $S \not\subset A^j$, atunci clasa H^{j+1} nu este vidă.*

5°. CLASELE H^i ALE SPAŢIULUI S^3

Există în S^3 elementele (punctele) $A^0, B^0, C^0, \ldots$ şi clasa H^0 a părţilor $[A^0], [B^0], [C^0], \ldots$

Dreptele $A^1, B^1, C^1, \ldots$ din S^3 sînt elemente ale clasei H^1, deoarece sînt satisfăcute relaţiile : L¹ 1 conf. L 1 ; L¹ 2 conf. L 2 ; L¹ 3 conf. L 3.

Planele $A^2, B^2, C^2, \ldots$ din S^3 sînt elemente ale clasei H^2, deoarece sînt satisfăcute relaţiile : L²1 conf. L4 ; L²2 conf. L5 ; L²3 conf. L6 ; L²4 conf. L7.

Deoarece nu există în S^3 o parte A^2 cu relaţia $S^3 = A^2$, conf. L 8, rezultă că clasa H^3 nu este vidă şi deci conţine cel puţin o parte A^3 cu relaţiile :

L³ 1. *Pentru oricare plan A^2 există o parte A^3 cu relaţia $A^2 \subset A^3$ — oricare parte A^3 conţine un plan A^2.*

L³ 2. *Pentru oricare părţi A^2 şi A^3 există relaţia $A^3 \not\subset A^2$.*

L³ 3. *Pentru oricare punct A^0 şi plan A^2 cu relaţia $A^0 \notin A^2$ există o parte unică A^3 cu relaţia : $(A^0 \in A^3$ şi $A^2 \subset A^3)$.*

L³ 4. *Pentru oricare elemente (puncte) independente*[1] A_1^0, A_2^0, A_3^0 *şi părţi A^2, A^3 există relaţia :*

$$(A_1^0, A_2^0, A_3^0 \in A^2 \text{ şi } A_1^0, A_2^0, A_3^0 \in A^3) \Rightarrow (A^2 \subset A^3).$$

Axiomele L³ de mai sus nu au fost introduse în cadrul sistemului L, deoarce s-a considerat că ele sînt justificate de generalizarea axiomelor L în cadrul sistemului Lⁱ şi a claselor Hⁱ ; dintre aceste axiome a fost necesar să se menţioneze în cadrul sistemului L axioma de ,,prelungire'' L8.

TEOREMA 15. *Există relaţia : $A^3 = S^3$.*

Demonstraţie. Prin definiţie, $A^3 \subset S^3$; este deci suficient să demonstrăm relaţia $S^3 \subset A^3$.

Într-adevăr, există patru puncte independente (necoplanare) $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 \in A^3$ (vezi teorema 8). Să arătăm că pentru oricare punct $M^0 \in S$ avem $M^0 \in A^3$.

---

[1] Independenţa punctelor A_1^0, A_2^0, A_3^0 este echivalentă cu necoliniaritatea.

Dacă M^0 aparţine uneia din drepte $A_1^0 A_2^0$, $A_1^0 A_3^0, \ldots$, atunci $M^0 \in A^3$ căci dacă, de exemplu, $M^0 \in A_1^0 A_2^0$, atunci: $(A_1^0 \neq A_2^0$ şi $A_1^0, A_2^0 \in A_1^0 A_2^0$ şi $A_1^0, A_2^0 \in A^3) \Rightarrow (A_1^0 A_2^0 \in A^3)$ — vezi teorema 10; $(M^0 \in A_1^0 A_2^0$ şi $A_1^0 A_2^0 \subset A^3) \Rightarrow (M^0 \in A^3)$.

Dacă M^0 aparţine unuia din planele $A_1^0 A_2^0 A_3^0$, $A_1^0 A_2^0 A_4^0, \ldots$, atunci $M^0 \in A^3$ căci dacă, de exemplu, $M^0 \in A_1^0 A_2^0 A_3^0$, atunci: $(A_1^0, A_2^0, A_3^0$ independente şi $A_1^0, A_2^0, A_3^0 \in A_1^0 A_2^0 A_3^0$ şi $A_1^0, A_2^0, A_3^0 \in A^3) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A_1^0 A_2^0 A_3^0 \subset A_3)$ conf. $L^3 4$; $(M^0 \in A_1^0 A_2^0 A_3^0$ şi $A_1^0 A_2^0 A_3^0 \subset A^3) \Rightarrow (M^0 \in A^3)$.

Dacă M^0 nu este în nici unul din cazurile precedente, atunci:

Există planul $A^2 = A_1^0 A_2^0 A_3^0$ şi $A_4^0 \notin A^2$ (cele patru puncte fiind independente). Prin ipoteză $M^0 \notin A_1^0 A_4^0$ şi deci există un plan unic B^2 cu relaţia: $(M^0 \in B^2$ şi $A_1^0 A_4^0 \subset B^2)$ — conf. $L^2 3$; dar: $(A_1^0 \in A^2$ şi $A_1^0 \in B^2) \Rightarrow ($există $N^0 \neq A_1^0$ şi $N^0 \in A^2$ şi $N^0 \in B^2)$ conf. L9. Punctul $N^0 \notin A_1^0 A_4^0$; într-adevăr, dacă $N^0 \in A_1^0 A_4^0$, atunci: $(N^0 \neq A_1^0$; $N^0 \in A_1^0 A_4^0$; $A_1^0 \in A_1^0 A_4^0$; $N^0 \in A^2$ şi $A_1^0 \in A^2) \Rightarrow (A_1^0 A_4^0 \subset A^2)$ conf. $L^2 4$; rezultă $(A_1^0 A_4^0 \subset A^2$ şi $A_4^0 \in A_1^0 A_4^0) \Rightarrow (A_4^0 \in A^2)$ ceea ce contrazice $A_4^0 \notin A^2$ şi deci $N^0 \notin A_1^0 A_4^0$.

S-a arătat mai sus că $A^2 \subset A^3$; dar: $(N^0 \in A^2$ şi $A^2 \subset A^3) \Rightarrow (N^0 \in A^3)$; însă $(N^0 \notin A_1^0 A_4^0$ şi $N^0, A_1^0, A_4^0 \in B^2$ şi $N^0, A_1^0, A_4^0 \in A^3) \Rightarrow (B^2 \subset A^3)$ conf. $L^3 4$; $(M^0 \in B^2$ şi $B^2 \subset A^3) \Rightarrow (M^0 \in A^3)$.

Deoarece pentru oricare $M^0 \in S^3$ avem $M^0 \in A^3$, rezultă $S^3 \subset A^3$ $(S^3 \subset A^3$ şi $A^3 \subset S^3) \Rightarrow (A^3 = S^3)$, c.c.t.d.

Consecinţe. Deoarece $A^3 = S^3$, rezultă că spaţiul S^3 este tridimensional conform definiţiei 1; se justifică astfel denumirea dată lui S^3 în cadrul Cap. I.

Conform definiţiei 2 rezultă că:

— punctele sînt zerodimensionale ale lui S^3;

— dreptele sînt unidimensionale ale lui S^3;

— planele sînt bidimensionale ale lui S^3.

Se face observaţia că în S^3 nu există părţi A^4 datorită axiomei L9 căreia îi vom spune „axiomă de închidere".

6°. CLASELE H^i ALE SPAŢIULUI S^4

Există în S^4 elementele (punctele) A^0, B^0, $C^0, \ldots$ şi clasa H^0 a părţilor $[A^0]$, $[B^0]$, $[C^0] \ldots$

Dreptele A^1, B^1, $C^1, \ldots$ din S^4 sînt elemente ale clasei H^1, deoarece sînt satisfăcute relaţiile: $L^1 1$ conf. L'1; $L^1 2$ conf. L'2; L'3 conf. L'3.

Planele A^2, B^2, $C^2, \ldots$ din S^4 sînt elemente ale clasei H^2, deoarece sînt satisfăcute relaţiile: $L^2 4$ conf. L'4; L'2 conf. L'5; $L^2 3$ conf. L'6; $L^2 4$ conf. L'7.

Părţile A^3, B^3, $C^3, \ldots$ din S^4 sînt elemente ale clasei H^3, deoarece sînt satisfăcute relaţiile: $L^3 1$ conf. L'8; $L^3 2$ conf. L'9; $L^3 3$ conf. L'10; $L^3 4$ conf. L'11.

Deoarece nu există în S^4 o parte A^3 cu relaţia $S^4 = A^3$, conf. L′12, rezultă că clasa H^4 nu este vidă şi deci conţine cel puţin o parte A^4, cu axiomele :

L⁴ *1. Pentru oricare parte A^3 există o parte A^4 cu relaţia $A^3 \subset A^4$ — oricare parte A^4 conţine o parte A^3.*

L⁴ *2. Pentru oricare părţi A^3 şi A^4 există relaţia $A^4 \not\subset A^3$.*

L⁴ *3. Pentru oricare A^0 şi A^3 cu relaţia $A^0 \notin A^3$, există o parte unică A^4 cu relaţia ($A^0 \in A^4$ şi $A^3 \subset A^4$).*

Axioma L⁴ 3 este echivalentă cu :

$$(A^0 \notin A^3 ;\ A^0 \in A^4 ;\ A^3 \subset A^4 ;\ A^0 \in B^4 ;\ A^3 \subset B^4) \Rightarrow (A^4 = B^4).$$

L⁴ 4. Pentru oricare elementele independente A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 şi părţi A^3, A^4 există relaţia :

$$(A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 \in A^3 \text{ şi } A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 \in A^4) \Rightarrow (A^3 \subset A^4).$$

Pentru axiomele L⁴ 1—L⁴ 4 se pot face consideraţii analoage celor din subcapitolul precedent ; axioma L′12 va fi denumită „axiomă de prelungire”.

TEOREMA 16. *Există relaţia $A^4 = S^4$.*

Demonstraţie. Prin definiţie $A^4 \subset S^4$; să demonstrăm că $S^4 \subset A^4$.

Există cinci puncte independente $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_5^0 \in A^4$ (vezi teorema 8), şi există partea unică A^3 cu relaţia $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 \in A^3$ (vezi teorema 7). (A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 independente ; A_1^0, A_2^0, A_3^0, $A_4^0 \in A^3$ şi $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 \in A^4) \Rightarrow (A^3 \subset A^4)$ conf. L⁴ 4.

Să arătăm că pentru oricare punct $M^0 \in S^4$ avem $M^0 \in A^4$.

Dacă M^0 aparţine unuia din dreptele $A_1^0 A_2^0$, $A_1^0 A_3^0, \ldots$, atunci $M^0 \in A^4$, căci dacă, de exemplu, $M^0 \in A_1^0 A_2^0$, atunci :

$$(A_1^0 \neq A_2^0 \text{ şi } A_1^0, A_2^0 \in A_1^0 A_2^0 \text{ şi } A_1^0, A_2^0 \in A^4) \Rightarrow (A_1^0 A_2^0 \subset A^4) \text{ — vezi}$$
$$\text{teorema 10, } (M^0 \in A_1^0 A_2^0 \text{ şi } A_1^0 A_2^0 \subset A^4) \Rightarrow (M^0 \in A^4).$$

Dacă M^0 aparţine unuia din planele $A_1^0 A_2^0 A_3^0$, $A_1^0 A_2^0 A_4^0, \ldots$, atunci $M^0 \in A^4$, căci dacă, de exemplu, $M^0 \in A_1^0 A_2^0 A_3^0$, atunci :

$$(A_1^0, A_2^0, A_3^0 \text{ independente şi } A_1^0, A_2^0, A_3^0 \in A_1^0 A_2^0 A_3^0 \text{ şi } A_1^0, A_2^0, A_3^0 \in A^4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A_1^0 A_2^0 A_3^0 \subset A^4) \text{ — vezi teorema 10;}$$
$$(M^0 \in A_1^0 A_2^0 A_3^0 \text{ şi } A_1^0 A_2^0 A_3^0 \subset A^4) \Rightarrow (M^0 \in A^4).$$

Dacă M^0 aparţine uneia din părţile $A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0$, $A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_5^0, \ldots$, atunci $M^0 \in A^4$, căci dacă, de exemplu, $M^0 \in A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0$, atunci :

$$(A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 \text{ independente şi } A_1^0, A_2^0 A_3^0, A_4^0 \in A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0 \text{ şi}$$
$$(A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0 \in A^4) \Rightarrow (A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0 \subset A^4) \text{ conf. L}^4\text{ 4;}$$
$$(M^0 \notin A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0 \text{ şi } A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0 \subset A^4) \Rightarrow (M^0 \in A^4).$$

Dacă M^0 nu este în nici unul din cazurile precedente, atunci :

Există partea $A^3 = A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0$ şi $A_5^0 \notin A_3$ (cele cinci puncte fiind independente). Prin ipoteză $M^0 \notin A_1^0 A_5^0$ şi deci există un plan unic A^2 cu relaţia : ($M^0 \in A^2$ şi $A_1^0 A_5^0 \subset A^2$) — conf. L² 3 ; dar : ($A_1^0 \in A^3$ şi $A_1^0 \in A^2$) $\Rightarrow$ (există $N^0 \neq A_1^0$ şi $N^0 \in A^2$ şi $N^0 \in A^3$) conf. L'13. Punctul $N^0 \notin A_1^0 A_5^0$; într-adevăr, dacă $N^0 \in A_1^0 A_5^0$, atunci : ($N^0 \neq A_1^0$; $N^0 \in A_1^0 A_5^0$; $N^0 \in A^3$; $A_1^0 \in A_1^0 A_5^0$ şi $A_1^0 \in A^3$) $\Rightarrow$ ($A_1^0 A_5^0 \subset A^3$) — vezi teorema 10 — şi deci $A_5^0 \in A^3$ ceea ce contrazice relaţia $A_5^0 \notin A^3$,

S-a arătat că $A^3 \subset A^4$; ($N^0 \in A^3$; $A^3 \subset A^4$) $\Rightarrow$ ($N^0 \in A^4$). Însă :

$$(N^0 \notin A_1^0 A_5^0 \text{ şi } N^0, A_1^0, A_5^0 \in A^4 \text{ şi } N^0, A_1^0, A_5^0 \in A^2) \Rightarrow (A^2 \subset A^4) \text{ — vezi}$$
$$\text{teorema 10 ; } (M^0 \in A^2 \text{ şi } A^2 \subset A^4) \Rightarrow (M^0 \in A^4).$$

Deoarece pentru oricare $M^0 \in S^4$ avem $M^0 \in A^4$, rezultă $S^4 \subset A^4$.

$$(S^4 \subset A^4 \text{ şi } A^4 \subset S^4) \Rightarrow (A^4 = S^4), \quad \text{c.c.t.d.}$$

Consecinţe. Deoarece $A^4 = S^4$, rezultă că spaţiul S^4 este patrudimensional conform definiţiei 1 ; se justifică astfel denumirea dată lui S^4 în cadrul Cap. II.

Conform definiţiei 2 rezultă că :

— punctele sînt zerodimensionale ale lui S^4 ;

— dreptele sînt unidimensionale ale lui S^4 ;

— planele sînt bidimensionale ale lui S^4 ;

— părţile A^3, B^3 ... sînt tridimensionale ale lui S^4.

Se face observaţia că în S^4 nu există părţi A^5 datorită axiomei L'13 căreia îi vom spune „axiomă de închidere”.

CAPITOLUL IV

Spaţii de incidenţă n-dimensionale S^n

1°. GENERALITĂŢI

O mulţime de elemente denumite puncte, organizate conform axiomelor de legătură $L^i\,1$—$L^i\,4$ ($i = 1 ; 3 ; \ldots n$) şi „axiomei de închidere” L_0^n se numeşte spaţiu de incidenţă n-dimensional S^n.

Se notează cu A^0, B^0, ... punctele spaţiului S^n.

Mulţimea unor părţi (submulţimi) ale lui S^n este organizată în clase H^i ($i = 1 ; 2 ; \ldots n$), conform axiomelor L^i, fiecare clasă conţinînd părţile A^i, B^i, ... denumite şi subspaţii i-dimensionale ; pentru $i = 1$ şi $i = 2$ se folosesc în afara denumirilor „unidimensional” şi „bidimensional”, şi denumirile de „dreaptă” şi „plan”.

Prin definiţie $S^n \neq \varnothing$.

2°. AXIOME DE LEGĂTURĂ L^i (I = 1; 2; ... N) ŞI „AXIOMA DE ÎNCHIDERE" L_0^n

Axiomele de legătură $L^i 1 - L^i 4$ sînt identice celor din Cap. III—2° cu $i = 1; 2; \dots n$.

L_0^n. *Există relaţia* :

$$(A^0 \in A^2 \text{ şi } A^0 \in A^{n-1}) \Rightarrow (\text{există } B^0 \neq A^0 \text{ şi } B^0 \in A^2 \text{ şi } B^0 \in A^{n-1}).$$

Din cele de mai sus rezultă că spaţiul S^n face parte din spaţiile de tip S. Teoremele 1—14 din Cap. III sînt deci valabile pentru spaţiul S^n cu precizarea că indicele i poate lua valori în limitele arătate mai sus (clasa H^{n+1} fiind vidă după cum se va arăta mai jos).

Denumirile din subcapitolul 1°, de mai sus, sînt conforme definiţiilor 1 şi 2 din Cap. III.

Denumirea dată lui S^n conform definiţiei 1, Cap. III şi considerarea valorilor lui i ($i < n + 1$), este justificată de teorema 1 de mai jos.

3°. TEOREME REZULTÎND DIN AXIOMELE L^i ŞI L_0^n

TEOREMA 1. *Există relaţia* $A^n = S^n$.

Prin definiţie $A^n \subset S^n$; să demonstrăm că $S^n \subset A^n$.

Există $(n + 1)$ puncte independente $A_1^0, A_2^0, \dots, A_{n+1}^0 \in A^n$ (vezi teorema 8 din Cap. III) şi există partea unică A^{n-1} cu relaţia $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0 \in A^{n-1}$ (vezi teorema 7 din Cap. III)

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0 \text{ independente şi } A_1^0 A_2^0 \dots A_n^0 \in A^{n-1} \text{ şi}$$
$$A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0 \in A^n) \Rightarrow (A^{n-1} \subset A^n) \text{ conf. } L^n 4.$$

Să arătăm că pentru oricare punct $M^0 \in S^n$ avem $M^0 \in A^n$.

Trebuie deosebite două cazuri :

α) Dacă M^0 aparţine uneia din părţile A^j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$, definită de $(j + 1)$ puncte independente din cele $(n+1)$ puncte independente aparţinînd lui A^n, atunci : fie, de exemplu, $M^0 \in A^j$, unde $A^j = A_1^0 A_2^0 \dots A_{j+1}^0$; avem :

$$(A_1^0, A_2^0, \dots, A_{j+1}^0 \text{ independente şi } A_1^0, A_2^0, \dots, A_{j+1}^0 \in A^j$$
$$\text{şi } A_1^0 A_2^0, \dots, A_{j+1}^0 \in A^n) \Rightarrow (A^j \subset A^n) \text{ — vezi teorema 10 din Cap. III}$$
$$(M^0 \in A^j \text{ şi } A^j \subset A^n) \Rightarrow (M^0 \in A^n).$$

β) Dacă M^0 nu aparţine niciunei părţi A^j, definită după cum s-a arătat mai sus, atunci :

Există partea unică $A^{n-1} = A_1^0 A_2^0 \dots A_n^0$ şi, după cum s-a arătat, $A^{n-1} \subset A^n$; punctul $A_{n+1}^0 \notin A^{n-1}$ (punctele $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0, A_{n+1}^0$ fiind independente). Conform ipotezei, $M^0 \notin A^1$, unde $A^1 = A_1^0 A_{n+1}^0$.

Există un plan unic A^2 cu relația : $(M^\circ \notin A^0_1 A^0_{n+1}$ și $M^0 \in A^2$ și $A^0_1 A^0_{n+1} \subset A^2)$ conf. L^2 3. Însă :

$(A^0_1 \in A^2$ și $A^0_1 \in A^{n-1}) \Rightarrow ($există $N^0 \neq A^0_1$ și $N^0 \in A^2$ și $N^0 \in A^{n-1})$ conf. L^n_0.

Punctul $N^0 \notin A^0_1 A^0_{n+1}$; într-adevăr, dacă $N^0 \in A^0_1 A^0_{n+1}$ ar rezulta : $(N^0 \neq A^0_1 ; N^0 \in A^0_1 A^0_{n+1} ; N^0 \in A^{n-1} ; A^0_1 \in A^0_1 A^0_{n+1} ; A^0_1 \in A^{n-1}) \Rightarrow (A^0_1 A^0_{n+1} \subset \subset A^{n-1})$ — vezi teorema 10 din Cap. III — și deci $A^0_{n+1} \in A^{n-1}$, ceea ce contrazice relația $A^0_{n+1} \notin A^{n-1}$.

Deoarece $A^{n-1} \subset A^n$ avem : $(N^0 \in A^{n-1}$ și $A^{n-1} \subset A^n) \Rightarrow (N^0 \in A^n)$.

Însă :

$(N^0 \notin A^0_1 A^0_{n+1}$ și $N^0, A^0_1 A^0_{n+1} \in A^2$ și $N^0, A^0_1, A^0_{n+1} \in A^n) \Rightarrow (A^2 \subset A^n)$

— vezi teorema 10 din Cap. III;

$(M^0 \in A^2$ și $A^2 \subset A^n) \Rightarrow (N^0 \in A^n)$.

Deoarece pentru oricare $M^0 \in S^n$ avem $M^0 \in A^n$, rezultă $(S^n \subset A^n)$:

$(S^n \subset A^n$ și $A^n \subset S^n) \Rightarrow (A^n = S^n)$, c.c.t.d.

Observații :

— Se putea organiza spațiul S^n cu ajutorul axiomelor :

L^i 1 — L^i 4 (cu $i = 1 ; 2 ; \ldots n-1$), L^n_0 și cu „axioma de prelungire" : $S^n \not\subset A^{n-1}$ pentru oricare parte A^{n-1}, după cum s-a procedat în cazurile spațiilor de incidență tridimensionale și patrudimensionale — vezi Cap. I și Cap. II.

— Se poate evita condiția impusă : $i = 1 ; 2, \ldots, n$ în cadrul axiomelor de legătură L^i 1—L^i 4, aceasta fiind o consecință a teoremei 1.

TEOREMA 2. *Spațiul S^n conține cel puțin $\frac{(n+1)!}{(n-i)!\,(i+1)!}$ părți $A^i \times \times (i = 0 ; 1 ; \ldots, n)$; pentru $i = n$ se obține partea $A^n = S^n$.*

Demonstrație. Spațiul S^n conține $(n+1)$ puncte independente $A^0_1, A^0_2, \ldots, A^0_n + 1$ (vezi teorema 8, Cap. III). Oricare $i + 1$ puncte dintre acestea sînt independente (vezi teorema 4, Cap. III) și determină cîte o parte unică A^i (vezi teorema 7, Cap. III), Rezultă că în S^n sînt cel puțin $C^{i+1}_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n-i)!\,(i+1)!}$ părți de dimensiune i, c.c.t.d.

TEOREMA 3. *Dacă partea A^i conține $(j+1)$ puncte independente $A^0_1, A^0_2, \ldots, A^0_{j+1}$, atunci există în A^i un număr de $i - j$ puncte $B^0_1, B^0_2, \ldots, B^0_{i-j}$ astfel ca punctele : $(A^0_1, A^0_2, \ldots, A^0_{j+1}, B^0_1, B^0_2, \ldots, B^0_{i-j})$ să fie independente (evident cu condiția $j < i$).*

Demonstrație. Punctele independente $A^0_1, A^0_2, \ldots, A^0_{j+1}$ determină partea unică A^j (vezi teorema 7, Cap. III) și $A^j \subset A^i$ (vezi teorema 10, Cap. III). Există un punct $B_1^0 \in A^i$ şi $B_0^1 \notin A^j$; într-adevăr, dacă pentru oricare $B_1^0 \in A^i$ am avea $B_1^0 \in A^j$, ar rezulta $A^i = A^j$ $(j=i)$ ceea ce contrazice teorema 2, Cap. III. Punctele $B_1^0, A_1^0, A_2^0, \ldots A_{j+1}^0$ sînt independente căci dacă ar exista o parte B^j care să le conţină, atunci : $(A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{j+1}^0$ independente şi $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{j+1}^0 \in A^j$ şi $A_1^0, A_2^0, \ldots A_{j+1}^0 \in B^j) \Rightarrow (A^j = B^j)$ — vezi teorema 7, Cap. III; $(B_1^0 \in B^j$ şi $B^j = A^j) \Rightarrow (B_1^0 \in A^j)$ ceea ce contrazice relaţia $B_1^0 \notin A^j$ şi deci punctele $B_1^0, A_1^0, A_2^0, \ldots, A_j^0 + 1$ sînt independente. Prin inducţie se stabileşte fără dificultate proprietatea din enunţ.

Observaţie. Se precizează că un subspaţiu A^i poate conţine mai multe sisteme de puncte independente (vezi exemplul din Cap. 1—7, fig. 1, unde pot fi alese drept puncte independente de exemplu A_0^0, A_1^0, A_3^0 sau A_0^0, A_1^0, A_4^0 sau A_3^0, A_4^0, A_5^0 etc.).

Din demonstrarea teoremei 3 rezultă şi :

TEOREMA 3'. *Dacă partea A^i conţine punctele independente $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0$ şi dacă punctul $B^0 \notin A^i$, atunci punctele $B^0, A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{i+1}^0$ sînt independente.*

TEOREMA 4. *Fie subspaţiile A^2, A^{j-1} şi A^j cu relaţia*: $(A^2 \subset A^j$ şi $A^{j-1} \subset A^j)$, *unde $2 \leqslant j \leqslant n$; există relaţia* :

$$(A_1^0 \in A^2 \text{ şi } A_1^0 \in A^{j-1}) \Rightarrow (\textit{există } B^0 \neq A_1^0 \textit{ şi } B^0 \in A^2 \textit{ şi } B^0 \in A^{j-1}).$$

Demonstraţie. Pentru $j = 2$ se obţine un caz banal; pentru $j = n$ relaţia este echivalentă cu axioma L_0^n. Să arătăm că relaţia este adevărată pentru $j = n - 1$ (ştiind că este adevărată pentru $j = n$); într-adevăr :

Fie subspaţiile A^2, A^{n-2} şi A^{n-1} cu relaţia : $(A^2 \subset A^{n-1}$ şi $A^{n-2} \subset A^{n-1})$. Să arătăm că :

$$(A_1^0 \in A^2 \text{ şi } A_1^0 \in A^{n-2}) \Rightarrow (\text{există } B^0 \neq A_1^0 \textit{ şi } B^0 \in A^2 \text{ şi } B^0 \in A^{n-2}).$$

Există punctele independente $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{n-1}^0 \in A^{n-2}$—vezi teorema 8, Cap. III şi teorema 3' — şi punctul $A_{n+1}^0 \notin A^{n-1}$; evident, $A_{n+1}^0 \notin A^{n-2}$ — căci dacă $A_{n+1}^0 \in A^{n-2}$, atunci ar rezulta : $(A_{n+1}^0 \in A^{n-2}$ şi $A^{n-2} \subset A^{n-1}) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A_{n+1}^0 \in A^{n-1})$.

Deoarece $A_{n+1}^0 \notin A^{n-2}$, rezultă că există o parte unică B^{n-1} cu relaţia : $(A_{n+1}^0 \in B^{n-1}$ şi $A^{n-2} \subset B^{n-1})$ conf. L^{n-1} 3; $(A_1^0 \in A^{n-2}$ şi $A^{n-2} \subset B^{n-1}) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A_1^0 \in B^{n-1})$, şi evident $B^{n-1} \neq A^{n-1}$ deoarece $A_{a+1}^9 \in B^{n-1}$ şi $A_{n+1}^0 \notin A^{n-1}$. Însă :

$$(A_1^0 \in A^2 \text{ şi } A_1^0 \in B^{n-1}) \Rightarrow (\text{există } B^0 \neq A_1^0 \text{ şi } B^0 \in A^2 \text{ şi } B^0 \in B^{n-1}) \text{ conf. } L_0^n,$$

$$(B^0 \in A^2 \text{ şi } A^2 \subset A^{n-1}) \Rightarrow (B^0 \in A^{n-1}).$$

Să arătăm că $B^0 \in A^{n-2}$; într-adevăr, dacă $B^0 \notin A^{n-2}$, atunci : $(B^0 \notin A^{n-2}; B^0 \in A^{n-1}; A^{n-2} \subset A^{n-1}; B^0 \in B^{n-1}$ şi $A^{n-2} \subset B^{n-1}) \Rightarrow A^{n-1} =$ $= B^{n-1})$ conf. L^{n-1} 3, ceea ce s-a arătat că este imposibil; rezultă deci existenţa punctului $B^0 \neq A_1^0$ şi $B^0 \in A^2$ şi $B^0 \in A^{n-2}$. Prin inducţie rezultă relaţia din enunţ.

Notînd cu L_0^j $(j = 2; 3; \ldots n)$ relaţia din enunţ, rezultă că oricare subspaţiu A^j este un ,,spaţiu de incidenţă j-dimensional'' deoarece sînt satisfăcute relaţiile $L^i 1 - L^i 4$ $(i = 1; 2; \ldots j)$ şi relaţia de închidere L_0^j.

Se demonstrează fără dificultate:

TEOREMA 5. *Pentru spațiile* A^i *și* B^j, *unde*: $i + j \leqslant n-1$; $i, j \geqslant 2$ *și* $i \leqslant j$, *există relația*:

$$(A^j \cap B^j = \theta \ \textit{sau} \ A^i \cap B^j = A^0 \ \textit{sau} \ A^i \cap B^j = A^0 \ldots \ \textit{sau} \ A^i \cap B^j = A^i).$$

4°. SIMPLEX Σ^n

Se numeşte simplex n-dimensional, sau simplex Σ^n, un spaţiu de incidenţă S^n minimal, adică un spaţiu S^n care conţine numai $n+1$ puncte, $A_1^0, A_2^0, \ldots A_{n+1}^0$, aceste puncte fiind independente (adică neexistînd nici un subspaţiu A^{n-1} care să le conţină).

Punctele $A_1^0, A_2^0, \ldots, A_{n+1}$ se numesc vîrfurile simplexului, dreptele $A_1^0 A_2^0, A_1^0 A_3^0, \ldots, A_n^0 A_{n+1}^0$ se numesc muchiile simplexului, planele $A_1^0 A_2^0 A_3^0$, $A_1^0 A_2^0 A_4^0, \ldots, A_{n-1}^0 A_n^0 A_{n+1}^0$ se numesc feţele simplexului, iar părţile (subspaţiile) $A_1^0 A_2^0 \ldots, A_{i+1}^0, \ldots$ se numesc i-dimensionalele simplexului ($i < n$).

Dacă se notează cu $N^{0,n}$ numărul vîrfurilor, $N^{1,n}$, numărul muchiilor, ... $N^{i,n}$ numărul i-dimensionalelor simplexului Σ^n se deduce:

$$N^{i,n} = \frac{(n+1)!}{(n-i)!\,(i+1)!} \quad \text{(vezi teorema 2)},$$

unde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; pentru $i = n$, $N^{n,n} = 1$.

Se verifică fără dificultate relaţia:

$$N^{0,n} - N^{1,n} + N^{2,n} - \ldots + (-1)^n N^{n,n} = 1. \qquad \text{(IV.1)}$$

Relaţia (IV.1) reprezintă o generalizare a formulelor (I.1) şi (II.1).

Se poate realiza un model de spaţiu de incidenţă n-dimensional minimal, sau simplex Σ^n, cu ajutorul claselor de resturi modulo $(n+1)$; se notează cu

(C_0^0) clasa numerelor $(n + 1)\,k$ (k întreg).
(C_1^0) clasa numerelor $(n+1)\,k+1$
. . . .
C_j^0 clasa numerelor $(n+1)\,k+j$
. . . .
C_n^0 clasa numerelor $(n + 1)\,k + n$

Cu ajutorul acestor clase definim clasele:

$$(C_0^1) = (C_0^0) \cup (C_1^0), (C_1^1) = (C_0^0) \cup (C_2^0), \ldots, (C^1_{\frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}-1} = (C_{n-1}^0) \cup (C_n^0)$$

. . . .

$$(C_0^i) = (C_0^0) \cup (C_1^0) \cup \cdots \cup (C_i^0), \ldots, C^i_{\frac{(n+1)!}{(n-i)!(i+1)!}-1} = (C_{n-i}) \cup \cdots \cup (C_n^0)$$

. . . .

$$(C_0^{n-1}) = (C_0^0) \cup \cdots \cup (C_{n-1}^0), \ldots, (C_n^{n-1}) = (C_1^0) \cup \cdots \cup (C_n^0)$$

clasele (C_j^0) cu $j = 0, 1, \ldots, n$ le numim puncte, clasele (C_j^1) cu $j = 0, 1, \ldots, \frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!} - 1$ le numim drepte etc.

Se verifică, fără dificultate, că pe acest model de simplex sînt realizate axiomele L^i şi axioma de închidere L_0^n.

5°. SPAŢII DE INCIDENŢĂ S^n OMOGENE ŞI NEOMOGENE

Să considerăm un spaţiu de incidenţă n-dimensional S^n şi fie A_j^1 dreptele, A_j^2 planele ... A_j^i i-dimensionalele lui S^n. Dacă fiecare subspaţiu i-dimensional $A_1^i, A_2^i, \ldots$ conţine acelaşi număr de puncte, drepte, ... k-dimensionale $(k < i)$, se spune că S^n este omogen; în caz contrar spaţiul S^n este neomogen.

Se verifică fără dificultate că simplexul Σ^n este un spaţiu de incidenţă omogen.

Se pot construi modele de spaţii S^n neomogene, după cum s-a arătat în Cap. I—6°.

6°. SPAŢII DE INCIDENŢĂ N-DIMENSIONALE OMOGENE DE PUTERE P S_p^n

Se numeşte spaţiu de incidenţă n-dimensional omogen de putere p, notat cu S_p^n, un spaţiu n-dimensional omogen în care fiecare dreaptă A_i^1 $(i = 1, 2, \ldots)$ conţine $(p+1)$ puncte $(p=1, 2, \ldots)$, S_p^n fiind minimal în sensul că el conţine minimum de puncte cu ajutorul cărora se pot construi dreptele spaţiului astfel încît fiecare dreaptă să conţină $(p+1)$ puncte; ţinînd seama de condiţia de omogeneitate, rezultă că oricare subspaţiu $A^i \subset S_p^n$ este un spaţiu omogen de putere $p (i > 1)$.

Să notăm cu:

$N_p^{0,1}$ numărul punctelor unei drepte
$N_p^{0,2}$ numărul punctelor unui plan
. . . .
$N_p^{0,i}$ numărul punctelor unui subspaţiu i-dimensional
. . . .
$N_p^{0,n}$ numărul punctelor spaţiului S_p^n

şi încă:

$N_p^{j,i}$ numărul subspaţiilor j-dimensionale conţinute de un subspaţiu i-dimensional $(j \leqslant i \leqslant n)$.

Prin definiţie:

$$N_p^{0,1} = p + 1. \tag{IV.2}$$

Să considerăm subspaţiul A^{i-1} avînd $N_p^{0,i-1}$ puncte şi fie punctul $M^0 \notin A^{i-1}$. Fie A^0 partea determinată de relaţia: $M^0 \in A^i$ şi $A^{i-1} \subset A^i$). Partea A^i conţine $N_p^{0,i}$ puncte. Unind punctul M^0 cu cele $N_p^{0,i-1}$ puncte ale subspaţiului A^{i-1}, se obţin $N_p^{0,i-1}$ drepte care vor conţine, în afară de M°, încă p puncte; deci numărul total de puncte din A^i este:

$$N_p^{0,i} = p.N_p^{0,i-1} + 1.$$

Făcînd în relaţia de mai sus $i = 2, 3, \ldots, n$ şi ţinînd seama că $N_p^{0,1} = p + 1$, obţinem:

$$\begin{aligned} N_p^{0,1} &= p + 1 \\ N_p^{0,2} &= pN^{0,1} + 1 \\ N_p^{0,3} &= pN^{0,2} + 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_p^{0,i} &= pN^{0,i-1} + 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_p^{0,n} &= pN^{0,n-1} + 1. \end{aligned}$$

Înmulţind prima relaţie cu p^{n-1}, a doua cu p^{n-2} etc. şi adunînd se obţine:

$$N_p^{0,n} = p^n + p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$$

şi deci

$$N_p^{0,n} = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} \tag{IV.3}$$

sau în general.

$$N_p^{0,i} = \frac{p^{i+1}-1}{p-1}, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{IV.3'}$$

Să considerăm toate punctele $M_1^0, M_2^0, \ldots, M_k^0 \in A^i$ şi $M_1^0, M_2^0, \ldots$ $\ldots, M_k^0 \notin A^{i-1}$; avem: $k = N_p^{0,i} - N_p^{0,i-1}$ şi înlocuind valorile lui $N_p^{0,i}$ şi $N_p^{0,i-1}$ conform relaţiei (IV.3′) obţinem: $k = p^i$. Fie punctul $A_1^0 \in A^{i-1}$; unind pe A_1^0 cu fiecare dintre punctele $M_1^0, M_2^0, \ldots, M_j^0$ $(j<k)$, obţinem j drepte şi ţinînd seamă că pe fiecare dreaptă sînt, în afara punctului A_1^0, încă p puncte, rezultă că numărul punctelor situate pe toate dreptele $A_1^0 M_1^0$, $A_1^0 M_2^0 \ldots$, $A_1^0 M_j^0$ este: $(pj + 1)$. Dacă alegem pe j astfel încît să se obţină toate dreptele din A^i ce trec prin A_1^0 şi care nu sînt conţinute în A^{i-1}, atunci: $pj + 1 = k + 1$ de unde $j = \dfrac{k}{p} = p^{i-1}$. Deoarece prin fiecare punct din A^{i-1} trec $j = p^{i-1}$ drepte conţinute în A^i şi neconţinute în A^{i-1}, rezultă că numărul total de drepte din A^i neconţinute în A^{i-1} este: $p^{i-1} N_p^{0,i-1}$. Rezultă deci

$$N_p^{1,i} = N_p^{1,i-1} + p^{i-1} N_p^{0,i-1}.$$

Făcînd în relaţia de mai sus pe $i = 2, 3, \ldots, n$ şi ţinînd seamă că $N_p^{1,1} = 1$ se obţine :

$$\begin{aligned} N_p^{1,2} &= 1 + pN_p^{0,1} \\ N_p^{1,3} &= N_r^{1,2} + p^2 N_p^{0,2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_p^{1,n-1} &= N_p^{1,n-2} + p^{n-2} N_p^{0,n-2} \\ N_p^{1,n} &= N_p^{1,n-1} + p^{n-1} N_p^{0,n-1}. \end{aligned}$$

Adunînd relaţiile de mai sus obţinem :

$$N_p^{1,n} = 1 + \sum_1^{n-1} p^i N_p^{0,i}$$

şi ţinînd seama de relaţia (IV.3′) se obţine :

$$N_p^{1,n} = 1 + \frac{1}{p-1} \sum_1^{n-1} (p^{2i+1} - p^i)$$

de unde :

$$N_p^{1,n} = \frac{(p^{n+1}-1)(p^n-1)}{(p-1)(p^2-1)} \tag{IV.4}$$

sau în general :

$$N_p^{1,i} = \frac{(p^{i+1}-1)(p^i-1)}{(p-1)(p^2-1)}, \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{IV.4′}$$

Să considerăm în continuare un subspaţiu $A^{h-1} A^{i-1}$ şi fie j puncte $M_1^0, M_2^0, \ldots, M_j^0$ dintre cele k puncte ce aparţin lui A^i şi nu aparţin lui A^{i-1}; să presupunem pe j astfel ales încît subspaţiile A^h definite de : $A^{h-1} \subset A^h$ şi $M_t^0 \in A^h$ $(t = 1, 2, \ldots, j)$, să reprezinte toate subspaţiile h-dimensionale conţinute de A^i şi care nu sînt conţinute de A^{i-1}. În acest caz numărul de puncte conţinute de toate aceste subspaţii şi care nu aparţin lui A^{i-1} va fi : $j\,(N_p^{0,h} - N_p^{0,h-1})$. Adăugînd acestor puncte totalitatea punctelor din A^{i-1} vom obţine toate punctele lui A^i, şi deci :

$$j\,(N_p^{0,h} - N_p^{0,h-1}) + N_p^{0,i-1} = N_p^{0,i}$$

de unde :

$$j = \frac{N^{0,i} - N^{0,i-1}}{N_p^{0,h} - N_p^{0,h-1}}$$

şi ţinînd seamă de relaţia (IV.3′) obţinem :

$$j = p^{i-h}.$$

Deoarece prin fiecare subspaţiu $(h-1)$-dimensional, trec $j = p^{i-h}$ subspaţii h-dimensionale conţinute în A^i şi neconţinute în A^{i-1}, rezultă că numărul total de subspaţii h-dimensionale conţinute în A^i şi neconţinute în A^{i-1} este : $p^{i-h} N_p^{h-1,i-1}$. Rezultă deci :

$$N_p^{h,i} = N_p^{h,i-1} + p^{i-h} N_p^{h-1,i-1}. \qquad \text{(IV.5)}$$

Făcînd în relaţia de mai sus $i = h+1, h+2, \ldots, n$ şi ţinînd seama că $N_p^{h,h} = 1$ se obţine :

$$\begin{aligned} N_p^{h,h+1} &= 1 + p\, N_p^{h-1,h} \\ N_p^{h,h+2} &= N_p^{h,h+1} + p^2 N_p^{h-1,h+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_p^{h,n} &= N_p^{h,n-1} + p^{n-h} N_p^{h-1,n-1}. \end{aligned}$$

Adunînd relaţiile de mai sus se obţine :

$$N_p^{h,n} = 1 + \sum_{1}^{n-h} p^i N_p^{h-1,i+h-1}. \qquad \text{(IV.6)}$$

Făcînd în relaţia (IV.6) pe $h = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ şi ţinînd seama de valoarea lui $N_p^{0,n}$ (vezi formula (IV.3)) se obţine :

$$\begin{aligned} N_p^{0,n} &= 1+p+p^2 + \ldots + p^n \\ N_p^{1,n} &= 1+pN_p^{0,1}+p^2N_p^{0,2} + \ldots + p^{n-1} N_p^{0,n-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_p^{i,n} &= 1 + pN_p^{i-1,i} + \ldots + p^{n-i} N_p^{i-1,n-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_p^{n-2,n} &= 1 + pN_p^{n-3,n-2} + p^2N_p^{n-3,n-1} \\ N_p^{n-1,n} &= 1 + pN_p^{n-2,n-1} \end{aligned}$$

şi încă :

$$N_p^{n,n} = 1.$$

Folosind relaţiile de mai sus se poate demonstra (prin recurenţă) relaţia :

$$N_p^{i,n} = \frac{(p^{n+1}-1)(p^n-1)\ldots(p^{n-i+1}-1)}{(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{i+1}-1)} = \frac{\prod\limits_{j=n-i}^{n} (p^{j+1}-1)}{\prod\limits_{j=0}^{i} (p^{j+1}-1)} \qquad \text{(IV.7)}$$

unde $i = 0, 1, \ldots, n$; sau, în general,

$$N_p^{i,k} = \frac{(p^{k+1}-1)(p^k-1)\ldots(p^{k-i+1}-1)}{(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{i+1}-1)} \qquad \text{(IV.7}')$$

unde $k = i, i+1, \ldots, n$.

Făcînd în relaţia (IV.7) pe i egal cu $n-i-1$ se obţine:

$$N_p^{i,n} = N_p^{n-i,n}. \tag{IV.8}$$

Procedînd analog, pentru relaţia (IV.7′), se obţine:

$$N_p^{i,k} = N_p^{k-i-1,k}. \tag{IV.8′}$$

Formulele (IV.8) şi (IV.8′) exprimă următoarele relaţii de simetrie:

— Numărul de subspaţii i-dimensionale ale unui spaţiu de incidenţă n-dimensional omogen de putere p, este egal cu numărul de subspaţii $(n-i-1)$-dimensionale, ale acestuia.

— Dacă A^k este un subspaţiu al unui spaţiu de incidenţă n-dimensional omogen de putere p, atunci numărul de subspaţii i-dimensionale ale lui A^k este egal cu numărul de subspaţii $(k-i-1)$-dimensionale ale lui A^k.

Extinzînd noţiunea de izomorfism expusă în Cap. I—8 pentru spaţii de incidenţă n-dimensionale, se poate demonstra că toate spaţiile de incidenţă n-dimensionale omogene de putere p sînt izomorfe între ele şi deci evident izomorfe cu un spaţiu de incidenţă n-dimensional omogen de putere p, realizat cu clasele de resturi modulo $\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$.

Se precizează că în cadrul lucrării de faţă nu se arată modul în care pot fi construite spaţiile S_p^n cu ajutorul celor $N_p^{0,n}$ puncte, aşa încît formulele (IV.7) şi (IV.7′), trebuie considerate ca ducînd la valori minimale; problema construcţiei modelelor de spaţii S_p^n va face obiectul unor lucrări separate.

Primită la redacţie la 28 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. L. S. Pontreaghin, *Grupuri topologice*. vol. I—II, Bucureşti, 1956.
2. G. Birkoff, *Lattice Theory*. New York, 1948.

PROBLEME DE VERIFICARE STATISTICĂ A IPOTEZELOR LA PROCESELE STAȚIONARE

DE

H. COHN

Centrul de statistică matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu nr. 47, București

Se dau cîteva teoreme privind consistența testului raportului de verosimilități în cazul proceselor staționare metric tranzitive, în cazul proceselor staționare Markov, precum și în cazul cînd ipoteza de verificat presupune că procesul $(\xi_n)_{n \in N^*}$ este Markov staționar, contra alternativei că procesul $(\xi_n)_{n \in N^*}$ este independent staționar.

În lucrarea de față ne propunem să studiem proprietățile testului raportului de verosimilități în cazul proceselor staționare.

Fie (Ω, K) un spațiu măsurabil, P și Q două probabilități definite pe K, $(\xi_n)_{n \in N^*}$ un șir de variabile aleatoare, R dreapta reală, $\mathcal{B}^n$ corpul părților boreliene ale lui R^n, $N^* = \{1, 2, \ldots\}$.

În cele ce urmează vom presupune că K este cel mai mic corp borelian în raport cu care variabilele (ξ_n) sînt măsurabile iar P și Q sînt astfel definite încît (ξ_n) să fie un proces staționar în sens restrîns atît în raport cu P cît și în raport cu Q, deci astfel ca mărimile :

$$P(\{\omega)\, \zeta_{t_1+h}(\omega) < a_1, \ldots, \zeta_{t_n+h}(\omega) < a_n\})$$
$$Q(\{\omega)\, \xi_{t_1+h}(\omega) < a_1, \ldots, \zeta_{t_n+h}(\omega) < a_n\}) \quad t_1, \ldots, t_n, h \in N^*.$$

să nu depindă de h.

Vom mai presupune existența funcțiilor :

$$\{p_n(x_1, \ldots, x_n)\}_{n \in N^*}$$
$$\{q_n(x_1, \ldots, x_n)\}_{n \in N^*}$$

astfel ca

$$P(\{\omega) | \xi_1(\omega) < a_1, \ldots, \xi_n(\omega) < a_n\}) = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} p_n, x_1, \ldots, x_n \mathrm{d}) x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

$$Q(\{\omega) | \xi_1(\omega) < a_1, \ldots, \xi_n(\omega) < a_n\}) = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} q_n(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 209–214, BUCUREȘTI, 1965

TEOREMA 1. *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x_1, \ldots, x_n)}{q_n(x_1, \ldots, x_n)} = 0$$

cu probabilitate 1 în raport cu Q, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x_1, \ldots, x_n)}{q_n(x_1, \ldots, x_n)} = \infty$$

cu probabilitate 1 în raport cu P şi reciproc.

Demonstraţie. Vom folosi următorul rezultat a lui P. Billingsley (teorema 14.1, pag. 67 din [1]).

Fie (Ω, K, P) un cîmp de probabilitate $\{K_n, n = 1, 2, \ldots\}$ un şir nedescrescător de subcorpuri boreliene ale lui K astfel ca $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ să genereze pe K şi φ o funcţie de mulţime cu variaţie mărginită pe K. Dacă φ_n este restricţia lui φ la K_n, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}\varphi_n/\mathrm{d}P = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}P$$

cu probabilitate 1 în raport cu P, derivatele fiind luate în sensul lui Radon-Nycodim.

În cazul nostru vom lua $K_n = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ drept cel mai mic corp borelian în raport cu care variabilele $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt măsurabile, iar $\varphi = Q$. Din teorema lui Lebesgue de dezvoltare a funcţiilor aditive avem :

$$Q(E) = \int_E f(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) + Q(EH),$$

unde $f(\omega)$ este integrabilă pe Ω în raport cu P, iar $P(H) = 0$.

Dacă notăm cu

$$L_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p_n(x_1, \ldots, x_n)}{q_n(x_1, \ldots, x_n)}$$

vom avea

$$\int \cdots \int_A L_n(x_1, \ldots, x_n)\, p_n(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \begin{cases} Q(A), & AH_n^* = \emptyset \\ 0 \quad, & A \subset H_n^* \end{cases}$$

unde $H_n = \{\omega \mid (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H_n^*\}$ iar H_n^* este mulţimea singulară corespunzătoare lui Q_n. Prin urmare :

$$\mathrm{d}Q_n/\mathrm{d}P = L_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Din rezultatul lui P. Billingsley enunţat mai sus obţinem că $\lim_{n\to\infty} L_n(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) = f(\omega) = 0$ cu probabilitate 1 în raport cu Q şi prin urmare că

$Q(H) = 1$. Dar $P(H) = 0$ și dacă considerăm dezvoltarea lui Lebesgue a lui P în raport cu Q obținem

$$P(E) = \int_E g(\omega)\, dQ(\omega) + P(EH').$$

După cum am văzut mai sus, $P(H') = 1$ și deci $g(\omega) = 0$. Prin urmare $\dfrac{1}{L_n(x_1, \ldots, x_n)}$ converge către 0 cu probabilitate 1 în raport cu P și

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p_n(x_1, \ldots, x_n)}{q_n(x_1, \ldots, x_n)} = \infty$$

cu probabilitate 1 în raport cu P și prima parte a teoremei este demonstrată. În sfîrșit, dacă schimbăm rolul lui P și Q și inversăm raportul $L_n(x_1, \ldots, x_n)$, obținem de mai sus și restul teoremei.

Definim acum testul $T(a)$ al raportului de verosimilități în modul următor: acceptăm ipoteza H_0 că P este adevărata probabilitate dacă $R_n(x_1, \ldots, x_n) = \ln L_n, (x_1, \ldots, x_n) > a$ și acceptăm alternativa H că Q este adevărata probabilitate, dacă $R_n(x_1, \ldots, x_n) \leqslant a$.

Dacă ne situăm în condițiile teoremei 1 obținem

$$\lim_{n\to\infty} P(R_n(x_1, \ldots, x_n) \leqslant a) = \lim_{n\to\infty} Q(R_n(x_1, \ldots, x_n) > a) = 0$$

și deci familia de teste $\{T(a),\ a \in R\}$ conține numai teste consistente. În cazul în care probabilitățile P și Q corespund unor procese staționare metric tranzitive și Q nu este absolut continuă în raport cu P, L. Breiman [2] a arătat că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x_1, \ldots, x_n)}{q_n(x_1, \ldots, x_n)} = 0$$

cu probabilitate 1 în raport cu Q și obținem prin urmare următorul:

Corolar. *Dacă P și Q corespund unor procese staționare metric tranzitive și dacă Q nu este absolut continuă în raport cu P atunci familia de teste $\{T(a),\ a \in R\}$ conține numai teste consistente.*

TEOREMA 2. *Dacă P și Q sînt două probabilități corespunzătoare unor procese staționare metric tranzitive care admit densități și dacă P este absolut continuă în raport cu Q atunci și Q este absolut continuă în raport cu P.*

Demonstrație. În [2] a fost demonstrat că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n(x_1, \ldots, x_n)}{p_n(x_1, \ldots, x_n)} = \alpha$$

cu probabilitate 1 în raport cu P, unde α este o constantă, dacă P corespunde unui proces staționar metric tranzitiv. Dacă P este absolut continuă în raport cu Q, α este diferit de zero căci în caz contrar din teorema 1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n(x_1, \ldots, x_n)}{p_n(x_1, \ldots, x_n)} = \infty$$

cînd Q este adevărata probabilitate. Dacă notăm cu $H = \{\omega \mid \lim\limits_{n\to\infty} L_n(x_1, \ldots \ldots x_n) = \infty\}$ și cu $H' = \{\omega \mid \lim\limits_{n\to\infty} L_n(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$, atunci $P(H) = 1$ și $Q(H') = 1$ și cum H și H' sînt disjuncte, rezultă $Q(H) = 0$ și $P(H') = 1$ ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, în acest caz α nu poate fi nul. Dacă schimbăm rolul lui P și Q obținem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n(x_1, \ldots, x_n)}{p_n(x_1, \ldots, x_n)} = \alpha' \neq 0$$

cu probabilitate 1 în raport cu P. Dacă aplicăm acum teorema amintită a lui L. Breiman obținem că Q este absolut continuă în raport cu P și teorema este demonstrată.

În cele ce urmează vom presupune că procesele corespunzătoare probabilităților P și Q sînt procese Markov staționare cu măsurile de trecere $P(x, A)$ și $Q(x, A)$ și cu probabilitățile inițiale $p(A)$ și $q(A)$. Vom mai presupune că $P(x, A)$ și $Q(x, A)$ pentru $A \in B$ fixat sînt funcții măsurabile de x, iar pentru x fixat sînt probabilități pe B. Condiția de staționaritate ne conduce la relațiile :

$$p(A) = \int_R p(\mathrm{d}x)\ P(x, A) \quad ; \quad q(A) = \int_R q(\mathrm{d}x)\ Q(x, A).$$

Să presupunem existența funcțiilor $p(x)$, $p(x, y)$, $q(x)$ și $q(x, y)$ astfel ca :

$$p(A) = \int_A p(x)\,\mathrm{d}x, \qquad P(x, A) = \int_A p(x, y)\,\mathrm{d}y$$

$$q(A) = \int_A q(x)\,\mathrm{d}x, \qquad Q(x, A) = \int_A q(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad A \in B.$$

Atunci distribuția variabilelor $x_1, \ldots, x_n$ admite densitățile :

$$p(x_1)\, p(x_1, x_2) \ldots p(x_{n-1}, x_n),$$
$$q(x_1)\, q(x_1, x_2) \ldots q(x_{n-1}, x_n).$$

Raportul de verosimilități este în acest caz

$$L_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1)\, p(x_1, x_2) \ldots p(x_{n-1}, x_n)}{q(x_1)\, q(x_1, x_2) \ldots q(x_{n-1}, x_n)}.$$

TEOREMA 3. *Dacă P și Q corespund la două procese Markov simple, staționare și metric tranzitive și cel puțin una din mărimile* $E_P\left(\ln \frac{p(x_1, x_2)}{q(x_1, x_2)}\right)$

și $E_Q\left(\ln \frac{p(x_1, x_2)}{q(x_1, x_2)}\right)$ *este diferită de zero, atunci familia de teste* $\{T(a), a \in R\}$ *conține numai teste consistente.*

Demonstrație. Să presupunem de exemplu că $E_Q\left(\ln \frac{p(x_1, x_2)}{q(x_1, x_2)}\right) \neq 0$ și să considerăm expresia :

$$\frac{1}{n} R_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\left(\ln \frac{p(x_1)}{q(x_1)} + \ln \frac{p(x_1, x_2)}{q(x_1, x_2)} + \ldots + \ln \frac{p(x_{n-1}, x_n)}{q(x_{n-1}, x_n)}\right)$$

Pe de altă parte

$$E_Q\left(\ln \frac{p(x_1, x_2)}{q)x_1, x_2)}\right) = \int_R \int_R \ln \frac{p(x_1, x_2)}{q(x_1, x_2)}\, q(x_1)\, q(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \leqslant$$

$$\leqslant \ln \int_R \int_R p(x_1, x_2)\, q(x_1)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \leqslant 0$$

și folosind ipoteza, rezultă

$$E_Q\left(\ln \frac{p(x_1, x_2)}{q(x_1, x_2)}\right) < 0.$$

Aplicînd acum teorema ergodică obținem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{p(x_1, x_{i+1})}{q(x_1, x_{i+1})} = E_Q\left(\ln \frac{p(x_1, x_2)}{q(x_1, x_2)}\right) < 0$$

cu probabilitate 1 în raport cu Q. De aici obținem imediat că

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x_1, \ldots, x_n) = -\infty$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

cu probabilitate 1 în raport cu Q. Sînt îndeplinite deci condițiile teoremei 1 și teorema este demonstrată.

Ipoteza de staționare a lanțului poate fi înlocuită cu ipoteza de absolut continuitate a măsurii $P(x, \cdot)$ în raport cu $p(\cdot)$ pentru orice $x \in R$. În acest caz teorema ergodică se păstrează ([1], teorema 1.1, pag. 6).

TEOREMA 4. *Dacă* P *corespunde unui proces Markov simplu și omogen și* Q *corespunde unui proces staționar și independent și dacă* P *și* Q *admit densități, familia de teste* $\{T(a), a \in R\}$ *conține numai teste consistente.*

Demonstrație. Dacă notăm cu $p(x)$ și $p(x, y)$ densitățile corespunzătoare lui P și cu $q(x)$ densitatea corespunzătoare lui Q, raportul de verosimilități are forma :

$$L_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1)\, p(x_1, x_2) \ldots p(x_{-1}, x_n)}{q(x_2)\, q(x_2) \ldots q(x_n).}$$

Să considerăm expresiile

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1, x_2)\, p(x_3, x_4) \ldots p(x_{n-1}, x_n)}{q(x_2)\, q(x_4) \ldots q(x_n)}$$

$$B_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p(x_2, x_3)\, p(x_4, x_5) \ldots p(x_{n-2}, x_{n-1})}{q(x_3)\, q(x_5) \ldots . q(x_{n-1})}$$

în cazul cînd n este par. În cazul cînd n este impar, se înlocuieşte în expresia din dreapta lui $A_n(x_1, \ldots, x_n)$, n cu $n - 1$, iar în expresia din dreapta lui $B_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n - 1$ cu n. Avem evident :

$$L_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1)}{q(x_1)} A_n(x_1, \ldots, x_n)\, B_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Expresiile de mai sus pot fi scrise sub forma :

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{q(x_1)\, p(x_1, x_2)\, q(x_3)\, p(x_3, x_4) \ldots q(x_{n-1})\, p(x_{n-1}, x_n)}{q(x_1)\, q(x_2) \ldots q(x_n)}$$

$$B_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{q(x_2)\, p(x_2, x_3)\, q(x_4)\, p(x_4, x_5) \ldots q(x_{n-2})\, p(x_{n-2}, x_{n-1}}{q(x_2)\, q(x_3) \ldots q(x_{n-1})}$$

pentru n par. Pentru n impar modificările sînt evidente. În cazul cînd probabilitatea considerată este Q, se observă că atît $A_n(x_1, \ldots, x_n)$ cît şi $B_n(x_1, \ldots, x_n)$ sînt un produs de rapoarte de verosimilităţi ale unor vectori independenţi şi identic repartizaţi şi prin urmare putem aplica rezultatul stabilit de Dobb (Cap. VII, § 9 din [3]) care se extinde uşor la cazul vectorial. Deci

$$\lim_{n \to \infty} A_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} B_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

şi prin urmare

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

toate aceste limite fiind luate cu probabilitate 1 în raport cu Q. Ne aflăm deci în condiţiile teoremei 1 şi teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 17 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. P. Billingsley, *Statistical Inference for Marcov Processes.* The University of Chicago Press, 1961.
2. L. Breiman, *An Elementary Theorem Concerning Stationary Ergodic Processes.* The Annals of Mathematical Statistics, **29**, *2*, 592—595 (1958).
3. L. J. Doob, *Stochastic Processes.* New York, London, 1953.
4. O. Onicescu, G. Mihoc, *Lecţii de statistică matematică.* Bucureşti, 1958.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL FUNCȚIILOR LUI GREEN. II. PROBLEMA UNICITĂȚII INVERSIUNII INTEGRALEI LUI SCHWARTZ-CHRISTOFFEL RELATIVĂ LA POLIGOANE RECTILINII SIMPLU CONEXE *)

DE

D. MANGERON ¹), LIL. MATEESCU ²) și A. F. ȘESTOPAL ³)

În această lucrare, luîndu-se ca punct de plecare metoda reflectării și aplicarea ei la studiul problemelor de fizică-matematică, aprofundată în [1], se studiază cazurile în care inversiunea integralei lui Schwarz-Christoffel conduce la funcții analitice uniforme. Acest rezultat se obține în corespondență cu reprezentarea conformă a unui dreptunghi, a unui triunghi echilateral, a unui triunghi dreptunghi isoscel și a unui triunghi ce se obține prin împărțirea în două părți egale a unui triunghi echilateral, pe un semiplan.

1. Într-un șir de lucrări anterioare proprii [1]—[3], autorii au studiat problema de dezvoltare a funcțiilor lui Green relative la operatori diferențiali liniari cu derivate parțiale după soluții fundamentale. Rezultatele obținute au fost aplicate apoi la problema spectrelor și a funcțiilor caracteristice referitoare la plăci plane triunghiulare, pe cînd noi clase de probleme de contur de tip neeliptic, studiate în această ordine de idei de către primul dintre autori, au constituit izvor de inspirație pentru numeroși cercetători de peste hotare [7]—[9]. Lucrările [4]—[5] datorite primului dintre autori, consacrate ecuațiilor „polivibrante”⁴), întregesc într-un anume sens seria de lucrări, devenite curînd clasice, datorite acad. M. Nicolescu [6] și M. Picone [10]—[12] relative la ecuații poliarmonice și policalorice [13]—[14].

---

*) Versiunea în l. franceză a acestei lucrări a apărut în Rev. Roum. de math. pures et appl., **10**, *2* (1965).

¹) Institutul politehnic Iași.

²) Universitatea „Al. I. Cuza” din Iași.

³) Academia de Științe a R.S.S. Ukraina, U.R.S.S.

⁴) Ecuațiile polivibrante au fost numite de unii cercetători din U.R.S.S., S.U.A., Italia ș. a. „ecuațiile lui Mangeron”.

ST. CERC. MAT., TOM. 17. NR. 2, P. 215–226, BUCUREȘTI, 1965

În această lucrare, luîndu-se ca punct de plecare metoda reflectării şi aplicarea ei la studiul problemelor de fizică-matematică, se studiază cazurile în care inversiunea integralei lui Schwarz-Christoffel conduce la funcţii analitice uniforme. Acest rezultat se obţine în corespondenţă cu reprezentarea conformă a unui dreptunghi, a unui triunghi echilateral, a unui triunghi dreptunghi isoscel şi a unui triunghi ce se obţine prin împărţirea în două părţi egale a unui triunghi echilateral pe un semiplan.

2. Se cunoaşte rezultatul clasic de inversiune a funcţiei care reprezintă conform un semiplan pe un dreptunghi. Soluţia problemei este dată în acest caz cu ajutorul funcţiilor lui Jacobi. Vom studia celelalte cazuri luînd ca bază funcţiile lui Green relative la domeniile respective. Atare funcţii au fost construite de autori în [1] ca urmare a aplicării metodei reflectării. Astfel, de exemplu, partea reală a funcţiei lui Green $W(P, Q)$ relativă la triunghi echilateral are forma

$$W(P, Q) = -\frac{8}{9a^2\sqrt{3}} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n+k)\pi}{\frac{4\pi^2}{a^2}\left(\frac{n^2}{9} + \frac{k^2}{3}\right)} [\varphi_{kn}^{c}(P)\varphi_{kn}^{c}(Q) + \\ + \varphi_{kn}^{s}(P)\varphi_{kn}^{s}(Q)], \tag{1}$$

în care P_a şi Q sînt puncte de coordonate (x_1, x_2) şi (ξ_1, ξ_2) respectiv, a este lungimea laturii triunghiului echilateral, iar $\varphi_{kn}^{c}(P)$ şi $\varphi_{kn}^{s}(P)$ se determină prin formulele

$$\varphi_{kn}^{c}(P) = \sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}} x_2 \cos\frac{2n\pi}{3a} x_1 - \sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3} + x_2)\cos\frac{n\pi}{3a}(x_2\sqrt{3} - \\ - x_1) + \sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3} - x_2)\cos\frac{n\pi}{3a}(x_1 + x_2\sqrt{3}); \tag{2}$$

$$\varphi_{kn}^{s}(P) = \sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}} x_2 \sin\frac{2n\pi}{3a} x_1 - \sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3} + x_2)\sin\frac{n\pi}{3a}(x_2\sqrt{3} - \\ - x_1) - \sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3} - x_2)\sin\frac{n\pi}{3a}(x_1 + x_2\sqrt{3}).$$

Partea reală a funcţiei lui Green relativă la triunghi, ce se obţine prin subdivizarea unui triunghi echilateral în două părţi egale, se găseşte din formula (1) printr-o singură reflectare. În mod analog se determină şi funcţia lui Green referitoare la triunghi dreptunghic isoscel.

Înainte de a aduce forma biliniară (1) la forma dorită, se expun în cele ce urmează cîteva propoziţii ajutătoare importante.

a) Fie $\wp(z, \omega_1, \omega_2)$ funcţia eliptică a lui Weierstrass, în care prin $2\omega_1$ şi $2\omega_2$ s-au notat perioadele respective ale funcţiei considerate. Atunci cînd se va socoti util să se pună în evidenţă invarianţii g_2 şi g_3 ai funcţiei

$\wp(z, \omega_1, \omega_2)$, aceasta se va transcrie sub forma $\wp(z, g_2, g_3)$, în care g_2 şi g_3 se determină prin intermediul perioadelor ω_1 şi ω_2 prin formulele :

$$g_2 = 60 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' (m\omega_1 + n\omega_2)^{-6}, \tag{3}$$

simbolul Σ' indicînd faptul că cuplul simultan de numere $m = n = 0$ nu figurează în operaţia de sumare.

Vom folosi pentru funcţiile θ notaţiile $\theta_i(z, q)$ şi $\theta_i(z, \tau)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, în care prin q s-a notat un număr complex constant de modul mai mic decît 1, iar $\tau = \frac{\ln q}{\pi i}$.

b) LEMA 1. *Dacă* $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$, *atunci, pentru două valori arbitrare ale parametrilor* u *şi* v, *are loc egalitatea*

$$\wp'(u, \omega_1, \omega_2) - \wp'(v, \omega_1, \omega_2) =$$

$$= C(v) \frac{\theta_1\left(\frac{u - v)}{2\omega_1}, \tau\right) \theta_1\left(\frac{u + v e^{\frac{i\pi}{3}}}{2\omega_1}, \tau\right) \theta_1\left(\frac{u + v e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\omega_1}, \tau\right)}{\theta_1^3\left(\frac{u}{2\omega_1}, \tau\right)}, \tag{4}$$

în care s-a notat

$$C(v) = \frac{\pi^3 \theta_1'(0, \tau)}{4\omega_1^3 \theta_1\left(\frac{v}{2\omega_1}, \pi\right) \theta_1\left(\frac{v e^{\frac{i\pi}{3}}}{2\omega_1}, \tau\right) \theta_1\left(\frac{v e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\omega_1}, \tau\right)}. \tag{5}$$

Într-adevăr, funcţia $f(u) = \wp'(u, \omega_1, \omega_2) - \wp'(v, \omega_1, \omega_2)$, considerată ca fiind funcţie de argumentul u, este o funcţie eliptică de perioade $2\omega_1$ şi $2\omega_2$. Deoarece funcţia $f(u)$ este de ordinul al treilea, rezultă că ea posedă în orice paralelogram de perioade un număr de trei poluri şi trei zerouri şi numai trei. Se poate lua pentru sistemul complet de poluri mulţimea de valori

$$b_1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\omega_1, 2\omega_2)\,; \ b_2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\omega_1, 2\omega_2)\,; \ b_3 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\omega_1, 2\omega_2). \tag{6}$$

Deoarece $\tau = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$, rezultă că $g_2 = 0$. Acest lucru rezultă nemijlocit din calculele de mai jos :

$$g_2 \equiv 60\,\omega_1^{-4} \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-4} = 60\,\omega_1^{-4}\tau^{-1} \sum_{m,n}{}' (m + n\tau^2)^{-4} =$$

$$= 60\,\omega_1^{-4}\tau^{-4} \sum_{m,n}{}' (m \pm n\tau \pm n)^{-4} = \tau^{-4} g_2. \tag{7}$$

În consecință, formula omogeneității pentru $\wp'$ ia forma

$$\wp'(\lambda z, 0, \lambda^{-6} q_3) = \lambda^{-3}\, \wp(z, 0, q_3). \tag{8}$$

Prin urmare din (8) se deduce că $f(-4e^{\pm i\frac{\pi}{3}}) = 0$. Aşadar, sistemul de zerouri ale funcției $f(u)$ este constituit din mulțimea de numere

$$a_1 \equiv v \,(\mathrm{mod}\, 2\omega_1, 2\omega_2),\quad a_2 \equiv -v e^{i\frac{\pi}{3}} \,(\mathrm{mod}\, 2\omega_1, 2\omega_2),$$

$$a_3 \equiv -v e^{-i\frac{\pi}{3}} \,(\mathrm{mod}\, 2\omega_1, 2\omega_2). \tag{9}$$

Este evident că acest sistem este un sistem complet. Rezultă, pe baza unei teoreme clasice, că $f(u)$ poate fi reprezentată prin intermediul funcției θ, în modul următor

$$f(u) = A\,\frac{\theta_1\left(\dfrac{x-v}{2\omega_1}, \tau\right)\theta_1\left(\dfrac{u+v e^{\frac{i\pi}{3}}}{2\,\omega_1}, \tau\right)\theta_1\left(\dfrac{x+v e^{-\frac{i\pi}{2}}}{2\,\omega_1}, \tau\right)}{\theta_1^3\left(\dfrac{u}{2\,\omega_1}, \tau\right)}, \tag{10}$$

în care A nu depinde de u. Înmulțind ambii membri ai egalității (10) prin u^3 şi trecînd la limită atunci cînd u tinde către zero, se obține (4).

c) LEMA 2. *Pentru orice număr complex* τ *avînd partea imaginară nonnegativă şi pentru* $z = \dfrac{u}{\omega_1}$ *arbitrar au loc formulele :*

$$\frac{\theta_1(z, \tau)\,\theta_3(z, \tau)}{\theta_1\left(\dfrac{2z}{\tau-1}, -\dfrac{2\tau}{\tau-1}\right)} = \frac{1}{\tau-1}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\, e^{-i\frac{2\pi}{\tau-1}z^2}\, \frac{\theta_3\left(0, -\dfrac{\tau}{\tau-1}\right)\theta_0\left(0, -\dfrac{\tau}{\tau-1}\right)}{\theta_0\left(0, -\dfrac{2\tau}{\tau-1}\right)}, \tag{11}$$

$$\frac{\theta_0((z, \tau)\,\theta_2(z, \tau)}{\theta_0\left(\dfrac{2z}{\tau-1}, -\dfrac{2\tau}{\tau-1}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{\tau-1}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\, e^{-i\frac{2\pi}{\tau-1}z^2}\, \frac{\theta_3\left(0, -\dfrac{\tau}{\tau-1}\right)\theta_0\left(0, -\dfrac{\tau}{\tau-1}\right)}{\theta_0\left(0, -\dfrac{2\tau}{\tau-1}\right)}. \tag{12}$$

Într-adevăr, folosind formulele de transformare liniară relative la funcţiile θ, se obţine succesiv

$$\theta_1(z, \tau)\,\theta_3(z, \tau) = \frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}}\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}}\,e^{-i\frac{2\pi}{\tau}z^2}\,\theta_1\left(\frac{z}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}\right)\theta_3\left(\frac{z}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\tau}\,e^{-i\frac{2\pi}{\tau}z^2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\,\theta_1\left(\frac{z}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}+1\right)\theta_0\left(\frac{z}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}+1\right) =$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\tau-1}\,e^{-i\frac{2\pi}{\tau-1}z^2}\,\theta_1\left(\frac{z}{\tau-1},\ -\frac{\tau}{\tau-1}\right)\theta_2\left(\frac{z}{\tau-1},\ -\frac{\tau}{\tau-1}\right). \tag{13}$$

Folosind apoi formula lui Lunden, se obţine (11). Dacă în formula (11) z se înlocuieşte prin $z + \frac{1}{2}\tau$, se obţine relaţia (12).

3. În acest punct se stabilesc unele formule de sumare, menite a ajuta la aducerea formei biliniare (1), precum şi a formelor analoge stabilite pentru celelalte triunghiuri considerate, la forma de care avem nevoie.

Considerînd, înainte de toate, funcţia lui Green pentru dreptunghi, se obţine

$$K(P,Q) = -\frac{4}{ab}\sum_{k,\,n-1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{k\pi}{a}\xi_1\sin\frac{n\pi}{b}x_2\sin\frac{n\pi}{b}\xi_2}{\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{\theta_1\left(\frac{z-\zeta}{2a},\ q\right)\theta_1\left(\frac{z+\zeta}{2a},\ q\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\bar{\zeta}}{2a},\ q\right)\theta_1\left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2a},\ q\right)}\right], \tag{14}$$

în care s-a notat $q = e^{-\pi\frac{k}{a}}$, $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$. În mod analog se obţine

$$-\frac{4}{ab}\sum_{k,\,n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{k\pi}{a}x_1\cos\frac{k\pi}{a}\xi_1\sin\frac{n\pi}{b}x_2\sin\frac{n\pi}{b}\xi_2}{\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{\theta_1\left(\frac{z-\zeta}{2a},\ q\right)\theta_1\left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2a},\ q\right)}{\theta_1\left(\frac{z+\zeta}{2a},\ q\right)\theta_1\left(\frac{z-\bar{\zeta}}{2a},\ q\right)}\right]. \tag{15}$$

Din (14), aplicînd de patru ori principiul reflectării, se obţine

$$-\frac{4}{ab}\sum_{k,\,n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k-1}{2a}\pi x_1\sin\frac{2k-1}{2a}\pi\xi_1\sin\frac{2n-1}{2b}\pi x_2\sin\frac{2n-1}{2b}\pi\xi_2}{\pi^2\left[\left(\frac{2k-1}{2a}\right)^2+\left(\frac{2n-1}{2b}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\varphi(z-\zeta)+\varphi(z+\zeta)-\varphi(z-\bar\zeta)-\varphi(z+\bar\zeta)\right], \tag{16}$$

în care s-a pus

$$\varphi(a,t)=\ln\frac{\theta_1(t,q)\,\theta_3(t,q)}{\theta_2(t,q)\,\theta_0(t,q)}. \tag{17}$$

În mod absolut analog se obţine din (15).

$$-\frac{4}{ab}\sum_{k,\,n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2k-1}{2a}\pi x_1\cos\frac{2k-1}{2a}\pi\xi_1\sin\frac{2n-1}{2b}\pi x_2\sin\frac{2n-1}{2b}\pi\xi_2}{\pi^2\left[\left(\frac{2k-1}{2a}\right)^2+\left(\frac{2n-1}{2b}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\varphi(z-\zeta)+\varphi(z+\zeta)-\varphi(z+\zeta)-\varphi(z-\bar\zeta)\right]. \tag{18}$$

Adunînd membru cu membru egalităţile (14), (15), (16) şi (18) şi folosind formula relativă la argumentul dublu

$$\theta_1(2z,q)\,\theta_2(0,q)\,\theta_3(0,q)\,\theta_0(0,q)=2\theta_1(z,q)\,\theta_2(z,q)\,\theta_3(z,q)\,\theta_0(z,q) \tag{19}$$

precum şi prima din formulele stabilite în lema 1, se obţine relaţia următoare

$$-\frac{4}{ab}\sum_{k,\,n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(k+n)\pi}{2}\,\frac{\cos\frac{k\pi}{2a}(x_1-\zeta_1)\sin\frac{n\pi}{2b}x_2\sin\frac{n\pi}{2b}\zeta_2}{\pi^2\left(\frac{k^2}{4a^2}+\frac{n^2}{4b^2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{e^{-i\frac{2\pi}{\tau-1}\left(\frac{z-\zeta}{4a}\right)^2}\theta_1\left(\frac{z-\zeta}{2a(\tau-1)},\,-\frac{2\tau}{\tau-1}\right)}{e^{-i\frac{2\pi}{\tau-1}\left(\frac{z-\bar\zeta}{4a}\right)^2}\theta_1\left(\frac{z-\bar\zeta}{2a(\tau-1)},\,-\frac{2\tau}{\tau-1}\right)}\right], \tag{20}$$

în care s-a notat $\tau = i\frac{b}{a}\cdot$ Plecînd acum de la formula (20), se poate suma forma biliniară (1). Se găseşte mai întîi, dacă se ţine seama de formula (4):

$$-\frac{8}{9a^2\sqrt{3}}\sum_{k,\,n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(n+k)\pi}{\pi^2\left[\frac{n}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2}+\left(\frac{k}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\right)^2\right]}\sin\frac{k\pi}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}x_2\cos\frac{n\pi}{\frac{3a}{2}}x_1\,\varphi^{c}_{kn}(Q)+$$

$$+\sin\frac{k\pi}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}x_2\sin\frac{n\pi}{\frac{3a}{2}}x_1\,\varphi^{3}_{kn}(Q)=\frac{1}{6\pi}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\zeta,\omega_1,\omega_2)}{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)}\right]\cdot \qquad (21)$$

În (21) s-a pus

$$\omega_1=-\frac{a\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}},\ \omega_2=\frac{a\sqrt{3}}{2}i,\ \tau'=\frac{\omega_2}{\omega_1}=e^{-i\frac{\pi}{3}}. \qquad (22)$$

Folosind acum formula

$$\wp'(\pm\rho z,0,g_3)=\mp\wp'(z,0,g_3),\ \rho=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}, \qquad (23)$$

se obţine în definitiv pentru $W(P,Q)$:

$$W(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\zeta,\omega_1,\omega_2)}{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)}\right|\cdot \qquad (24)$$

Funcţia lui Green $U(P,Q)$ relativă la triunghiul ce se obţine prin divizarea unui triunghi echilateral în două părţi egale se găseşte din (24) printr-o simplă reflectare. Avem, în consecinţă,

$$U(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\left|\frac{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\zeta,\omega_1,\omega_2)}{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)}\right|-\right.$$

$$\left.-\ln\left|\frac{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\zeta^*,\omega_1,\omega_2)}{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\bar{\zeta}^*,\omega_1,\omega_2)}\right|\right., \qquad (25)$$

în care s-a pus $\zeta^*=\bar{\zeta}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Calcule nu prea anevoioase ne conduc la următorul rezultat:

$$U(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\wp'^2(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'^2(\zeta,\omega_1,\omega_2)}{\wp'^2(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'^2(\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)}\right|\cdot \qquad (26)$$

Pentru determinarea funcţiei lui Green relativă la un triunghi dreptunghi isoscel, formula (14) se transcrie în cazul în care se ia $b = a$ în modul următor:

$$K(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left| \ln \frac{\wp(z, \omega_1', \omega_2') - \wp(\zeta, \omega_1', \omega_2')}{\wp(z, \omega_1', \omega_2') - \wp(\bar{\zeta}, \omega_1', \omega_2')} \right|, \tag{27}$$

în care s-a pus $\omega_1' = a$, $\omega_2' = ia$, $\tau = i$. Deoarece $\tau = i$, rezultă că cel de-al doilea invariant al funcţiei $\wp$ este egal cu zero şi formula de omogenitate se transcrie sub forma:

$$\wp(\lambda z, \lambda^{-4} g_2, 0) = \lambda^{-2} \wp(z, g_2, 0). \tag{28}$$

Punînd în (18) $\lambda = i$, se obţine

$$\wp(\pm iz, g_2, 0) = -\wp(z, g_2, 0). \tag{29}$$

Din (27) şi (29) se obţine pentru funcţia lui Green $V(P, Q)$ relativă la triunghi dreptunghi isoscel expresia

$$V(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\wp^2(z, \omega_1', \omega_2') - \wp^2(\zeta, \omega_1', \omega_2')}{\wp^2(z, \omega_1', \omega_2') - \wp^2(\bar{\zeta}, \omega_1', \omega_2')} \right|. \tag{30}$$

4. În cele ce urmează ne vom ocupa de inversiunea următoarelor integrale

$$z = \int_{w_0}^{w} \frac{\mathrm{d}u}{P_{3}^{2}(u)}, \tag{31}$$

$$z = \int_{w_0}^{w} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt[6]{(u - a)^3 (u - b)^4 (u - c)^5}}, \tag{32}$$

$$z = \int_{w_0}^{w} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u - a)^2 (u - b)^3 (u - c)^3}}, \tag{33}$$

în care prin $P_3(u)$ s-a notat un polinom de gradul al treilea fără zerouri multiple. Drumul de integrare poate fi orice curbă plană ce nu trece prin zerourile expresiei de sub radical.

Prima integrală realizează, în cazul tuturor zerourilor polinomului $P_3(u)$, numere reale, reprezentarea conformă a unui semiplan pe un triunghi echilateral, a doua integrală realizează reprezentarea conformă pe un triunghi dreptunghi avînd unghiurile ascuţite $\frac{\pi}{3}$ şi $\frac{\pi}{6}$ şi, în fine, cea de-a treia integrală realizează reprezentarea conformă a semiplanului pe un triunghi dreptunghi isoscel.

Derivînd relaţiile (31)—(33), se obţine

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \sqrt[3]{(w-a)^2 (w-b)^2 (w-c)^2}, \tag{31'}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \sqrt[6]{(w-a)^3 (w-b)^4 (w-c)^5}, \tag{32'}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \sqrt[4]{(w-a)^2 (w-b)^3 (w-c)^3}. \tag{33'}$$

Se cere, prin urmare, să se determine soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale (31')—(33') sub forma $w = f(z)$, în care se ţine seama de condiţia iniţială $w_0 = f(0)$. Ţinînd seama de cele expuse mai sus, soluţia ecuaţiei (31') are forma

$$w = \frac{\alpha \wp' + \beta}{\gamma \wp' + \delta}, \tag{34}$$

în care prin $\wp'$ se înţelege $\wp'(z, 0, q_3)$. Dacă se introduce o nouă variabilă independentă u pe baza relaţiei

$$w = \frac{c \wp'(u, 0, q_3) - (c-a)(c-b)(ac+bc-2ab)}{\wp'(u, 0, q_3) - (c-a)(c-b)(2c-a-b)}, \tag{35}$$

atunci ecuaţia (31') se aduce la forma $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = -\frac{\varepsilon}{3}$ în care s-a notat $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$, iar $q_3 = -(c-a)^2 (c-b)^2 (a-b)^2$.

Se obţin prin urmare toate cele trei forme ale soluţiilor ecuaţiei (31') şi anume:

$$w_1(z) = \frac{c\wp'\left(-\frac{\varepsilon_j z}{3} + A, 0, q_3\right) - (c-a)(c-b)(ac+bc-2ab)}{\wp'\left(-\frac{\varepsilon_j z}{3} + A, 0, q_3\right) - (c-a)(c-a)(2c-a-b)}, \tag{36}$$

$$(j = 1, 2, 3).$$

Ţinînd seama de formula de omogenitate (8), soluţia ecuaţiei (31') poate fi pusă sub forma

$$w(z) = \frac{c\wp'\left(\frac{z}{3} + C, 0, q_3\right) + (c-a)(c-b)(ac+bc-2ab)}{\wp'\left(\frac{z}{3} + C, 0, q_3\right) + (c-a)(c-b)(2c-a-b)}, \tag{37}$$

în care prin C s-a notat constanta de integrare.

Din condiţia iniţială $w_0 = f(0)$ se poate determina fără greutate $\wp'(C, 0, q_3)$ şi elimina apoi din (37) constanta folosind formula de adunare.

În mod analog se poate obţine soluţia generală a ecuaţiei (32'). Această soluţie are forma

$$w = \frac{c\,\wp'^2\left(\frac{z}{6} + C, 0, q_1\right) - a(a-c)^2(c-b)^4}{\wp'^2\left(\frac{z}{6} + C, 0, q_1\right) - (a-c)^2(c-b)^4}, \qquad (38)$$

în care s-a notat

$$q_1 = (b-a)\,(a-c)^2\,(c-b)^4.$$

În mod analog se determină soluţia generală a ecuaţiei (33')

$$w = \frac{c\wp^2\left(\frac{z}{2} + C, q_2, 0\right) - b\,(c-a)\,(c-b)^2}{\wp^2\left(\frac{z}{2} + C, q_2, 0\right) - (c-a)^2\,(c-b)^2}, \qquad (39)$$

în care s-a pus

$$q_2 = \frac{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)^2}{4}.$$

5. Formulele obţinute mai sus permit deducerea altor formule pentru integrale ce se exprimă prin funcţii multiforme. Dacă se concentrează atenţia asupra dezvoltărilor relative la alte domenii, se poate determina, folosind principiul de simetrie al lui Schwarz, reprezentarea conformă a unei vaste serii de domenii poligonale, constituite din triunghiuri echilaterale şi din triunghiuri ce se obţin din subdivizarea triunghiurilor echilaterale în două părţi egale, pe un semiplan. De exemplu, se poate obţine nemijlocit funcţia care reprezintă pe un semiplan un romb avînd unghiul ascuţit egal cu $\frac{\pi}{3}$.

Rezultatele obţinute pot fi legate nemijlocit de o serie de lucrări recente elaborate de M. Marden şi P. F. Filceakov, relative respectiv la studiul punctelor critice ale unor combinaţii liniare a funcţiilor lui Green precum şi la determinarea constantelor ce figurează în integrala lui Christoffel-Schwarz cu ajutorul seriilor de puteri generalizate [23], [24].

Rezultatele obţinute de autori vor fi expuse într-una din lucrările aflate în curs de elaborare, ţinîndu-se seama de o serie de probleme studiate în cadrul cunoscutei şcoli româneşti de teoria funcţiilor de variabilă complexă condusă de regretatul acad. S. Stoilov [25]—[27], şi în particular avîndu-se în vedere unele rezultate noi elaborate de Cabiria Andreian-Cazacu [28], [29].

Primită la redacţie la 28 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Д. Манжерон, А. Ф. Шестопал, *Вклад в задачи применения функции Грина. I. Разложение функции Грина линейных дифференциальных операторов в частных производных по фундаментальным решениям.* Revue Roumaine de math. pures et. appl., **9** (1964). Академику М. Николеску к 60-й годовщине со дня рождения
2. D. Mangeron, A. F. Şestopal, *Il problema di analisi spettrale delle piastre triangolari.* Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXV**, *1* (1964).
3. D. Mangeron, Lil. Mateescu, A. F. Şestopal, *The Green's Functions Expansions in Series of Fundamental Solutions with Applications in Mechanics of Vibrations.* Istanbul Tekn. Univ. Bül. (sub tipar).
4. D. Mangeron, *Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière concernant certaines équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* C. R. Acad. Sci., Paris, **204**, 94—96, 544—546; 1022—1024 (1937).
5. D. Mangeron, *Sur les fonctions de Green relatives à une nouvelle classe de problèmes à la frontière.* Mathematica, Cluj **XIV**, 35—38 (1938).
6. M. Nicolescu, *Les fonctions polyharmoniques.* Hermann, Paris, 1936.
7. F. Rossi, *Sopra il metodo di Mangeron in certi problemi non lineari.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **IV (XIII)**, *3—4*, 41—44 (1963).
8. F. Manaresi, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di un equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* Rend. Sem. Univ. Padova, **XXIII**, 163—213 (1954).
9. Ю. М. Березанский, *О краевых задачах для общих дифференциальных операторов в частных производных.* Доклады Акад. Наук СССР, **6**, *122*, 959—962 (1958).
10. D. Mangeron, *Funcţiile lui Green de ordin p în teoria ecuaţiilor cu derivate totale de ordin superior.* Revista ştiinţifică, Iaşi, **XXXII**, *1*, 4 (1964).
11. Lil. Mateescu, *Quelques théorèmes concernant les recherches de M. D. Mangeron et L. E. Kriyochéine relatives à une nouvelle classe d'équations intégro-différentielles.* Bull. Acad. Roy. Belgique, Sci., s. 5, **L** (1964).
12. M. Picone, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Ann. Sci. Univ. Jassy, I-e Sect., **XXVI**, *1*, 183—232 (1940).
13. M. Nicolescu, *Sur l'équation itérée de la chaleur.* St. cerc. mat., 1954.
14. D. Mangeron, L. E. Krivosein, *Teoremi di esistenza, di unicità e di valutazione delle soluzioni di alcuni problemi al contorno concernenti equazioni integro-differenziali con operatori esterni di tipo parabolico.* Accad. Naz. dei Lincei, Rend. Cl. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXVI**, *4*, 451—456 (1964).
15. D. Mangeron, L. E. Krivosein, *Sulla risoluzione di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate parziali.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIV**, 1—25 (1964).
16. Д. Манжерон, Л. Е. Кривошеин, *Решение задачи Гурса для одного класса интегро- дифференциальных уравнений.* Доклады Третьей Сибирской конференции по математике и механике. Изд. Томского Ун-та, 133—135 (1964).
17. Д. Манжерон, Л. Е. Кривошеин, *К решению начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.* Материалы 12-ой научной конференции проф. -препод. состава физ. мат. фак. ;Кирг. Гос. Ун-т, Фрунзе, 17—20 (1964).
18. D. Mangeron, L.E. Krivoşein, *The polynomial method in the approximate determination of the solution of the boundary value problem of linear integro-differential equations.* Chinese Math. *3*, 190—193 (1963).

19. А. Ф. ШЕСТОПАЛ, *Разложение функции Грина линейных дифференциальных операторов эллиптического типа по их фундаментальным решениям в некоторых многоугольных областях.* Analele ştiinţ. Univ., „Al. I. Cuza", Iaşi, s.n., secţ. I-a (mat. fiz., chim.) IX (1964).

20. А. Ф. ШЕСТОПАЛ, *Применение метода отражений к некоторым бигармоническим задачам.* Укр. матем. журнал, **XIII**, *1* (1961).

21. D. Mangeron, *Contribuţii la studiul ecuaţiilor polivibrante.* I. *Metode de calcul numeric al unor noi clase de probleme de contur neliniare.* St. cerc. mat., **15**, *7*, 811—823 (1964).

22. D. Mangeron, A. F. Shestopal, *The Problem of Triangular Plate Spectra.* Revue Roumaine des Sci. techn. Série de Méc. appl., **9**, *1*, 835—842 (1964).

23. M. Marden, *The Critical Points of a Linear Combination of Green's Functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **107**, *3*, 369—381 (1963).

24. П. Ф. ФИЛЬЧАКОВ, *Определение констант интеграла Христоффеля-Шварца при помощи обобщенных степенных рядов.* В сборн. „Некоторые проблемы математики и механики", Новосибирск, Сиб. отд. Акад наук СССР, 224—226 (1961).

25. C. Constantinescu, A. Cornea, *Analytische Abbildungen Riemannscher* Flächen. Rev. math. pures et appl., **8**, *1*, 67—72 (1963).

26. Cabiria Andreian-Cazacu, *Sur les transformations pseudoanalytiques* Rev. math. pures et appl., **2**, 283—397 (1957).

27. Jurchescu Martin, *Suprafeţe riemanniene şi aplicaţii olomorfe.* St. cerc. mat., **12**, *2*, 575—590 (1961).

28. Cabiria Andreian-Cazacu, *Überlagerungseigenschaften Riemannscher Flächen*, Rev. math. pures et appl., **6**, *4*, 1685—701 (1961).

29. S. Stoilow, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă. II. Funcţii armonice, Suprafeţe Riemanniene* (in colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu). Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1958.

ASUPRA REPARTIȚIEI LIMITĂ PENTRU PROCESELE STOCASTICE CU TIMP DISCRET ALEATOR *)

DE

SILVIU GUIAȘU
Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu nr. 47, București

În această lucrare se cercetează repartiția limită pentru procesele stocastice cu timp discret aleator. Se obține o teoremă generală din care rezultă drept cazuri particulare teorema de bază a lui F. J. Anscombe din 1952 și teorema enunțată de către A. Rényi în 1960 și demonstrată de către J. Mogyoródi în 1962 și independent de către J. R. Blum, D. L. Hanson și J. I. Rosenblatt în 1963. Rezultatele din această lucrare au fost anunțate în nota [8].

§ 1. NOTAȚII

În această lucrare vom nota cu:

$\{E, \mathcal{K}, P\}$ — un cîmp de evenimente probabilizat, format din mulțimea evenimentelor $\mathcal{K}$, formate din mulțimea de bază E, cărora li se atașează probabilitatea P;

$\mathcal{L}^2(E, \mathcal{K}, P)$ — mulțimea variabilelor aleatoare de pătrat integrabil definite pe $\{E, \mathcal{K}, P\}$;

(SK) — mulțimea familiilor de variabile aleatoare independente în sensul lui Steinhaus-Kac;

M_1, M_2 — momentele de primul și de-al doilea ordin;

$P_B(A)$ — probabilitatea evenimentului A ($A \in \mathcal{K}$) condiționată de evenimentul B ($B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$);

$[q]$ — partea întreagă a numărului real q.

$\xrightarrow{P}$ — convergența în probabilitate în sensul lui F. P. Cantelli.

---

*) Versiunea în l. engleză a acestei lucrări va apărea în Rev. Roum. de math. pures et appl., **10**, *3* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 227–251, BUCUREȘTI, 1965

§ 2. PRELIMINARII

Lucrarea de faţă se ocupă de repartiţia limită a unui proces stocastic cu timp discret aleator, adică de repartiţia limită a unui proces stocastic de forma

$$\{Y_{N_r},\quad 1 \leqslant r \leqslant \infty\}, \tag{2.1}$$

unde $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$ este un şir de variabile aleatoare definite pe $\{E,\ \mathcal{K},\ P\}$, iar $\{N_r,\ 1 \leqslant r < \infty\}$ este un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive, definite tot pe $\{E,\ \mathcal{K},\ P\}$. Asupra modului în care timpul aleator $\{N_r,\ 1 \leqslant r < \infty\}$ se scurge la infinit se pot face diferite presupuneri, şi anume, dacă $(n_r)_{1 \leqslant r < \infty}$ este un şir crescător de întregi pozitivi, ce tinde la infinit împreună cu r, se cere ca

$$\frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{P} \lambda, \tag{2.2}$$

unde λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare. În particular, sînt interesante cazurile în care $\lambda \equiv 1$ sau $\lambda \equiv c$, unde c este o constantă pozitivă sau în care λ este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete.

Problema de care ne ocupăm este următoarea : în ce caz repartiţia limită a procesului stocastic $\{Y_{N_r},\ 1 \leqslant r < \infty\}$ este aceeaşi cu repartiţia limită a procesului $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$?

Din punct de vedere istoric, prima teoremă generală de conservare a repartiţiei limită cînd se trece la timp aleator, a fost dată de F. J. Anscombe în 1952 [1], [9] pentru cazul în care în condiţia (2.2) $\lambda \equiv 1$. De fapt, în 1948 H. Robbins [17] iar mai tîrziu M. Loève [10] şi R. L. Dobruşin [3] au studiat repartiţia limită a sumelor aleatoare de variabile aleatoare independente

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_r},$$

unde N_r este o variabilă aleatoare, pentru orice r, cu valori întregi pozitive, care, pentru $r \to \infty$ converge către ∞, însă în aceste cercetări s-a presupus că N_r este, pentru orice r, independentă de variabilele aleatoare x_j $(1 \leqslant j < \infty)$. În 1957, A. Rényi [13] a redemonstrat teorema lui F. J. Anscombe în cazul particular al procesului format din sume normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate, caz în care repartiţia limită se conservă cînd se trece la timpul aleator, fără impunerea de condiţii suplimentare asupra procesului, aplicînd această teoremă pentru obţinerea mai rapidă a unui rezultat al lui L. Takács [18], care dăduse un exemplu de proces stocastic în care timpul aleator N_r depindea esenţial de variabilele x_j $(1 \leqslant j < \infty)$. De fapt A. Rényi a iniţiat extinderea condiţiei (2.2), de la cazul $\lambda \equiv 1$, considerat de F. J. Anscombe, la cazul $\lambda \equiv c$ (c constantă pozitivă) în [13], şi la cazul λ variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete, în [15], toate acestea tot în cazul particular al sumelor normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate. Examinînd teorema generală dată de F. J. Anscombe [1], J. Mogyoródi în 1961, [11] a arătat că în cazul sumelor normate de variabile aleatoare independente, cu repartiţie oarecare, condiţia lui Anscombe este nu numai suficientă ci şi necesară, dîndu-i şi o expresie echivalentă mai simplă. În 1963, autorul [4], [7] a dat o generalizare a teoremei lui F. J. Anscombe, în cazul în care în (2.2), λ este o variabilă aleatoare pozitivă, cu valori discrete, obţinînd condiţii care sînt satisfăcute de procesul sumelor normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate, reobţinîndu-se, în acest caz particular, rezultatul lui A. Rényi [15]. În 1960, A. Rényi [15] a anunţat menţinerea teoremei stabilită de dînsul asupra repartiţiei limită a sumelor normate de variabile aleatoare independente identic repartizate, şi în cazul în care în (2.2) λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare. Demonstraţia acestui lucru a fost dată în 1962 de J. Mogyoródi [12] şi independent de către J. R. Blum, D. L. Hanson şi J. I. Rosenblatt în 1963, [2].

În lucrarea de faţă, se dă o teoremă generală asupra repartiţiei limită a proceselor stocastice cu timp discret aleator, din care rezultă teorema lui F. J. Anscombe [1], teoremele lui A. Rényi [13], [15], suficienţa condiţiei lui J. Mogyoródi [11], teorema demonstrată de J. Mogyoródi [12] şi J. R. Blum, D. L. Hanson, J. I. Rosenblatt [2], precum şi teoremele autorului [6], [7].

În cursul lucrării vom folosi următoarele leme:

Lema 1. (J. R. Blum, D. L. Hanson, J. I. Rosenblatt [2]). *Fie* $\{W_n, 1 \leqslant n < \infty\}$, $\{x_{m,n}, 1 \leqslant m < \infty, 1 \leqslant n < \infty\}$, $\{y^{(j)}_{m,n}, 1 \leqslant m < \infty, 1 \leqslant n < \infty\}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, $\{z^{(j)}_{m,n}, 1 \leqslant m < \infty, 1 \leqslant n < \infty\}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ *şiruri simple şi duble de variabile aleatoare. Presupunem*:

$$W_n = x_{m,n} + \sum_{j=1}^{k} y^{(j)}_{m,n}\, z^{(j)}_{m,n}$$

(A) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi* $1 \leqslant j \leqslant k$

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n} P\left(\{|y^{(j)}_{m,n}| > \varepsilon\}\right) = 0$$

(B) *pentru* $1 \leqslant j \leqslant k$

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{m} \limsup_{n} P\left(\{|z^{(j)}_{m,n}| > M\}\right) = 0$$

(C) *funcţiile de repartiţie ale şirului* $\{x_{m,n}, 1 \leqslant m < \infty, 1 \leqslant n < \infty\}$ *converg către funcţia de repartiţie* $\mathfrak{F}$, *pentru fiecare* m *fix.*

Atunci funcţiile de repartiţie ataşate şirului $\{W_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *converg către* $\mathfrak{F}$.

Lema 2. (J. R. Blum, D. L. Hanson, J. I. Rosenblatt [2]). *Fie* $(k_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *şi* $(m_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *două şiruri tinzînd la infinit şi* A_n *un eveniment depinzînd numai de variabilele aleatoare* $x_{k_n}, \ldots, x_{m_n}$. *Dacă* A *este un eveniment oarecare* $P(A) > 0$, *atunci*

$$\limsup_{n} P_A(A_n) = \limsup_{n} P(A_n)$$

Lema 3. (A. Rényi [16]). *Fie* $\{x_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *un şir de variabile aleatoare definite pe* $\{E, \mathcal{K}, \mathrm{P}\}$, $\{x_n, 1 \leqslant n < \infty\} \in (SK)$, *fie* $(C_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un şir de numere reale şi fie* $(D_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un şir de numere pozitive tinzînd la infinit. Notăm*

$$\eta_n = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - C_n}{D_n}.$$

Dacă în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} P\ (\{\eta_n < a\}) = \mathcal{F}(a),$$

atunci oricare ar fi $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$, *avem în toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$

$$\lim_{n\to\infty} P_B\ (\{\eta_n < a\}) = \mathcal{F}(a).$$

§ 3. TEOREMA GENERALĂ

Fie $\lambda > 0$ o variabilă aleatoare oarecare faţă de cîmpul de evenimente probabilizat $\{E, \mathcal{K}, P\}$. Fie de asemenea $\{\nu_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ un şir de variabile aleatoare faţă de $\{E, \mathcal{K}, P\}$, fiecare avînd o mulţime cel mult numărabilă de valori pozitive

$$\nu_m\colon\ 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \ldots < a_{k,m} < a_{k+1,m} < \ldots \quad (1 \leqslant m < \infty)$$

astfel ca

$$|\lambda - \nu_m| < c_m,$$

unde $(c_m)_{1\leqslant m<\infty}$ este un şir de numere pozitive, avînd proprietatea că $c_m \cdot m \searrow 0$ cînd $m \to \infty$ şi deci $c_m \searrow 0$ cînd $m \to \infty$. Să introducem evenimentele:

$$A_{k,m} = \{\nu_m = a_{k,m}\}, \qquad (1 \leqslant k < \infty,\ 1 \leqslant m < \infty)$$

$$A_{k',m} \cap A_{k'',m} = \emptyset\ (k' \neq k''),\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m} = E \qquad (1 \leqslant m < \infty).$$

Remarcă. Oricare ar fi variabila aleatoare $\lambda > 0$ se poate întotdeauna construi un şir $\{\nu_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ de variabile aleatoare, cu proprietăţile de mai sus. Astfel, luînd

$$A_{k,m} = \left\{\frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{k}{2^m}\right\} \quad (1 \leqslant k < \infty, 1 \leqslant m < \infty)$$

să definim $\nu_m = \frac{k}{2^m}$ pe $A_{k,m}$ pentru $1 \leqslant k < \infty, 1 \leqslant m < \infty$, în care caz

$$0 < \nu_m - \lambda \leqslant \frac{1}{2^m},$$

unde $\frac{1}{2^m} \cdot m \searrow 0$ cînd $m \to \infty$

TEOREMA 1. *Fie* $\{Y_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *un şir de variabile aleatoare faţă de cîmpul de evenimente probabilizat* $\{E, \mathcal{K}, P\}$. *Fie* $\{N_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *un şir de variabile aleatoare, cu valori întregi pozitive, faţă de* $\{E, \mathcal{K}, P\}$. *Fie* $(w_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *un şir de numere pozitive,* $(n_r)_{1 \leqslant r < \infty}$ *un şir crescător de întregi pozitivi tinzînd la infinit împreună cu* r, θ *un număr real şi* $\mathcal{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Să presupunem că avem satisfăcute condiţiile :*

$$(c_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r \to \infty]{P} \lambda.$$

(c_2) *În toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$

$$\lim_{n \to \infty} P_{A_{k,m}}(\{Y_n - \theta < a w_n\}) = \mathcal{F}(a)$$

pentru toate valorile lui k $(1 \leqslant k < \infty)$ *şi ale lui* m $(1 \leqslant m < \infty)$ *pentru care* $P(A_{k,m}) > 0$.

(c_3) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_n P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\Big\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n < i < (a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \varepsilon w_{[na_{k,m}]}\Big\} \cap A_{k,m}\Big)\Big) = 0.$$

(c_4) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_r P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Atunci

$$\lim_{r \to \infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a w_{[n_r \lambda]}\}) = \mathcal{F}(a) \tag{3.1}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

Dacă în loc de condiţia (c_4) *avem condiţia :*

(c_4') *Pentru orice* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_r P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{N_r}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

atunci, în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$,

$$\lim_{r \to \infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a w_{N_r}\}) = \mathcal{F}(a). \tag{3.2}$$

Demonstraţie. *a)* Să notăm pentru $1 \leqslant r < \infty$, $1 \leqslant m < \infty$,

$$x_{m,r} = z_{m,r}^{(2)} = \frac{1}{w_{[n_r \nu_m]}}(Y_{[n_r \nu_m]} - \theta)$$

$$y_{m,r}^{(1)} = \frac{1}{w_{[n_r \nu_m]}}(Y_{N_r} - Y_{[n_r \nu_m]})$$

$$y^{(2)}_{m,r} = \frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} - 1$$

$$z^{(1)}_{m,r} = \frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}}$$

$$W_r = \frac{1}{w_{[n_r \lambda]}} (Y_{N_r} - \theta). \tag{3.3}$$

Avem descompunerea

$$W_r = x_{m,r} + y^{(1)}_{m,r}\, z^{(1)}_{m,r} + y^{(2)}_{m,r}\, z^{(2)}_{m,r}, \ (1 \leqslant r < \infty, 1 \leqslant m < \infty). \tag{3.4}$$

Să arătăm că sînt satisfăcute ipotezele lemei 1.

b) Pentru orice m şi k,

$$([n_r a_{k,m}])_{1 \leqslant r < \infty} \subset N, \ (N \text{ mulţimea numerelor naturale}).$$

Din condiţia (c$_2$) rezultă

$$\lim_{r \to \infty} P_{A_{k,m}} (\{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta < a\, w_{[n_r a_{k,m}]}\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$, pentru toate valorile lui k şi m pentru care $P(A_{k,m}) > 0$. Pentru orice m $(1 \leqslant m < \infty)$

$$\lim_{r \to \infty} P(\{x_{m,r} < a\}) = \lim_{r \to \infty} P(\{Y_{[n_r \nu_m]} - \theta < a\, w_{[n_r \nu_m]}\}) =$$

$$= \lim_{r \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(\{Y_{[n_r \nu_m]} - \theta < a\, w_{[n_r \nu_m]}\} \cap A_{k,m}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{r \to \infty} P_{A_{k,m}} (\{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta < a\, w_{[n_r a_{k,m}]}\}) P(A_{k,m})^{1)} = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

c) $\mathcal{F}(a)$ fiind o funcţie de repartiţie,

$$\lim_{a \to \infty} \mathcal{F}(a) = 1, \quad \lim_{a \to -\infty} \mathcal{F}(a) = 0.$$

Rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $M'_0 = M'_0(\varepsilon)$ şi $M''_0 = M''_0(\varepsilon)$ puncte de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$, astfel ca

$$1 - \mathcal{F}(M'_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathcal{F}(M''_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

1) În tot cursul lucrării, se trece la condiţionare numai pentru acele valori ale lui k şi m pentru care $P(A_{k,m}) > 0$. Restul termenilor din sumă sînt nuli.

Fie $M_0 = M_0(\varepsilon) = \max(|M_0'(\varepsilon)|, |M_0''(\varepsilon)|)$. Pentru orice $M > M_0$ avem

$$\limsup_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{|Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta|}{w_{[n_r a_{k,m}]}} > M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \liminf_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta}{w_{[n_r a_{k,m}]}} \leqslant M\right\}\right) +$$

$$+ \limsup_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta}{w_{[n_r a_{k,m}]}} < -M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \liminf_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta}{w_{[n_r a_{k,m}]}} < M_0'\right\}\right) +$$

$$+ \limsup_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta}{w_{[n_r a_{k,m}]}} < M_0''\right\}\right) = 1 - \mathcal{F}(M_0') + \mathcal{F}(M_0'') < \varepsilon$$

pentru orice m $(1 \leqslant m < \infty)$ şi $k(1 \leqslant k < \infty)$ pentru care $P(A_{k,m}) > 0$. Deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $M_0 = M_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $M > M$,

$$\limsup_m \limsup_r P\left(\left\{\frac{|Y_{[n_r \nu_m]} - \theta|}{w_{[n_r \nu_m]}} > M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \sum_{k=1}^{\infty} \limsup_r P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{|Y_{[n_r a_{k,m}]} - \theta|}{w_{[n_r a_{k,m}]}} > M\right\}\right) P(A_{k,m}) <$$

$$< \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} P(A_{k,m}) = \varepsilon$$

adică

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_m \limsup_r P(\{|z_{m,r}^{(2)}| > M\}) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \limsup_m \limsup_r P\left(\left\{\frac{|Y_{[n_r \nu_m]} - \theta|}{w_{[n_r \nu_m]}} > M\right\}\right) = 0.$$

d) Fie $\varepsilon > 0$. Folosind condiţia (c_4), pentru orice $M > 1 + \varepsilon$ avem

$$\limsup_m \limsup_r P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} > M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \limsup_r P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} > 1 + \varepsilon\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \limsup_r P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{[n_r \lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Prin urmare

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P(\{|z^{(1)}_{m,r}| > M\}) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{[n_r\lambda]}} > M\right\}\right) = 0$$

e) Folosind condiţiile (c_1) şi (c_3), avem, oricare ar fi $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P(\{|y^{(1)}_{m,r}| > \varepsilon\}) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P(\{|Y_{N_r} - Y_{[n_r\nu_m]}| > \varepsilon w_{[n_r\nu_m]}\}) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P\left(\{|Y_{N_r} - Y_{[n_r\nu_m]}| > \varepsilon w_{[n_r\nu_m]}\} \cap \left\{\left|\frac{N_r}{n_r} - \lambda\right| < c_m\right\}\right) +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P\left(\left\{\left|\frac{N_r}{n_r} - \lambda\right| \geqslant c_m\right\}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P\left(\{|Y_{N_r} - Y_{[n_r\nu_m]}| > \varepsilon w_{[n_r\nu_m]}\} \cap \left\{\left|\frac{N_r}{n_r} - \lambda\right| < c_m\right\}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{|Y_{N_r} - Y_{[n_r\nu_m]}| > \varepsilon w_{[n_r\nu_m]}\} \cap \left\{\left|\frac{N_r}{n_r} - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - \lambda\right| < c_m\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\{\max_{\left|\frac{i}{n_r} - \lambda\right| < c_m} |Y_i - \right.$$

$$\left. - Y_{[n_r a_{k,m}]}| > \varepsilon w_{[n_r a_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\{\max_{(a_{k,m} - 2c_m)n_r < i < (a_{k,m} + 2c_m)n_r} |Y_i - \right.$$

$$\left. - Y_{[n_r a_{k,m}]}| > \varepsilon w_{[n_r a_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\right) = 0$$

deoarece pe mulţimea $A_{k,m}$, din $\left|\frac{i}{n_r} - \lambda\right| < c_m$, cum $|\lambda - \nu_m| < c_m$ obţinem

$$n_r(a_{k,m} - 2c_m) < i < n_r(a_{k,m} + 2c_m).$$

f) Să mai observăm că (c_4) se poate scrie sub forma

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P(\{|y^{(2)}_{m,r}| > \varepsilon) = 0$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Din această egalitate şi din cele demonstrate la punctele *b*), *c*), *d*), *e*), rezultă că putem aplica lema 1 pentru şirul de variabile aleatoare $\{W_r, 1 \leqslant r < \infty\}$ definit de (3.3) şi avînd descompunerea (3.4). Obţinem

$$\lim_{r\to\infty} P(\{W_r < a\}) = \lim_{r\to\infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a w_{[n_r\lambda]}\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$, ceea ce demonstrează prima parte a teoremei.

g) Să notăm acum pentru $1 \leqslant m < \infty$, $1 \leqslant r < \infty$,

$$x^{\bullet}_{m,r} = z^{\bullet(2)}_{m,r} = \frac{1}{w_{[n_r\nu_m]}}(Y_{[n_r\nu_m]} - \theta),$$

$$y^{\bullet(1)}_{m,r} = \frac{1}{w_{[n_r\nu_m]}}(Y_{N_r} - Y_{[n_r\nu_m]}),$$

$$y^{\bullet(2)}_{m,r} = \frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{N_r}} - 1,$$

$$z^{\bullet(1)}_{m,r} = \frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{N_r}},$$

$$W^{\bullet}_r = \frac{1}{w_{N_r}}(Y_{N_r} - \theta). \tag{3.5}$$

Avem descompunerea

$$W^{\bullet}_r = x^{\bullet}_{m,r} + y^{\bullet(1)}_{m,r} z^{\bullet(1)}_{m,r} + y^{\bullet(2)}_{m,r} z^{\bullet(2)}_{m,r}, \quad (1 \leqslant r < \infty, 1 \leqslant m < \infty). \tag{3.6}$$

Făcînd o comparaţie cu notaţiile de la punctul *a*) se vede că

$$x^{\bullet}_{m,r} = x_{m,r},\ y^{\bullet(1)}_{m,r} = y^{(1)}_{m,r},\ z^{\bullet(2)}_{m,r} = z^{(2)}_{m,r},\ (1 \leqslant r < \infty, 1 \leqslant m < \infty).$$

h) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Pentru orice $M > 1 + \varepsilon$, folosind condiţia (c'_4) avem

$$\limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{N_r}} > M\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{N_r}} > 1 + \varepsilon\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n_r\nu_m]}}{w_{N_r}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

şi prin urmare

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P(\{|z^{*(1)}_{m,r}| > M\}) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \limsup_{m} \limsup_{r} P\left(\left\{\frac{w_{[n_r \nu_m]}}{w_{N_r}} > M\right\}\right) = 0.$$

i) Cum condiţia (c'_4) se mai poate scrie, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{r} P(\{|y^{*(2)}_{m,r}| > \varepsilon\}) = 0$$

ţinînd cont de cele demonstrate la punctele *b*), *c*), *e*), *h*), rezultă că putem aplica lema 1 de data aceasta pentru şirul de variabile aleatoare $\{W^*_r, 1 \leqslant r < \infty\}$ definit de (3.5) şi avînd descompunerea (3.6). În consecinţă

$$\lim_{r\to\infty} P(\{W^*_r < a\}) = \lim_{r\to\infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a \ w_{N_r}\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$, ceea ce demonstrează teorema.

Remarcă. Dintre condiţiile teoremei generale, (c_1), se referă la timpul aleator $\{N_r, 1 \leqslant r < \infty\}$; ($c_2$) şi ($c_3$) ne spun ceva despre procesul stocastic $\{Y_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ convenabil normat, iar (c_4) şi (c'_4) se referă la şirul $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ de normare a procesului stocastic $\{Y_n, 1 \leqslant n < \infty\}$. Este natural să ne punem întrebarea dacă există un proces stocastic convenabil normat care să satisfacă toate condiţiile (c_2), (c_3), (c_4), (c'_4). Răspunsul afirmativ la această întrebare ni-l dă paragraful următor.

§ 4. SUME ALEATOARE DE VARIABILE ALEATOARE INDEPENDENTE, IDENTIC REPARTIZATE

Fie $\{x_j, 1 \leqslant j < \infty\}$ un şir de variabile aleatoare satisfăcînd condiţiile

$$\{x_j, 1 \leqslant j < \infty\} \subset \mathcal{L}^2(E, \mathcal{K}, P), \tag{4.1}$$

$$\{x_j, 1 \leqslant j < \infty\} \in (SK), \tag{4.2}$$

$$M_1(x_j) = 0, \quad (1 \leqslant j < \infty), \tag{4.3}$$

$$M_2(x_j) = 1, \quad (1 \leqslant j < \infty), \tag{4.4}$$

$$P(\{x_j < a\}) = F(a), \ (1 \leqslant j < \infty). \tag{4.5}$$

Cu notaţiile din § 3 alegem

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ (1 \leqslant n < \infty) \tag{4.6}$$

$$w_n = \sqrt{n}, \quad (1 \leqslant n < \infty) \tag{4.7}$$

$$n_r \equiv r, \qquad (1 \leqslant r < \infty) \tag{4.8}$$

$$\theta = 0, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{F}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{4.10}$$

TEOREMA 2. *Să considerăm un șir de variabile aleatoare* $\{x_j, 1 \leqslant j < \infty\}$ *satisfăcînd condițiile* (4.1)–(4.5). *Fie șirul de variabile aleatoare* $\{Y_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *definit de* (4.6) *și fie un alt șir de variabile aleatoare, cu valori întregi pozitive* $\{N_n, 1 \leqslant n < \infty\}$. *Dacă*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda \tag{4.11}$$

λ *fiind o variabilă aleatoare pozitivă oarecare, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Y_{N_n} < a\sqrt{N_n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{4.12}$$

Demonstrație. Fie variabila aleatoare $\lambda > 0$ și fie $\{\nu_m, 1 \leqslant m < \infty\}$ șirul de variabile aleatoare, fiecare avînd o mulțime cel mult numărabilă de valori, și care aproximează pe λ:

$$\nu_m : 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \ldots < a_{k,m} < \ldots \quad (1 \leqslant m < \infty)$$

unde $c_m \cdot m \searrow 0$.

Din teorema lui Lindeberg rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Y_n < a\sqrt{n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

și conform lemei 3, pentru orice $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P_B(\{Y_n < a\sqrt{n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} P_{A_{k,m}}(\{Y_n < a\sqrt{n}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

pentru toate valorile lui k $(1 \leqslant k < \infty)$ și ale lui m $(1 \leqslant m < \infty)$ pentru care $P(A_{k,m}) > 0$, unde $A_{k,m} = \{\nu_m = a_{k,m}\} \in \mathcal{K}$. Cu particularizările făcute (4.6)–(4.10), vedem că este satisfăcută condiția (c_2) a teoremei generale din § 3.

Pentru m dat, fie $k_0 = k_0(m)$ acel indice pentru care

$$a_{k_0,m} < c_m\, m, \quad a_{k_0+1,m} \geqslant c_m\, m.$$

Pentru $k < k_0$ avem $a_{k,m} < c_m m$, iar pentru $k > k_0 + 1$, $a_{k,m} > c_m m$. Avem evident

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} A_{k,m}\right) \leqslant P(\{\lambda < c_m m + c_m\})$$

şi cum $c_m m + c_m \searrow 0$ cînd $m \to \infty$,

$$\lim_{m\to\infty} P(\{\lambda < c_m m + c_m\}) = 0 .$$

Avem

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_n P\Bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| >$$

$$> \varepsilon\sqrt{[na_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\Bigg) \leqslant \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} A_{k,m}\right) +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \limsup_n P\Bigg(\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} (\{|Y_{[na_{k,m}]} - Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}| +$$

$$+ \max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i - Y_{[n(a_{k,m}-2c_m)]}| > \varepsilon\sqrt{[na_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} P(\{\lambda < c_m m + c_m\}) +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \limsup_n P\Bigg(\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} (\{|Y_{[na_{k,m}]} - Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\Bigg) +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \limsup_n P\Bigg(\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} (\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i -$$

$$- Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\} \cap A_{k,m})\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{|Y_{[na_{k,m}]} - Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg) P(A_{k,m}) +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i -$$

$$- Y_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg) P(A_{k,m}) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\Bigg|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{[na_{k,m}]} x_j\Bigg| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg) P(A_{k,m}) +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \limsup_n P_{A_{k,m}}\Bigg(\Bigg\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} \Bigg|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{i} x_j\Bigg| >$$

$$> \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\Bigg\}\Bigg) P(A_{k,m}) \cdot \qquad (4.13)$$

Să observăm că pentru orice k $(k \geqslant k_0 + 1)$ şi orice $m \geqslant 2$, avem

$$\lim_{n\to\infty} (a_{k,m} - 2c_m)\, n = \lim_{n\to\infty} (a_{k,m} + 2c_m)\, n = \infty.$$

Aplicînd lema 2 şi inegalitatea lui Cebîşev, vom avea pentru $k \geqslant k_0 + 1$, $m \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n} P_{A_{k,m}}\left(\left\{\left|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{[na_{k,m}]} x_j\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\right\}\right) = \\
&= \limsup_{n} P\left(\left\{\left|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{[na_{k,m}]} x_j\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\right\}\right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \limsup_{n} \frac{[na_{k,m}] - [(a_{k,m} - 2c_m)\, n]}{[na_{k,m}]} \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \limsup_{n} \frac{2c_m . n + 1}{[na_{k,m}]} = \\
&= \frac{8}{\varepsilon^2}\, \frac{c_m}{a_{k,m}} < \frac{8}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{m}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Aplicînd acum lema 2 şi inegalitatea lui Kolmogorov vom avea pentru $k \geqslant k_0 + 1$, $m \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n} P_{A_{k,m}}\left(\left\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n}\left|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{i} x_j\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\right\}\right) = \\
&= \limsup_{n} P\left(\left\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n}\left|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{i} x_j\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{[na_{k,m}]}\right\}\right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \limsup_{n} \frac{[(a_{k,m} + 2c_m)\, n] - [(a_{k,m} - 2c_m)\, n]}{[na_{k,m}]} \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \limsup_{n} \frac{4c_m . n + 1}{[na_{k,m}]} = \\
&= \frac{16}{\varepsilon^2} \cdot \frac{c_m}{a_{k,m}} < \frac{16}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{m}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ţinînd cont de (4.14) şi (4.15), din (4.13) obţinem

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \limsup_{n} P\Bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\Big\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \\
&> \varepsilon\sqrt{[na_{k,m}]}\Big\} \cap A_{k,m}\Big)\Bigg) \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{24}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{m} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} P(A_{k,m}) \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{24}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{m} = 0
\end{aligned}$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Deci şi condiţia (c_3) din teorema generală este satisfăcută.

Să observăm acum că din (4.11) rezultă

$$\sqrt{\frac{[n\nu_m]}{N_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sqrt{\frac{\nu_m}{\lambda}}$$

şi deoarece $\sqrt{\frac{\nu_m}{\lambda}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$ avem pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n} P\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{[n\nu_m]}{N_n}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

adică condiţia (c_4') din teorema generală. Cum (4.11) este chiar condiţia (c_1), atunci din teorema generală de la § 3, cu particularizările (4.6)—(4.10), rezultă (4.12).

Remarcă. Se vede imediat că avem satisfăcută în acest caz particular şi condiţia (c_4), deoarece din $\frac{[n\nu_m]}{[n\lambda]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\nu_m}{\lambda}$ şi $\nu_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \lambda$ rezultă

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n} P\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{[n\nu_m]}{[n\lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Condiţiile (c_1), (c_2), (c_3), (c_4) fiind satisfăcute, din teorema generală rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Y_{N_n} < a\sqrt{[n\lambda]}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Prin urmare şirul sumelor normate de variabile aleatoare independente identic repartizate satisface condiţiile (c_2), (c_3), (c_4), (c_4') din teorema generală dată în §3.

5. SUME ALEATOARE DE VARIABILE ALEATOARE INDEPENDENTE, CU REPARTIŢIE OARECARE

Fie $\{x_j,\ 1 \leqslant j < \infty\}$ un şir de variabile aleatoare satisfăcînd condiţiile

$$\{x_j,\ 1 \leqslant j < \infty\} \subset \mathfrak{L}^2(E,\ \mathcal{K},\ P), \tag{5.1}$$

$$\{x_j,\ 1 \leqslant j < \infty\} \in (SK), \tag{5.2}$$

$$M_1(x_j) = 0, \qquad (1 \leqslant j < \infty). \tag{5.3}$$

Cu notaţiile din §3 să alegem

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \qquad (1 \leqslant n < \infty), \tag{5.4}$$

$$w_n = \sqrt{M_2(x_1) + M_2(x_2) + \ldots + M_2(x_n)} \quad (1 \leqslant n < \infty), \tag{5.5}$$

$$n_r \equiv r, \qquad (1 \leqslant r < \infty), \tag{5.6}$$

$$\theta = 0. \tag{5.7}$$

TEOREMA 3. *Să considerăm un şir de variabile aleatoare* $\{x_j, 1 \leqslant j < \infty\}$ *satisfăcînd condiţiile* (5.1) — (5.3). *Fie şirul de variabile aleatoare* $\{Y_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *definit de* (5.4) *şi fie un alt şir de variabile aleatoare, cu valori întregi pozitive* $\{N_n, 1 \leqslant n < \infty\}$. *Să mai considerăm şirul numeric* $(w_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *avînd termenul general* (5.5) *şi* $\mathcal{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Fie condiţiile*

$$(c_1^*) \qquad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda,$$

λ *fiind o variabilă aleatoare pozitivă oarecare.*

(c_2^*) *În toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Y_n < a\,w_n\}) = \mathcal{F}(a).$$

(c_3^*) *Pentru un şir de variabile aleatoare* $\{\nu_m, 1 \leqslant m < \infty\}$, *fiecare avînd o mulţime cel mult numărabilă de valori*

$$\nu_m : 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \ldots < a_{k,m} < \ldots \qquad (1 \leqslant m < \infty),$$

şir care aproximează pe λ

$$|\lambda - \nu_m| < c_m,$$

unde numerele c_m $(1 \leqslant m < \infty)$ *au proprietatea* $c_m\ m \searrow 0$, *şi pentru două şiruri de numere pozitive* $f_m \searrow 0$, $g_m \nearrow \infty$ $(2c_m < f_m < g_m)$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{w_{[na_{k,m}]}}{w_{[(a_{k,m} \pm 2c_m)n]}} - 1 \right| \leqslant 0\,(m)\ ^{2)} \tag{5.8}$$

pentru toţi k, $k'_{0,m} < k \leqslant k''_{0,m}$, *unde* $k'_{0,m}$, $k''_{0,m}$ $(1 \leqslant m < \infty)$ *sînt întregii definiţi astfel*

$$a'_{k_{0,m},m} < f_m, \quad a'_{k_{0,m}+1,m} \geqslant f_m;\ a''_{k_{0,m},m} < g_m,\ a''_{k_{0,m}+1,m} \geqslant g_m, (1 \leqslant m < \infty). \tag{5.9}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Y_{N_n} < a\,w_{N_n}\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema de mai sus pe baza teoremei generale din § 3, ţinînd cont de particularizările (5.4) — (5.7).

Din condiţia (c_2^*) şi din lema 3 rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P_{A_{k,m}}(\{Y_n < a\,w_n\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$, pentru toate valorile lui k $(1 \leqslant k < \infty)$ şi ale lui m $(1 \leqslant m < \infty)$ pentru care $P(A_{k,m}) > 0$, unde

---

2) S-a notat cu $0(m)$ o funcţie pozitivă oarecare, avînd proprietatea că $\lim\limits_{m\to\infty} 0(m) = 0$.

$A_{k,m} = \{\nu_m = a_{k,m}\} \in \mathcal{K}$, adică condiţia ($c_2$). Să considerăm acum condiţia (c_3^*). Deoarece pentru $k < k'_{0,m}$ avem $a_{k,m} < f_m$ iar pentru $k > k''_{0,m}$ avem $a_{k,m} > g_m$, rezultă

$$\lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{k'_{0,m}} A_{k,m}\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} P(\{\lambda < f_m + c_m\}) = 0 \tag{5.10}$$

$$\lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=k''_{0,m}+1}^{\infty} A_{k,m}\right) \leqslant \lim_{m\to\infty} P(\{\lambda > g_m - c_m\}) = 0. \tag{5.11}$$

Pentru $k'_{0,m} < k \leqslant k''_{0,m}$ avem

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{w_{[na_{k,m}]}}{w_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}} \leqslant 1 + 0\,(m), \tag{5.12}$$

$$1 - 0\,(m) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{w_{[na_{k,m}]}}{w_{[(a_{k,m}+2c_m)n]}} \leqslant 1. \tag{5.13}$$

Există m_0, astfel încît îndată ce $m > m_0$, să avem $0\,(m) < 1$. Pentru $m > m_0$ să notăm

$$\begin{gathered} 0^*\,(m) = \max\left(1 - \frac{1}{1 + 0\,(m)},\ \frac{1}{1 - 0\,(m)} - 1\right), \\ 0^{**}\,(m) = 0^*\,(m)\,[2 + 0^*\,(m)]; \end{gathered} \tag{5.14}$$

din inegalităţile (5.12) şi (5.13) obţinem pentru $k'_{0,m} < k \leqslant k''_{0,m}$, $m > m_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{w_{[(a_{k,m}\pm 2c_m)n]}}{w_{[na_{k,m}]}} - 1 \right| \leqslant 0^*\,(m), \tag{5.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{w^2_{[(a_{k,m}\pm 2c_m)n]}}{w^2_{[na_{k,m}]}} - 1 \right| \leqslant 0^{**}\,(m). \tag{5.16}$$

Se observă din (5.14) că

$$0^*\,(m) \geqslant 0,\quad 0^{**}\,(m) \geqslant 0,\quad \lim_{m\to\infty} 0^*\,(m) = \lim_{m\to\infty} 0^{**}\,(m) = 0. \tag{5.17}$$

Să arătăm acum că avem îndeplinită condiţia (c_3) din teorema generală. Procedînd ca în § 4, ţinînd cont de (5.10), (5.11), (5.16), şi aplicînd lema 2 şi inegalităţile lui Cebîşev şi respectiv Kolmogorov, obţinem pentru $m > m_0$,

$$\limsup_n P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\left\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} \left| Y_i - Y_{[na_{k,m}]}\right| > \varepsilon\, w_{[na_{k,m}]}\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{k'_0} A_{k,m}\right) + P\left(\bigcup_{k=k''_{0,m}+1}^{\infty} A_{k,m}\right) + \sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} \limsup_n P\left(\left\{\left|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]+1}^{[na_{k,m}]} x_j\right| >\right.\right.$$

$$\left.\left. > \frac{\varepsilon}{2}\, w_{[na_{k,m}]}\right\}\right) P(A_{k,m}) + \sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} \limsup_n P\left(\left\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left|\sum_{j=[(a_{k,m}-2c_m)n]}^{i} x_j\right| > \frac{\varepsilon}{2}\, w_{[na_{k,m}]}\right\}\right) P(A_{k,m}) \leqslant P(\{\lambda < f_m + c_m\}) + P(\{\lambda > g_m - c_m\}) +$$

$$+ \sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} \left[\frac{4}{\varepsilon^2} \limsup_n \left(\frac{w^2_{[(a_{k,m}+2c_m)n]}}{w^2_{[na_{k,m}]}} - 1\right) + \frac{8}{\varepsilon^2} \limsup_n \left(1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{w^2_{[(a_{k,m}-2c_m)n]}}{w^2_{[na_{k,m}]}}\right)\right] P(A_{k,m}) \leqslant P(\{\lambda < f_m + c_m\}) + P(\{\lambda > g_m - c_m\}) +$$

$$+ \frac{12}{\varepsilon^2}\, 0^{**}(m) \sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} P(A_{k,m}) \leqslant P(\{\lambda < f_m + c_m\}) + P(\{\lambda > g_m - c_m\}) +$$

$$+ \frac{12}{\varepsilon^2}\, 0^{**}(m)$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Menţionăm că în şirul de inegalităţi de mai sus, lema 2 s-a putut aplica deoarece, cum $f_m > 2\, c_m$, pentru orice k $(k'_{0,m} < k \leqslant k''_{0,m})$, avem

$$\lim_{n\to\infty} (a_{k,m} - 2\, c_m)\, n = \lim_{n\to\infty} (a_{k,m} + 2\, c_m)\, n = \infty.$$

Folosind acum relaţiile (5.10), (5.11) şi (5.17), obţinem

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_n P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\left\{\max_{(a_{k,m}-2c_m)n<i<(a_{k,m}+2c_m)n} \left|Y_i - Y_{[na_{k,m}]}\right| > \varepsilon w_{[na_{k,m}]}\right\} \cap A_{k,m}\right)\right) = 0$$

pentru orice $\varepsilon > 0$.

Ne-a mai rămas să demonstrăm că avem satisfăcută şi condiţia (c'_4) din teorema generală. Pentru aceasta trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ există $m_0\,(\varepsilon, \eta)$ astfel încît oricare ar fi $m > m_0\,(\varepsilon, \eta)$

$$\limsup_n P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{N_n}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) < \eta. \tag{5.18}$$

Avem

$$
\begin{aligned}
&P\biggl(\biggl\{\biggl|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{N_n}}-1\biggr|>\varepsilon\biggr\}\biggr)=P\biggl(\bigcup_{s=1}^{\infty}\biggl(\biggl\{\biggl|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_s}-1\biggr|>\varepsilon\biggr\}\cap\{N_n=s\}\biggr)\biggr)\leqslant\\
&\leqslant P\biggl(\bigcup_{s=1}^{\infty}\biggl(\biggl\{\biggl|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_s}-1\biggr|>\varepsilon\biggr\}\cap\{N_n=s\}\cap\{|N_n-\lambda n|\leqslant c_m n\}\biggr)\biggr)+\\
&\quad+P(\{|N_n-\lambda n|>c_m n\})\leqslant P\biggl(\bigcup_{k=1}^{\infty}\biggl(\bigcup_{s=1}^{\infty}\biggl(\biggl\{\biggl|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_s}-1\biggr|>\varepsilon\biggr\}\cap\{N_n=\\
&=s\}\cap\{(\nu_m-2c_m)n\leqslant N_n\leqslant(\nu_m+2c_m)n\}\biggr)\biggr)\cap A_{k,m}\biggr)+\\
&+P(\{N_n-\lambda n|>c_m n\})\leqslant P\biggl(\bigcup_{k=1}^{k'_{0,m}}A_{k,m}\biggr)+P\biggl(\bigcup_{k=k''_{0,m}+1}^{\infty}A_{k,m}\biggr)+\\
&+\sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}}P\biggl(\bigcup_{s=[(a_{k,m}-2c_m)n]}^{[(a_{k,m}+2c_m)n]}\biggl(\biggl\{\biggl|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_s}-1\biggr|>\varepsilon\biggr\}\biggr)\cap A_{k,m}\biggr)+P(\{|N_n-\\
&-\lambda n|>c_m n\})\leqslant P\biggl(\bigcup_{k=1}^{k'_{0,m}}A_{k,m}\biggr)+P\biggl(\bigcup_{k=k''_{0,m}+1}^{\infty}A_{k,m}\biggr)+\\
&+\sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}}P\biggl(\biggl\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[(\nu_m-2c_m)n]}}-1>\varepsilon\biggr\}\cap A_{k,m}\biggr)+\\
&+\sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}}P\biggl(\biggl\{1-\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[(\nu_m+2c_m)n]}}>\varepsilon\biggr\}\cap A_{k,m}\biggr)+P(\{|N_n-\lambda n|>c_m n\}).
\end{aligned}
$$

Ţinînd cont de relaţiile (5.10), (5.11) şi de convergenţa în probabilitate dată de condiţia (c_1^*), obţinem

$$
\begin{aligned}
&\limsup_n P\biggl(\biggl\{\biggl|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{N_n}}-1\biggr|>\varepsilon\biggr\}\biggr)\leqslant P(\{\lambda<f_m+c_m\})+P(\{\lambda>g_m-c_m\})+\\
&\qquad+\sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}}\limsup_n P_{A_{k,m}}\biggl(\biggl\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[(\nu_m-2c_m)n]}}-1>\varepsilon\biggr\}\biggr)P(A_{k,m})+\\
&\qquad+\sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}}\limsup_n P_{A_{k,m}}\biggl(\biggl\{1-\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[(\nu_m+2c_m)n]}}>\varepsilon\biggr\}\biggr)P(A_{k,m}). \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

Din relațiile (5.15), (5.10) și (5.11) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ există $m_0(\varepsilon, \eta)$ astfel încît pentru $m > m_0((\varepsilon, \eta)$ să avem

$$\limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[(\nu_m - 2c_m)n]}} - 1 > \varepsilon\right\}\right) = 0 \quad (k'_{0,m} < k \leqslant k''_{0,m}) \tag{5.20}$$

$$\limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{1 - \frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[(\nu_m + 2c_m)n]}} > \varepsilon\right\}\right) = 0 \quad (k'_{0,m} < k \leqslant k''_{0,m}). \tag{5.21}$$

$$P(\{\lambda < f_m + c_m\}) < \frac{\eta}{2} \tag{5.22}$$

$$P(\{\lambda > g_m - c_m\}) < \frac{\eta}{2} \tag{5.23}$$

ceea ce introduse în (5.19) ne dă (5.18). Astfel avem condiția (c_4') și deci teorema.

Remarca 1°. Se poate arăta că este satisfăcută și condiția (c_4) din teorema generală. Pentru aceasta trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$ există $m_0(\varepsilon, \eta)$ astfel încît pentru $m > m_0(\varepsilon, \eta)$

$$\limsup_n P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n\lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) < \eta. \tag{5.24}$$

Într-adevăr, avem

$$\limsup_n P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n\lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\}\right) \leqslant P\Big(\bigcup_{k=1}^{k'_{0,m}} A_{k,m}\Big) + P\Big(\bigcup_{k=k''_{0,m}+1}^{\infty} A_{k,m}\Big) +$$

$$+ \limsup_n \sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} P\left(\left\{\left|\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n\lambda]}} - 1\right| > \varepsilon\right\} \cap A_{k,m}\right) \leqslant P(\{\lambda < f_m + c_m\}) +$$

$$+ P(\{\lambda > g_m - c_m\}) + \sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} \limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n\lambda]}} - 1 > \varepsilon\right|\right) P(A_{k,m}) +$$

$$+ \sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} \limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[n\lambda]}} - 1 < -\varepsilon\right\}\right) P(A_{k,m}) \leqslant P(\{\lambda < f_m + c_m\}) +$$

$$+ P(\{\lambda > g_m - c_m\}) + \sum_{k=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} \limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{\frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[(\nu_m - 2c_m)n]}} - 1 > \varepsilon\right\}\right) P(A_{k,m}) +$$

$$+ \sum_{i=k'_{0,m}+1}^{k''_{0,m}} \limsup_n P_{A_{k,m}}\left(\left\{1 - \frac{w_{[n\nu_m]}}{w_{[(\nu_m + 2c_m)n]}} < \varepsilon\right\}\right) P(A_{k,m}). \tag{5.25}$$

Ţinînd acum cont de (5.20), (5.21), (5.22) şi (5.23) în (5.25), rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ există $m_0(\varepsilon, \eta)$ astfel încît pentru $m > m_0(\varepsilon, \eta)$ să avem (5.24). Condiţiile (c_1), (c_2), (c_3), (c_4) fiind satisfăcute, din teorema generală rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Y_{N_n} < a\, w_{[n\lambda]}\}) = \mathfrak{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

Remarca 2°. Condiţia (c_3^*) se referă la dispersiile sumelor de variabile aleatoare independente x_j $(1 \leqslant j < \infty)$. Să presupunem acum că şirul de variabile aleatoare $\{x_j,\ 1 \leqslant j < \infty\}$, în afară de (5.1) – (5.3) mai satisface condiţiile

$$M_2(x_j) = 1, \qquad (1 \leqslant j < \infty) \tag{5.26}$$

$$P(\{x_j < a\}) = F(a), \quad (1 \leqslant j < \infty) \tag{5.27}$$

şi să luăm

$$\mathfrak{F}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{5.28}$$

Atunci

$$w_n = \sqrt{n}$$

şi conform teoremei lui Lindeberg avem satisfăcută condiţia (c_2^*). Să arătăm că este satisfăcută şi condiţia (c_3^*). Într-adevăr, în acest caz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_{[na_{k,m}]}}{w_{[(a_{k,m} \pm 2c_m)n]}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{[n\,a_{k,m}]}{[(a_{k,m} \pm 2c_m)\,n]}} = \sqrt{\frac{1}{1 \pm \frac{2c_m}{a_{k,m}}}}.$$

Luînd $f_m = 2c_m\, m$, determinăm $k'_{0,m}$ astfel ca

$$a_{k'_{0,m}}\, m < 2c_m\, m,\ a_{k'_{0,m}+1,m} \geqslant 2c_m\, m.$$

Pentru $k > k'_{0,m}\, m$, deoarece $a_{k,m} > 2c_m\, m$ rezultă $0 < \frac{2c_m}{a_{k,m}} < \frac{1}{m}$ adică $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{2c_m}{a_{k,m}} = 0$. Deci, pentru $k > k'_{0,m}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt{\frac{[na_{k,m}]}{[(a_{k,m} \pm 2c_m)\,n]}} - 1 \right| = 0\ (m)$$

şi deci reobţinem teorema 2 demonstrată în § 4.

§ 6. IMPLICAȚIILE TEOREMEI GENERALE

1. Să considerăm teorema generală din § 3. Să presupunem că $\lambda \equiv 1$ și să luăm $\nu_m \equiv 1$ pentru $1 \leqslant m < \infty$. Obținem teorema dată de F. J. Anscombe în 1952, [2].

TEOREMA 4. *Fie* $\{Y_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *un șir de variabile aleatoare,* $\{N_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *un șir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive,* $(w_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *un șir de numere pozitive,* $(n_r)_{1 \leqslant r < \infty}$ *un șir crescător de întregi pozitivi, care tind la infinit împreună cu* r, θ *un număr real și* $\mathcal{F}(a)$ *o funcție de repartiție. Dacă sînt satisfăcute condițiile :*

$(\bar{c}_1)$
$$\frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r \to \infty]{P} 1;$$

$(\bar{c}_2)$ *în toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$

$$\lim_{n \to \infty} P(\{Y_n - \theta < a\, w_n\}) = \mathcal{F}(a);$$

$(\bar{c}_3)$ *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *și* $\eta > 0$ *există un număr natural* n_0 *și un număr pozitiv mic* c *astfel încît, pentru orice* $n > n_0$, *să avem*

$$P\Big(\bigcup_{|i-n|<cn}(\{|Y_i - Y_n| > \varepsilon w_n\})\Big) < \eta,$$

atunci

$$\lim_{r \to \infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a\, w_{n_r}\}) = \mathcal{F}(a) \tag{6.1}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

Într-adevăr, în acest caz condiția $(\bar{c}_1)$ este (c_1) pentru $\lambda \equiv 1$. Condiția (c_2) devine $(\bar{c}_2)$ deoarece partițiile $(A_{k,m})_{1 \leqslant k < \infty}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ se reduc la un singur eveniment $\{\nu_m = 1\} = E$, evenimentul sigur. Să luăm acum condiția (c_3). Ea ne spune că pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n} \sup P\Big(\bigcup_{|i-n| < 2c_m n}(\{|Y_i - Y_n| > \varepsilon w_n\})\Big) = 0,$$

unde $(c_m)_{1 \leqslant m < \infty}$ este un șir de numere $c_m \searrow 0$. Deci, pentru $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ există m_0 și n_0 astfel încît $n > n_0$ implică

$$P\Big(\bigcup_{|i-n| < 2c_{m_0} n}(\{|Y_i - Y_n| > \varepsilon w_n\})\Big) < \eta.$$

Notînd $2c_{m_0} = c$ obținem condiția $(\bar{c}_3)$. Condiția (c_4) este banal satisfăcută, deci din teorema generală rezultă relația (6.1).

2. Să considerăm teorema generală din § 3 şi să presupunem că λ este o variabilă aleatoare cu valori discrete

$$\lambda : \ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

Drept şir care aproximează pe λ să luăm şirul de variabile aleatoare identice cu λ, adică

$$\nu_m \equiv \lambda, \qquad (1 \leqslant m < \infty).$$

Din teorema generală obţinem următoarea teoremă dată de autor în 1963, [13], [17].

TEOREMA 5. *Fie* $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$ *un şir de variabile aleatoare,* $\{N_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive,* $(w_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *un şir de numere pozitive,* $(n_r)_{1 \leqslant r < \infty}$ *un şir crescător de întregi pozitivi, care tind la infinit împreună cu* r, θ *un număr real şi* $\mathfrak{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Dacă avem satisfăcute condiţiile :*

$$(\overset{=}{c}_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r \to \infty]{P} \lambda,$$

unde λ *este o variabilă aleatoare cu valori discrete, pozitive*

$$\lambda : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots;$$

$(\overset{=}{c}_2)$ *în orice punct de continuitate a lui* $\mathfrak{F}(a)$

$$\lim_{n \to \infty} P_{A_k}(\{Y_n - \theta < a\, w_n\}) = \mathfrak{F}(a)$$

oricare ar fi k $(1 \leqslant k < \infty)$ *pentru care* $P(A_k) > 0$, *unde* $A_k = \{\lambda = \lambda_k\}$;

$(\overset{=}{c}_3)$ $\varepsilon > 0$ *şi* $\eta > 0$ *fiind daţi, există un număr pozitiv mic* c *şi un număr natural* n_0 *astfel încît pentru* $n > n_0$,

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\left|\frac{i}{n} - \lambda_k\right| < c} (\{|Y_i - Y_{[n\lambda_k]}| > \varepsilon\, w_{[n\lambda_k]}\} \cap A_k)\Big) < \eta;$$

atunci

$$\lim_{r \to \infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < a\, w_{[n_r\lambda]}\}) = \mathfrak{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

Dacă în plus mai avem condiţia

$$(\overset{=}{c}_4) \qquad \frac{w_{[n_r\lambda]}}{w_{N_r}} \xrightarrow[r \to \infty]{P} 1,$$

atunci

$$\lim_{r\to\infty} P(\{Y_{N_r} - \theta < w_{N_r}\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

3. Teorema 2 a fost dată pentru cazul $\lambda \equiv 1$ de către F. J. Anscombe în 1952 [1], pentru cazul $\lambda \equiv c$ ($c > 0$ constantă) de către A. Rényi în 1957 [13], pentru cazul cînd λ este o variabilă aleatoare pozitivă, cu valori discrete de către A. Rényi în 1960 [15]. Pentru cazul cînd λ este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare, teorema 2 a fost enunţată pentru prima dată de A. Rényi în 1960 [15] şi demonstrată de J. Mogyoródi în 1962 [12] şi independent de către J. R. Blum, D. L. Hanson, J. I. Rosenblatt în 1963 [2]. Pentru cazul $\lambda \equiv 1$, condiţii care să asigure păstrarea repartiţiei limită cînd trecem de la sume obişnuite de variabile aleatoare independente neidentic repartizate, la sume aleatoare de variabile aleatoare independente neidentic repartizate, au fost date de către J. Mogyoródi în 1961 [11].

4. Să enunţăm următoarea teoremă :

TEOREMA 6. *Fie* $\{Y_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *un şir de variabile aleatoare,* $\{N_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive,* $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *un şir crescător de întregi pozitivi tinzînd la infinit împreună cu r şi* $\mathcal{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Dacă :*

(c$_1$)
$$\frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{P} \lambda,$$

unde λ *este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare.*

(c$_2$) *În toate punctele de continuitate ale lui* $\mathcal{F}(a)$

$$\lim_{n\to\infty} P_A(\{Y_n < a\}) = \mathcal{F}(a)$$

pentru orice eveniment A, $P(A) > 0$ [*se spune că* $\{Y_n, 1 \leqslant n < \infty\}$ *este ,,strongly mixing'' cu densitatea* $\mathcal{F}(a)$].

(c$_3$) *Oricare ar fi şirul dublu de numere pozitive* $(a_{k,m})_{1\leqslant k<\infty}$, *crescător în k şi şirul* $(c_m)_{1\leqslant m<\infty}$, $c_m \searrow 0$, *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *avem* $_{1\leqslant m<\infty}$

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n} P(\{\max_{k} \max_{\left|\frac{i}{n}-a_{k,m}\right| < c_m} |Y_i - Y_{[na_{k,m}]}| > \varepsilon\}) = 0$$

[*uniform continuitate tare pe porţiuni în probabilitate*], *atunci*

$$\lim_{r\to\infty} P(\{Y_{N_r} < a\}) = \mathcal{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathcal{F}(a)$.

Se vede cu uşurinţă că condiţiile teoremei 6 implică condiţiile teoremei 1.

5. Să presupunem acum că variabilei aleatoare λ îi putem ataşa un şir de aproximaţie

$$\nu_m : \ 0 < a_{1,m} < a_{2,m} < \dots \qquad (1 \leqslant m < \infty)$$

$$|\lambda - \nu_m| < c_m,$$

unde $(c_m)_{1 \leqslant m < \infty}$ este un şir de numere pozitive pentru care $c_m\, m \searrow 0$, astfel ca $((a_{1,m} - 2c_m)\, n)_{\substack{1 \leqslant m < \infty \\ 1 \leqslant n < \infty}}$ să fie un şir crescător atît în m cît şi în n, atunci avem următoarea teoremă ce se obţine din teorema 1 :

Teorema 7. *Fie* $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$ *un şir de variabile aleatoare tare Cauchy* [3]) *şi „strongly mixing" cu densitatea* $\mathfrak{F}(a)$. *Dacă* $\{N_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$ *este un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive, astfel încît*

$$\frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r \to \infty]{P} \lambda,$$

unde $(n_r)_{1 \leqslant r < \infty}$ *este un şir crescător de întregi pozitivi tinzînd la infinit împreună cu* r, *atunci*

$$\lim_{r \to \infty} P(\{Y_{N_r} < a\}) = \mathfrak{F}(a)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

6. Cu notaţiile şi particularizările din § 5, pentru cazul $\lambda \equiv 1$, J. Mogyoródi [11] a stabilit condiţia (c_3^*) sub forma

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n} \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}} = 1, \tag{6.2}$$

unde δ este real şi $\delta > -1$. Făcînd în condiţia (c_3^*) din teorema 3 pe $\lambda \equiv 1$ şi luînd $\nu_m \equiv 1$ $(1 \leqslant m < \infty)$ şi $(c_m)_{1 \leqslant m < \infty}$ un şir de numere pozitive tinzînd la zero, (6.2) implică (5.8), pentru orice k.

Primită la 16 iunie 1964

---

[3]) Şirul de variabile aleatoare $\{Y_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$ este tare Cauchy, dacă $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ fiind daţi, există $N_0(\varepsilon, \eta)$ astfel încît $P\big(\bigcup_{i,j \geqslant N_0(\varepsilon,\eta)} (\{|Y_i - Y_j| > \varepsilon\})\big) < \eta$.

BIBLIOGRAFIE

1. Anscombe, F. J., *Large-sample Theory of Sequential Estimation*. Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, 600—607 (1952).
2. Blum J. R., Hanson D. L., Rosenblatt J. I., *On the Central Limit Theorem for the Sum of a Random Number of Independent Random Variables. Z.* Wahrscheinlichckeit., **1**, 389—393 (1963).
3. Добрущин Р.Л., *Лемма о пределе сложной случайной функции.* Усп. мат. Н., **10**, 157—159 (1955).
4. Guiaşu S., *La répartition asymptotique pour les suites aléatoires.* C. R. Acad. Sci. Paris, **256**, 3813—3815 (1963).
5. — *Cîteva cercetări legate de teorema lui Anscombe asupra repartiţiei asimptotice a şirurilor aleatoare de variabile aleatoare.* St. cerc. mat., **14**, 333—357 (1963).
6. — *La répartition asymptotique des sommes aléatoires de variables aléatoires indépendantes non identiquement distribuées.* Atti Accad. Naz. Lincei, **34**, 504—510 (1963).
7. — *Asymptotic Distribution for Random Sequences of Random Variables.* Revue math. pures et appl., **7**, 661—671 (1963).
8. — *Sur la répartition asymptotique pour les suites aléatoires de variables aléatoires.* C. R. Acad. Sci. Paris, **259**, 973—976 (1964).
9. Kendall M. G., Stuart A., *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 2, Inference and relationship, London, 1961.
10. Loève M., *Probability Theory*. New York, 1955.
11. Mogyoródi J., *On Limiting Distribution for Sums of a Random Number of Independent Random Variables.* Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **6**, 365—371 (1961).
12. — *A Central Limit Theorem for the Sum of a Random Number of Independent Random Variables.* Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **7**, 409—424 (1962).
13. Rényi A., *On the Asimptotic Distribution of the Sum of a Random Number of Independent Random Variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 193—199 (1957).
14. — *On Mixing Sequence of Sets.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 215—228 (1958).
15. — *On the Central Limit Theorem for the Sum of a Random Number of Independent Random Variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **11**, 97—102 (1960).
16. Rényi A., Révész P., *On Mixing Sequences of Random Variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 389—393 (1958).
17. Robbins H., *The Asymptotic Distribution of the Sum of a Random Number of Random Variables.* Bull. Amer. Math. Soc., **54**, 1151—1161 (1948).
18. Takács L., *On Certain Sojourn time Problems in the Theory of Stochastic Processes.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 169—191 (1957).

ASUPRA NOȚIUNII DE RĂDĂCINĂ DIN TEORIA ALGEBRICĂ A GRAMATICII *)

DE

CONSTANTIN V. CRĂCIUN

Facultatea de matematică și mecanică a Universității din București

În această lucrare, pornind de la noțiunea de rădăcină în sens generalizat, introdusă în [1], se face un studiu algebric al categoriei gramaticale generate de o rădăcină. Sînt continuate și extinse unele rezultate din [7], [3], [4] și [1].

1. INTRODUCERE

În această lucrare, pornind de la noțiunea de rădăcină în sens generalizat, introdusă în [1], vom face un studiu din punct de vedere al teoriei algebrice a gramaticii a acestei noțiuni cît și al categoriei gramaticale ce i se asociază.

Considerăm o mulțime E ale cărei elemente sînt numite *cuvinte*. Notăm cu Φ semigrupul liber generat de E.

Vom numi *frază* orice element al lui Φ. Anumite elemente ale lui Φ vor fi numite fraze *marcate* sau *reperate*. Mulțimea frazelor marcate va fi notată cu Ψ.

Vom asocia fiecărui cuvînt $x \in E$ o anumită mulțime $V(x) \subset E$, astfel încît pentru două cuvinte y și z să avem sau $V(y) = V(z)$ sau $V(y) \cap V(z) = 0$. Mulțimea $V(x)$ o vom numi *paradigma* lui x.

Notăm cu V partiția mulțimii E în paradigme.

Cuvintele, frazele marcate și paradigmele sînt considerate ca date.

Se numește *limbă* un triplet (E, V, Ψ), unde E, V și Ψ au semnificațiile de mai sus.

Se numește context orice pereche ordonată de fraze (f_1, f_2).

În cele ce urmează, vom presupune că în limba considerată este îndeplinită următoarea condiție : pentru orice $x \in E$ există un context (f_1, f_2) astfel încît $f_1 x f_2 \in \Psi$.

Fie $x \in E$ și $y \in E$. Spunem că x *domină* pe y și scriem $x \rightarrow y$, dacă pentru orice context (f_1, f_2) are loc implicația $f_1 x f_2 \in \Psi \Rightarrow f_1 y f_2 \in \Psi$.

---

*) Versiunea în l. franceză a acestei lucrări a apărut în Rev. Roum. de math. pures et appl., **10**, *2* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 253-263, BUCUREȘTI, 1965

Relația $\rightarrow$ se numește *relația de dominare.*

Vom spune că o mulțime de cuvinte X *domină* o mulțime de cuvinte Y și vom scrie $X \rightarrow Y$, dacă pentru orice $x \in X$ și pentru orice $y \in Y : x \rightarrow y$.

Dacă $x \rightarrow y$ și $y \rightarrow x$, spunem că x este *congruent* cu y și scriem pe scurt $x \leftrightarrow y$.

Relația $\leftrightarrow$ se numește *relația de congruență.*

Fie $F(x) = \{y ; x \leftrightarrow y\}$. Prin definiție, $F(x)$ se numește *familia* sau *clasa de distribuție* a cuvîntului x.

Noțiunea de familie a fost introdusă de O. S. Kulagina în [2]. În [3] și [4] se face un studiu amănunțit al relației $\rightarrow$ și al familiilor.

O mulțime $A \subset E$ se numește *mulțime inițială*, dacă nu există nici un cuvînt x astfel încît $x \rightarrow A$ și $x \notin A$.

Mulțimile inițiale sînt studiate în [3].

Fie o mulțime inițială $A \subset E$. Punem $A_1 = \{x ; A \rightarrow x\}$. Prin definiție, A_1 se numește *produsul saturat* al lui A.

Considerăm mulțimea $\mathfrak{G}(A) = A \cup A_1$. $\mathfrak{G}(A)$ este, prin definiție, *categoria gramaticală generată de mulțimea* A ([4], [5]).

Dacă A este o familie inițială, spunem despre $\mathfrak{G}(A)$ că este o *categorie gramaticală elementară* (pe scurt c.g.e.).

Această noțiune a fost introdusă de către R. L. Dobrušin în [5] și a constituit punctul de plecare pentru cercetările din [3] și [6].

În [7] R. L. Dobrušin, pornind de la considerații relative la limba rusă, a extins noțiunea de categorie gramaticală; cu acest prilej el a introdus noțiunea de *rădăcină*, dată de următoarea

DEFINIȚIE. O familie M se numește *rădăcină*, dacă îndeplinește una din următoarele două condiții :

1) M este mulțime inițială,

2) M nu este mulțime inițială, dar există un context (f_1, f_2) cu proprietățile :

2.1) Pentru orice $x \in M$, $f_1 x f_2 \in \Psi$;

2.2) Pentru orice familie M^* care domină pe M și astfel încît $M^* \cap M = 0$ și pentru orice $y \in M^*$, fraza $f_1 y f_2$ nu este marcată.

2. RĂDĂCINI ÎN SENS GENERALIZAT

Ne-am pus problema să studiem categoriile gramaticale care sînt generate nu de rădăcini familii, ci de rădăcini într-un sens mai larg, în care familiile sînt înlocuite prin mulțimi arbitrare de cuvinte.

În acest scop, în [1] am extins noțiunea de rădăcină în sensul lui Dobrušin, introducînd noțiunea de *rădăcină în sens generalizat* (pe scurt r. g.) dată de următoarea

DEFINIȚIE. O mulțime $A \subset E$ se numește rădăcină în sens generalizat (pe scurt r. g.), dacă este îndeplinită una din următoarele condiții :

1) A este mulțime inițială,

2) A nu este mulțime inițială dar, pentru *fiecare* $x \in A$, există un context (f_1, f_2) astfel încît :

2.1) $f_1 x f_2 \in \Psi$ și

2.2) pentru orice $y \rightarrow A$, $y \notin A$, avem $f_1 y f_2 \notin \Psi$.

Cele două teoreme demonstrate în [1] arată că rădăcinile în sens generalizat formează un semigrup relativ la operația de reuniune și faptul că orice categorie gramaticală generată de o r.g. este tot o r.g., proprietăți asemănătoare cu cele întîlnite în [3] la mulțimile inițiale.

Vom nota cu $\mathfrak{R}$ familia tuturor rădăcinilor în sens generalizat din E, cu $\mathfrak{I}$ familia tuturor mulțimilor inițiale din E și cu $\mathcal{Q}$ familia tuturor rădăcinilor în sens generalizat neinițiale din E.

Atunci vom avea $\mathfrak{R} = \mathfrak{I} \bigcup \mathcal{Q}$ și $\mathfrak{I} \bigcap \mathcal{Q} = 0$.

În [3] este făcut studiul matematic al mulțimilor din $\mathfrak{I}$.

În acest paragraf vom studia familia $\mathcal{Q}$ a rădăcinilor în sens generalizat neinițiale. Vom demonstra mai întîi

TEOREMA 1. *Dacă* $M_1 \subset E$, $M_2 \subset E$ *și* $M_1 \notin \mathcal{Q}$, $M_2 \notin \mathcal{Q}$, *atunci* $M_1 \bigcup M_2 \notin \mathcal{Q}$.

Demonstrație. Să punem $M = M_1 \bigcup M_2$ și să presupunem — prin reducere la absurd — că $M \in \mathcal{Q}$. Aceasta înseamnă că, pentru fiecare $x \in M$, există un context (f_1, f_2) cu proprietățile :

1) $f_1 x f_2 \in \Psi$ și

2) Pentru orice $y \rightarrow M$, $y \notin M$, avem $f_1 y f_2 \notin \Psi$.

Avem de considerat următoarele posibilități :

I. $M \in \mathfrak{I}$. Atunci rezultă că $M \notin \mathcal{Q}$ și teorema este demonstrată în acest caz.

II. $M \notin \mathfrak{I}$.

Faptul că mulțimile M_1 și M_2 nu sînt rădăcini în sens generalizat neinițiale se exprimă prin :

m_1) Există $x_1 \in M_1$, astfel încît, oricare ar fi contextul $(f_1 f_2)$, avem : 1) $f_1 x_1 f_2 \in \Psi$; sau 2) Există $y_1 \rightarrow M_1$, $y_1 \notin M_1$, astfel încît $f_1 y_1 f_2 \in \Psi$.

m_2) Există $x_2 \in M_2$, astfel încît, oricare ar fi contextul (f_1, f_2), avem :

1′) $f_1 x_2 f_2 \notin \Psi$; sau 2′) Există $y_2 \rightarrow M_2$, $y_2 \in M_2$, astfel încît, $f_1 y_2 f_2 \in \Psi$.

Ținînd seamă de acestea, rezultă că avem de considerat patru cazuri — după felul în care sînt date mulțimile M_1 și M_2.

Vom arăta că fiecare din aceste cazuri nu e compatibil cu ipoteza făcută prin absurd asupra mulțimii M de a fi neinițiala, de unde va rezulta demonstrația teoremei.

Cazul I. m$_1$) Există $x_1 \in M_1$, astfel încît, oricare ar fi contextul (f_1, f_2), avem :

$$f_1 x_1 f_2 \notin \Psi \tag{1}$$

m$_2$) Există $x_2 \in M_2$, astfel încît, oricare ar fi contextul (f_1, f_2), avem :

$$f_1 x_2 f_2 \notin \Psi.$$

Dar, în baza ipotezei făcute asupra mulțimii M de a fi r.g. neinițială, rezultă că pentru $x_1 \in M_1 \subset M$, există un context (f_1, f_2), astfel încît $f_1 x_1 f_2 \in \Psi$ — absurd, deoarece contrazice (1).

Cazul II. m$_1$) Există $x_1 \in M_1$, astfel încît oricare ar fi contextul (f_1, f_2), avem :

$$f_1 x_1 f_2 \notin \Psi.$$

m$_2$) Oricare ar fi contextul (f_1, f_2), există $y_2 \to M_2$, $y_2 \notin M_2$ astfel încît

$$f_1 y_2 f_2 \in \Psi.$$

Din aceleași motive, ca și în cazul I (mulțimea M_1 este dată prin aceleași proprietăți și în raționamentul de la cazul I nu au intervenit niciodată proprietățile ce definesc mulțimea M_2) avem o contradicție cu presupunerea făcută asupra mulțimii M de a fi r.g. neinițială.

Cazul III. m$_1$) Oricare ar fi contextul (f_1, f_2), există $y_1 \to M_1$, $y_1 \notin M_1$ astfel încît

$$f_1 y_1 f_2 \in \Psi;$$

m$_2$) Există $x_2 \in M_2$, astfel încît, oricare ar fi contextul (f_1, f_2), avem :

$$f_1 x_2 f_2 \notin \Psi.$$

Datorită simetriei condițiilor, demonstrația se face la fel ca în cazul II.

Cazul IV. m$_1$) Oricare ar fi contextul (f_1, f_2), există $y_1 \to M_1$, $y_1 \notin M_1$, astfel încît

$$f_1 y_1 f_2 \in \Psi; \tag{2}$$

m$_2$) Oricare ar fi contextul (f_1, f_2), există $y_2 \to M_2$, $y_2 \notin M_2$ astfel încît

$$f_1 y_2 f_2 \in \Psi. \tag{3}$$

Din (1) rezultă, oricare ar fi contextul (f_1, f_2) și oricare ar fi $x \in M_1$, că avem :

$$f_1 x f_2 \in \Psi;$$

din (2) rezultă că oricare ar fi contextul (f_1, f_2) și oricare ar fi $x \in M_2$ avem :

$$f_1 x f_2 \in \Psi$$

Deci

$$M_1 \to M_2 \text{ și } M_2 \to M_1 \tag{4}$$

Vom arăta că (2) și (3) contrazic ipoteza făcută asupra mulțimii M de a fi r.g. neinițială.

Pentru aceasta, vom pune condiția 2) din ipoteza făcută la începutul demonstrației sub o altă formă echivalentă.

Această condiție cere ca pentru fiecare $x \in M_1$ să existe un context (f_1, f_2) cu proprietatea :

Pentru orice $y \to M_1$, $y \notin M$ avem $f_1 y f_2 \notin \Psi$.

Ţinînd seamă de (4), rezultă că oricare ar fi $y \to M_1$, $y \notin M_1 \cup M_2$ avem :

$$y \to (M_1 \cup M_2); \qquad (5)$$

dar avem şi reciproc :

oricare ar fi $y \to (M_1 \cup M_2)$, $y \notin (M_1 \cup M_2)$, rezultă $y \to M_1$. (6)

Concluzie. Din ipoteza făcută asupra mulţimii M de a fi r.g. neiniţială, au rezultat relaţiile (5) şi (6).

Deci ipoteza făcută la început asupra lui M acum devine : Pentru fiecare $x \in M$ (în particular pentru $x \in M_1$), există un context (f_1', f_2') astfel încît să avem

1') $f_1'xf_2' \in \Psi$;

2') Oricare ar fi $y \to M_1$, $y \notin M$ (deci $y \notin M_1$), avem $f_1'yf_2' \notin \Psi$ — ceea ce este absurd, deoarece contrazice (2).

Teorema este astfel demonstrată.

Teorema 2. *Reuniunea a două r.g. neiniţiale este tot o r.g. neiniţială.*

Demonstraţie. În prima teoremă din [1] am demonstrat că reuniunea a două r. g. este tot o r. g. Rezultă că pentru demonstrarea acestei teoreme e suficient să arătăm că reuniunea a două r. g. neiniţiale nu poate fi o mulţime iniţială. Fie A şi B două r. g. neiniţiale. Să punem :

$$A^* = \{a^*\ ;\ a^* \notin B,\ a^* \to B\}, \quad B^* = \{b^*\ ;\ b^* \notin A,\ b^* \to A\}.$$

$A \cup B$ poate fi o mulţime iniţială numai în următorul caz :

$$A^* \subset A \text{ şi } B^* \subset B. \qquad (7)$$

Vom arăta că nu pot avea loc relaţiile (7), de unde va rezulta demonstraţia teoremei.

Presupunem (prin absurd) că sînt îndeplinite relaţiile (7). Din faptul că A şi B sînt r. g. neiniţiale şi din (7) rezultă :

I) Pentru fiecare $a^* \in A$, există un context (f_1, f_2) cu proprietăţile : I.1) $f_1 a^* f_2 \in \Psi$; I.2). Oricare ar fi $b^* \to A$ cu $b^* \in B$ şi $b^* \notin A$, avem $f_1 b^* f_2 \in \Psi$;

II) Pentru fiecare $b^* \in B$, există un context (g_1, g_2) cu proprietăţile :

II. 1) $g_1 b^* g_2 \in \Psi$ şi

II. 2) oricare ar fi $a^* \to B$, $a^* \in A$ şi $a^* \notin B$, avem $g_1 a^* g_2 \notin \Psi$.

Din II. 2 rezultă că în orice frază marcată care conţine elemente din A^* (în particular pentru frazele date de I. 1) înlocuind aceste elemente prin orice element din B (în particular cu elementele din $B \subset B$), obţinem tot fraze marcate. Aceasta este absurd, deoarece contrazice I. 2. Deci nu pot fi îndeplinite condiţiile (7) şi teorema este demonstrată.

Din cele două teoreme anterioare rezultă imediat

Corolarul 1. *Familia $\mathcal{Q}$ este un subsemigrup în semigrupul părţilor lui E relativ la operaţia de reuniune.*

Nu este un subsemigrup oarecare, ci se bucură de o proprietate importantă pe care o vom semnala imediat.

Definiție. Vom spune după [8] că subsemigrupul R al semigrupului S este *complet izolat*, dacă oricare ar fi $x \in S$ și oricare ar fi $y \in S$ cu $x \cdot y \in R$ rezultă că sau $x \in R$ sau $y \in R$.

Corolarul 2. *Subsemigrupul* $\mathcal{Q}$ *este un subsemigrup complet izolat în semigrupul părților lui E relativ la operația de reuniune.*

Demonstrație. Notăm cu $\mathcal{S}$ semigrupul părților lui E relativ la operația de reuniune. Fie $X, Y \in \mathcal{S}$ și $X \cup Y \in \mathcal{Q}$. Rezultă că $X \in \mathcal{Q}$ sau $Y \in \mathcal{Q}$.

Nu putem avea $X \notin \mathcal{Q}$ și $Y \notin \mathcal{Q}$ deoarece, conform teoremei 1, aceasta atrage după sine $X \cup Y \notin \mathcal{Q}$, ceea ce este absurd. Înseamnă că este îndeplinită condiția din definiția de mai sus și corolarul 2 este demonstrat.

Corolarul 3. *Orice r. g. neinițială care e compusă din mai mult de un cuvînt, conține o submulțime strictă care este tot r. g. neinițială.*

Demonstrație. Într-adevăr, fie $A \in \mathcal{Q}$. Descompunem pe A într-o reuniune de două mulțimi : $A = B \cup C$ cu $B \cap C = 0$. În baza corolarului 2 rezultă că $B \in \mathcal{Q}$ sau $C \in \mathcal{Q}$. Dar $B \subset A$ și $C \subset A$, de unde demonstrația corolarului 3.

3. CATEGORII GRAMATICALE GENERATE DE RĂDĂCINI ÎN SENS GENERALIZAT

Teorema care urmează generalizează cele două teoreme din [1].

Teorema 3. *Dacă A este o r.g. și X o mulțime oarecare de cuvinte, atunci $A \cup X$ este tot o r.g.*

Demonstrație. A, fiind o r. g., satisface la una din cele două condiții de definiție [1]. Dacă A este mulțime inițială, atunci $A \cup X$ este tot o mulțime inițială [3] și deci este o r.g., deoarece îndeplinește condiția 1 din definiție.

Presupunem că A este r.g. neinițială. Se poate întîmpla ca $A \cup X$ să fie mulțime inițială. În acest caz teorema e demonstrată, fiind satisfăcută definiția rădăcinii în sens generalizat.

Fie $A \cup X$ neinițială. Considerăm un element $x \in A \cup X$.

Dacă $x \in A$, în baza ipotezei făcute asupra lui A, rezultă că există un context (f_1, f_2) astfel încît : 1) $f_1 x f_2 \in \Psi$ și 2) oricare ar fi $y \to A$, $y \notin A$, avem $f_1 y f_2 \notin \Psi$. Fie $B = \{y\,;\, y \to A,\ y \notin A\}$ și $C = \{y\,;\, y \to A \cup X,\ y \notin A \cup X\}$. Ținînd seama de proprietățile relației $\to$ studiate în [3], rezultă că avem :

$$C \subset B. \tag{1}$$

Din 2) și (1) rezultă

2′) Oricare ar fi $y \to A \cup X$, $y \notin A \cup X$, avem $f_1 y f_2 \notin \Psi$.

Relațiile (1) și 2′) ne arată că $A \cup X$ este r.g. și teorema este demonstrată în acest caz.

Presupunem că $x \in X$. Atunci există un context (f'_1, f'_2) astfel încît :

1° $f'_1 x f'_2 \in \Psi$.

2° Oricare ar fi $y \to (A \cup X)$, $y \notin A \cup X$, avem $f'_1 y f'_2 \notin \Psi$.

Într-adevăr, 1° are loc în baza presupunerii făcute în primul paragraf, că orice cuvînt intră în cel puţin o frază marcată.

Condiţia 2° o stabilim prin reducere la absurd.

Prin negaţie obţinem : există $y_0 \to A \cup X$, $y_0 \notin A \cup X$, astfel încît $f_1' y_0 f_2' \in \Psi$.

În baza definiţiei şi proprietăţilor relaţiei $\to$, rezultă că avem : α) $f_1' x f_2' \in \Psi$ oricare ar fi $x \in A$ şi β) $f_1' x f_2' \in \Psi$ oricare ar fi $x \in X$, fapt ce nu este totdeauna adevărat.

De exemplu, pentru mulţimile X ce nu satisfac în acelaşi timp proprietăţile α) şi β). Rezultă că 2° este îndeplinită şi cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Corolarul 1. *Categoria gramaticală generată de o r.g. este tot o r.g.*

Într-adevăr, fie A o *r.g.*, $\mathfrak{G}(A) = A \cup A_1$, unde $A_1 = \{x;\ A \to x\}$. Luînd $X = A_1$ în teorema anterioară, rezultă corolarul 1.

Corolarul 2. *Reuniunea a două r.g. este tot o r.g.*

Aceasta rezultă imediat din teorema de mai sus, considerînd mulţimea X ca fiind r.g.

Teorema 4. *Dacă A şi B sînt două r.g. care au acelaşi produs saturat P, atunci reuniunea categoriilor gramaticale generate de ele este o categorie gramaticală generată de $A \cup B$.*

Demonstraţie. Prin ipoteză avem

$$A_1 = B_1 = P. \tag{2}$$

Vom arăta că

$$\mathfrak{G}(A \cup B) = \mathfrak{G}(A) \cup \mathfrak{G}(B). \tag{3}$$

Se ştie din [3] că $(A \cup B)_1 = A_1 \cap B_1$ şi din [1] că $A \cup B$ este r.g. (5)

Ţinînd seamă de (2), (4) şi (5) avem :

$$\mathfrak{G}(A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup B)_1 = (A \cup B) \cup (A_1 \cap B_1) =$$
$$= (A \cup B) \cup P = (A \cup P) \cup (B \cup P) = \mathfrak{G}(A) \cup \mathfrak{G}(B)$$

şi relaţia (3) este demonstrată.

Lemă. *Dacă A şi B sînt două r.g., atunci :* 1) *$A \cup B$ este tot o r.g. şi* 2) $\mathfrak{G}(A \cup B) = [\mathfrak{G}(A) \cap \mathfrak{G}(B)] \cup [A \cap B]$.

Punctul 1) este dat de teorema 1 din [1], iar punctul 2) se demonstrează la fel ca teorema 1 din [6], dată pentru mulţimile iniţiale.

Teorema 5. *Dacă A şi B sînt două r.g. care au acelaşi produs saturat P, atunci*

$$P = \mathfrak{G}(A) \cap \mathfrak{G}(B).$$

Demonstraţie. Avem

I) $\mathfrak{G}(A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup B)_1 = (A \cup B) \cup (A_1 \cap B_1) = (A \cup B) \cup P$.

În baza lemei de mai sus rezultă :

II) $\mathfrak{G}(A \cup B) = [\mathfrak{G}(A) \cap \mathfrak{G}(B)] \cup (A \cup B)$.

Din I) şi II) rezultă că

$$P = \mathfrak{G}(A) \cap \mathfrak{G}(B).$$

4. SEMIGRUPUL RĂDĂCINILOR ÎN SENS GENERALIZAT CU ACELAȘI PRODUS SATURAT P

Vom nota cu $\$(P)$ familia rădăcinilor în sens generalizat care au același produs saturat P.

Teorema 6. *Familia $\$(P)$ este un semigrup relativ la operația de reuniune*

Demonstrație. Fie $A \in \$(P)$ și $B \in \$(P)$. Din [1] rezultă :

$$A \cup B \text{ este r.g.} \tag{1}$$

și

$$A_1 = B_1 = P. \tag{2}$$

Vom arăta că $(A \cup B)_1 = P$ și teorema va fi demonstrată. Într-adevăr, ținînd seama de 1) și 2) avem :

$$(A \cup B)_1 = A_1 \cap B_1 = P. \tag{3}$$

Din (1) și (3) rezultă că $A \cup B \in \$(P)$.

Fie $\$'(P)$ familia categoriilor gramaticale generate de elementele lui $\$(P)$.

Teorema 7. *Familia $\$'(P)$ este un semigrup relativ la operația de reuniune.*

Demonstrație. Fie $\mathfrak{G}_1 \in \$'(P)$ și $\mathfrak{G}_2 \in \$'(P)$. Rezultă că există $A \in \$(P)$ și $B \in \$(P)$ astfel încît : $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}(A)$ și $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}(B)$. Atunci, conform teoremei 4, avem :

$$\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}(A) \cup \mathfrak{G}(B) = \mathfrak{G}(A \cup B). \tag{4}$$

Dar

$$A \cup B \in \$(P) \tag{5}$$

deoarece $\$(P)$ este semigrup.

Din (5) rezultă că $\mathfrak{G}(A \cup B) \in \$'(P)$ adică $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \in \$'(P)$; deci $\$'(P)$ este un semigrup față de operația de reuniune.

Definiție. Semigrupul $\$'(P)$ asociat semigrupului $\$(P)$ va fi numit *semigrupul derivat al lui $\$(P)$*.

Proprietățile lui vor rezulta din cele ce urmează.

Teorema 8. *Semigrupul $\$'(P)$ este format din r.g. ce au același produs saturat.*

Demonstrație. Deoarece categoriile gramaticale generate de r.g. sînt tot r.g., rezultă că $\$'(P)$ este format din r.g.

Să arătăm acum că r.g. din această familie sînt caracterizate prin proprietatea de a avea același produs saturat (nu neapărat egal cu P).

Fie $\mathfrak{G}_1 \in \$'(P)$ și $\mathfrak{G}_2 \in \$'(P)$. Rezultă că există $A \in \$(P)$ și $B \in \$(P)$ astfel încît :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1 &= \mathfrak{G}(A) = A \cup A_1, \\ \mathfrak{G}_2 &= \mathfrak{G}(B) = B \cup B_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Ținînd seama de (6) și de faptul că oricare ar fi $X \subseteq E$ avem: $(X_1)_1 \subseteq X$, rezultă:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{G}_1)_1 &= (A \cup A_1)_1 = A_1 \cap (A_1)_1 = (A_1)_1,\\ (\mathfrak{G}_2)_1 &= (B \cup B_1)_1 = B_1 \cap (B_1)_1 = (B_1)_1.\end{aligned} \tag{7}$$

Deoarece $A_1 = B_1$, din (7) rezultă că $(\mathfrak{G}_1)_1 = (\mathfrak{G}_2)_1$. Cum $\mathfrak{G}_1$ și $\mathfrak{G}_2$ au fost alese arbitrare în $\mathcal{S}'(P)$, rezultă că oricare ar fi $X \in \mathcal{S}'(P)$ și $Y \in \mathcal{S}'(P)$ avem: $X_1 = Y_1$.

DEFINIȚIE. Vom numi *indicele* semigrupului $\mathcal{S}(P)$ produsul saturat P comun pentru toate mulțimile sale.

Din demonstrația teoremei anterioare (relațiile (7)) și din faptul că $(A_1)_1 \subseteq A_1$, rezultă că indicele semigrupului derivat este inclus în indicele semigrupului.

COROLAR. *Avem* $(\mathcal{S}'(P))' = \mathcal{S}'(P)$.

Aceasta rezultă din faptul că familia $\mathcal{S}'(P)$ este formată din categorii gramaticale $\mathfrak{G}(X)$ care se bucură de proprietatea $\mathfrak{G}(\mathfrak{G}(X)) = \mathfrak{G}(X)$. Demonstrația acestei relații este aceeași ca cea dată în [6] pentru mulțimile inițiale.

5. CATEGORII GRAMATICALE GENERATE DE ALGEBRE BOOLEENE DE RĂDĂCINI ÎN SENS GENERALIZAT

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă:

Dîndu-se categoria gramaticală $\mathfrak{G}_0$, ce condiție trebuie să îndeplinească ea pentru ca rădăcinile în sens generalizat ce o generează să alcătuiască o *algebră booleană?*

În acest scop vom demonstra:

TEOREMA 9. *Necesar și suficient ca familia* $\mathfrak{R}_0$ *a r.g. care generează aceeași categorie gramaticală* $\mathfrak{G}_0$, *să formeze o algebră booleană este ca oricare ar fi* $X \in \mathfrak{R}_0$ *și oricare ar fi* $Y \in \mathfrak{R}_0$ *să avem:*

$$(X \cap Y)_1 - X_1 \subset \mathfrak{G}_0.$$

Demonstrație. Condiția este necesară. Presupunem deci că familia $\mathfrak{R}_0$ a r.g. care generează aceeași categorie gramaticală $\mathfrak{G}_0$ formează o algebră booleană.

Rezultă că dacă $A \in \mathfrak{R}_0$ și $B \in \mathfrak{R}_0$ avem:

$$\mathfrak{G}(A) = \mathfrak{G}(B) = \mathfrak{G}(A \cup B) = \mathfrak{G}(A \cap B) = \mathfrak{G}_0,$$

de unde

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(A \cap B) \subset \mathfrak{G}_0 \text{ sau } [(A \cap B) \cup (A \cap B)_1] \subset \mathfrak{G}_0 &=\\ = \mathfrak{G}(A) = \mathfrak{G}(B) = A \cup A_1 = B \cup B_1&.\end{aligned} \tag{8}$$

Din (8) rezultă că avem

$$(A \cap B)_1 \subset \mathfrak{G}_0 \tag{9}$$

Dar $A \cap B \subset A$ şi deci

$$A_1 \subset (A \cap B)_1 \tag{10}$$

Ţinînd seama de (9) şi (10) avem:

$$(A \cap B)_1 - A_1 \subset \mathfrak{G}_0.$$

Mulţimile A şi B fiind luate arbitrare, rezultă că oricare ar fi $X \in \mathfrak{R}_0$ şi $Y \in \mathfrak{R}_0$, avem

$$(X \cap Y)_1 - X_1 \subset \mathfrak{G}_0.$$

Condiţia este suficientă. Ţinînd seamă de teorema 4 din [3] (care se demonstrează în mod asemănător pentru mulţimi A şi B nu neapărat iniţiale), dacă $A \in \mathfrak{R}_0$ şi $B \in \mathfrak{R}_0$, rezultă că este suficient să avem

$$\mathfrak{G}(A \cap B) \subset \mathfrak{G}(A) = \mathfrak{G}(B) = \mathfrak{G}_0 \tag{11}$$

pentru ca familia $\mathfrak{R}_0$ să formeze o algebră booleană.

Cum $\mathfrak{G}(A) = A \cup A_1$, $A \cap B \subset A$ şi $\mathfrak{G}(A \cap B) = (A \cap B) \cup (A \cap B)_1$, rezultă că pentru a avea incluziunea (11) este suficient să avem:

$$(A \cap B)_1 \subset \mathfrak{G}_0 \tag{12}$$

Dar din (11) avem:

$$A_1 \subset \mathfrak{G}_0 \tag{13}$$

şi

$$A_1 \subset (A \cap B) \tag{14}$$

deoarece $A \cap B \subset A$.

Din (12), (13) şi (14) rezultă că pentru a fi îndeplinită relaţia (11), este suficient să avem

$$(A \cap B)_1 - A_1 \subset \mathfrak{G}_0.$$

Deoarece A şi B sînt alese arbitrar în $\mathfrak{R}_0$, rezultă că oricare ar fi $X \in \mathfrak{R}_0$ şi $Y \in \mathfrak{R}_0$ este suficient să avem:

$$(X \cap Y)_1 - X_1 \subset \mathfrak{G}_0$$

pentru ca familia $\mathfrak{R}_0$ să formeze o algebră booleană şi teorema este astfel complet demonstrată.

Observaţie. Datorită rolului simetric pe care-l joacă X şi Y în teoremă, condiţia din teoremă se mai poate pune şi sub forma

$$(X \cap Y)_1 - Y_1 \subset \mathfrak{G}_0 \text{ oricare ar fi } X \in \mathfrak{R}_0 \text{ şi } Y \in \mathfrak{R}_0.$$

6. LEGĂTURA DINTRE DIFERITELE TIPURI DE CATEGORII GRAMATICALE

Notăm cu $\mathscr{G}_1$ familia categoriilor gramaticale elementare (categorii gramaticale generate de familii iniţiale), cu $\mathscr{G}_2$ familia categoriilor gramaticale generate de mulţimi iniţiale, cu $\mathscr{G}_3$ familia categoriilor gramaticale generate de rădăcini în sensul lui Dobrušin şi cu $\mathscr{G}_4$ familia categoriilor gramaticale generate de rădăcini în sens generalizat.

Legătura ce există între diversele tipuri de categorii gramaticale introduse pînă acum este reprezentată de următoarea schemă :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \subset & \mathcal{G}_2 \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{G}_3 & \subset & \mathcal{G}_4 \end{array}$$

BIBLIOGRAFIE

1. C. CRĂCIUN, *O generalizare a noțiunii de categorie gramaticală în sensul lui Dobrušin.* St. cerc. mat., **16**, *9*, 1147–1152 (1964).
2. О. С. КУЛАГИНА, *Об одном способе определения грамматических понятий на базе теорий множеств.* Сб. Проблемы Кибернетики, **I**, 203—214 (1958).
3. S. MARCUS, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire I.* Revue de mathématiques pures et appliquées, **VII**, *1*, 91–107 (1962).
4. S. MARCUS, *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică.* Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
5. Р.Л. ДОБРУШИН, *Элементарная грамматическая категория.* Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода, **5**, 19—21 (1957).
6. S. MARCUS, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire II.* Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. **8**, *5*, 323–329 (1962).
7. Р.Л. ДОБРУШИН, *Математические методы в лингвистике.* Математическое просвещение, Москва, **6**, 52—59 (1961).
8. Е.С. ЛЯПИН, *Полугруппы*, Москва, 1960, p. 239—242.

ASUPRA UNEI PROPRIETĂŢI ALE OPERATORILOR COMPLET CONTINUI

DE

V. ISTRĂŢESCU

Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

Fie $C([0, 1], B)$ spaţiul funcţiilor continue definite pe $[0,1]$ şi cu valori în spaţiul Banach B iar T un operator complet continuu pe acest spaţiu (există T_n de rang finit astfel ca $\| T_n - T \| \to 0$). În acest caz se arată că

$$1 + \|T\| = \|1 + T\|.$$

De asemenea, în spaţiul cl^{χ} se arată că există un operator compact care nu satisface relaţia precedentă.

În această lucrare vom arăta că pentru orice operator complet continuu care acţionează pe spaţiul $C([0,1], B)$, unde B este un spaţiu Banach, este adevărată relaţia

$$1 + \|T\| = \|1 + T\|. \tag{1}$$

În partea a doua vom da un exemplu de spaţiu Banach de funcţii separabile în care relaţia (1) este falsă pentru operatori compacţi.

1. Spaţiul $C([0,1], B)$ este spaţiul funcţiilor continue definite pe $[0,1]$ şi cu valori în B cu norma

$$|||f||| = \sup_{t \in [0,1]} \|f(t)\|_B, \qquad \| \;\|_B \text{ fiind norma în } B.$$

Să considerăm un operator de rang finit, adică un operator de forma

$$Tf = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f)\, \psi_i \qquad \psi_i \in C([0,1], B).$$

iar $\alpha_i \in (C([0,1], B))^*$.

PROPOZIŢIA 1.1 *Pentru orice operator de rang finit T avem relaţia*

$$1 + \|T\| = \|1 + T\|.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 265–279, BUCUREŞTI, 1965

Demonstraţie. Ştim că $\alpha_i\,(f)$ pot fi reprezentate ca nişte integrale în raport cu măsuri vectoriale (cu valori în dualul B*)

$$\alpha_i(f) = \int_{[0,1]} < f\,(t),\, g_i\,\mathrm{d}t >, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Din ipoteză rezultă că există pentru fiecare $\varepsilon > 0$, x_ε, $|||\,x_\varepsilon\,||| = 1$ astfel ca

$$|||\,Tx_\varepsilon\,||| > ||\,T\,|| - \varepsilon/2.$$

Cum Tx_ε este o funcţie continuă, rezultă că exista un interval pe care avem relaţia

$$||\,Tx_\varepsilon\,(t)\,||_B \geqslant ||\,T\,|| - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Vom lua un interval I_δ, în intervalul găsit mai sus, astfel încît să avem

$$\operatorname*{var}_{I_\delta} g_i \leqslant \frac{\varepsilon}{4n \sup |||\,\psi_i\,|||}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (2)$$

şi vom defini funcţia x_1 prin

$$x_1(t) = \begin{cases} x_\varepsilon\,(t) & t \in C_{i\delta} \\ \dfrac{y_0\,(t)}{||y_0(t)||_B} & t = t_0,\, t_0 \in I_\delta \\ \text{liniară în rest.} & \end{cases}$$

Aici am pus $y_0\,(t) = (\,Tx_\varepsilon)\;(t)$. Fie $y = Tx_1$. Alegînd I_δ ca mai sus, deducem că

$$|||\,y_1 - y_0\,||| < \varepsilon/2. \qquad (3)$$

Într-adevăr

$$y_1 - y_0 = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_\delta} < x_1 - x_\varepsilon,\; g_i\,\mathrm{d}t >$$

şi din (2) rezultă (3).

Să calculăm acum $|||\,x_1 + Tx_1\,|||$. Vom avea

$$|||\,x_1 + Tx_1\,||| = |||\,x_1 + Tx_\varepsilon + T\,(x_1 - x_\varepsilon)\,||| \geqslant ||\,x_1\;(t_0) + Tx_\varepsilon\,(t_0) +$$

$$+ \,T\,(x_1 - x_\varepsilon)\,(t_0)\,||_B \geqslant \left\|\frac{y_0\,(t_0)}{||y_0\,(t_0)||_B} + y_0\;(t_0)\right\|_B - \varepsilon/2 = 1 + ||\,y_0\,(t_0)\,||_B - \varepsilon/2.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este luat arbitrar, rezultă relaţia $||\,1 + T\,|| = 1 + ||\,T\,||$ şi deci propoziţia este demonstrată.

De aici rezultă evident următoarea :

Teoremă. *Pentru orice operator complet continuu T avem relaţia*

$$1 + ||\,T\,|| = ||\,1 + T\,||.$$

2. În acest paragraf vom arăta că există spații Banach de funcții pentru care exista un operator compact care nu satisface relația de mai sus.

Să considerăm pentru aceasta segmentul [0,1] și mulțimea funcțiilor continue pentru care avem

$$m(f) = \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|(t_1 - t_2)|^\alpha} < \infty.$$

Notăm această mulțime cu CL^α. Dacă punem

$$\|f\|_{CL^\alpha} = \|f\|_C + m(f)$$

vom obține un spațiu Banach. Se verifică imediat că avem chiar o algebră Banach cu unitate.

Se verifică ușor următoarele propoziții.

PROPOZIȚIA 2.1. *Dacă* $f \in CL^\alpha f(x) \geqslant k > 0$, *atunci* $\frac{1}{f} \in CL^\alpha$.

PROPOZIȚIA 2.2. *Algebra* Cl^α *este cu involuție iar spațiul idealelor maximale este homeomorf cu* [0,1].

PROPOZIȚIA 2.3. *Algebra* CL^α *este semisimplă.*

Vom considera în cele ce urmează subspațiul cl^α al funcțiilor pentru care

$$\left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{(t_1 - t_2)^\alpha} \right| \to 0 \quad \text{cînd } t_1 \to t_2.$$

Se știe că acest spațiu este separabil [1], [2].

Pentru exemplul care ne interesează vom considera că $\alpha = 1/2$. Definim operatorul T prin :

$$(T\varphi)(t) = -3 \int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

PROPOZIȚIA 2.4. *T este un operator liniar și continuu.*

PROPOZIȚIA 2.5. *T este un operator compact.*

Într-adevăr, conform teoremei lui Arzelà, deducem că putem extrage un subșir convergent în sens obișnuit pe care-l presupunem φ_n.

În acest caz însă

$$m(T(\varphi_n - \varphi)) \leqslant 3 \|\varphi_n - \varphi\|_c$$

și deci T este compact.

PROPOZIȚIA 2.6. *Avem*

$$\|T\| = 3 + 3\,m(\varphi), \quad \varphi = t.$$

Într adevăr, să considerăm funcția $\varphi_0(t) \equiv 1$. Avem $T\varphi_0 = -3t$ și deci

$$\|T\varphi_0\|_c = 3, \quad m(T\varphi_0) = 3m(\varphi).$$

adică

$$\| T \| \geqslant 3 + 3m(\varphi).$$

Pentru a demonstra relaţia contrară, vom observa că $m\,(T\varphi) \leqslant 3\,m\,(\varphi)$.
Într-adevăr

$$\frac{1}{\sqrt{t_1 - t_2}}\left| 3\int_0^{t_1} \varphi\,(s)\,\mathrm{d}s - 3\int_0^{t_2} \varphi\,(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_2}}\right| - 3\int_{t_1}^{t_2} \varphi\,(s)\,\mathrm{d}s \left| \leqslant 3\,m\,(\varphi).\right.$$

şi propoziţia e demonstrată.

Propoziţia 2.7. *Operatorul T satisface relaţia*

$$\| 1 + T \| < 1 + \| T \|.$$

Vom calcula mai întîi $\|(1 + T\,(1))\|$. Vom avea

$$\| 1 + T\,(1) \|_c = \| 1 - 3\int_0^t \mathrm{d}s \,\|_c = \| 1 - 3t \|_c = 2$$

şi

$$m\;(1 + T\,(1)) = 3\,m\,(\varphi).$$

Analog

$$\| - 1 + T\,(-1) \|_c = \| - 1 + 3t \|_c = 2$$

şi

$$m\,(- 1 + T(- 1)) = 3m\,(\varphi).$$

Rezultă astfel relaţia

$$\| \pm 1 + T(\pm 1) \| = 2 + 3m\,(\varphi) < 1 + \| T \|.$$

Să arătăm acum că relaţia scrisă este adevărată. Conform definiţiei rezultă că există un şir $\{\varphi_n\}$, $\| \varphi_n \|_{cl^\alpha} = 1$ astfel ca

$$\| \varphi_n + T\varphi_n \|_{cl^\alpha} \rightarrow \| 1 + T \|.$$

Vom deosebi două cazuri

1. $m\,(\varphi_n) \in [\alpha, \beta] \subset (0,1)$.
2. $m\,(\varphi_n) \rightarrow 1$ sau $m(\varphi_n) \rightarrow 0$.

În cazul 1 vom avea

$$\| \varphi_n + T\varphi_n \|_c \leqslant \| \varphi_n \|_c + 3\, \| \varphi_n \|_c$$

şi

$$m(\varphi_n + T\varphi_n) \leqslant m(\varphi_n) + \| \varphi_n \|_c\, m(\varphi),$$

de unde

$$\| \varphi_n + T\varphi_n \|_{cl^\alpha} < 1 + 3\, \| \varphi_n \|_c + 3m\,(\varphi)\, \| \varphi_n \|_c < 1 + 3\,(1 - \alpha) + $$
$$+ 3\,(1 - \alpha)\, m(\varphi)$$

şi deci în acest caz relaţia este adevărată.

În cazul 2, dacă

$$m(\varphi_n) \to 0$$

din $\|\varphi_n\|_c + m(\varphi_n) = 1$ rezultă că putem presupune $\varphi_n \to 1$ în mod obişnuit, dar şi în cl^α. Ţinînd seama de cele stabilite pentru $\varphi_0(t) \equiv 1$ deducem că afirmaţia este adevărată.

Dacă $m(\varphi_n) \to 1$, atunci $\varphi_n \to 0$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n + T\varphi_n)\|_{cl^\alpha} = 3m(\varphi)$$

şi propoziţia este complet demonstrată.

Putem considera pe CL^α şi alte norme echivalente cu cea introdusă ca de exemplu

$$\|f\|^1_{cl^\alpha} = \max\{\|f\|_c, m(f) + |f(t_0)|\}, \quad t_0 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

şi prin consideraţii analoage celor utilizate se stabileşte că există un operator compact care nu are proprietatea

$$1 + \|T\| = \|1 + T\|.$$

Exemplele de mai sus arată că operatorii compacţi nu mai satisfac relaţia precedentă, ceea ce se întîmplă cu operatorii compacţi în spaţiul funcţiilor continue cu norma sup, din cauză că în acest spaţiu, după cum ştim, orice operator compact este şi complet continuu.

Primită la redacţie a 20 iulie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. H. Mirkil, Canad. Journal, **XII**, *4*, (1950).
2. K. De Leeuw, Studia Math., **XXI**, fasc. *1* (1961).
3. И. Гелфанд, Д. Раиков, Г. Силов, *Коммутативные нормированные кольца*, Москва, 1960.

ASUPRA VERIFICĂRII FORMALE A SCHEMELOR LOGICE DE ALGORITMI

DE

L. NEGRESCU şi I. PĂVĂLOIU

Institutul de calcul al Academiei R. P. R. — Filiala Cluj

În lucrare se dă un procedeu cu ajutorul căruia se pot determina toate subşirurile de forma :

$$B_i B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_s} B_j,$$

unde B_i este un operator aritmetic, $B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_s}$ sînt condiţii logice iar B_j este sau operator aritmetic sau condiţie logică, care în plus mai satisface anumite proprietăţi amintite în lucrare.

Cu ajutorul acestui procedeu s-au stabilit unele proprietăţi ale schemelor logice de algoritmi privind verificarea lor formală.

În lucrare este prezentată şi schema logică graf a algoritmului de aplicare automată a procedeului dat la o schemă logică de algoritmi arbitrară.

În lucrarea de faţă ne vom ocupa cu unele probleme legate de analiza formală a schemelor logice de algoritmi. În acest scop vom da un procedeu cu ajutorul căruia se poate ataşa oricărei scheme logice de algoritmi o schemă matricială.

Introducem mai jos cîteva noţiuni deja cunoscute [1] care ne vor servi la expunerea mai clară a rezultatelor obţinute.

DEFINIŢIA 1. Se numeşte memorie o mulţime de obiecte G numite adrese.

DEFINIŢIA 2. Se numeşte stare a memoriei o corespondenţă de forma :

$$x = X(z), \; z \in G, \; x \in H,$$

unde H este o mulţime de obiecte pe care le numim stări.

Fie $Y = \{X\}$ mulţimea tuturor stărilor memoriei astfel definite.

DEFINIŢIA 3. Funcţia $A(X) = X^*$ care transformă mulţimea Y în ea însăşi se numeşte operator aritmetic.

DEFINIŢIA 4. Se numeşte predicat peste mulţimea Y orice funcţie $p(X)$ care face ca oricărui element al mulţimii Y să-i corespundă unul din numerele 0 sau 1.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 271–286, BUCUREŞTI, 1965

DEFINIŢIA 5. Se numeşte funcţie logică peste mulţimea Y o funcţie de forma:

$$\alpha = \alpha(p_1, p_2, \ldots, p_k)$$

care face ca oricărui $X \in Y$ să-i corespundă unul din numerele 0 sau 1, iar $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p_k$ sînt predicate peste mulţimea Y.

DEFINIŢIA 6. Se numeşte condiţie logică orice pereche de forma (α, l), unde α este o funcţie logică şi l este un număr natural bine determinat pe care îl numim indice de transfer.

Notăm $\mathcal{A} = \{A\}$, $\mathcal{B} = \{(\alpha, l)\}$ şi fie $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

DEFINIŢIA 7. Se numeşte schemă logică de algoritmi un şir finit de elemente aparţinînd mulţimii $\mathcal{C}$ care îndeplineşte următoarele condiţii

1. Elementul cu indicele i este al i-elea termen din şir.
2. Dacă în schemă apar două elemente egale, atunci ele vor avea indici diferiţi potrivit ordinei lor în şirul considerat.
3. Indicele de transfer al oricărei condiţii logice din şirul respectiv nu întrece numărul termenilor şirului.
4. Dacă (α_i, l) este o condiţie logică care apare în şir, atunci $l \neq i + 1$ şi $l \neq i$, unde i este indicele de ordine al acestui element în şirul considerat.

Aici, prin egalitatea elementelor mulţimii $\mathcal{C}$ înţelegem următoarele:

Dacă A_1 şi A_2 sînt doi operatori aritmetici egali, atunci oricare ar fi starea memoriei X avem $A_1(X) = A_2(X)$ iar (α_1, l_1) şi (α_2, l_2) sînt două condiţii logice egale dacă $l_1 = l_2$ şi $\alpha_1(X) = \alpha_2(X)$ oricare ar fi starea memoriei X şi invers.

Fie

$$B_1 B_2 \ldots B_{n-1} B_n \tag{1}$$

o schemă logică de algoritmi. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că B_1 este operatorul aritmetic care semnalizează începutul realizării schemei iar B_n este operatorul aritmetic care semnalizează sfîrşitul realizării schemei.

Descriem acum procesul de realizare a schemei (1) prin recurenţă.

Fie X_0 o stare oarecare a memoriei pe care o numim stare iniţială. Începem executarea schemei (1) cu executarea operatorului B_1. Fie $X_1 = B_1(X_0)$ şi fie că în procesul de executare a schemei am făcut l paşi în urma cărora au fost executaţi pe rînd operatorii aritmetici

$$B_1, B_{k_1}, \ldots, B_{k_l} \tag{1'}$$

şi fie X_{s+1} starea memoriei la această etapă. Atunci la pasul $l + 1$ se analizează elementul considerat la pasul l şi după cum el este un operator aritmetic sau o condiţie logică efectuăm următoarele operaţii:

a) Dacă elementul executat la pasul l este un operator aritmetic, atunci se analizează elementul care urmează după el şi se execută.

b) Dacă elementul executat la pasul l este o condiţie logică de forma (α, t), atunci în cazul cînd $\alpha(X_{s+1}) = 1$ analizăm elementul imediat următor şi îl executăm. Iar în cazul cînd $\alpha(X_{s+1}) = 0$, analizăm elementul cu indicele t şi îl executăm. Astfel continuînd procesul de execuţie al schemei (1) se pot întîmpla două cazuri :

1° Procesul de executare al schemei (1) se sfîrşeşte cu executarea operatorului B_n.

2° Procesul de executare al schemei (1) continuă indefinit.

Din descrierea procesului de executare a schemei (1) rezultă imediat că după executarea unui oarecare operator aritmetic B_t, se execută cel mult un operator aritmetic şi numai acesta.

În cele ce urmează va fi util să punem în evidenţă toate subşirurile ataşate schemei (1) de forma :

$$B_i\, B_{i_1}\, B_{i_2} \dots B_{i_s}\, B_j, \qquad (s \geqslant 0,\ i_1 = i + 1) \qquad (2)$$

cu următoarele proprietăţi :

1) B_i este un operator aritmetic şi dacă $B_j = B_{i+1}$, atunci B_{i+1} este operator aritmetic.

2) $B_{i_1}, \dots, B_{i_s}$, $(s > 0)$ sînt condiţii logice astfel încît dacă $B_{i_{t+s}}$ este condiţia logică care urmează după B_{i_t} în subşirul (2), atunci sau $i_{t+1} = i_t + 1$ sau i_{t+4} este indicele de transfer al elementului B_{i_t} după cum în acest element funcţia logică apare ca şi în schema (1) sau apare negaţia ei.

3) B_j este un operator aritmetic dacă elementele subşirului B_{i_1}, $B_{i_2}, \dots, B_{i_s}$, $(s > 0)$ au proprietatea că oricare ar fi un element din acest subşir B_{j_ν} cu funcţia sa logică α_{j_ν}, atunci atît această funcţie cît şi negaţia ei nu mai apar în elementele acestui subşir.

4) Dacă B_j este o condiţie logică cu funcţia logică α_j, atunci neapărat există în subşirul $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_s}$, $(s > 0)$ un indice i_μ astfel ca $i_\mu = j$. Evident, dacă notăm cu β_{i_μ} funcţia logică din elementul B_{i_μ} a subşirului (2), atunci între β_{i_μ} şi α_j avem relaţiile $\beta_{j_\mu} = \alpha_j$ sau $\beta_{i_\mu} = \bar{\alpha}_j$. Dăm mai jos un procedeu de obţinere al tuturor subşirurilor de forma (2).

Fie B_i, $0 < i < n$ un oarecare operator aritmetic din şirul (1). Începem analiza primului element care urmează după B_i, adică analizăm elementul B_{i+1}. Se pot întîmpla două cazuri.

1) B_{i+1} este un operator aritmetic ; atunci subşirul (2) are forma :

$$B_i\, B_{i+1},\ (s = 0,\ j = i + 1). \qquad (3)$$

2) B_{i+1} este o condiţie logică ; atunci ea se scrie la dreapta lui B_i împreună cu toate condiţiile logice care urmează la dreapta ei în şirul (1) pînă cînd întîlnim primul operator aritmetic în acest şir. Obţinem astfel subşirul :

$$B_i\, B_{i+1}\, B_{i+2} \dots B_{i+k}\, B_t \qquad (t = i + k + 1), \quad (4)$$

unde B_t este primul operator aritmetic care se află la dreapta lui B_i în şirul (1).

Din subşirul (4) se formează un şir de subşiruri în felul următor :

Se scrie operatorul aritmetic B_i şi la dreapta lui condiţia logică B_{i+1} înlocuind funcţia logică α_{i+1} cu $\bar{\alpha}_{i+1}$. După acest element scriem elementul din şirul (1) cu indicele egal cu indicele de transfer al lui B_{i+1}.

Dacă acest element este un operator aritmetic, atunci se obţine al doilea termen al şirului căutat. Dacă însă acest element este o condiţie logică, atunci scriem la dreapta lui toate elementele care urmează după el în şirul (1), pînă cînd întîlnim un operator aritmetic şi astfel obţinem al doilea termen al şirului căutat. Pentru a obţine al treilea termen procedăm analog cu elementul B_{i+2} al subşirului (4). Procedăm în acest fel pînă cînd epuizăm toate condiţiile logice din subşirul (4). După aceasta considerăm al doilea termen al şirului construit pînă aici şi procedăm cu el ca şi cu subşirul (4) începînd cu prima condiţie logică a cărei funcţie nu a fost încă barată, dacă există o astfel de condiţie. În cazul cînd nu există o astfel de condiţie, se trece la termenul următor din şir. În general dacă presupunem că termenul care trebuie prelucrat din şir este :

$$B_i B_{i+1} B_{k_2} \ldots B_{k_p} (\bar{\alpha}_{k_p+1,\, i_p+1}) (\alpha_{i_p+1,\, s_1}) \ldots (\alpha_{i_p+q,\, s_q}) B_{i_p+q+1},$$

unde $B_{i+1} B_{k_2} \ldots B_{k_p}$ sînt condiţii logice din şirul (1), care eventual pot să conţină şi negaţiile funcţiilor logice, atunci din el se obţin următorii termeni ai şirului :

$$\begin{aligned} & B_i B_{i+1} B_{k_2} \ldots B_{k_p} (\bar{\alpha}_{k_p+1,\, i_p+1}) (\bar{\alpha}_{i_p+1,\, s_1}) (\alpha_{s_1}, u_1) \ldots (\alpha_{s_1+v}, u_{v+1}) B_{s_1+v+1} \\ & \quad B_i B_{i+1} B_{k_2} \ldots B_{k_p} (\bar{\alpha}_{k_p+1,\, i_p+1}) (\alpha_{i_p+1,\, s_1}) (\bar{\alpha}_{i_p+2,\, s_2}) (\alpha_{s_2,\, t_2}) \ldots \\ & \qquad \ldots (\alpha_{s_2+\mu,\, t_{\mu+2}}) B_{s_2+\mu+1} \qquad (5) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & B_i B_{i+1} B_{k_2} \ldots B_{k_p} (\bar{\alpha}_{k_p+1, i_p+1}) (\alpha_{i_p+1,\, s_1}) \ldots (\bar{\alpha}_{i_p+q\ \, s_q}) (\alpha_{s_q,\, l_q}) \ldots \\ & \qquad (\alpha_{s_q+\nu,\, l_q+\nu}) B_{s_q+\nu+1} \end{aligned}$$

Fiecare dintre $B_{s_1+1}, B_{s_2+\mu+1}, \ldots, B_{s_q+\nu+1}$ este sau un operator aritmetic, în cazul cînd toţi indicii care apar în subşirul corespunzător lui din (5) sînt diferiţi între ei, exceptînd indicele primului element din acest şir şi indicele ultimului element din acelaşi subşir, care pot fi şi egali, sau este o condiţie logică dacă şi numai dacă în subşirul corespunzător din (5) există un indice diferit de i şi egal cu indicele lui. Acest procedeu continuă pînă cînd el nu se mai poate aplica nici unui termen din şir, considerînd că dacă un termen din şir s-a prelucrat complet, atunci el nu se mai prelucrează. Aici trebuie să subliniem că la prelucrarea unui subşir în care ultimul element este o condiţie logică, funcţia sa logică nu se barează. Pentru a uşura înţelegerea procedeului descris aici, dăm mai jos un exemplu.

Fie dată schema logică de algoritmi :

$$A_1(\alpha_2, 11)\,(\alpha_3, 8)\,(\alpha_4, 11)\,A_5(\alpha_6, 11)\,(\alpha_7, 11)\,(\alpha_8, 11)\,(\alpha_9, 6)\,(\alpha_{10}, 5)\,A_{11}A_{12}.$$

Începem procedeul cu operatorul A_1. Primul termen al şirului este :

$$A_1(\alpha_2, 11)(\alpha_3, 8)\,(\alpha_4, 11)\,A_5 \qquad (1')$$

Din acest termen se obţin următorii termeni ai şirului :

$$A_1(\overline{\alpha}_2, 11)\, A_{11}, \tag{2'}$$

$$A_1(\alpha_2, 11)(\overline{\alpha}_3, 8)(\alpha_8, 11)(\alpha_9, 6)(\alpha_{10}, 5)\, A_{11} \tag{3'}$$

$$A_1(\alpha_2, 11)(\alpha_3, 8)(\overline{\alpha}_4, 11)\, A_{11} \tag{4'}$$

Astfel primul termen al şirului a fost prelucrat. Se observă că celui de-al doilea termen nu i se mai poate aplica procedeul. Prelucrăm atunci termenul al treilea şi obţinem următorii termeni din şir :

$$A_1(\alpha_2, 11)(\overline{\alpha}_3, 8)\ (\overline{\alpha}_8, 11)\, A_{11}, \tag{5'}$$

$$A_1(\alpha_2, 11)(\overline{\alpha}_3, 8)(\alpha_8, 11)(\overline{\alpha}_9, 6)(\alpha_6, 11),\ (\alpha_7, 11)(\alpha_8, 11) \tag{6'}$$

$$A_1(\alpha_2, 11)(\overline{\alpha}_3, 8)(\alpha_8, 11)(\alpha_9, 6)(\overline{\alpha}_{10}, 5)\, A_5 . \tag{7'}$$

Astfel a fost prelucrat şi termenul al treilea al şirului căutat. Evident, termenilor (4′) şi (5′) nu li se mai poate aplica procedeul.

Prelucrăm acum termenul (6′) şi obţinem pe rînd termenii

$$A_1(\alpha_2, 11)(\overline{\alpha}_3, 8)(\alpha_8, 11)(\overline{\alpha}_9, 6)(\overline{\alpha}_6, 11)\, A_{11}, \tag{8'}$$

$$A_1(\alpha_2, 11)(\overline{\alpha}_3, 8)(\alpha_8, 11)(\overline{\alpha}_9, 6)(\alpha_6, 11)(\overline{\alpha}_7, 11)\, A_{11} . \tag{9'}$$

Se observă că procedeul nu se mai aplică la nici unul din termenii (7′), (8′) şi (9′) care au mai rămas. Cu aceasta au fost puse în evidenţă toate şirurile de forma (2) relativ la schema logică dată pentru operatorul aritmetic A_1.

Este evident că în subşirurile şirului obţinut cu acest procedeu dacă o condiţie logică apare o dată într-un anumit subşir, atunci există cel puţin un termen din acest şir care conţine această condiţie cu negaţia funcţiei logice respective. In cele ce urmează ne vom referi la acest procedeu sub denumirea de procedeul P.

Teorema 1. *Procedeul P se termină într-un număr finit de paşi.*

Demonstraţie. Fie

$$B_{k_1},\ B_{k_2}, \ldots\ B_{k_t} \tag{6}$$

toate condiţiile logice ale schemei (1) şi fie

$$C_{k_1},\ C_{k_2} \ldots\ C_{k_t}, \tag{7}$$

condiţiile logice obţinute din şirul (6) prin negarea funcţiilor logice conţinute în elementele sale.

Reunind şirurile (6) şi (7) şi renumerotînd obţinem următorul şir :

$$L_1, L_2, \ldots, L_{2t} . \tag{8}$$

Este evident că termenii şirului obţinut în cursul aplicării procedeului P care au ca ultim element un operator aritmetic sînt astfel încît ei conţin o combinaţie de elemente din şirul (8) în care fiecare element apare o singură dată. Dacă un termen al şirului obţinut prin procedeul P are ca ultim element o condiţie logică, atunci el se înlocuieşte cu subşirul obţinut din acest termen dacă se omite ultima condiţie logică. Aceasta nu modifică cu nimic numărul de paşi în procedeul P. Prin aceasta se ajunge ca şi în acest termen toate elementele să fie distincte. Cu un număr maxim de combinaţii pe care le putem face cu elementele şirului (8), ţinînd cont de observaţiile de mai sus, nu întrece pe 2^{2t}, rezultă că procesul trebuie să se termine într-un număr finit de paşi $m \leqslant 2^{2t}$ relativ la fiecare operator aritmetic.

TEOREMA 2. *Orice subşir pus în evidenţă de procedeul P este de forma (2) şi invers.*

Demonstraţie. Fie

$$B_i B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_{t-1}} B_{i_t} \tag{9}$$

un subşir oarecare pus în evidenţă de procedeul P, unde B_i este un operator aritmetic. Dacă $i_t = i + 1$, atunci B_{i_t} este un operator aritmetic şi $B_i B_{i+t}$ are forma (2) pentru $s = 0$. Fie $i_t \neq i + 1$ şi avem două cazuri după cum B_{i_t} este operator aritmetic sau condiţie logică. Presupunem că B_{i_t} este o condiţie logică. Atunci între elementele $B_{i_1}, B_{i_2} \dots B_{i_{t-1}}$ există un oarecare element B_{i_ν} pentru care $i_\nu = i_t$.

Rămîne acum să arătăm că subşirul (9) satisface şi proprietatea 2) a subşirului (2). Într-adevăr, subşirul (9) fiind pus în evidenţă de procedeul P, are proprietatea că după o oarecare condiţie logică B_{i_q} care conţine funcţia logică aşa cum apare în schema (1), urmează elementul B_{i_q+1}, adică $i_{q+1} = i_q + 1$, iar dacă B_{i_q} conţine negaţia acestei funcţii logice, atunci după B_{i_q} urmează elementul cu indicele egal cu indicele de transfer al lui B_{i_q}. Rezultă că în acest caz şirul (9) este de forma (2). În mod analog se arată că subşirul (9) în care B_{i_t} este operator aritmetic, este de forma (2). Invers, fie

$$B_i B_{k_1} B_{k_2} \dots B_{k_l}, \ (l > 1) \tag{10}$$

un subşir de forma (2), unde $B_i B_{k_1} \dots B_{k_l}$ aparţin schemei (1) şi considerăm cazul cînd imediat în dreapta lui B_i urmează condiţia logică B_{i+1}. Deoarece şirul (10) este de forma (2), rezultă că $k_1 = i + 1$.

Considerăm mulţimea tuturor subşirurilor puse în evidenţă de procedeul P care încep cu B_i. Notăm această mulţime cu $\mathcal{L}_i^0$. Vom arăta că şirul (10) aparţine lui $\mathcal{L}_i^0$.

Fie $\mathcal{L}_i^0 = \mathcal{L}_i^{01} \cup \mathcal{L}_i^{02}$, unde $\mathcal{L}_i^{01}$ este mulţimea tuturor elementelor din $\mathcal{L}_i^0$, în care condiţia logică B_{k_1} conţine funcţia logică la fel ca în schema (1) iar $\mathcal{L}_i^{02}$ este mulţimea tuturor elementelor din $\mathcal{L}_i^0$ în care elementul B_{k_1} conţine negaţia funcţiei logice respective. Deoarece $k_1 = i + 1$, urmează că primele două elemente din şirul (10) coincid cu primele două elemente ale tuturor subşirurilor uneia din clasele $\mathcal{L}_i^{01}$ sau $\mathcal{L}_i^{02}$.

Continuînd astfel să presupunem că am construit clasa $\mathcal{L}_i^{0, \varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}, \dots, \varepsilon_{k_p}}$, unde :

$$\varepsilon_{k_i} = \begin{cases} \text{1) dacă funcţia logică din condiţia } B_{k_i} \text{ apare în termenii acestei clase la fel ca şi în schema (1).} \\ \text{2) dacă funcţia logică din condiţia } B_{k_i} \text{ care apare în termenii acestei clase este negaţia funcţiei logice care apare în elementul respectiv din schema (1).} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, p, \ 1 \leqslant p \leqslant l - 1,$$

şi că primele $p+1$ elemente din subşirurile acestei clase coincid cu primele $p+1$ elemente din subşirul (10). Din această clasă vom construi două clase disjuncte astfel : $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_p},1}$ este o submulţime a acestei mulţimi în care elementul al $p = 2$ -lea al fiecărui subşir din ea conţine funcţia logică aşa cum apare în schema (1) în acel element, iar $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_p},2}$ este complimentara ei faţă de $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_p}}$.

Să arătăm că mulţimile $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_p}1}$ şi $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_p}2}$ nu sînt vide în ipoteza că $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_p}}$ nu este vidă şi $1 \leqslant p \leqslant l-2$. În clasa $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_p}}$ există un subşir ale cărui condiţii logice începînd cu condiţia logică B_{p+1} conţin toate funcţiile logice aşa cum apar ele în schema (1). Aceasta urmează din descrierea procedeului P. Acest subşir aparţine atunci clasei $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots\varepsilon_{k_p},1}$. Este evident că aplicînd procedeul P acestui subşir prin negarea funcţiei logice din B_{p+1} se obţine un element din $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots\varepsilon_{k_p},2}$. Rezultă că cele două mulţimi nu sînt vide.

Este evident că într-una din cele două clase toate subşirurile au proprietatea că primele $p+2$ elemente ale lor coincid cu primele $p+2$ elemente ale subşirului (10). De aici rezultă că clasa $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots\varepsilon_{k_l-1}}$ nu este vidă şi deci primele l elemente ale subşirurilor ei coincid cu primele l elemente din subşirul (10).

Dacă condiţia logică B_{kl-1} din subşirul (10) conţine funcţia logică, aşa cum apare ea în schema (1), atunci $k_l = k_{l-1} + 1$ deoarece şirul (10) satisface proprietăţile şirului (2). Dar atunci $\varepsilon_{kl-1} = 1$ şi deci dacă T este un subşir care aparţine clasei $\mathfrak{L}_j^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_{l-1}}}$, atunci conform procedeului P rezultă că după elementul $B_{k_{l-1}}$ urmează elementul $B_{k_{l-1}} + 1$ adică chiar B_{k_l}. Dacă condiţia logică $B_{k_{l-1}}$ din subşirul (10) conţine negaţia funcţiei logice, atunci K_l este indicele de transfer al acestei condiţii logice. În acest caz $\varepsilon_{k_{l-1}} = 2$ şi deci în subşirurile clasei $\mathfrak{L}^{0,\varepsilon_{k_1},\varepsilon_{k_2},\ldots,\varepsilon_{k_{l-1}}}$ după elementul $B_{k_{l-1}}$ urmează elementul B_{k_l}, unde k_l este indicele de transfer al lui $B_{k_{l-1}}$. Deoarece elementul B_{k_l} din subşirul (10) poate fi operator aritmetic sau condiţie logică după cum $k_l \neq k_s$, $s = 1, 2, \ldots, l-1$ sau nu, rezultă că procedeul P aplicat la subşirurile mulţimii $\mathfrak{L}_i^{0,\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_{l-1}}}$ ne dă cel puţin un subşir care coincide cu subşirul (10).

În cazul cînd în (10) $l = 1$ şi B_{k_1} este operator aritmetic, atunci evident procedeul P ne dă subşirul $B_i B_{i+1}$ care coincide cu subşirul (10). Astfel teorema este complet demonstrată.

Aplicînd procedeul P fiecărui operator aritmetic din schema (1), se pot obţine toate subşirurile posibile de forma (2) ataşate unei scheme logice de algoritmi.

Vom ataşa acestui procedeu o schemă logică graf care ne permite obţinerea automată a subşirurilor de forma (2). Pentru aceasta introducem următoarele notaţii :

1) p_k operatorul logic care recunoaşte dacă elementul B_k al schemei (1) este operator aritmetic sau condiţie logică.

2) $S(B_k)$ operatorul care scrie elementul B_k la dreapta subşirului obţinut anterior din aplicarea anterioară a acestui operator, iar S aplicat

primului element cu care începe subșirul respectiv este același cu scrierea lui.

3) S_j un șir de celule în care se introduce un subșir de forma (2), $j = 0,1, \ldots$

4) φ un operator logic la început identic fals.

5) U un șir de celule de lucru notate cu C_j.

6) K_s operatorul care barează funcția logică α_s

7) $\Phi(U)$ condiția logică falsă în cazul cînd nu există nici o funcție logică barată în șirul U iar în caz contrar adevărată.

8) $\mathrm{O}(U)$ operatorul care determină indicele de ordine a ultimei funcții logice barate din șirul U.

9) A_s operatorul care determină indicele de transfer al condiției logice B_s.

10) ψ operatorul logic care este adevărat dacă într-un șir de forma (2) se repetă o funcție logică sau apare o condiție logică care conține negația funcției logice care a mai figurat în același subșir și este fals în caz contrar.

11) T_q un șir de celule în care se înscrie subșirul determinat de valoarea adevărată a lui ψ.

12) $\mathrm{O}(k)$ operatorul de restabilire a parametrului k.

13) θ numărul operatorilor aritmetici din șirul (10).

14) ω un semnal oarecare.

Cu aceste notații, schema logică graf a procedeului P este dată în anexă (fig 1 și 2).

În cele ce urmează, bazîndu-se pe procedeul P introdus mai sus vom demonstra cîteva afirmații care se referă la schemele logice de algoritmi. În acest scop vom introduce mai întîi cîteva noțiuni.

Definiția 8. Spunem despre șirul (2) că este un drum admis dacă B_j este operator aritmetic.

Dacă B_j este o condiție logică, atunci spunem că șirul (2) este un drum neadmis.

Aplicînd procedeul P tuturor operatorilor aritmetici ai schemei (1) să presupunem că am obținut în șirul $S_0, S_1, \ldots, S_\lambda$ toate drumurile admise.

Notăm cu S_{ij} mulțimea tuturor drumurilor admise care încep cu operatorul B_i și se termină cu B_j. Obținem astfel un subșir S_{ij} de forma :

$$\begin{aligned} & B_i\, B_{k_1^1}\, B_{k_1^2} \ldots B_{k_1^{s_1}}\, B_j\,, \\ & B_i\, B_{k_2^1}\, B_{k_2^2} \ldots B_{2}^{s_2}\, B_j\,, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & B_i\, B_{k_m^1}\, B_{k_m^2} \ldots B_{k_m^{s_m}}\, B_j\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Considerăm funcția logică α_{ij} de forma :

$$\alpha_{ij} = \bigvee_{i=1}^{m} \mathop{\&}_{j=1}^{s_i} \beta_{k_j^i}, \tag{12}$$

unde $\beta_{k_i^j}$ este funcția logică conținută în condiția logică $B_{k_i^j}$. În cazul cînd mulțimea S_{ij} este vidă, atunci $\alpha_{ij} \equiv 0$. Dacă $j = i + 1$, atunci $\alpha_{ij} \equiv 1$.

Cu funcţiile $\alpha_{i,j}$ astfel definite fiecărei scheme logice de algoritmi i se poate ataşa o schemă matricială în felul următor : Fie $A_0, A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}$ toţi operatorii aritmetici din schema (1), $A_0 = B_1$ şi $A_{k+1} = B_n$. Fiecărei perechi de operatori aritmetici (A_i, A_j) îi corespunde o funcţie logică α_{ij} definită ca mai sus. Matricea ataşată are forma următoare :

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & A_1 & A_2 & . & . & . & A_j & . & . & . & A_{k+1} \\
\hline
A_0 & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & . & . & . & \alpha_{0,j} & . & . & . & \alpha_{0,k+1} \\
A_1 & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & . & . & . & \alpha_{1,j} & . & . & . & \alpha_{1,k+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_i & \alpha_{i,1} & \alpha_{i,2} & . & . & . & \alpha_{i,j} & . & . & . & \alpha_{i,k+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_k & \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} & . & . & . & \alpha_{k,j} & . & . & . & \alpha_{k,k+1}
\end{array} \qquad (13)$$

Exemplu. Fie schema logică de algoritmi

$$A_0 A_1 (\alpha_2, 5)\, (\alpha_3, 6)\, (\alpha_4, 8)\, A_5 (\alpha_6, 10)\, A_7\, (\alpha_8, 3)\, A_9\, A_{10}.$$

Construim mulţimile $S_{i,j}$:

$$S_{01} = A_0 A_1,$$

mulţimile S_{0i} pentru $i \neq 1$ sînt vide.

Mulţimea $S_{1,5}$ conţine următoarele subşiruri

$$A_1 (\alpha_2, 5)\, (\alpha_3, 6)\, (\alpha_4, 8)\, A_5,$$

$$A_1 (\bar{\alpha}_2, 5)\, A_5.$$

Mulţimea $S_{1,7}$ conţine următorul subşir

$$A_1 (\alpha_2, 5)\, (\bar{\alpha}_3, 6)\, (\alpha_6, 10)\, A_7$$

Mulţimea $S_{1,9}$ conţine următorul subşir

$$A_1 (\alpha_2, 5)\, (\alpha_3, 6)\, (\bar{\alpha}_4, 8)\, (\alpha_8, 3)\, A_9$$

Mulţimea $S_{1,10}$ conţine următorul subşir

$$A_1 (\alpha_2, 5)\, (\bar{\alpha}_3, 6)\, (\bar{\alpha}_6, 10)\, A_{10}$$

Mulţimile $S_{1,1}$ şi $S_{1,0}$ sînt vide.

Mulţimile $S_{5,0}$; $S_{5,1}$; $S_{5,5}$ şi $S_{5,9}$ sînt vide.

Mulţimile $S_{5,7}$ şi $S_{5,10}$ conţin respectiv subşirurile

$$A_5 (\alpha_6, 10)\, A_7$$

$$A_5 (\bar{\alpha}_6, 10)\, A_{10}$$

Mulţimile $S_{7,0}$ şi $S_{7\,1}$ sînt vide iar mulţimile $S_{7,5}$; $S_{7,7}$; $S_{7,9}$ şi $S_{7,10}$ conţin respectiv subşirurile

$$A_7(\overline{\alpha_8}, 3)\,(\alpha_3, 6)\,(\alpha_4, 8)\,A_5,$$

$$A_7(\overline{\alpha_8}, 3)\,(\overline{\alpha_3}, 6)\,(\alpha_6, {}_{10})\,A_7,$$

$$A_7\,(\alpha_8, 3)\,A_9$$

$$A_7\,(\overline{\alpha_8}, 3)\,(\overline{\alpha_3}, 6)\,(\overline{\alpha_6}, 10)\,A_{10}.$$

Mulţimile $S_{9,1}$; $S_{9,5}$; $S_{9,7}$ sînt vide iar mulţimea $S_{9,10}$ are forma :

$$A_9\,A_{10}.$$

Construim acum funcţiile $\alpha_{i,j}$:

$$\alpha_{0,1} = 1, \quad \alpha_{0,5} = 0, \quad \alpha_{0,7} = 0, \quad \alpha_{0,9} = 0, \quad \alpha_{0,10} = 0,$$

$$\alpha_{1,1} = 0, \quad \alpha_{1,5} = (\alpha_2 \,\&\, \alpha_3 \,\&\, \alpha_4) \vee \overline{\alpha_2}, \quad \alpha_{1,7} = \alpha_2 \,\&\, \overline{\alpha_3} \,\&\, \alpha_6,$$

$$\alpha_{1,9} = \alpha_2 \,\&\, \alpha_3 \,\&\, \overline{\alpha_4} \,\&\, \alpha_8, \quad \alpha_{1,10} = \alpha_2 \,\&\, \overline{\alpha_3} \,\&\, \overline{\alpha_6}, \quad \alpha_{5,1} = 0$$

$$\alpha_{5,5} = 0, \quad \alpha_{5,7} = \alpha_6, \quad \alpha_{5,9} = 0, \quad \alpha_{5,10} = \overline{\alpha_6}, \quad \alpha_{7,1} = 0,$$

$$\alpha_{7,5} = \overline{\alpha_8} \,\&\, \alpha_3 \,\&\, \alpha_4, \quad \alpha_{7,7} = \overline{\alpha_8} \,\&\, \overline{\alpha_3} \,\&\, \alpha_6, \quad \alpha_{7,9} = \alpha_8,$$

$$\alpha_{7,10} = \overline{\alpha_8} \,\&\, \overline{\alpha_3} \,\&\, \overline{\alpha_6}, \quad \alpha_{9,1} = 0, \quad \alpha_{9,5} = 0,$$

$$\alpha_{9,7} = 0, \quad \alpha_{9,9} = 0, \quad \alpha_{9,10} = 1.$$

Vom clasifica schemele logice de algoritmi după cum urmează. Considerăm mulţimea tuturor schemelor de forma (1) şi o împărţim în trei clase S', S'' şi S'''.

1) Din mulţimea S' fac parte acele scheme de forma (1) pentru care oricare ar fi starea memoriei X_0 executarea schemei cu această stare se sfîrşeşte cu executarea elementului final B_n. Elementele acestei mulţimi le vom numi scheme complet admise.

2) Din mulţimea S'' fac parte acele scheme de forma (1) pentru care există cel puţin o stare a memoriei X_0 astfel încît executînd schema cu această stare, ea se sfîrşeşte cu elementul final B_n. Elementele acestei mulţimi le vom numi scheme parţial admise. Evident, avem $S' \in S''$.

3) Din mulţimea S''' fac parte acele scheme pentru care oricare ar fi starea memoriei X_0 executarea schemei cu această stare nu ne conduce niciodată la elementul final B_n. Elementele acestei mulţimi le vom numi scheme neadmise.

Cu ajutorul schemelor matriciale ataşate schemelor logice de algoritmi, folosind procedeul P, se pot caracteriza clasele S', S'' şi S''' definite mai sus.

În acest scop va trebui mai întîi să descriem modul de realizare al schemei matriciale (13). Mai întîi observăm că din modul de realizare a schemei (1) rezultă că după executarea unui oarecare operator aritmetic A_s nu se pot executa în acelaşi timp decît cel mult un operator aritmetic A_j. De aici rezultă că elementele matricei (13) verifică următoarea egalitate

$$\alpha_{i,s}\,(X) \,\&\, \alpha_{i,j}\,(X) \equiv 0 \quad (j \neq s,\ i = \overline{0,k}) \tag{14}$$

oricare ar fi starea memoriei X.

Executarea schemei matriciale (13) începe cu operatorul A_0. Fie X_0 o stare iniţială a memoriei şi $X_1 = A_0(X_0)$ starea memoriei obţinute după executarea operatorului A_0. Executăm acum pe rînd elementele primei linii din matricea (13). Presupunem că $\alpha_{0s}(X_1) = 1$. Urmează acum să se execute operatorul A_s. După executarea lui, cu starea memoriei obţinută se execută elementele liniei s + 1 şi fie $\alpha_{s+1,r}(X_{s+1}) = 1$; atunci se execută operatorul A_r. Procedeul continuă apoi în mod analog.

Ca şi în cazul schemelor logice de algoritmi se pot întîmpla şi aici următoarele cazuri:

1) Procesul de executare a schemei matriciale (13) se termină cu executarea operatorului aritmetic de oprire A_{k+1}.

2) Procesul de executare a schemei matriciale (13) continuă indefinit.

Schemele matriciale se pot clasifica în mod analog ca şi schemele logice de algoritmi. Putem enunţa atunci următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca o schemă logică de algoritmi să fie complet admisă (parţial admisă, neadmisă) este ca schema matricială ataşată ei prin procedeul P să fie complet admisă (parţial admisă, neadmisă).*

Vom demonstra teorema numai în cazul schemelor logice de algoritmi complet admise întrucît celelalte cazuri rezultă imediat din acestea.

Necesitatea condiţiei. Presupunem că schema logică de algoritmi (1) este complet admisă. Aceasta înseamnă că X_0 fiind o stare oarecare a memoriei şi începînd executarea schemei cu această sare, ultimul operator aritmetic care se execută este operatorul de oprire B_n.

Fie

$$B_1 B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_k} B_n, \qquad (0 < i_s \leqslant n) \qquad (15)$$

şirul de operatori aritmetici care se execută în ordinea arătată începînd cu operatorul B_1 şi sfîrşind cu operatorul B_n, unde indicii i_s pot să se şi repete. Începem executarea cu starea memoriei X_0. După executarea operatorului B_1 se obţine starea memoriei X_{i_1}.

Fie

$$\begin{gathered} B_1 D_1 B_{i_1} \\ B_1 D_2 B_{i_1} \\ \cdots\cdots \\ B_1 D_t B_{i_1} \end{gathered}$$

toate elementele puse în evidenţă de procedeul P care încep cu B_1 şi se termină cu B_{i_1}. Deoarece după operatorul B_1 urmează să se execute operatorul B_{i_1}, rezultă că cel puţin una din relaţiile $D_j(X_{i_1}) = 1$, $1 \leqslant j \leqslant t$ este adevărată. Dar α_{0i_1} este de forma

$$\alpha_{0.i_1} = \bigvee_{i=1}^{t} D_i(X_{i_1}) = 1$$

ceea ce ne dovedeşte că şi în schema matricială ataşată schemei respective după executarea operatorului B_1 se execută operatorul B_{i_1}. Vom arăta acum că $\alpha_{0j}(X_{i_1})=0$ pentru $j \neq i_1$. Presupunem că $\alpha_{0,j_1}(X_{i_1})=1$. De aici rezultă că după executarea operatorului B_1 se execută în același timp atît operatorul B_{i_1} cît și operatorul B_{j_1} $(B_{i_1} \neq B_{j_1})$ ceea ce este absurd. Presupunem acum că în schema logică de algoritmi am executat un oarecare operator B_{i_ν} după care trebuie să executăm operatorul $B_{i_{\nu+1}}$.

De asemenea presupunem că în schema matricială am executat operatorul B_{i_ν} .Vom arăta că și aici după executarea lui se va executa operatorul $B_{i_{\nu+1}}$. Într-adevăr, fie

$$B_{i_\nu} C_1 B_{i_{\nu+1}}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$B_{i_\nu} C_l B_{i_{\nu+1}}$$

subșirurile puse în evidență de procedeul P care încep cu elementul B_{i_ν} și se termină cu $B_{i_{\nu+1}}$. Deoarece după executarea operatorului $B_{j_{\nu+1}}$ se execută operatorul $B_{i_{\nu+1}}$ rezultă că există cel puțin un C_j pentru care $C_j(X_{i_{\nu+1}}) = 1,\ 1 \leqslant j \leqslant l$. Dar cum $\alpha_{i_\nu, i_{\nu+1}}$ are forma

$$\alpha_{i_\nu, i_{\nu+1}} = \bigvee_{i=1}^{l} C_i$$

rezultă că $\alpha_{i_\nu, i_{\nu+1}}(X_{i_{\nu+1}}) = 1$. De asemenea se arată ușor că $\alpha_{i_\nu, j}(X_{i_{\nu+1}})=0$ pentru $j \neq i_\nu + 1$, ceea ce ne demonstrează că după executarea operatorului $B_{i\nu}$ se execută operatorul $B_{i_{\nu+1}}$. În baza ipotezelor inducției necesitatea condiției este demonstrată.

Suficiența condiției. Presupunem că schema matricială este complet admisă și repetînd raționamentul de la demonstrația necesității se va găsi că și schema logică de algoritmi este complet admisă.

TEOREMA 4. *Condiția necesară ca o schemă logică de algoritmi să fie complet admisă este ca toate subșirurile puse în evidență de procedeul P să aibă ca ultim element un operator aritmetic.*

Demonstrația o facem prin reducere la absurd. Presupunem că schema logică de algortimi (1) este complet admisă și că prin procedeul P s-a pus în evidență un subșir de forma (2) în care ultimul element este o condiție logică. Fie acesta subșirul

$$B_i\, B_{i_1}\, B_{i_2} \ldots B_{i_{k-1}}\, B_{i_k}$$

astfel că $i_k = i_s$, $(1 \leqslant s \leqslant k-1)$ și B_i este primul operator aritmetic din schema (1) cu această proprietate. Vom arăta că în acest caz există o stare a memoriei X_0 pentru care executarea schemei (1) începînd cu această stare nu se sfîrșește cu executarea operatorului B_n.

Într-adevăr, să presupunem că executînd schema (1), începînd cu starea X_0, se ajunge la operatorul B_i. O astfel de stare se poate construi ușor. După executarea acestui operator presupunem că se obține starea

X_{i+1} pentru care $B_{i_t}(X_{i+1}) = 1$ pentru $t = 1,2,\ldots,k-1$, unde β_{i_t} este funcţia logică conţinută în condiţia logică B_{i_t} aşa cum apare în subşirul de mai sus. Întrucît $i_k = i_s$, $(1 \leqslant s \leqslant k-1)$, rezultă că funcţia logică din elementul B_{i_k} coincide cu α_{i_s} adică cu funcţia logică din condiţia logică B_{i_s} aşa cum apare ea în schema (1). Dacă $\beta_{i_s} = \alpha_{i_s}$, atunci $\alpha_{i_k} = \alpha_{i_s} = 1$ şi rezultă că după verificarea condiţiei B_{i_k} urmează din nou verificarea condiţiei B_{i_s+1} pentru aceeaşi stare X_{i+1}. Deoarece $\beta_{i_t}(X_{i+1}) = 1$ pentru $t=1, 2, \ldots, k-1$, rezultă că se ajunge din nou la verificarea condiţiei logice B_{i_k} pentru aceeaşi stare X_{i+1} şi acest proces continuă indefinit.

Dacă $\beta_{i_s}=\overline{\alpha_{i_s}}$, rezultă că $\alpha_{i_k}(X_{i+1})=0$ şi deci $\beta_{i_1}(X_{i+1})\,\&\,\beta_{i_2}(X_{i+1})\,\&\ldots$ $\ldots\,\&\,\beta_{i_k}(X_{i+1}) = 0$.

Considerînd acum toate subşirurile de forma (2) puse în evidenţă de procedeul P, care încep cu B_i şi observînd că toate aceste subşiruri conţin cel puţin un indice i_r $(1 \leqslant r \leqslant k-1)$ pentru care condiţia logică cu acest indice conţine negaţia funcţiei logice B_{i_r}, rezultă că pentru starea X_{i+1} executarea schemei logice se întrerupe la elementul B_i ceea ce contrazice ipoteza că schema este complet admisă. Cu aceasta teorema este demonstrată.

TEOREMA 5. *Condiţia suficientă pentru ca o schemă matricială să fie complet admisă este ca oricare ar fi două stări ale memoriei* X_1 şi X_2 *să avem relaţiile*

$$\alpha_{i,s}(X_1)\,\&\,\alpha_{j,j}(X_2) \equiv 0, \quad i \neq j,\ i,\ j,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k+2$$

şi (16)

$$\bigvee_{s=1}^{k+1} \alpha_{i,s}(X) = 1, \quad \alpha_{i,i}(X) = 0,\ i = 0,1,\ldots,\ k$$

oricare ar fi X *o stare a memoriei.*

Fie X_0 o stare oarecare a memoriei pe care o considerăm ca stare iniţială. După executarea operatorului A_0 se obţine starea X_1. Fie $\alpha_{0i}(X_1) = 1$. Rezultă că urmează să se execute operatorul aritmetic A_{i1}. Din condiţiile (16) rezultă că acest operator odată executat nu se va mai executa niciodată. Tot din condiţiile (16) rezultă că procesul nu se poate termina cu executarea unui oarecare operator aritmetic A_t $(t \neq k+1)$. Deci după un număr finit de paşi, executarea schemei se termină cu operatorul de oprire A_{k+1}. Astfel teorema este demonstrată.

Fie $X \in Y$ o stare oarecare a memoriei. Să presupunem că executînd schema matricială începînd cu această stare una şi numai una din funcţiile $\alpha_{0,i_1} = 1$. Atunci presupunem că pentru toate stările care rezultă din X pentru executarea tuturor operatorilor diferiţi de A_0 avem $\alpha_{j,i1} = 0, j \neq 0$. În general dacă se execută operatorul A_t şi avem $\alpha_{t,it} = 1$, atunci $\alpha_{ji_t} = 0$, $j = t$, pentru toate celelalte stări obţinute din executarea celorlalţi operatori aritmetici diferiţi de A_t din schema matricială, cu starea iniţială a memoriei X_0. Dacă o schemă matricială verifică această proprietate pentru orice stare iniţială a memoriei X atunci spunem că schema matricială satisface proprietatea S faţă de starea iniţială X.

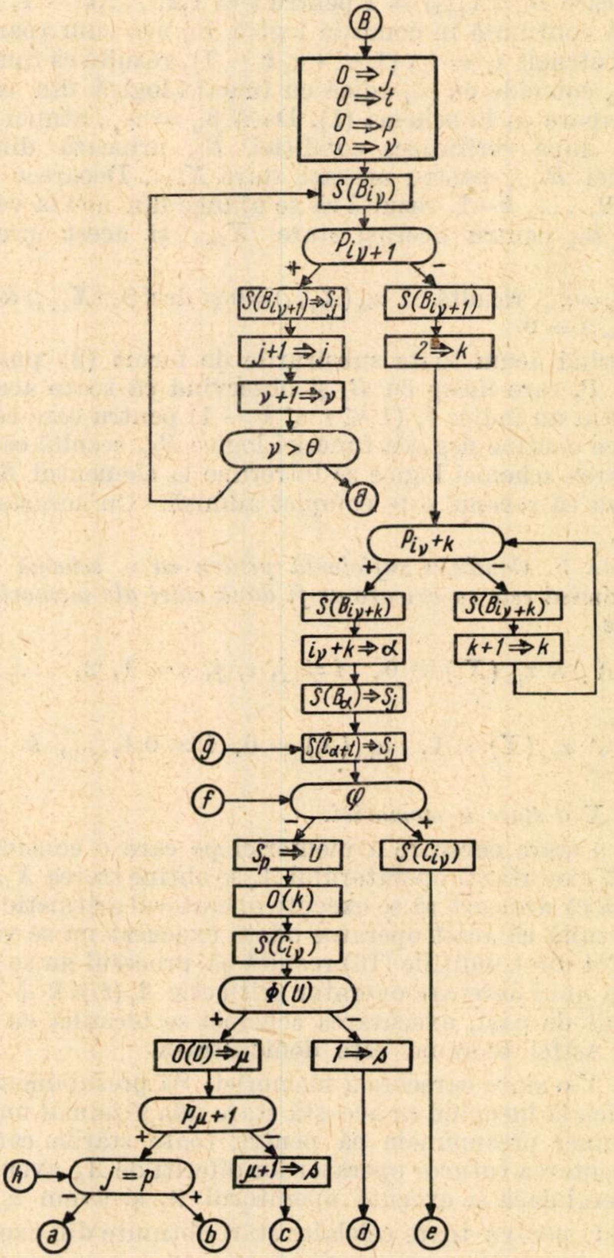

B
0 ⇒ j
0 ⇒ t
0 ⇒ p
0 ⇒ ν
S(B_{iν})
p_{iν+1}
+
−
S(B_{iν+1}) ⇒ S_j
S(B_{iν+1})
j+1 ⇒ j
2 ⇒ k
ν+1 ⇒ ν
ν > θ
B
p_{iν}+k
+
−
S(B_{iν+k})
S(B_{iν+k})
i_ν+k ⇒ α
k+1 ⇒ k
S(B_α) ⇒ S_j
g
S(C_{α+t}) ⇒ S_j
f
φ
−
+
S_p ⇒ U
S(C_{iν})
O(k)
S(C_{iν})
Φ(U)
+
−
O(U) ⇒ μ
1 ⇒ s
p_μ+1
+
−
h
j = p
μ+1 ⇒ s
−
+
a
b
c
d
e

Fig. 1

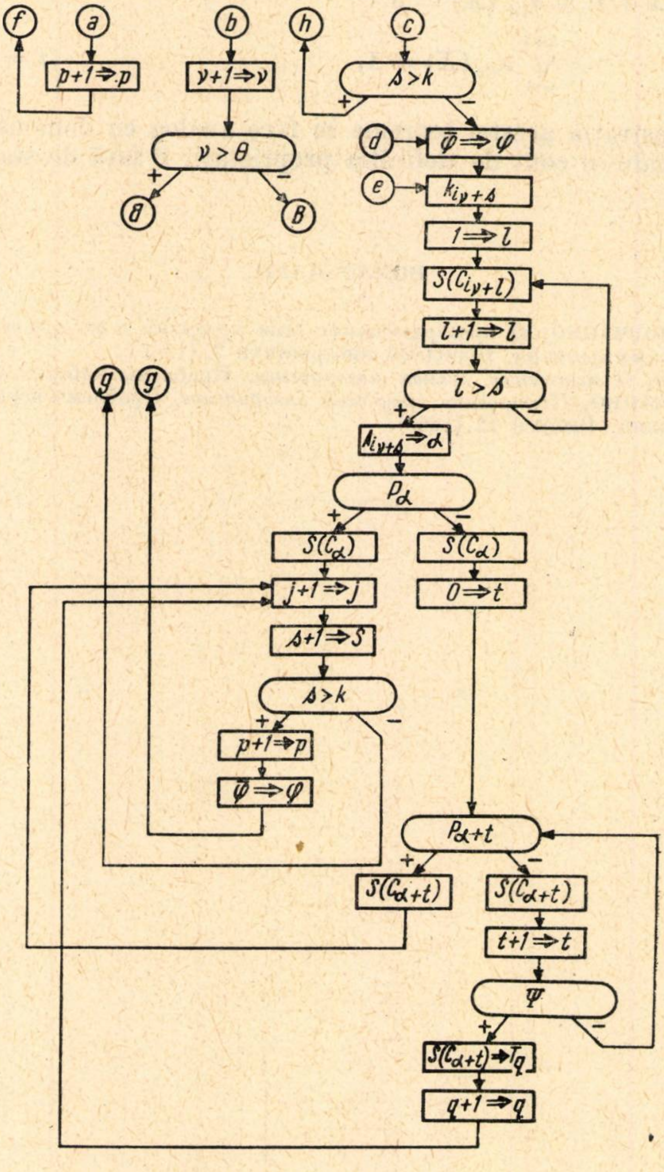

f
a
p+1⇒p
b
ν+1⇒ν
ν>θ
+
−
θ
B
h
c
s>k
+
−
d
φ̄⇒φ
e
k_{iν+s}
1⇒l
S(C_{iν+l})
l+1⇒l
l>s
+
−
A_{iν+s}⇒α
P_α
+
−
S(C_α)
S(C_α)
j+1⇒j
0⇒t
s+1⇒s
s>k
+
−
p+1⇒p
φ̄⇒φ
g
g
P_{α+t}
+
−
S(C_{α+t})
S(C_{α+t})
t+1⇒t
Ψ
+
−
S(C_{α+t})→T_q
q+1⇒q

Fig. 2

TEOREMA 6. *Condiţia suficientă pentru ca o schemă matricială să fie complet admisă este ca ea să satisfacă proprietatea S faţă de orice stare a memoriei* $X \in Y$ şi $\alpha_{i,i}(X) = 0$,

$$\bigvee_{s=1}^{k+1} \alpha_{i,s}(X) = 1, \qquad (i = 0,1,\ldots,k).$$

Demonstraţia acestei teoreme se face analog cu demonstraţia teoremei 5, ţinîndu-se cont de definiţia proprietăţii S faţă de starea memoriei X.

BIBLIOGRAFIE

1. Р.И. ПОДЛОВЧЕНКО, *О преобразованиях схем программ и их применении в программировании*. Проблемы кибернетики 7, (1962).
2. И.И. ЯНОВ, *О логических схемах алгоритмов*. Проблемы кибернетики, I (1958).
3. В.Ф. ДЬЯЧЕНКО, *Построение граф-схем алгоритмов*. Проблемы передачи информации, Выпуск 12 (1963).

ASUPRA LEMELOR FUNDAMENTALE ALE CALCULULUI VARIAŢIONAL *)

DE

TUDOR ZAMFIRESCU

În lucrare sînt expuse extinderi ale binecunoscutelor leme ce stau la baza metodelor utilizate în Calculul variaţiilor. În enunţurile clasice este satisfăcută o anumită relaţie prin ipoteză, cînd o funcţie parcurge o anumită mulţime. Unul dintre principalele rezultate ale lucrării constă în a restrînge considerabil această mulţime, cu păstrarea aceloraşi concluzii. De asemenea, se dă o teoremă analoagă lemei lui Du Bois-Reymond, în cazul a mai multe variabile reale, ceea ce nu ştim să se mai fi făcut pînă în prezent.

În cele ce urmează vom da cîteva extinderi unor cunoscute leme aflate la baza Calculului variaţiilor.

1. Precizăm, mai întîi, că prin noţiunea de ,,domeniu'' vom înţelege o mulţime deschisă şi conexă împreună cu o parte din frontiera sa.

Fie $\mathcal{D}$ un domeniu în spaţiul euclidian E^n. Amintim că o funcţie reală f de n variabile este de clasă C^m $(0 \leqslant m \leqslant \infty)$ pe $\mathcal{D}$ dacă f posedă toate derivatele parţiale pînă la cele de ordinul m, inclusiv, iar acestea sînt continue pe $\mathcal{D}$. Adăugăm că o funcţie $f : \mathcal{D} \rightarrow R$ se va numi de clasă $D^m(0 \leqslant m \leqslant \infty)$ dacă există o partiţie a lui $\mathcal{D}$ în subdomenii $\mathcal{D}_\iota$ (există o mulţime de indici Λ, astfel încît $\bigcap\limits_{\iota \in \Lambda} \mathcal{D}_\iota = 0$, $\bigcup\limits_{\iota \in \Lambda} \mathcal{D}_\iota = \mathcal{D}$), astfel încît f să fie de clasă C^m pe fiecare $\mathcal{D}_\iota$ şi dacă, pentru $m \neq 0$, f este continuă pe $\mathcal{D}$.

Vom spune că funcţia $f : \mathcal{D} \rightarrow R$ este cu suport compact dacă există subdomeniul $\mathcal{E}$ (eventual vid} al lui $\mathcal{D}$, astfel încît $\overline{\mathcal{E}} \subset \operatorname{int} \mathcal{D}$, $f(\mathcal{E}) \not\equiv 0$ şi $f(\mathcal{D} - \mathcal{E}) = \{0\}$. Notăm familia funcţiilor de acest fel cu E_1. De asemenea, spunem că funcţia $f : \mathcal{D} \rightarrow R$ este cu r-uplu suport compact dacă există domeniile $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r$ (unele eventual vide), astfel încît $\overline{\mathcal{E}}_i \cap \overline{\mathcal{E}}_j = 0$ pentru $i \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{r} \overline{\mathcal{E}}_k \subset \operatorname{int} \mathcal{D}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{r} f(\mathcal{E}_k) \not\equiv 0$ şi $f\left(\mathcal{D} - \bigcup\limits_{k=1}^{r} \mathcal{E}_k\right) = \{0\}$. Fie E_r familia acestor funcţii. Evident, dacă $p < q$, atunci $E_p \subset E_q$.

---

*) Versiunea în l. engleză a acestei lucrări va apărea în Rev. Roum. de math. pures et appl., **10**, *3* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 287 – 293, BUCUREŞTI, 1965

Se obţine o definiţie prin recurenţă echivalentă a funcţiei cu r-uplu suport compact utilizînd următoarea:

PROPOZIŢIE. *Funcţia* $f : \mathcal{D} \to R$ *este cu* r*-uplu suport compact,* $\mathcal{D}$ *aparţinînd unui spaţiu euclidian compactificat cu punctul* ∞, *dacă şi numai dacă* $\mathcal{D}$ *se poate descompune în două mulţimi* $\mathcal{M}_1$ *şi* $\mathcal{M}_2$ *astfel încît restricţia lui* f *la* $\mathcal{M}_p$ $(p = 1, 2)$ *să fie cu* a_p*-uplu suport compact, unde* $a_1 + a_2 = r$.

Demonstraţie. Să presupunem că funcţia f este cu a_p-uplu suport compact pe $\mathcal{M}_p$; fie $\mathcal{E}_k$ $(k = 1, \ldots, a_1)$ domeniile puse în evidenţă de definiţia apartenenţei la familia E_{a_1} pe $\mathcal{M}_1$ şi $\mathcal{E}_{k+a_1}$ $(k = 1, \ldots, a_2)$ cele precizate de apartenenţa la E_{a_2} pe $\mathcal{M}_2$. Se verifică uşor că mulţimile $\mathcal{E}_k$ $(k = 1, \ldots, r)$ satisfac condiţiile necesare ca $f \in E_r$ pe $\mathcal{D}$.

Reciproc, să presupunem că f este pe $\mathcal{D}$ cu r-uplu suport compact. Fie $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r$ domeniile pe care f nu este nulă. Închiderea a cel mult unuia dintre ele conţine $\{\infty\}$. Notăm cu $\rho(x, y)$ distanţa obişnuită din E^n dintre punctele x şi y. Considerăm numărul strict pozitiv

$$d < \inf_{\substack{x \in \mathcal{E}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant a_1 \\ y \in \mathcal{E}_j,\ a_1 < j \leqslant r}} \rho(x, y)$$

şi domeniul

$$\mathcal{M} = \{x ;\ y \in \mathcal{E}_i (1 \leqslant i \leqslant a_1) \Rightarrow \rho(x, y) < d\}.$$

Existenţa lui d este asigurată de mărginirea mulţimilor $\mathcal{E}_i (1 \leqslant i \leqslant r)$, cu excepţia eventual a uneia din ele.

Alegem $\mathcal{M}_1 = \mathcal{D} \cap \mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}_2 = \mathcal{D} - \mathcal{M}$. Pentru a dovedi că $f \in E_{a_p}$ pe $\mathcal{M}_p$ $(p = 1, 2)$ rămîne de arătat că

$$\bigcup_{k=1}^{a_p} \overline{\mathcal{E}}_{k+a_{p-1}} \subset \operatorname{int} \mathcal{M}_p \quad (a_0 = 0).$$

Într-adevăr, pe de o parte avem

$$\bigcup_{k=1}^{a_1} \overline{\mathcal{E}}_k \subset \operatorname{int} \mathcal{M}, \quad \bigcup_{k=1}^{a_1} \overline{\mathcal{E}}_k \subset \operatorname{int} \mathcal{D},$$

deci

$$\bigcup_{k=1}^{a_1} \overline{\mathcal{E}}_k \subset \operatorname{int} (\mathcal{M} \cap \mathcal{D}),$$

iar pe de altă parte avem

$$\bigcup_{k=a_1+1}^{r} \overline{\mathcal{E}}_k \subset \operatorname{ext} \mathcal{M}, \quad \bigcup_{k=a_1+1}^{r} \overline{\mathcal{E}}_k \subset \operatorname{int} \mathcal{D},$$

deci

$$\bigcup_{k=a_1+1}^{r} \overline{\mathcal{E}}_k \subset \operatorname{int} (\mathcal{D} - \mathcal{M}).$$

Observație. Propoziția rămîne adevărată presupunînd $E^n \supset \mathcal{D}$ necompactificat. Demonstrația este analoagă și se poate aplica și în cazul precedent. Principala diferență constă în aceea că de data aceasta considerăm

$$\mathcal{M} = \left\{ x ;\ \rho\left(x, \bigcup_{i=1}^{a_1} \mathcal{E}_i\right) < \rho\left(x, \bigcup_{j=a_1+1}^{r} \mathcal{E}_j\right)\right\}.$$

În ambele situații se capătă o formă mai generală considerînd în enunț $p = 1, \ldots, q$ cu $1 \leqslant q \leqslant r$, în care caz trebuie ca $\sum_{p=1}^{q} a_p = r$ iar demonstrația este analoagă.

2. Fie $M(x)$ o funcție reală, continuă, definită pe intervalul închis $[a, b]$. Se poate stabili cu ușurință că dacă

$$\int_a^b M(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pentru orice funcție continuă $\eta : [a, b] \to R$, atunci $M(x) \equiv 0$ pe $[a, b]$.

Vom demonstra următoarea teoremă mai generală :

TEOREMA 1. *Fie I un interval*[1] *pe care sînt definite p funcții reale* $M_i(x)$, $(i = 1, \ldots, p)$ *de clasă* D^0. *Dacă*[2] *suma* $M_i(x)\,\eta_i(x)$ *este integrabilă pe I iar integrala este nulă oricare ar fi funcțiile cu suport compact* $\eta_i : I \to R$, *de clasă* C^∞ *și care se anulează respectiv pe mulțimile rare date* $S_i \subset I$, *atunci* $M(x) \equiv 0$ *pe I.*

Demonstrație. Să presupunem că, pentru un $j \leqslant p$ și un $\xi \in I$, avem $M_j(\xi) \neq 0$; de exemplu $M_j(\xi) > 0$. În baza continuității lui M_j pe un subinterval al lui I ce conține ξ, putem afla intervalul J, cu $\bar{J} \subset \operatorname{int} I$ și $M_j(x) > 0$ pe J. Mulțimile S_i fiind rare, se poate găsi intervalul $(\alpha, \beta) \subset J$, astfel ca $(\alpha, \beta) \cap S_j = 0$. Acum alegem $\eta_i(x) \equiv 0$ pentru $i \neq j$ și

$$\eta_j = \begin{cases} e^{\frac{1}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - x}} & \text{pentru } x \in (\alpha, \beta), \\ 0 & \text{pentru } x \in I - (\alpha, \beta), \end{cases}$$

care satisfac condițiile cerute de enunț. Dar

$$\int_I M_i(x)\,\eta_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta M_j(x)\,e^{\frac{1}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - x}}\,\mathrm{d}x,$$

unde integrala improprie există și este strict pozitivă.

Am obținut o contradicție care demonstrează că ipoteza noastră $M_j(\xi) \neq 0$ este falsă.

---

[1] Înțelegem prin interval (subinterval) un segment împreună eventual cu ambele sau una dintre extremități.

[2] Utilizăm convenția indicelui mut.

Pe baza teoremei 1 se poate demonstra imediat rezultatul precedent. Lema fundamentală folosită de Hadamard [3] este o simplă consecință a acestei teoreme. Să reamintim acum următoarea lemă datorată lui Lagrange.

LEMA LUI LAGRANGE. *Dacă* $M : [a, b] \to R$ *este o funcție continuă iar*

$$\int_a^b M(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pentru orice funcție $\eta \in C^1$ *care se anulează în* a *și* b, *atunci* $M(x) \equiv 0$ *pe* $[a, b]$.

Se vede imediat că această lemă se demonstrează particularizînd teorema 1 pentru $I = [a, b]$, $p = 1$, $S_i = \{a, b\}$ și observînd că $C^0 \subset D^0$ iar $C^1 \supset C^\infty$ (a se consulta pentru alte demonstrații : [2], [5]).

Schimbînd în lema lui Lagrange clasa C^1 prin clasa C^2, ceea ce ne putem permite deoarece și $C^2 \supset C^\infty$, se obține o lemă și mai utilă Calculului variațiilor [7].

3. Vom extinde acum cele de mai sus la cazul a mai multe variabile reale. Teorema care urmează poate deci fi privită ca o extindere a teoremei 1.

TEOREMA 2. *Fie* p *funcții* $M_i(x_1, \ldots, x_n) : \mathcal{D} \to R$, $(i = 1, \ldots, p)$, *de clasă* D° *pe domeniul* $\mathcal{D} \subset E^n$, *care conține mulțimile rare date* $\mathcal{S}_i$. *Dacă suma* $M_i(x_1, \ldots, x_n)\, \eta_i(x_1, \ldots, x_n)$ *este integrabilă pe* $\mathcal{D}$ *iar integrala este nulă oricare ar fi funcțiile cu suport compact* $\eta_i : \mathcal{D} \to R$ *de clasă* C^∞, *nule respectiv pe* $\mathcal{S}_i$, *atunci* $M_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ *pe* $\mathcal{D}$ *pentru fiecare* $i \leqslant p$.

Demonstrație. Să presupunem că $M_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) > 0$ pentru un $j \leqslant p$ în $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{D}$. Din continuitatea lui M_j pe subdomenii ale lui $\mathcal{D}$ urmează că $M_j(x_1, \ldots, x_n) > 0$ într-un domeniu $\mathcal{E}$ conținînd punctul $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Fie S_ε o sferă deschisă, cu centrul $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ și raza ε, astfel ca $\overline{S}_\varepsilon \subset \operatorname{int} \mathcal{E}$ și $S_\varepsilon \cap \mathcal{S}_j = 0$.

Alegem $\eta_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ pentru $i \neq j$ și

$$\eta_j = \begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0)} - \varepsilon}} & \text{pentru } (x_1, \ldots, x_n) \in S_\varepsilon, \\ 0 & \text{pentru } (x_1 \ldots, x_n) \in \mathcal{D} - S_\varepsilon. \end{cases}$$

Aceste funcții satisfac toate cerințele enunțului. Dar

$$\int_{\mathcal{D}} M_i(x_1, \ldots, x_n)\; \eta_i(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}\omega =$$

$$= \int_{S_\varepsilon} M_j(x_1, \ldots, x_n) \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon - \sqrt{(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0)}}}\, \mathrm{d}\omega > 0.$$

Contradicția obținută arată că nu putem avea $M_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) > 0$.

Analog, nu se poate nici ca $M_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) < 0$, deci $M_j(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$, unde j este arbitrar.

Lema fundamentală uzuală pentru integrale multiple [7] se obţine particularizînd teorema 2.

4. Considerînd funcţiile $M(x) : [a, b] \to R$; $\eta(x) : [a, b] \to R$ cu $M, \eta \in C^1$ şi $\eta(a) = \eta(b) = 0$, obţinem, integrînd prin părţi,

$$\int_a^b M'(x)\, \eta(x)\, \mathrm{d}x = -\int_a^b M(x)\, \eta'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Astfel, dacă

$$\int_a^b M(x)\, \eta'(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

pentru orice funcţie η dintre cele considerate, atunci $M(x)$ este constantă pe $[a, b]$[3]. Acest fapt ne sugerează cele ce vor urma.

TEOREMA 3. *Fie intervalul* I *şi* p *funcţii* $M_i(x) : I \to R$, $(i = 1, \ldots, p)$, *de clasă* D°. *Dacă suma* $M_i(x)\, \eta_i(x)$ *este integrabilă pe* I *iar integrala este nulă oricare ar fi funcţiile cu dublu suport compact* $\eta_i : I \to R$, *de clasă* C^∞, *care satisfac*

$$\int_I \eta_i(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

şi care se anulează respectiv pe mulţimile rare date $S_i \subset I$, *atunci* $M_i(x)$ *sînt constante pe* I.

Demonstraţie. Să presupunem că M_j nu este constantă pentru un anumit indice j. Întrucît $M_j \in D^\circ$, putem găsi intervalele J_1 şi J_2 astfel ca $\overline{J}_1 \cup \overline{J}_2 \subset \operatorname{int} I$ şi $M_j(\xi) > M_j(\zeta)$ pentru orice $\xi \in J_1$ şi $\zeta \in J_2$. Considerăm intervalele de aceeaşi lungime $(\alpha, \beta) \in J_1 - S_j$ şi $(\gamma, \delta) \in J_2 - S_j$. Alegem funcţiile $\eta_i \equiv 0$ pentru $i \neq j$ şi

$$\eta_j = \begin{cases} e^{\frac{1}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - x}} & \text{pentru } x \in (\alpha, \beta) \\ -e^{\frac{1}{\gamma - x} - \frac{1}{\delta - x}} & \text{pentru } x \in (\gamma, \delta) \\ 0 & \text{pentru } x \in I - (\alpha, \beta) - (\gamma, \delta), \end{cases}$$

care, evident, satisfac

$$\int_I \eta_i(x)\, \mathrm{d}x = 0, \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

---

[3] Aceasta se deduce imediat din relaţia precedentă şi teorema 1.

sînt de clasă C^∞, se anulează pe S_i şi sînt cu dublu suport compact. Obţinem

$$\int_I M_i(x)\,\eta_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta M_j(x)\,e^{\frac{1}{\alpha-x}-\frac{1}{\beta-x}}\,\mathrm{d}x - \int_\gamma^\delta M_j(x)\,e^{\frac{1}{\gamma-x}-\frac{1}{\delta-x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\alpha^\beta [M_j(x) - M_j(x-\alpha+\gamma)]\,e^{\frac{1}{\alpha-x}-\frac{1}{\beta-x}}\,\mathrm{d}x > 0.$$

Am ajuns la o contradicţie, deci M_i este constantă pe I pentru orice $i \leqslant p$.

Această teoremă generalizează în mod direct lema lui Du Bois-Reymond, care se obţine pentru I compact, $p = 1$, $S_i = 0$ şi C° în locul claselor D° şi C^∞.

Următoarea propoziţie mai utilă în Calculul variaţiilor este echivalentă cu lema lui Du Bois-Reymond.

Dacă $M(x)$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$ iar

$$\int_a^b M(x)\,\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pentru orice funcţie $\eta \in C^1$ care se anulează în a şi b, atunci $M(x)$ este constantă pe $[a, b]$.

Pentru a proba echivalenţa cu lema lui Du Bois-Reymond este suficient să considerăm funcţia $\nu(x) = \eta'(x)$, care satisface relaţia

$$\eta(x) = \int_a^x \nu(t)\,\mathrm{d}t,$$

deci ea este continuă iar integrala ei nulă pe $[a, b]$.

Dacă am urma modelul de demonstraţie [4]) al lui Du Bois-Reymond, ipoteza $M \in D^\circ$ ne-ar conduce doar la lema utilizată de Marston Morse [6], sub numele lui Du Bois-Reymond, socotind aici finită mulţimea Λ din definiţia claselor D° şi D^1. Această lemă se obţine din propoziţia precedentă înlocuind C° prin D° şi C^1 prin D^1, deci lărgind clasa funcţiilor η în loc de a o restrînge.

5. În cele ce urmează demonstrăm o generalizare pentru mai multe variabile a teoremei 3.

TEOREMA 4. *Fie p funcţii $M_i(x_1,\ldots,x_n) : \mathcal{D} \to R$, $(i = 1,\ldots,p)$, de clasă D° pe domeniul $\mathcal{D} \subset E^n$ care conţine mulţimile rare date $\mathcal{S}_i$. Dacă suma $M_i(x_1,\ldots,x_n)\eta_i(x_1,\ldots,x_n)$ este integrabilă pe $\mathcal{D}$ iar integrala este nulă oricare ar fi funcţiile cu dublu suport compact $\eta_i : \mathcal{D} \to R$, de clasă C^∞, care satisfac*

$$\int_{\mathcal{D}} \eta_i(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}\omega = 0$$

şi care se anulează respectiv pe $\mathcal{S}_i$, atunci $M_i(x_1,\ldots,x_n)$ sînt constante pe $\mathcal{D}$.

---

[4]) A se vedea discuţia lui Bolza [1].

Demonstrație. Să presupunem că funcția M_j nu este constantă. Se pot atunci găsi domeniile $\mathcal{E}$ și $\mathcal{F}$ astfel ca $\bar{\mathcal{E}} \cup \overline{\mathcal{F}} \subset \operatorname{int} \mathcal{D}$ și $M_j(\xi) > M_j(\zeta)$ pentru orice $\xi \in \mathcal{E}$ și $\zeta \in \mathcal{F}$. Considerăm sferele deschise $S_\varepsilon \subset \mathcal{E} - \mathcal{S}_j$ și $T_\varepsilon \subset \subset \mathcal{F} - \mathcal{S}_j$, de aceeași rază ε și cu centrele $(s_1, \ldots, s_n)$ și $(t_1, \ldots, t_n)$. Alegem funcțiile $\eta_i \equiv 0$ pentru $i \neq j$ și

$$\eta_j = \begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{(x_i-s_i)(x_i-s_i)}-\varepsilon}} & \text{pentru } (x_1, \ldots, x_n) \in S_\varepsilon, \\ -e^{\frac{1}{\sqrt{(x_i-t_i)(x_i-t_i)}-\varepsilon}} & \text{pentru } (x_1, \ldots, x_n) \in T_\varepsilon, \\ 0 & \text{pentru } (x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathcal{D} - S_\varepsilon - T_\varepsilon, \end{cases}$$

care satisfac toate condițiile cerute. Pentru acestea

$$\int_{\mathcal{D}} M_i(x_1, \ldots, x_n)\, \eta_i(x_1, \ldots, x_n)\, d\omega =$$

$$= \int_{S_\varepsilon} M_j(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\frac{1}{\sqrt{(x_i-s_i)(x_i-s_i)}-\varepsilon}}\, d\omega -$$

$$- \int_{T_\varepsilon} M_j(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\frac{1}{\sqrt{(x_i-t_i)(x_i-t_i)}-\varepsilon}}\, d\omega = \int_{S_\varepsilon} [M_j(x_1, \ldots, x_n) -$$

$$- M_j(x_1 - s_1 + t_1, \ldots, x_n - s_n + t_n)] \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon - \sqrt{(x_i-s_i)(x_i-s_i)}}}\, d\omega > 0.$$

Din nou am găsit o contradicție, care demonstrează că funcțiile M_i $(i \leqslant p)$ sînt constante.

După cum s-a putut observa, în timp ce în teoremele 1 și 2 s-a cerut ca $\eta_i \in E_1$, în ultimele două teoreme am pus doar $\eta_i \in E_2$ și aceasta datorită specificului demonstrațiilor.

Încheiem prin a nota că spațiile euclidiene folosite pot fi schimbate cu alte spații mai generale, urmînd ideea altor articole scrise asupra acestui subiect. Unele dintre aceste articole pot fi recercetate, privindu-le prin prisma rezultatelor obținute aici.

Primită la redacție la 4 iunie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. O. Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations.* G. E. Stechert & Co, New York, 1946.
2. Ed. Goursat, *Cours d'analyse mathématique.* Tome III, Gauthier - Villars et Cie, Paris, 1927.
3. J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations.* Tome I. Hermann, Paris, 1910.
4. I. Halperin, *Introduction to the Theory of Distributions.* University of Toronto press, Toronto, 1952.
5. M. Lavrentiev și L. Liusternik, *Curs de calcul variațional.* Editura tehnică, București, 1955.
6. M. Morse, *The Calculus of Variations in the Large.* American Mathematical Society, New York, 1934.
7. N. Teodorescu, *Curs de ecuațiile fizicii matematice.* Editura didactică și pedagogică, București, 1963.

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI ARONSZAJN

DE

C. TUDOR

În lucrarea [4], prof. G. Marinescu introduce noţiunea de distribuţie reproduizantă, cu ajutorul căreia extinde o metodă de reprezentare a proceselor stocastice continue, folosită de E. Parzen şi T. Hida, la procesele stocastice generalizate. În cele ce urmează vom transpune o teoremă a lui N. Aronszajn [1] în cadrul teoriei distribuţiilor, folosind definiţiile şi notaţiile din [4].

Fie H un spaţiu Hilbert de distribuţii.

PROPOZIŢIA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca să existe o distribuţie reproduizantă pentru spaţiul H, este ca pentru fiecare $\psi \in D$, funcţionala* :

$$f \rightarrow < \psi, f > (f \in H)$$

să fie continuă pe H.

Demonstraţie. Dacă există distribuţia reproduizantă K, avem :

$$| < \psi, f > | = |(f | K_\psi)| \leqslant [K(\psi, \psi)]^{1/2} \cdot \|f\|. \tag{1}$$

De altă parte, dacă $< \psi, f >$ este funcţională liniară şi continuă pe H, atunci există $g_\psi \in H$ aşa încît :

$$< \psi, f > = (g_\psi | f), \ (f \in H).$$

Punînd

$$K(\varphi, \psi) = < \varphi, g_\psi >$$

obţinem evident o distribuţie reproduizantă. Din (1) rezultă şi :

PROPOZIŢIA 2. *Dacă H posedă o distribuţie reproduizantă, convergenţa către zero în norma lui H implică slab convergenţa către zero în D.* *

Fie H_0 un spaţiu prehilbertian de distribuţii.

ST. CERC. MAT., TOM 17, NR. 2, P. 295 – 299, BUCUREŞTI, 1965

DEFINIȚIE. *Vom spune că un spațiu Hilbert de distribuții* $H \supset H_0$, *constituie o completare funcțională pentru* H_0, *dacă* H_0 *este dens în* H, *și pentru fiecare* $\psi \in D$, *funcționala*:

$$f \to < \psi, f >, \qquad (f \in H)$$

este continuă pe H *iar pentru orice* $f \in H_0$, $\|f\|_0 = \|f\|\cdot$ ($\|\cdot\|_0$ *și* $\|\cdot\|$ *sînt normele din* H_0 *și* H, *respectiv*).

În principal, scopul lucrării de față este următoarea:

TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă ca să existe o completare funcțională pentru spațiul prehilbertian de distribuții* H_0 *este ca*:

1. *Pentru orice* ψ *fixat din* D, *funcționala*:

$$f \to < \psi, f >$$

definită pe H_0 *să fie continuă.*

2. *Orice șir Cauchy* [1] *de elemente din* H_0, *slab convergent către zero în* D', *converge către zero în norma lui* H_0.

Dacă completarea este posibilă ea este unică.

Demonstrație. Necesitatea primei condiții rezultă ținînd seamă de definiția de mai sus și propoziția 1. Deoarece H posedă o distribuție reproduizantă, din (1) obținem pentru fiecare $\psi \in D$:

$$| < \psi, f > | \leqslant [K(\psi,\psi)]^{1/2}\|f\| = [K(\psi,\psi)]^{1/2}\|f\|_0 \tag{2}$$

oricare ar fi $f \in H_0$. Fie acum $\{f_n\}$ un șir Cauchy de distribuții din H_0, slab convergent către zero în D', adică:

$$\lim_{n\to\infty} < \psi, f_n > = 0 \tag{3}$$

pentru orice $\psi \in D$. Cum $\{f_n\} \subset H$, există $f \in H$, așa încît

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

Din propoziția 2 și din (3) urmează că pentru orice $\psi \in D$,

$$\lim_{n\to\infty} < \psi, f_n > = < \psi, f > = 0,$$

adică $f = 0$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_0 = 0.$$

Pentru a demonstra suficiența condiției considerăm un șir Cauchy $\{f_n\} \subset H_0$.

---

[1] Vom subînțelege aici, și ori de cîte ori va fi vorba de șiruri Cauchy de elemente din H_0, că sînt șiruri Cauchy în norma lui H_0.

Din (1) rezultă pentru fiecare ψ fixat în D:

$$|<\psi, f_m> - <\psi, f_n>| \leqslant M_\psi \|f_m - f_n\|_0$$

adică şirul $\{f_n\}$ este şir Cauchy în sensul convergenţei slabe din D^*. Cum spaţiul D^* este complet în sensul acestei convergenţe, rezultă că există $f \in D^*$, aşa încît pentru orice $\psi \in D$:

$$\lim_{n\to\infty} <\psi, f_n> = <\psi, f>.$$

Fie H spaţiul vectorial al tuturor distribuţiilor f, limite în sensul convergenţei slabe din D^*, de şiruri Cauchy $\{f_n\} \subset H_0$. Evident că $H_0 \subset H$ întrucît

$$<\psi, f> = \lim_{n\to\infty} <\psi, f_n>$$

cu $f_n = f \in H_0$, $(n=1, 2, \ldots)$.

Dacă $f \in H$ şi $\{f_n\} \subset H_0$ este un şir Cauchy, slab convergent în D^* către f, cum şirul $\{\|f_n\|_0\}$ este convergent, introducem în H norma:

$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_0. \tag{4}$$

Vom arăta că $\|f\|$ nu depinde de alegerea şirului Cauchy. Într-adevăr, dacă alt şir Cauchy $\{f'_n\} \subset H_0$ converge slab în D^* către f, atunci $\{f_n - f'_n\}$ este un şir Cauchy de elemente din H_0, slab convergent către zero în D^*. Conform condiţiei 2, şirul $\{\|f_n - f'_n\|_0\}$ tinde la zero. Aşadar,

$$0 \leqslant |\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_0 - \lim_{n\to\infty} \|f'_n\|_0| = \lim_{n\to\infty} |\|f_n\|_0 - \|f'_n\|_0| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_n - f'_n\|_0 = 0.$$

Rezultă imediat că (4) defineşte o normă în H. Vom verifica numai că $\|f\| = 0$ dacă şi numai dacă $f = 0$.

Dacă $f = 0$ rezultă că $<\psi, f_n>$ tinde la zero, deci conform condiţiei 2

$$\|f_n\|_0 \to 0 = \|f\|.$$

Invers, dacă $\|f\| = 0$ şi $f \neq 0$, ar rezulta că există $\psi_0 \in D$ aşa încît

$$<\psi_0, f> \neq 0.$$

Dar atunci din inegalităţile:

$$0 \leqslant |<\psi_0, f_n>| \leqslant M_{\psi_0} \|f_n\|_0.$$

rezultă

$$0 \leqslant |<\psi_0, f>| \leqslant M_{\psi_0} \|f\| = 0$$

adică $<\psi_0, f> = 0$. Prin urmare $\|f\| = 0$, numai în cazul $f = 0$.

Norma aceasta defineşte un produs scalar în H, după cum rezultă din (4) şi [3] (p. 30). A rămas să arătăm că H este complet şi că H_0

este dens în H. Partea a doua rezultă imediat căci pentru elementele din H_0 normele $\|.\|_0$ şi $\|.\|$ coincid, iar orice funcţională $f \in H$ este prin definiţie limita slabă în D^* a unui şir $\{f_n\} \subset H_0$. Prin urmare f este limita şirului $\{f_n\}$ şi în norma spaţiului H întrucît:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = \lim_{n,m\to\infty} \|f_m - f_n\|_0 = 0.$$

Pentru a demonstra completitudinea lui H, considerăm un şir Cauchy oarecare $\{f_n\} \subset H$, adică cu

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_m - f_n\| = 0.$$

Cum H_0 este dens în H, oricare ar fi $f_n (n=1, 2, \ldots)$, există $f'_n \in H_0$ aşa încît:

$$\|f_n - f'_n\| < \frac{1}{n}.$$

Din inegalităţile:

$$\|f'_n - f'_m\|_0 = \|f'_n - f'_m\| \leqslant \|f'_n - f_n\| + \|f_n - f_m\| + \|f_m - f'_m\| <$$
$$< \frac{1}{n} + \|f_n - f_m\| + \frac{1}{m}$$

deducem că

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f'_n - f'_m\|_0 = 0$$

deci $\{f'_n\}$ este slab convergent în D^* către o distribuţie $f \in H$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \|f'_n - f_n\| = 0$$

rezultă mai întîi convergenţa slabă în D^*, apoi cum

$$\lim_{n\to\infty} \|f'_n - f\| = \lim_{n,m\to\infty} \|f'_n - f'_m\|_0 = 0$$

şi

$$\|f_n - f\| \leqslant \|f_n - f'_n\| + \|f'_n - f\|,$$

urmează chiar

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Unicitatea rezultă în felul următor. Fie H_1 o altă completare funcţională a spaţiului H_0. Dacă $f \in H_1$, atunci există un şir Cauchy $\{f_n\} \subset H_0$, aşa încît

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Cum H_1 posedă o distribuţie reproduizantă, rezultă că $\{f_n\}$ converge slab în D^* către f. Dar atunci $f \in H$. Întrucît $\|f_n\|_1 = \|f_n\|_0$ pentru $f_n \in H_0$, obţinem :

$$\left|\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_0 - \|f\|_1\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 - \|f\|_1\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \|f_n\|_1 - \|f\|_1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$$

adică pentru orice $f \in H_1$, $\|f\|_1 = \|f\|$.

De altă parte este evident că orice distribuţie $f \in H$ este conţinută şi în H_1. Rezultă deci că orice completare funcţională a lui H_0 coincide cu H şi are aceeaşi normă şi produs scalar cu H.

Primită la redacţie la 1 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. N. Aronszajn, *Theory of Reproducing Kernels.* Trans. Amer. Math. Soc., **68**, 337—404 (1950).
2. И. М. Гелфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций.* Москва, 1958.
3. G. Marinescu, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
4. G. Marinescu, *Distributions reproduisantes et représentation des processus stochastiques généralisés.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **9**, 577—581 (1964).
5. L. Schwartz, *Théorie des distributions.* Herman, Paris, 1950.

ASUPRA ALGEBRELOR JORDAN DE TIP *A*

DE

D. B. ION
Institutul de fizică atomică, București

În această lucrare se stabilesc relațiile canonice de anticomutare în cazul algebrelor Jordan de tip *A*, analogul relațiilor canonice de comutare din algebrele Lie semisimple. Se calculează constantele de structură, tensorul metric, si ponderile reprezentării fundamentale a algebrei Jordan de ordinul $n = 3$.

I. RELAȚII CANONICE DE ANTICOMUTARE

Fie A o algebră asociativă peste corpul comutativ F. Fie definit un produs nou peste elementele lui A:

$$(x,\ y) \to \theta(x,y) = \alpha yx + \beta xy,\ (\alpha,\ \beta \in F)(x,y \in A). \tag{I.1}$$

Albert [1] a observat că dacă o submulțime B a lui A este închisă față de operația $\theta(x,\ y)$, (în particular B poate fi chiar A în întregime), atunci B împreună cu operația $\theta(x,\ y)$ poate să formeze una din cele trei algebre:

a) O algebră ale cărei elemente formează o mulțime închisă la operația de multiplicare simplă:

$$(x,\ y) \to \theta\,(x,\ y) = xy. \tag{I.2}$$

b) O algebră Lie închisă la operația de comutare

$$(x,\ y) \to \theta\ (x, y) = yx - xy \tag{I.3}$$

obținută atunci cînd se ia în (I.1) $\alpha = 1$; $\beta = -1$.

c) O algebră Jordan obținută prin operația de anticomutare

$$(x,\ y) \to \theta\,(x, y) = \frac{1}{2}\,(yx + xy) \tag{I.4}$$

obținută atunci cînd (I.1) se ia $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}\cdot$

În cazul c) corpul F trebuie să aibă caracteristică diferită de 2. Pe elementele $(x, y, z, \ldots)$ ale algebrei A avem satisfăcute următoarele identităţi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \tag{I.5}$$

$$[x^2, [y, x]_+]_+ = [[x^2, y], x]_+, \tag{I.6}$$

$$[x, [y, z]_+] = [y, [x, z]]_+ + [z, [x, y]]_+, \tag{I.7}$$

$$[x, [y, z]_+]_+ = [z, [x, y]_+]_+ - \frac{1}{4}[y, [x, z]], \tag{I.8}$$

$$[x, [y, z]_+] + [y, [z, x]_+] + [z, [x, y]_+] = 0. \tag{I.9}$$

Identităţile (I.5), (I.6) leagă operaţiile (I.3), (I.4) de operaţia (I.2), iar identităţile (I.7), (I.8), (I.9) leagă pe de o parte operaţiile (I.3), (I.4) între ele, iar pe de altă parte pe acestea de produsul (I.2).

În această lucrare vom porni de la algebra asociativă A a matricilor pătrate de ordinul n, definită peste un corp comutativ F şi vom studia algebra Jordan $J(A)$ definită în mulţimea A prin operaţia (I.4).

Operaţia de compunere (I.4) asociază fiecărei perechi de elemente (x, y) un element $z = [x, y]_+$ numit anticomutatorul elementelor x, y şi satisface următoarele condiţii :

$$\begin{gathered} [\lambda x + \lambda' x', y]_+ = \lambda\,[x, y]_+ + \lambda'\,[x', y]_+ \\ \lambda, \lambda' \in F' \end{gathered} \tag{I.10}$$

$$[x, y]_+ = [y, x]_+ \tag{I.11}$$

precum şi identităţile (I.6), (I.7), (I.8) şi (I.9).

Operaţia de anticomutare se defineşte în modul următor :

$$\begin{gathered} [X_i, X_k]_+ = \overline{\gamma}^j_{ik}\, X_j \\ (\overline{\gamma}^j_{ik} \in F')\,(X_i,\ X_k,\ X_j \in J\,(A)). \end{gathered} \tag{I.12}$$

Elementele $\overline{\gamma}^j_{ik}$ ale corpului $F' \subset F$ se numesc constante de structură ale algebrei $J(A)$.

Din relaţiile (I.6) şi (I.11) rezultă următoarele relaţii pentru constantele de structură :

$$\begin{gathered} \overline{\gamma}^k_{ij} = \overline{\gamma}^k_{ji} \\ \overline{\gamma}^l_{ii}\ \overline{\gamma}^k_{ij}\,\overline{\gamma}^m_{lk} = \overline{\gamma}^m_{ip}\,\overline{\gamma}^p_{lj}\,\overline{\gamma}^l_{ii}\,. \end{gathered} \tag{I.13}$$

Se vede uşor că dacă, reciproc, elementele $\overline{\gamma}^j_{ik}$ satisfac relaţiile (I.13), atunci definind relaţia de anticomutare prin (I.12) obţinem o anumită algebră Jordan. Prin urmare considerarea constantelor de structură $\overline{\gamma}^j_{ik}$ care satisfac (I.13) este echivalentă cu considerarea algebrei $J(A)$.

Pentru a obţine informaţii asupra constantelor de structură va trebui să calculăm anticomutatorii elementelor algebrei $J(A)$. Pentru acest calcul pornim de la o problemă de valori proprii de tipul :

$$[A,\ X] = \rho X, \tag{I.14}$$

unde $A = a^{\mu} X_{\mu}$ este un operator, iar $X = x^{\nu} X_{\nu}$ un vector propriu corespunzător valorii proprii ρ. X_{μ} şi X_{ν} sînt vectorii proprii ai bazei algebrei $L(A)$. În cazul matricilor de ordinul n, bazele algebrelor A, $J(A)$ şi $L(A)$ pot să coincidă.

Comutatorul este definit prin relaţia :

$$\begin{gathered} \gamma^{\tau}_{\mu\nu} \in F'' \\ [X_{\mu}, X_{\nu}] = \gamma^{\tau}_{\mu\nu} X_{\tau},\ X_{\mu}, X_{\nu}, X_{\tau} \in L(A) \end{gathered} \tag{I.15}$$

unde $\gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ sînt constantele de structură ale algebrei $L(A)$ şi aparţin corpului $F'' \subset F$. Ele satisfac relaţiile :

$$\begin{gathered} \gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\gamma^{\tau}_{\nu\mu} \\ \gamma^{\tau}_{\mu\nu}\gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} + \gamma^{\tau}_{\sigma\nu}\gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \gamma^{\tau}_{\lambda\nu}\gamma^{\nu}_{\mu\sigma} = 0. \end{gathered} \tag{I.16}$$

Acum ecuaţia ascalară ataşată ecuaţiei (I.14) este :

$$\det\,(a^{\mu}\gamma^{\tau}_{\mu\nu} - \rho\,\delta^{\tau}_{\nu}) = 0. \tag{I.17}$$

După cum se ştie, teorema lui Cartan ne dă posibilitatea să alegem pe A în aşa fel încît ecuaţia (I.17) să aibă un număr maxim de rădăcini distincte şi în felul acesta numai rădăcina $\rho = 0$ să fie degenerată.

Se ştie atunci că putem alege o bază în $L(A)$ în aşa fel ca să fie verificate formulele :

$$\begin{aligned} &[A,\ H_i] = 0, && i = 1, 2, \ldots, n \\ &[A,\ E_{\alpha}] = \alpha\, E_{\alpha} && \alpha \in F''. \end{aligned} \tag{I.18}$$

Acum luînd aceeaşi bază şi pentru $J(A)$ (lucru posibil în cazul nostru) şi utilizînd identităţile (I.5), (I.7) pentru elementele bazei (A, H_i, H_j) ; (A, H_i, E_{α}) ; $(A, E_{\alpha}, E_{\beta})$ în care ţinem cont de relaţiile (I.18), obţinem :

$$\begin{aligned} &[A,\ [H_i,\ H_j]] = 0 &&;\ [A,\ [H_i,\ H_j]_+] = 0\,; \\ &[A,\ [H_i,\ E_{\alpha}]] = \alpha[H_i,\ E_{\alpha}] &&;\ [A,\ [H_i,\ E_{\alpha}]_+] = \alpha\,[H_i,\ E_{\alpha}]_+\,; \\ &[A,\ [E_{\alpha},\ E_{\beta}]] = (\alpha+\beta)[E_{\alpha}, E_{\beta}]; &&\ [A,\ [E_{\alpha},\ E_{\beta}]_+] = (\alpha+\beta)[E_{\alpha},\ E_{\beta}]_+. \end{aligned} \tag{I.19}$$

Din (I.19) rezultă că atît comutatorul cît şi anticomutatorul elementelor bazei care satisfac (I.18) sînt vectorii proprii ai uneia şi aceleiaşi probleme (I.14).

De fapt (I.19) ne spune că elementele asociate prin operaţiile de comutare, respectiv de anticomutare, perechii de elemente ale bazei comune a lui $L(A)$ şi $J(A)$ sînt identice.

Astfel vom avea pe lîngă sistemul de ecuaţii ale lui Killing din algebra Lie şi sistemul de ecuaţii :

$$[H_i, H_j]_+ = \overline{\gamma}^{k}_{ij} H_k, \qquad \overline{\gamma}^{k}_{ij} \neq 0, \tag{I.20}$$

$$\begin{aligned} &[H_i, E_\alpha]_+ = \overline{\alpha}_i E_\alpha, && \overline{\gamma}^\tau_{i\alpha} = \overline{\alpha}_i \delta^\tau_\alpha , \\ &[E_\alpha, E_\beta]_+ = \overline{N}^\gamma_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \text{ pentru } \gamma=\alpha+\beta, && \overline{\gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \overline{N}^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta} \delta^\gamma_{\alpha+\beta}, \\ &[E_\alpha, E_\alpha]_+ = \overline{\alpha}^i H_i , && \overline{\gamma}^i_{\alpha,-\alpha} = \overline{\alpha}^i, \\ &[E_\alpha, E_\beta]_+ = 0 \text{ cînd } \gamma \neq \alpha+\beta && \overline{\gamma}^\lambda_{\mu,\nu} \in F' \end{aligned}$$

valabil în algebra $J(A)$ considerată aici.

Astfel sistemul de ecuaţii (I.20) ne permite să determinăm complet structura algebrei Jordan în baza canonică aleasă.

Dacă scriem identitatea (I.8) pentru elementele (A, H_i, E_α) în care ţinem seamă de (I.18) obţinem:

$$[A, [H_i, E_\alpha]_+]_+ = [H_i, [A, E_\alpha]_+]_+ \tag{I.21}$$

care cu a doua relaţie din (I.20) devine:

$$[H_i, [A, E_\alpha]_+]_+ = \overline{\alpha}_i [A, E_\alpha]_+. \tag{I.22}$$

Din (I.21) şi (I.20) urmează că trebuie să avem:

$$[A, E_\alpha]_+ = \overline{\alpha} E_\alpha . \tag{I.23}$$

Din prima relaţie (I.18) $A = \lambda^i H_i$, care cu (I.23) conduce la:

$$\overline{\alpha} = \lambda^i \overline{\alpha}_i .$$

Adică mărimile $\overline{\alpha}_i$ sînt componentele unui vector în spaţiul n-dimensional C^*, iar pe acest vector îl numim rădăcina algebrei Jordan.

Produsul scalar a doi vectori $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ în spaţiul n-dimensional C^* se defineşte în modul următor:

$$\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = g_{ij}\, \overline{\alpha}^i\, \overline{\beta}^i, \tag{I.24}$$

unde tensorul metric g_{ij} are forma:

$$g_{ij} = \overline{\gamma}^\nu_{i\mu}\, \overline{\gamma}^\mu_{j\nu} = \overline{\gamma}^l_{ik}\, \overline{\gamma}^k_{jl} + \overline{\gamma}^\alpha_{i\alpha}\, \overline{\gamma}^\alpha_{j\alpha} = K\, \delta_{ij} , \tag{I.24'}$$

unde K este o constantă de normare arbitrară (aici luăm $K=1$).

II. REPREZENTAREA ALGEBREI JORDAN *J(A)*

Să presupunem că este dată o reprezentare R a algebrei $J(A)$ într-o algebră asociativă A'.

Să presupunem că înmulţirea în $J(A)$ se exprimă în baza aleasă prin:

$$[X_i, X_j]_+ = \Sigma\, \overline{\gamma}^k_{ij} X_k, \quad \overline{\gamma}^k_{ij} \in F', \tag{II.1}$$

atunci în A' vom avea relaţia:

$$[X^R_i, X^R_j]_+ = \Sigma\, \overline{\gamma}^k_{ij} X^R_k . \tag{II.2}$$

a) Fie A' un spațiu vectorial peste un corp comutativ F arbitrar și fie R o mulțime de aplicații liniare ale spațiului A în el însuși, care conține o dată cu fiecare pereche de aplicații a și b și aplicațiile $\frac{1}{2}(ab + ba)$ și $\alpha a + \beta b$, unde α și β sînt elemente arbitrare ale corpului F. Deoarece în R este definită operația de adunare și operația de înmulțire cu un element al corpului F, R este un spațiu vectorial peste corpul F. Să definim în R operația de anticomutare $[a,b]_+ = \frac{1}{2}(ab + ba)$

Se arată că față de această operație spațiul R este o algebră Jordan liniară.

Într-adevăr, avem :

$$[\alpha a + \beta b, c]_+ = \alpha [a,c]_+ + \beta [b,c]_+, \tag{II.3}$$

$$[a^2,[b, a]_+]_+ = [[a^2,b]_+,a]_+, \tag{II.4}$$

$$[a, b]_+ = [b, a]_+ . \tag{II.5}$$

b) Fie r o reprezentare a algebrei $J(A)$ în algebra A'. Definiția ponderilor reprezentării rămîne și în acest caz aceeași ca și în cazul algebrelor Lie, adică :

Notînd cu $H_i | \xi\rangle$ transformatorul vectorului $|\xi\rangle \in R$ prin transformarea H_i^r, dacă avem $|\xi\rangle \neq 0$ și

$$H_i | \xi\rangle = m_i | \xi\rangle, \tag{II.6}$$

spunem că $|\xi\rangle$ este un vector propriu iar (m_i) formează o pondere.

c) Fie $\bar{\alpha}$ o rădăcină a algebrei Jordan și m o pondere a unei reprezentări a acesteia. Se arată că $2\bar{\alpha} - m$ este de asemenea o pondere.

Avem :

$$H_i E_\alpha | \xi\rangle = 2[H_i, E_\alpha]_+ | \xi\rangle - E_\alpha H_i | \xi\rangle = (2\bar{\alpha}_i - m_i) E_\alpha | \xi\rangle \tag{II.7}$$

adică și $2\bar{\alpha} - m$ este o pondere a reprezentării considerate.

Întrucît această problemă a algebrelor Jordan joacă un rol important în unele probleme de fizică, vom da mai jos calculul explicit pentru cazul $n=3$, calcul utilizat de noi în probleme de simetrie a particulelor elementare.

III. ALGEBRA JORDAN A MATRICILOR 3×3

Considerăm algebra asociativă a matricilor (3×3) și ne alegem ca bază canonică următoarele matrici :

$$H_1 \equiv a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad H_2 \equiv b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad H_3 \equiv c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{III.1}$$

$$E_{+1} \equiv a_{+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{+2} \equiv a_{+2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{+3} \equiv a_{+3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-\alpha} = E^{+}_{+\alpha}$$

$E^{+}_{+\alpha}$ este transpusa matricii $E_{+\alpha}$,

care se utilizează în cadrul algebrei Lie a grupului GL (3). Rădăcinile în acest caz sînt :

$$\bar{\alpha}\,(E_{\pm 1}) = (0;\ 1b;\ 1c), \tag{III.2}$$

$$\bar{\alpha}\,(E_{\pm 2}) = \left(\frac{1}{2}a;\ -\frac{1}{2}b;\ 1c\right),$$

$$\bar{\alpha}\,(E_{\pm 3}) = \left(-\frac{1}{2}a;\ -\frac{1}{2}b;\ 1c\right).$$

Celelalte constante de structură sînt :

$$\bar{\gamma}^{1}_{11} = 0;\ \bar{\gamma}^{2}_{12} = \frac{a^2}{3b};\ \bar{\gamma}^{3}_{11} = \frac{2a^2}{3c};\ \bar{\gamma}^{1}_{21} = \bar{\gamma}^{1}_{12} = b;\ \bar{\gamma}^{2}_{12} = \bar{\gamma}^{2}_{21} = \bar{\gamma}^{3}_{12} = \bar{\gamma}^{3}_{21} = 0$$

$$\bar{\gamma}^{1}_{23} = \bar{\gamma}^{3}_{23} = \bar{\gamma}^{1}_{32} = \bar{\gamma}^{3}_{32} = 0;\ \bar{\gamma}^{2}_{23} = \bar{\gamma}^{2}_{32} = c;\ \bar{\gamma}^{1}_{13} = \bar{\gamma}^{1}_{31} = c;\ \bar{\gamma}^{2}_{13} = \bar{\gamma}^{3}_{13} = \bar{\gamma}^{2}_{31} = \bar{\gamma}^{3}_{31} = 0, \tag{III.3}$$

$$\bar{\gamma}^{1}_{22} = 0;\ \bar{\gamma}^{2}_{22} = -b;\ \bar{\gamma}^{3}_{22} = \frac{2b^2}{c};\ \bar{\gamma}^{1}_{33} = \bar{\gamma}^{2}_{33} = 0;\ \bar{\gamma}^{3}_{33} = c.$$

Cu aceste valori pentru constantele de structură şi pentru rădăcinile $\bar{\alpha}(E)$ calculăm tensorul metric g_{ik} după formula (1.24′). Astfel avem :

$$g_{ij} = \bar{\gamma}^{\nu}_{i\mu}\,\bar{\gamma}^{\mu}_{j\nu}$$

$$\begin{aligned} g_{11} = {} & \bar{\gamma}^{1}_{11}\bar{\gamma}^{1}_{11} + \bar{\gamma}^{2}_{11}\bar{\gamma}^{1}_{12} + \bar{\gamma}_{11}\bar{\gamma}^{1}_{13} + \bar{\gamma}^{1}_{12}\bar{\gamma}^{2}_{11} + \bar{\gamma}^{3}_{12}\bar{\gamma}^{2}_{13} + \bar{\gamma}^{2}_{12}\bar{\gamma}^{2}_{12} + \\ & + \bar{\gamma}^{1}_{13}\bar{\gamma}^{3}_{11} + \bar{\gamma}^{2}_{13}\bar{\gamma}^{3}_{12} + \bar{\gamma}^{3}_{13}\bar{\gamma}^{3}_{13} + 2\bar{\alpha}_1(E_1)\,\bar{\alpha}_1(E_1) + 2\bar{\alpha}_1(E_2)\,\bar{\alpha}_1(E_2) + \\ & + 2\bar{\alpha}_1(E_3)\,\bar{\alpha}_1(E_3) = 3a^2, \end{aligned} \tag{III.4}$$

$$\begin{aligned} g_{22} = {} & \bar{\gamma}^{1}_{21}\bar{\gamma}^{1}_{21} + \bar{\gamma}^{2}_{21}\bar{\gamma}^{1}_{22} + \bar{\gamma}^{3}_{21}\bar{\gamma}^{1}_{23} + \bar{\gamma}^{1}_{22}\bar{\gamma}^{2}_{21} + \bar{\gamma}^{2}_{22}\bar{\gamma}^{2}_{22} + \bar{\gamma}^{3}_{22}\bar{\gamma}^{2}_{23} + \\ & + \bar{\gamma}^{1}_{23}\bar{\gamma}^{3}_{21} + \bar{\gamma}^{2}_{23}\bar{\gamma}^{3}_{22} + \bar{\gamma}^{3}_{23}\bar{\gamma}^{3}_{23} + 2\bar{\alpha}_2(E_2)\bar{\alpha}_2(E_2) + 2\bar{\alpha}_2(E_1)\bar{\alpha}_2(E_1) + \\ & + 2\bar{\alpha}_2(E_3)\,\bar{\alpha}_2(F_3) = 9b^2, \end{aligned} \tag{III.5}$$

$$\begin{aligned} g_{33} = {} & \bar{\gamma}^{1}_{31}\bar{\gamma}^{1}_{31} + \bar{\gamma}^{2}_{31}\bar{\gamma}^{1}_{32} + \bar{\gamma}^{3}_{31}\bar{\gamma}^{1}_{33} + \bar{\gamma}^{1}_{32}\bar{\gamma}^{2}_{31} + \bar{\gamma}^{2}_{32}\bar{\gamma}^{2}_{32} + \bar{\gamma}^{3}_{32}\bar{\gamma}^{2}_{33} + \\ & + \bar{\gamma}^{1}_{33}\bar{\gamma}^{3}_{31} + \bar{\gamma}^{2}_{33}\bar{\gamma}^{3}_{32} + \bar{\gamma}^{3}_{33}\bar{\gamma}^{3}_{33} + 2\bar{\alpha}_3(E_1)\,\bar{\alpha}_3(E_1) + 2\bar{\alpha}_2(E_2)\,\bar{\alpha}_3(E_2) + \\ & + 2\bar{\alpha}_3(E_3)\,\bar{\alpha}_3(E_3) = 9b^2, \end{aligned} \tag{III.6}$$

$$\begin{aligned} g_{21} = g_{12} = {} & \bar\gamma^1_{11}\bar\gamma^1_{21} + \bar\gamma^2_{11}\bar\gamma^1_{22} + \bar\gamma^3_{11}\bar\gamma^1_{23} + \bar\gamma^1_{12}\bar\gamma^2_{21} + \bar\gamma^2_{12}\bar\gamma^2_{22} + \bar\gamma^3_{12}\bar\gamma^2_{23} + \\ & + \bar\gamma^1_{13}\bar\gamma^3_{21} + \bar\gamma^2_{13}\bar\gamma^3_{22} + \bar\gamma^3_{13}\bar\gamma^3_{23} + 2\bar\alpha_1(E_1)\bar\alpha_2(E_1) + 2\bar\alpha_1(E_2)\bar\alpha_2(E_2) + \\ & + 2\bar\alpha_1(E_3)\bar\alpha_2(E_3) = 0, \end{aligned} \tag{III.7}$$

$$\begin{aligned} g_{31} = g_{13} = {} & \bar\gamma^1_{11}\bar\gamma^1_{31} + \bar\gamma^2_{11}\bar\gamma^1_{32} + \bar\gamma^3_{11}\bar\gamma^1_{33} + \bar\gamma^1_{12}\bar\gamma^2_{31} + \bar\gamma^2_{12}\bar\gamma^2_{32} + \bar\gamma^3_{12}\bar\gamma^2_{33} + \\ & + \bar\gamma^1_{13}\bar\gamma^3_{31} + \bar\gamma^2_{13}\bar\gamma^3_{32} + \bar\gamma^3_{13}\bar\gamma^3_{33} + 2\bar\alpha_1(E_1)\bar\alpha_3(E_1) + 2\bar\alpha_1(E_2)\bar\alpha_3(E_2) + \\ & + 2\bar\alpha_1(E_3)\bar\alpha_3(E_3) = 0, \end{aligned} \tag{III.8}$$

$$\begin{aligned} g_{32} = g_{23} = {} & \bar\gamma^1_{21}\bar\gamma^1_{31} + \bar\gamma^2_{21}\bar\gamma^1_{32} + \bar\gamma^3_{21}\bar\gamma^1_{33} + \bar\gamma^1_{22}\bar\gamma^2_{31} + \bar\gamma^2_{22}\bar\gamma^2_{32} + \bar\gamma^3_{22}\bar\gamma^2_{33} + \\ & + \bar\gamma^1_{23}\bar\gamma^3_{31} + \bar\gamma^2_{23}\bar\gamma^3_{32} + \bar\gamma^3_{23}\bar\gamma^3_{33} + 2\bar\alpha_2(E_1)\bar\alpha_3(E_1) + 2\bar\alpha_2(E_2)\bar\alpha_3(E_2) + \\ & + 2\bar\alpha_2(E_3)\bar\alpha_3(E_3) = 0. \end{aligned} \tag{III.9}$$

Tensorul metric construit cu (III.4), (III.5), (III.6), (III.7), (III.8) și (III.9) este

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9c^2 \end{pmatrix} = \delta_{ij} \tag{III.10}$$

și vom avea următoarele valori pentru constantele (a, b, c):

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}};\ b = \pm \frac{1}{3};\ c = \pm \frac{1}{3}\cdot \tag{III.11}$$

Dacă luăm valorile $\left(a = +\frac{1}{\sqrt{3}};\ b = +\frac{1}{3};\ c = +\frac{1}{3}\right)$, rădăcinile (III.2) devin:

$$\begin{gathered} \left(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \\ \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right), \\ \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right). \end{gathered} \tag{III.12}$$

Din (III.12) se observă că lungimile tuturor rădăcinilor sînt egale între ele, adică:

$$|\bar\alpha(E_1)| = |\bar\alpha(E_2)| = |\bar\alpha(E_3)| = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot \tag{III.13}$$

Acum, utilizînd ecuațiile:

$$H_i|\xi\rangle = m_i|\xi\rangle \tag{III.14}$$

se obţin următoarele ponderi :

$$\begin{array}{l}(0\,;\,-2b\,;\,1c),\\(1a\,;\,1b\,;\,1c),\\(-1\,a\,;\,1b\,;\,1c).\end{array}\qquad\text{(III.15)}$$

Luînd în considerare şi rezultatul (II.9), obţinem că :

$2\overline{\alpha}-\vec{m}$ este de asemenea pondere şi avem :

$$\text{pentru }\overline{\alpha}(E_\alpha)\text{ şi }m=\begin{array}{l}(0\,;\,-2b\,;\,1c),\\(0\,;\,4b\,;\,1c),\\(1a\,;\,1b\,;\,1c),\\(-1a\,;\,1b\,;\,1c)\,;\end{array}\qquad\text{(III.16)}$$

$$\text{pentru }\overline{\alpha}(E_\alpha)\text{ şi }m=\begin{array}{l}(1a\,;\,1b\,;\,1c),\\(-1a\,;\,1b\,;\,1c),\\(0\,;\,-2b\,;\,1c),\\(-2a\,;\,-2b\,;\,1c)\,;\end{array}\qquad\text{(III.17)}$$

$$\text{pentru }\overline{\alpha}\,(E)\text{ şi }m=\begin{array}{l}(-1a\,;\,1b\,;\,1c)\\(1a\,;\,1b\,;\,1c)\\(2a\,;-2b\,;\,1c)\\(0\,;-2b\,;\,1c)\end{array}\qquad\text{(III.18)}$$

Acestea sînt toate ponderile care ne interesează şi care intervin în reprezentarea (3×3) a algebrei Jordan a $GL(3)$.

Dacă introducem în (III.15)—(III.18) valorile constantelor $(a,\,b,\,c)$ din (III.11), obţinem pentru $\left(a=+\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\ b=+\frac{1}{3}\,;\,c=\frac{1}{3}\right)$:

$$\begin{array}{l}\left(0\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\\[6pt]\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,+\frac{1}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\\[6pt]\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,+\frac{1}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\end{array}\qquad\text{(III.15')}$$

$$\begin{gathered}\left(0\,;\,+\frac{4}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\\ \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,+\frac{1}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,+\frac{1}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\end{gathered}\tag{III.16'}$$

$$\begin{gathered}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,+\frac{1}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\\ \left(0\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\\ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\end{gathered}\tag{III.17'}$$

$$\begin{gathered}\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,+\frac{1}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\\ \left(+\frac{2}{\sqrt{3}}\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right)\\ \left(0\,;\,-\frac{2}{3}\,;\,+\frac{1}{3}\right).\end{gathered}\tag{III.18'}$$

Mai pot fi luate valorile : $\left(a=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\; b=-\frac{1}{3}\,;\; c=\frac{1}{3}\right)$; $\left(a=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;b=-\frac{1}{3}\,;c=-\frac{1}{3}\right)$ şi $\left(a=\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\; b=\frac{1}{3}\,;c=-\frac{1}{3}\right)$ care conduc la rezultate distincte pentru ponderi. Acum se observă că în (III.16), (III.17) şi (III.18) apar ca ponderi distincte faţă de cele din (III.15) numai :

$$\begin{gathered}(0\,;\,4b\,;\,1c)\\ (-2a\,;\,-2b\,;\,1c)\\ (2a\,;\,-2b\,;\,1c)\end{gathered}\tag{III. 19}$$

celelalte fiind aceleaşi cu (III.15).

Sistemul de ponderi (III.15) sînt valori proprii ale operatorului $H(H_1\,;\,H_2\,;\,H_3)$ aplicat vectorului propriu $|\xi>$ iar sistemul de ponderi (III.16) – (III.19) sînt valorile proprii ale operatorului $H(H_1\,;\,H_2\,;\,H_3)$ aplicat vectorului propriu $E_\alpha|\xi>$.

Se mai poate uşor arăta că, dacă $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \ldots$ sînt k rădăcini şi m o pondere, ale algebrei Jordan $J(A)$, atunci şi $2\bar{\alpha} - 2\bar{\beta} + 2\bar{\gamma} - \ldots (-1)^k m$ este de asemenea o pondere, adică :

$$HE_\alpha E_\beta E_\gamma \ldots |\xi> = (2\bar{\alpha} - 2\bar{\beta} + 2\bar{\gamma} - \ldots (-1)^k m)\, |\xi>.$$

Aceste ponderi nu au fost calculate aici.

În încheiere ţin să mulţumesc prof. Octav Onicescu pentru discuţii asupra lucrării. De asemenea mulţumesc Dr. Eleonora Mihul şi Dr. K. Teleman pentru ajutorul acordat în verificarea şi completarea conţinutului lucrării.

Primită la redacţie la 21 octombrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Albert, Trans. Amer. Math. Soc., **59**, 524–555 (1946).
2. A. Albert, Ann. Math., **48**, 547–567 (1947).
3. G. Birkhoff, Ann. Math., **38**, 526–532 (1937).
4. F. D. Jacobson, N. Jacobson, Trans. Amer. Math. Soc., **65**, 141 (1949).
5. P. Jordan, N. Neumann, E. Wigner, Ann. Math., **35**, 29–64 (1934).
6. H. Weyl, Math. Zeitschr., **23**, 271–304 (1924) ; **24**, 328–395 (1925).

UN ALGORITM DE DECIDERE ÎN TEORIA ARBORILOR [1]

DE

T. RUS

Institutul de calcul Cluj

În lucrare se defineşte noţiunea de „arbori echivalenţi faţă de o mulţime de operaţii de substituţii şi permutări'' (operaţii care se definesc în lucrare). Se defineşte de asemenea forma normală a unui arbore ale cărui noduri sînt marcate de simbolurile unei mulţimi date. Algoritmul de decidere asupra echivalenţei a doi arbori este format din două părţi :

1. Se transformă întîi arborii în formele lor normale.
2. Se verifică dacă aceste forme normale coincid. Dacă formele normale coincid, arborii sînt echivalenţi.

Algoritmul este în aşa fel expus încît se poate folosi (traducîndu-l în limba unei maşini cifrice de calcul) pentru executarea unor operaţii algebrice cu maşina de calcul, cum ar fi de exemplu ordonarea unui polinom. Să dă de asemenea algoritmul de construire al polinomului derivat al unui polinom, cu ajutorul maşinii de calcul, folosind algoritmul despre care vorbeam mai sus.

1. Noţiunea de arbore a căpătat în ultimul timp o folosire tot mai largă în caracterizarea diferitelor procese de calcul în legătură cu mecanizarea executării acestor procese. Astfel în lucrarea [4] se arată un mod de prezentare cu ajutorul arborilor a simbolismului matematic folosit în rezolvarea cu maşini electronice de calcul a diferitelor procese de calcul aritmetice şi nearitmetice. Pentru claritate, vom spune despre un proces de calcul că este nearitmetic dacă datele lui iniţiale nu cuprind numai mărimi numerice, ci şi de altă natură, iar rezultatul nu apare neapărat sub forma unui număr sau a unui sistem de numere.

Într-o serie de lucrări de lingvistică matematică — mai ales în analiza structurală — teoria arborilor începe să-şi găsească un cîmp de aplicaţie tot mai larg, după cum se vede din lucrările [1], [3]. Teoria arborilor ca

---

[1] Lucrare prezentată la şedinţa de comunicări a Institutului de calcul Cluj din 21 ianuarie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 311–318, BUCUREŞTI, 1965

un capitol separat este relativ slab dezvoltată. Rezultatele generale care se folosesc sînt cele din teoria grafelor, arborele fiind un graf particular care nu conţine cicluri. În lucrarea [2] se pun cîteva probleme generale asupra structurii arborilor şi a operaţiilor care se introduc asupra unui arbore. Astfel se demonstrează că faţă de o mulţime dată de transformări ale unui arbore dat, există un algoritm care permite să decidem dacă doi arbori, a_1 şi a_2, sînt sau nu echivalenţi, adică dacă unul din ei poate fi obţinut din celălalt prin aplicarea unui număr finit de operaţii precizate. Practic este important de cunoscut un asemenea algoritm şi dacă este cunoscut este important ca să fie executat de o maşină electronică de calcul. Acest lucru ar permite ca o bună parte din munca de formalizare asupra anumitor probleme din domeniile prezentate mai sus să fie efectuată de maşinile electronice de calcul.

În această Notă ne vom referi la lucrările [5] şi vom particulariza sistemul formal construit în aceste lucrări dînd cu ajutorul arborilor un algoritm de decidere asupra echivalenţei cuvintelor compatibile în sistemul formal particularizat. Acest algoritm va permite ca anumite calcule algebrice să poată fi executate de o maşină electronică de calcul. Aceasta constituie un prim pas în procesul de folosire efectivă a maşinilor electronice de calcul în rezolvarea unor probleme nearitmetice cum sînt derivarea şi integrarea analitică a funcţiilor definite cu ajutorul formulelor.

2. Să considerăm sistemul formal care are ca alfabet mulţimea $\mathfrak{N} = \{\oplus, \otimes, \textcircled{\pi}, \ast, 0, 1, \ldots, 9, x\}$, unde $\oplus$, $\otimes$, $\textcircled{\pi}$ sînt simbolurile operaţiilor de adunare, înmulţire şi ridicare la putere, iar $0, 1, \ldots, 9$ sînt constantele date, iar x este o variabilă. Regulile semantice pentru simbolurile introduse sînt cele obişnuite în algebra elementară. Vom presupune de asemenea că orice cuvînt în alfabetul $\{0, 1, \ldots, 9\}$ este tot o constantă. Dacă notăm cu p o constantă oarecare în alfabetul $\{0, 1, \ldots, 9\}$, atunci ea va fi numită constantă pozitivă. Oricare ar fi constanta pozitivă p, cuvîntul $q = \ast\, p$ în alfabetul $\{\ast, 0, 1, \ldots, 9\}$ va fi numit constantă negativă. Asupra simbolurilor $\oplus$, $\otimes$, $\textcircled{\pi}$ vom face următoarele ipoteze:

I. Dacă p şi q sînt constante, atunci şi cuvîntul $(\oplus, p, q)$ este o constantă şi anume constantă obţinută prin aplicarea operaţiei $\oplus$ asupra constantelor p, q în sens aritmetic obişnuit.

II. Dacă p şi q sînt constante, atunci şi cuvîntul $(\otimes, p, q)$ este constantă şi anume constantă obţinută prin aplicarea operaţiei $\otimes$ asupra constantelor p şi q în sens aritmetic obişnuit.

III. Dacă p este o constantă pozitivă şi q o constantă oarecare, atunci şi cuvîntul $(\textcircled{\pi}, p, q)$ este o constantă şi anume constantă obţinută prin aplicarea operaţiei de ridicare la puterea p a constantei q din aritmetica obişnuită.

De asemenea presupunem că avem un algoritm de obţinere a constantei C_p^q cu ajutorul operaţiilor introduse. Constanta C_p^q are sensul combinărilor de p elemente luate cîte q.

În cele ce urmează asupra simbolurilor mulțimii $\mathfrak{N}$ și asupra cuvintelor în alfabetul $\{*, 0, 1, \ldots, 9\}$ definim o funcție în felul următor. Dacă $s \in \mathfrak{N}$, atunci

$$\delta(s) = \begin{cases} p,\ p \geqslant 2 & \text{dacă } s = \oplus \text{ sau } \otimes \\ q,\ q = 2 & \text{dacă } s = \pi \\ 0 & \text{dacă } s \neq \oplus, \otimes, \pi, \end{cases}$$

p și q fiind numere întregi.

Această funcție o vom numi funcție grad în sensul introdus în [4], deoarece are ca valoare numărul operanților pe care poate să-i lege simbolul unei operații. Pentru consecvență ea a fost extinsă și asupra simbolurilor care nu sînt operații. În cele ce urmează asupra variabilei x nu facem ipoteze, considerînd că ea a fost precizată în lucrarea [5].

Constantele și variabilele definite mai sus le vom numi în continuare elemente de bază. Vom atașa fiecărui element de bază un arbore elementar format dintr-o singură rădăcină [4] marcată de simbolul elementului de bază respectiv.

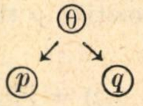
Noțiunea de arbore o vom introduce recursiv cu ajutorul următoarei definiții :

DEFINIȚIA 1. 1) Oricare arbore elementar este un arbore.

2) Dacă a_1 și a_2 sînt arbori, atunci și $a = (\oplus, a_1, a_2)$ și $a = (\otimes, a_1, a_2)$ sînt arbori care au ca rădăcină simbolul ⊕ respectiv ⊗ de la care pleacă două ramuri, una care unește rădăcina arborelui a cu rădăcina arborelui a_1, iar cealaltă care unește rădăcina arborelui a cu rădăcina arborelui a_2.

3) Dacă p este un arbore elementar corespunzător unei constante pozitive și a_1 un arbore, atunci și $a = (\textcircled{\pi}, p, a_1)$ este un arbore care are ca rădăcină simbolul $\textcircled{\pi}$ de la care pleacă două ramuri, una care unește rădăcina arborelui a_1 cu rădăcina arborelui p, iar alta care unește rădăcina arborelui a cu rădăcina arborelui p.

Dacă notăm cu $\textcircled{p}$ și $\textcircled{q}$ arborii elementari atașați constantelor p și q, atunci un arbore obținut din cei doi arbori elementari după procedeul descris mai sus poate fi reprezentat sub forma



unde θ este unul din simbolurile operatorilor. În continuare însă vom folosi notația liniară a arborilor, pentru că în felul acesta se face economie de spațiu. Astfel arborele de mai sus îl vom nota cu (θ, p, q).

Asupra arborilor definiți mai sus facem următoarele ipoteze :

I_1. Oricare ar fi arborii a_1, a_2 are loc relația

$$(\oplus, a_1, a_2) = (\oplus, a_2, a_1).$$

I_2. Dacă a_1, a_2, a_3 sînt arbori, atunci

$$(\oplus, a_1, (\oplus, a_2, a_3)) = (\oplus, (\oplus, a_1, a_2), a_3) = (\oplus, a_1, a_2, a_3).$$

I$_3$. Dacă a este un arbore, atunci există în mulţimea arborilor elementari un arbore Λ_+ cu proprietatea că $(\oplus, a, \Lambda_+) = (\oplus, \Lambda_+, a) = a$. Arborele Λ_+ îl vom numi arbore neutru relativ la simbolul $\oplus$.

I$_4$. Dacă a este un arbore, atunci există un arbore a_1 cu proprietatea că $(\oplus, a, a_1) = (\oplus, a_1, a) = \Lambda_+$.

II$_1$. Oricare ar fi arborii a_1, a_2 are loc relaţia

$$(\otimes, a_1, a_2) = (\otimes, a_2, a_1).$$

II$_2$. Dacă a_1, a_2, a_3 sînt arbori, atunci

$$(\otimes, a_1, (\otimes, a_2, a_3)) = (\otimes, (\otimes, a_1, a_2), a_3) = (\otimes, a_1, a_2, a_3).$$

II$_3$. Dacă a este un arbore, atunci există în mulţimea arborilor elementari un arbore $\Lambda_\times$ cu proprietatea că

$$(\otimes, a, \Lambda_\times) = (\otimes, \Lambda_\times, a) = a.$$

III$_1$. Dacă a_1, a_2, a_3 sînt arbori, atunci are loc relaţia

$$(\otimes, a_1, (\oplus, a_2, a_3)) = (\oplus, (\oplus, a_1, a_2), (\otimes, a_1, a_3)).$$

IV$_1$. Dacă p_1 şi p_2 sînt arbori corespunzători a două constante pozitive iar a este un arbore, atunci are loc relaţia

$$(\otimes, (\textcircled{\pi}, p_1, a), (\pi, p_2, a)) = (\textcircled{\pi}, (\oplus, p_1, p_2); a).$$

Dacă constantele corespunzătoare lui p_1 şi p_2 sînt egale cu p în sens algebric, atunci avem şi

$$(\oplus, (\pi, p, a), (\pi, p, a)) = (\oplus, 2, (\pi, p, a)).$$

IV$_1$. Există în mulţimea arborilor elementari arborii Λ_π şi $\Lambda_{\pi'}$ cu proprietăţile că oricare ar fi arborele a au loc relaţiile

$$(\textcircled{\pi}, \Lambda_\pi, a) = a\,; \; (\textcircled{\pi}, \Lambda_{\pi'}, a) = \Lambda_\pi.$$

Din condiţiile de mai sus rezultă că dacă p este un arbore elementar corespunzător unei constante pozitive p şi dacă a_1 şi a_2 sînt arbori oarecare, atunci are loc relaţia

$$(\textcircled{\pi}, p_1, (\oplus, a_1, a_2)) = (\oplus, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{p_1}),$$

unde

$$\bar{a}_i = (\otimes, c_p^i, (\textcircled{\pi}, (\oplus, p, \ast i, a_1), (\textcircled{\pi}, i, a_2))\,; \; i = 0, 1, \dots, p,$$

unde prin i am notat arborele elementar corespunzător constantei i iar prin C_p^i arborele elementar corespunzător constantei combinărilor.

Simbolul egalităţii introdus mai sus trebuie considerat ca egalitate în sens grafic, el nefăcînd parte din mulţimea $\mathfrak{R}$. În mulţimea arborilor definiţi mai sus cu proprietăţile I—IV vom introduce două operaţii. Prima este operaţia de permutare pe care o definim în felul următor fie arborele $a = (\theta, a_1, a_2, \dots, a_k)$, $k \geqslant 2$. Deoarece $\delta(\pi) = 2$ şi nu există pentru π o proprietate analogă proprietăților I_1 și II_2, operația de permutare se va defini numai pentru cazul cînd arborele a pus în evidență mai sus are rădăcina θ, simbolul $\oplus$ sau $\otimes$. Arborii $a_1, \ldots, a_k$ vor fi numiți subarbori principali ai arborelui a. Fie atunci $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ o permutare a șirului $\{1, 2, \ldots, k\}$. Arborele a se transformă atunci prin aplicarea operației de permutare P_Φ în arborele echivalent cu el, a', astfel $a' = P_\Phi(a) = (\theta, a_{\Phi_1}, a_{\Phi_2}, \ldots, a_{\Phi_k})$.

Să considerăm acum grupul G al permutărilor Φ_k, $k \geqslant 2$ al elementelor $\{1, 2, \ldots, k\}$. O P-transformare a arborelui a este o aplicație a transformării P_{Φ_k} a permutării Φ_k a grupului G asupra arborelui a avînd k subarbori principali. Evident că o P-transformare se poate aplica și asupra unui subarbore oarecare al arborelui a.

A doua operație care se introduce asupra unui arbore este operația de substituire notată cu S. Fie a un arbore oarecare cu rădăcina θ iar a_1 un subarbore principal al său. Prin substituirea arborelui a_1 cu arborele a_1' vom înțelege înlocuirea subarborelui a_1, din arborele a cu arborele a_1', identificînd rădăcina lui a_1 cu rădăcina lui a_1'. Dacă notăm cu $S_1 = (a_1 \to a_1')$ operația de substituire, atunci dacă $a = (\theta, a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $k \geqslant 2$, $T_{s_1}(a) = (\theta, a_1', a_2, \ldots, a_k)$. Dacă a_1 se consideră ca arbore, atunci operația poate fi aplicată și pentru a_1 și în general pentru oricare subarbore al arborelui a.

Fie acum S o mulțime de perechi de arbori $\{a_i, a_i'\}$. O S-transformare a arborelui a este o aplicare a substituției $(a_i \to a_i')$ sau $(a_i' \to a_i)$ într-un nod oarecare al arborelui a.

DEFINIȚIA 2. Doi arbori se numesc S-echivalenți dacă unul poate fi obținut din celălalt prin aplicarea unui număr finit de S-transformări.

DEFINIȚIA 3. Doi arbori se numesc P-echivalenți dacă unul poate fi obținut din celălalt prin aplicarea unui număr finit de P-transformări.

DEFINIȚIA 4. Doi arbori se numesc echivalenți relativ la o mulțime dată de substituții și permutări dacă unul se poate obține din celălalt prin aplicarea unui număr finit de S-transformări și P-transformări.

Este evident că atît definiția dată mai sus arborilor, cît și operațiile asupra lor precum și definițiile echivalenței sînt valabile și în cazul general [2] cînd se consideră ca arbori elementari rădăcinile corespunzătoare, în general, ale elementelor de bază ale unui sistem formal [5] iar ca noduri [4] oricare din elementele operatorilor sau a relațiilor. Precizarea rădăcinilor și nodurilor prin considerarea mulțimii $\mathfrak{N}$ ne este utilă în acest caz numai pentru a construi efectiv un algoritm de decidere care să permită, să spunem, dacă doi arbori sînt sau nu echivalenți față de o mulțime dată de substituții și permutări.

În continuare va fi comod să considerăm arborii elementari a ca arbori de structura $(\otimes, (\textcircled{\pi}, \Lambda, a), a_1)$, unde $\Lambda = \Lambda_\pi$ dacă a este arborele elementar corespunzător unei variabile și $\Lambda = \Lambda_{\pi'}$ dacă a este arborele elementar corespunzător unei constante. Dacă a este arborele elementar corespunzător unei constante, atunci a_1 este chiar constanta respectivă. În caz contrar $a_1 = \Lambda_\pi$. În continuare vom nota cu 0 pe $\Lambda_{\pi'}$ și cu 1 pe Λ_π.

Vom construi acum un algoritm $\mathfrak{A}$ care ne va permite să decidem dacă doi arbori oarecare a_1 şi a_2 sînt sau nu echivalenţi în sensul introdus mai sus. Pentru aceasta vom defini forma normală a unui arbore a şi vom construi algoritmul de transformare al arborelui a în arborele corespunzător lui pus sub formă normală. Doi arbori vor fi echivalenţi dacă formele lor normale sînt egale în sens grafic.

DEFINIŢIA 5. Arborele a se zice pus sub formă normală dacă are forma $a = (\oplus, a_0, \ldots, a_k)$, unde $a_i = (\otimes, (\textcircled{\pi}, i, x), p_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, x fiind arborele elementar corespunzător variabilei x, p_i fiind arborele elementar corespunzător constantei p_i, iar i este arborele elementar corespunzător constantei i.

În cele ce urmează vom numi nucleu orice arbore de structura $(\otimes, (\textcircled{\pi}, p_1, x)\, q_1)$, unde p_1, q_j sînt arbori elementari corespunzători constantelor p_j, q_1; p_j numindu-se gradul nucleului iar q_j coeficientul său.

Vom aplica acum arborelui a un proces de omogenizare care va consta în transformarea lui în aşa fel încît fiecare vîrf al său să fie un vîrf al unui oarecare nucleu. Această transformare este posibilă deoarece se observă că dacă $\textcircled{p}$ este arborele elementar corespunzător constantei p, atunci acesta este echivalent cu nucleul $(\otimes, (\textcircled{\pi}, 0, x), p)$, iar dacă p este arborele elementar corespunzător variabilei x, atunci acesta este echivalent cu nucleul $(\otimes, (\textcircled{\pi}, 1, x), 1)$. Echivalenţa în acest caz trebuie considerată din punct de vedere al echivalenţei cuvintelor în sistemul nostru, reprezentate de cei doi arbori, în ipoteza interpretării simbolurilor π şi $\otimes$ ca simbolurile operaţiilor obişnuite de ridicare la putere şi înmulţire. Procesul de omogenizare despre care a fost vorba mai sus constă în următoarele :

Se examinează arborele a pe nivele. Fie, de exemplu, nivelul i. Examinarea acestui nivel constă în următoarele : se consideră toate nodurile de pe acest nivel şi anume $\textcircled{\theta_1}, \textcircled{\theta_2}, \ldots, \textcircled{\theta_j}$ care se pot presupune marcate de simboluri de operatori. Fie $\textcircled{\theta_k}$ unul dintre aceste noduri. Dacă pe nivelul $i + 1$ subarborele care are pe $\textcircled{\theta_k}$ ca rădăcina conţine cel puţin un vîrf, atunci se consideră acest subarbore şi se procedează cu el în felul următor : dacă vîrful respectiv aparţine unui nucleu, atunci nu se produce nici o schimbare. Dacă însă acest vîrf nu aparţine unui nucleu, atunci el se înlocuieşte cu nucleul echivalent cu el, corespunzător. Aceasta este valabilă pentru toate vîrfurile subarborelui cu rădăcina $\textcircled{\theta_k}$ de pe nivelul $i + 1$. În mod analog se va proceda pentru $k = 1, 2, \ldots, j$. O dată epuizaţi toţi subarborii cu rădăcinile pe nivelul i se trece la subarborii cu rădăcinile pe nivelul $i + 1$ şi procesul se continuă pînă cînd se epuizează toate nivelele arborelui a. Deoarece avem de-a face cu un număr finit de nivele, după un număr finit de paşi vom ajunge la arborele a transformat în aşa fel ca fiecare vîrf al său să aparţină unui nucleu. Procesul începe cu $i = 1$.

Pentru a construi algoritmul care transformă arborele în forma lui normală vom proceda în felul următor: fie S_1 mulțimea următoarelor substituții

$$\left.\begin{array}{r}(\oplus, (\otimes, (\text{\textcircled{π}}, p_1, x), q_1), (\otimes, (\text{\textcircled{π}}, p_1, x), q_2)) \rightarrow (\otimes, (\text{\textcircled{π}}, p_1\, x), (\oplus, q_1, q_2)) \\ (\otimes, (\otimes, (\text{\textcircled{π}}, p_1, x), q_1), (\otimes, (\text{\textcircled{π}}, p_2, x), q_2)) \rightarrow (\otimes, (\text{\textcircled{π}}, (\oplus, p_1, p_2), x)) \\ (\otimes, q_1, q_2)) \\ (\text{\textcircled{π}}, p, (\otimes, (\text{\textcircled{π}}, p_1, x), q_2)) \rightarrow (\otimes, (\text{\textcircled{π}}, (\otimes, p, p_1), x), \\ (\pi, p, q_1))\end{array}\right\} (S_1)$$

În această listă de substituții s-au folosit următoarele notații: $a_1 \rightarrow a_2$ înseamnă că arborele a_1 se înlocuiește cu arborele a_2. Prin (θ, p_1, p_2) înțelegem arborele elementar atașat constantei obținută în urma aplicării operației θ asupra constantelor p_1 și p_2 oricare ar fi aceste constante. De asemenea se presupune că oricare arbore de forma $(\otimes, (\pi, p, x), q)$ este un nucleu.

Primul pas al algoritmului constă atunci în aplicarea substituțiilor (S_1) în ordinea în care apar în listă, de atîtea ori de cîte ori este posibil. Aceasta trebuie înțeleasă în felul următor: se consideră prima formulă de substituție din lista (S_1) care se poate aplica și se aplică arborelui de atîtea ori de cîte ori este posibil. După aceea se trece la următoarea formulă și se procedează la fel. Dacă o oarecare formulă nu se mai poate aplica, atunci algoritmul se ia de la început. Cînd nici o formulă nu se mai poate aplica, atunci se trece la următorul pas al algoritmului.

Se poate observa ușor că primul pas al algoritmului după un număr finit de aplicări transformă arborele a într-un arbore a' care posedă următoarele proprietăți:

1) Arborele a' nu conține nici un subarbore de structura arborilor din părțile stîngi ale formulelor (S_1).

2) Oricare subarbore al arborelui a' format din două nuclee are una din formele

$$(\oplus,\ a_1^1,\ a_2^1),\ (\otimes,\ a_1^2,\ a_2^2),\ (\text{\textcircled{π}},\ a_1^3,\ a_2^3)$$

unde arborii a_i^j au proprietățile următoare:

a) a_1^1, a_2^1 sînt nuclee de grade diferite;

b) a_1^2, a_2^2 sînt subarbori de tipul $(\oplus,\ a_1^1,\ a_2^1)$;

c) a_2^3 este subarbore de tipul $(\oplus, a_1', a_2')$ iar a_1^3 este arborele elementar corespunzător unei constante.

Pasul al doilea al algoritmului $\mathfrak{A}$ constă în aplicarea substituțiilor (S_2) de atîtea ori de cîte ori este posibil în mod analog cu primul pas

$$(\otimes, (\oplus, a_1^1, a_2^1), (\oplus, a_1^2, a_2^2)) \rightarrow (\oplus, (\otimes, a_1^1, a_1^2), (\otimes, a_1^1, a_2^2), (\otimes, a_2^1, a_1^2), (\otimes, a_2^1, a_2^2)$$

$$(\text{\textcircled{π}}, p, (\oplus, a_1^1, a_2^1)) \rightarrow (\oplus, a_0^1, a_1^1, \ldots,\ a_p^1)$$

unde

$$a_i^1 = (\otimes,\ (\otimes,\ (\pi,\ \Lambda_\pi,\ x),\ C_p^i),\ (\otimes,\ (\textcircled{\pi},\ (\oplus,\ p,\ \ast\ i),\ a_1^1),$$
$$(\otimes,\ (\textcircled{\pi},\ i,\ a_1^2),\ 1)),\ i = 0,1,\ldots,p$$

p fiind constanta pozitivă corespunzătoare arborelui elementar $\textcircled{p}$. Dacă pasul al doilea al algoritmului $\mathfrak{A}$ nu se mai poate aplica, atunci se trece la primul pas. Acest proces se repetă pînă cînd nu se mai poate aplica nici primul pas al algoritmului nici al doilea. La sfîrșitul acestui proces, arborele a^1 se va transforma într-un arbore a^2 de forma

$$a^2 = (\oplus,\ a_1^1,\ a_2^1,\ldots,\ a_k^1),$$

unde fiecare din arborii a_i^1 sînt nuclee de grade diferite sau subarbori ai arborelui a^2 de forma $(\oplus,\ a_1^1,\ a_2^1,\ldots,\ a_r^1)$. În acest ultim caz, arborele a^2 se va transforma în așa fel ca să devină de forma $(\oplus,\ a_1^1,\ a_2^1,\ldots,\ a_s^1)$, unde fiecare din a_i^1 sînt nuclee de diferite grade. Aceasta se realizează cu ajutorul substituției :

$$(\oplus, (\oplus, a_1^1,\ldots,\ a_{r_1}^1), (\oplus, a_1^2,\ldots,\ a_{r_2}^2)) \to (\oplus, a_1^1,\ldots,\ a_{r_1}^1, a_1^2,\ldots,\ a_{r_2}^2)$$

și cu ajutorul aplicării primului pas al algoritmului $\mathfrak{A}$.

Se trece apoi la aplicarea celui de-al treilea pas al algoritmului $\mathfrak{A}$ care constă în următoarele : se construiește permutarea $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2,\ldots,\Phi_k)$ a șirului $\{1, 2,\ldots, k\}$ în felul următor : Φ_1 este indicele i al șirului $\{1, 2,\ldots, k\}$ corespunzător celui mai mic grad al nucleelor $a_1^1,\ldots, a_k^1$. Dacă Φ_i este construit, atunci Φ_{i+1} se construiește în același mod lăsînd la o parte indicele i folosit și nucleul corespunzător lui. La pasul al treilea al algoritmului $\mathfrak{A}$ se va transforma arborele a^2 prin aplicarea permutării Φ. În acest fel obținem $P_\Phi(a^2) = (\oplus, a_{\Phi_1}, a_{\Phi_2},\ldots, a_{\Phi_k})$, unde gradele nucleelor $a_{\Phi_1},\ldots, a_{\Phi_k}$ sînt astfel ca $p_{\Phi_1} < p_{\Phi_2} < \ldots < p_{\Phi_k}$. În felul acesta se vede că arborele $\widetilde{a} = P_\Phi(a^2)$ este forma normală a arborelui a.

Prin urmare oricare ar fi arborii a_1 și a_2, algoritmul $\mathfrak{A}$ aplicat arborelui a_1 îl transformă în arborele $\widetilde{a}_1$ iar aplicat arborelui a_2 îl transformă în $\widetilde{a}_2$. Dacă $\widetilde{a}_1 = \widetilde{a}_2$, în sens grafic spunem că arborii a_1 și a_2 sînt echivalenți. Se vede însă simplu că arborelui a_1 îi corespunde în sistemul formal cu alfabetul $\mathfrak{A}$ un cuvînt compatibil P_1, iar arborelui a_2 un cuvînt compatibil P_2. Dacă $\widetilde{P}_1 = \widetilde{P}_2$, atunci cuvintele P_1 și P_2 sînt echivalente față de sistemul de operații corespunzător S-transformărilor și P-transformărilor definite mai sus.

DEFINIȚIA 6. Arborele a_2 se numește derivatul arborelui a_1 dacă a_2 poate fi obținut din a_1 prin aplicarea substituțiilor

$$(\otimes, (\textcircled{\pi},\ p,\ x),\ q) \to (\otimes, (\textcircled{\pi},\ (\oplus, p,\ \ast 1), x),\ (\otimes, p,\ q)) \quad \text{dacă } p \geqslant 1$$
$$(\otimes, (\textcircled{\pi},\ 0,\ x),\ q) \to (\otimes, (\textcircled{\pi},\ 0,\ x),\ 0) \quad \text{dacă } p = 0$$

Se poate observa ușor că oricare ar fi arborele a în sistemul formal al alfabetului $\mathfrak{N}$, el admite un arbore derivat a' care se obține din arborele a prin aplicarea asupra acestuia din urmă a următorului algoritm :

Primul pas al algoritmului constă în transformarea arborelui în forma lui normală $\widetilde{a}$.

Al doilea pas al algoritmului constă în aplicarea asupra arborelui $\widetilde{a}$ a substituţiilor

$$(\otimes, (ⓣ, i, x), p_i) \rightarrow (\otimes, (ⓣ, (\oplus, i, \ast 1), x), (\otimes, p, i)) \text{ pentru } i \geqslant 1$$
$$(\otimes, (ⓣ, 0, x), p_0) \rightarrow (\otimes, (ⓣ, 0, x), 0) \qquad \text{pentru } i = 0$$

cîte o singură dată asupra fiecărui nucleu al arborelui $\widetilde{a}$. Arborele obţinut este arborele derivat al arborelui a.

Într-o notă ulterioară vom arăta cum se pot preda unei maşini electronice de calcul algoritmii descrişi mai sus, care va executa calculele algebrice corespunzătoare.

Primită la redacţie la 18 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. NOAM CHOMSKY, *On the notion „Rule of Grammer"*, *Structure of Language and its Mathematical aspects*, Providence, 1–24 (1961).
2. TREVOR EVANS, *A decision problem for transformation of trees*. Canadian Journal of Mathematics, 15, 4, 584–590 (1963).
3. NELSON GOODMAN, *Graphs for Lingvistics, Structure of Language and its Mathematical aspects*, Providence, 51–55 (1961).
4. KENNETH E. IVERSON, *A programing Language*. John Wiley and Sons, Inc. New York, London, 1962.
5. T. RUS, *Asupra unui sistem formal*. I. Studii şi cercetări matematice, **15**, *4* (1964).
6. T. RUS, *Asupra unui sistem formal*. II. Studii şi cercetări matematice, **15**, *5* (1964).

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 39 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici și automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoreme de descompunere ale algebrei)**, 1960, 619 p., 25,50 lei (epuizat).
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 1956, 380 p., 7 lei.
JANKÓ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare**, 1961, 223 p., 8,85 lei.
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow (1959—1960). Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene**, 1962, 160 p., 5 lei.
G. CIUCU și R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 1960, 232 p., 9,85 lei (epuizat).
C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculce, Teoria mulțimilor**, 1960, 108 p., 3,25 lei (epuizat).
C. CORDUNEANU, **Funcții aproape periodice**, 1961, 191 p., 8,30 lei (epuizat).
ROMULUS CRISTESCU, **Spații liniare ordonate**, 1959, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 1962, 148 p., 5,15 lei.
C. FOIAȘ, **Seminar M. Nicolescu 1959—1960, Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noțiunea de rezolventă**, 1962, 82 p., 2,85 lei.
ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară, fundamente : mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme pătratice**, 1958, 455 p., 24,50 lei.
GH. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 1961, 180 p., 7,85 lei.
M. GHERMĂNESCU, **Ecuații funcționale**, 1960, 523 p., 25,60 lei (epuizat).
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1959, 1288 p., 66,50 lei (epuizat).
TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuațiilor integrale**, 1956, 135 p., 5,90 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.
* * * **Lucrările celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni**, 1960, 228 p., 8,55 lei (epuizat).
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie Iași 2—5 iunie 1959**, 1962, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secția de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R.**, 1956, 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spații vectoriale normate**, 1956, 295 p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spații vectoriale topologice și pseudotopologice**, 1959, 219 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometria neeuclidiană**, 1954, 144 p., 4,30 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă**, 1958, 496 p., 25,90 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă, Teoria corespondenței**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
GH. MIHOC și V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 1962, 732 p., 34,70 lei (epuizat).
GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 1961, 142 p., 8,55 lei (epuizat) ; vol. II, 1962, 155 p., 8,25 lei (epuizat).
GR. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 1960, 279 p., 12 lei (epuizat).
GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele și ideale**, vol. I, 1954, 256 p., 9,10 lei (epuizat).
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 1950, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte și relee**, 1959, 205 p., 9,65 lei (epuizat).

ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 1959, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.

VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecţii de algebră**, 1953, 396 p., 8,75 lei (epuizat).

MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 1953, 420 p., 11,90 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 1962, 260 p., 11,20 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor, Cu aplicaţii la programarea liniară**, 1961, 228 p., 8,45 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU şi colab., **Calculul probabilităţilor şi aplicaţii**, 1956, 788 p., 15 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 1956, 496 p., 24,20 lei.

DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 1959, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.

N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 1954, 308 p., 10 lei (epuizat), vol. II în colaborare cu CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, 1958, 379 p., 25,70 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 1961, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 1956, 287 p., 8 lei.

DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 1961, 76 p., 3,15 lei.

SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 1956, 235 p., 5 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géométrie différentielle**, vol. I, 1957, 407 p., 26,50 lei ; vol. II, 1957, 428 p., 27,60 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. III, 1960, 454 p., 15 lei.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti.

1965 JUN 28

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 2, P. 153—320, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informația" – c. 88

43831

Lei 12

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

3

TOMUL 17

1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU, — membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

În ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti
Revista apare de 10 ori pe an

GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ

HOTĂRÎREA

Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn, a Consiliului de Stat şi a Consiliului de Miniştri ale Republicii Populare Romîne

Pentru eternizarea memoriei tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej, Comitetul Central al Partidului Muncitoresc Romîn, Consiliul de Stat şi Consiliul de Miniştri ale Republicii Populare Romîne

HOTĂRĂSC:

1. Se vor edita lucrările tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.
2. Se va edita biografia tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.
3. Statuia tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej va fi ridicată în oraşele Bucureşti şi Cluj.
4. Bustul tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej va fi aşezat la Comitetul Central al Partidului Muncitoresc Romîn, Marea Adunare Naţională a Republicii Populare Romîne, clubul C.F.R. „Griviţa Roşie" din oraşul Bucureşti şi la Casa de cultură din oraşul Galaţi.
5. Pe clădirile legate de activitatea tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej în perioada ilegalităţii vor fi aşezate plăci comemorative.
6. La Muzeul de Istorie a Partidului din oraşul Bucureşti se va organiza o sală memorială, consacrată vieţii şi activităţii tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.
7. Se va institui bursa republicană „Gheorghe Gheorghiu-Dej", care va fi acordată celor mai merituoşi studenţi.
8. Se va atribui numele „Gheorghe Gheorghiu-Dej":
   a) Oraşului Oneşti
   b) Combinatului siderurgic Galaţi
   c) Hidrocentralei „16 Februarie" de pe Argeş
   d) Combinatului chimico-metalurgic din Baia Mare
   e) Institutului Politehnic din Bucureşti
   f) Casei de cultură a studenţilor din Cluj
   g) Unei şcoli medii de cultură generală din oraşul Bîrlad
   h) Unui bulevard şi unei pieţe din oraşul Bucureşti, precum şi unor pieţe şi străzi din alte oraşe importante din ţară.
9. Se va emite un timbru memorial cu efigia tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej.

COMITETUL CENTRAL
AL PARTIDULUI MUNCITORESC ROMÎN

CONSILIUL DE STAT
AL REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

CONSILIUL DE MINIŞTRI
AL REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883 BUDAPEST

TOM. 17, Nr. 3
1965

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

Hotărîrea Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Român, a Consiliului de Stat şi a Consiliului de Miniştri ale Republicii Populare Române III

D. FIRESCU şi G. THEILER, Asupra unor criterii de verificare a ipotezelor statistice relativ la lanţurile Markov simple, finite şi omogene 323

RADU ROŞCA, Asupra curbelor izotrope 335

RADU ROŞCA, Asupra unei clase de repere centrale 339

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Funcţii monogene pe spaţii Riemann. II. Funcţii definite pe o algebră cu baza infinită şi ecuaţie caracteristică $1 + \theta^2 + \varphi^2 = 0$ 345

C. CONSTANTINESCU, Un exemplu de spaţiu armonic 357

SERGIU RUDEANU, Observaţii asupra lucrărilor lui Motinori Gotō privind ecuaţiile booleene 359

WILHELM KECS, Extinderea ecuaţiilor de echilibru a firelor perfect flexibile şi inextensibile în cazul unor sarcini ce se exprimă printr-o funcţie continuă, avînd discontinuităţi de speţa întîi 367

WILHELM KECS, Aplicaţii ale teoriei funcţiilor generalizate privind problemele planului elastic infinit 379

G. GODINI, Variabile aleatoare aproape continue 399

V. ISTRĂŢESCU, Asupra algebrelor de funcţii lipschitziene. I . . 407

HARRY COHN, Testul raportului de verosimilităţi pentru procese aleatoare 413

HARRY COHN, Asupra comportării asimptotice a sistemelor cu legături complete 419

SANDA MANEA, Aplicaţii ale unei metode semiinverse la problema scurgerilor pe sub baraje 433

I. DRĂGAN, Asupra unei clase de probleme de programare parametrică 445

ALEXANDRU I. ŞCHIOP, Numărul tipurilor de multipoli $(1-k)$ după grupul altern 451

GEORGE ISAC, O teoremă Hahn-Banach pentru module semisimple definite peste inele normate 457

VIOREL IFTIMIE, Asupra problemei Dirichlet pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul doi neliniare de tip eliptic în plan 463

NOTĂ ISTORICĂ 471

RECENZIE 473

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 321–474, BUCUREŞTI, 1965

ASUPRA UNOR CRITERII DE VERIFICARE A IPOTEZELOR STATISTICE RELATIV LA LANŢURILE MARKOV SIMPLE, FINITE ŞI OMOGENE

DE

D. FIRESCU şi G. THEILER

Centrul de statistică matematică, str. M. Eminescu nr. 47 Bucureşti,

În cadrul unei alte lucrări [1], considerînd un lanţ Markov simplu, finit şi omogen, precum şi două selecţii de mărimi diferite (considerarea mărimilor diferite nu este esenţială), s-a pus problema verificării ipotezei statistice, dacă cele două selecţii aparţin sau nu lanţului.

Problema a fost abordată cu ajutorul frecvenţelor $n_{ij}/(n_i - 1)$ corespunzătoare succesiunilor $a_i a_j$ în selecţiile date, unde a_i şi a_j sînt două stări ale lanţului, şi s-au stabilit unele criterii statistice cu caracter asimptotic utilizînd numai o parte din observaţii.

Dacă aplicarea unor astfel de criterii ar conduce la concluzia că cele două selecţii aparţin lanţului (deci nu la cea mai bună concluzie), aplicarea lor nu ar fi îndeajuns de satisfăcătoare şi, de aceea, este natural să recurgem la criterii mai complexe.

Obiectul lucrării de faţă este acela de a studia problema în cazul criteriilor statistice bazate pe totalitatea observaţiilor.

1. În cadrul unei lucrări anterioare [1], considerînd un lanţ Markov simplu, finit şi omogen, precum şi două selecţii independente, prima de volum $n^{(1)}$ şi a doua de volum $n^{(2)}$, am pus problema verificării ipotezei statistice, dacă cele două selecţii aparţin sau nu lanţului considerat.

Se înţelege că, dacă din datele de observaţie corespunzătoare selecţiilor respective am fi înclinaţi să apreciem că răspunsul este negativ, deci că cele două selecţii nu aparţin lanţului, atunci nu există un motiv deosebit de a utiliza criterii bazate pe totalitatea datelor de observaţie.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P.323 – 334, BUCUREŞTI, 1965

Din acest motiv, în lucrarea menționată, problema pusă a fost abordată, stabilind unele criterii cu caracter asimptotic, utilizînd numai o parte din datele de observație. În primul rînd, s-a stabilit un criteriu cu caracter asimptotic relativ la compararea frecvențelor $n_{ij}^{(1)}/(n_i^{(1)} - 1)$ și $n_{ij}^{(2)}/(n_i^{(2)} - 1)$ ale realizării succesiunii $a_i\, a_j$ de două stări determinate a_i și a_j ale lanțului în selecțiile date. În al doilea rînd, s-a stabilit de asemenea un criteriu cu caracter asimptotic relativ la compararea concomitentă a unui grup de astfel de frecvențe cu i fix și $j = 1, 2, \ldots, s - 1$, s fiind numărul de stări ale lanțului.

Dacă pe baza unor astfel de criterii am fi conduși la un răspuns negativ, adică la situația că cele două selecții nu corespund aceluiași lanț Markov considerat, aplicarea lor ar fi justificată. Dacă însă, acestea ar duce la un răspuns pozitiv, deci la concluzia că selecțiile corespund lanțului, aplicarea lor nu ar fi îndeajuns de satisfăcătoare și, în acest caz, este normal să recurgem la criterii și mai complexe.

De aceea, în cadrul lucrării de față, vom trece la etapa următoare a determinării unui criteriu cu caracter asimptotic utilizînd totalitatea datelor de observație aparținînd celor două selecții. Cu alte cuvinte, se pune acum problema comparării concomitente a tuturor perechilor de frecvențe $(n_{ij}^{(1)}/(n_i^{(1)} - 1),\ n_{ij}^{(2)}/(n_i^{(2)} - 1))$ corespunzătoare succesiunilor de forma $a_i\, a_j$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, s - 1)$ în selecțiile date de volum $n^{(1)}$ și respectiv $n^{(2)}$.

Să considerăm deci un lanț Markov simplu și omogen ale cărui variabile

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

pot lua valorile (stările)

$$a_1, a_2, \ldots, a_s.$$

Cu notațiile obișnuite, probabilitățile de trecere se scriu

$$p_{ij} = P\,(X_n = a_j \mid X_{n-1} = a_i),$$

ele fiind elementele matricei stochastice

$$(p_{ij}) \left(\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1 \text{ pentru orice } i \right).$$

Pentru simplificarea scrierii vom presupune că probabilitățile de trecere ale lanțului sînt toate diferite de zero, deși aceasta nu este esențial.

Admitem că lanțul considerat este un lanț ergodic, adică un lanț pentru care are loc relația

$$\lim_{n\to\infty} p_i^{(n)} = p_i \text{ (diferit de zero)},$$

unde $p_i^{(n)} = P\,(X_n = a_i)$ este probabilitatea absolută sau necondiționată.

Conform cu notațiile folosite în lucrarea mai sus menționată, fie $n_i^{(1)}$ și $n_{ij}^{(2)}$ numerele care indică de cîte ori apare starea a_i respectiv succesiunea $a_i\, a_j$ în selecția dată de volum $n^{(1)}$. O semnificație analogă o au numerele $n_i^{(2)}$ și $n_{ij}^{(2)}$ corespunzătoare selecției date de volum $n^{(2)}$. Numerele

$n_i^{(1)}$, $n_i^{(2)}$, $n_{ij}^{(1)}$ și $n_{ij}^{(2)}$ sînt evident variabile aleatoare pentru o selecție de volum determinat.

Vom începe prin a considera în locul unei selecții de volum determinat n, o selecție de volum aleator, în așa fel încît vom face atîtea observații pînă cînd fiecare stare a_i se va realiza de cel puțin $[n\, p_i]$ ori ($i = 1, 2, \ldots, \ldots, s$), unde $[n\, p_i]$ este cel mai mare întreg conținut în $n\, p_i$.

Din totalul datelor de observație astfel obținute, vom folosi pentru fiecare din stările $a_1, a_2, \ldots, a_s$ respectiv primele $[np_1]$, $[np_2], \ldots, [np_s]$ observații.

Vom arăta că prin acest procedeu se ajunge după un număr finit de pași la s selecții independente de volum $[np_1]$, $[np_2], \ldots, [np_s]$ efectuate din s distribuții multinomiale cu s stări, unde fiecare din cele $[np_1]$, $[np_2], \ldots, [np_s]$ observații este precedată respectiv de starea $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Pentru aceasta vom stabili, în cazul lanțului considerat, următoarea teoremă cu un caracter mai general decît este necesar în problema noastră.

2. TEOREMĂ. *Probabilitatea* $P\,(a_{\alpha_1} a_{\beta_1}, a_{\alpha_2} a_{\beta_2}, \ldots, a_{\alpha_N} a_{\beta_N})$ *a realizării concomitente a succesiunilor de stări*

$$a_{\alpha_1} a_{\beta_1}, a_{\alpha_2} a_{\beta_2}, \ldots, a_{\alpha_N} a_{\beta_N},$$

în care stările $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_N}$ *se succed în această ordine, este*

$$P\,(a_{\alpha_1} a_{\beta_1}, a_{\alpha_2} a_{\beta_2}, \ldots, a_{\alpha_N} a_{\beta_N}) = \prod_{k=1}^{N} p_{\alpha_k \beta_k}. \tag{2.1}$$

Demonstrație. Avem

$$P\,(a_{\alpha_1} a_{\beta_1}, a_{\alpha_2} a_{\beta_2}, \ldots, a_{\alpha_N} a_{\beta_N}) = P\,(a_{\alpha_1} a_{\beta_1})\, P\,(a_{\alpha_2} a_{\beta_2}, \ldots, a_{\alpha_N} a_{\beta_N} \mid a_{\alpha_1} a_{\beta_1}).$$

Pe de altă parte, probabilitatea $P\,(a_{\alpha_1} a_{\beta_1})$ a realizării succesiunii de stări $a_{\alpha_1} a_{\beta_1}$ în care starea a_{α_1} are loc întîi și apoi imediat după aceasta are loc starea a_{β_1} este

$$P\,(a_{\alpha_1} a_{\beta_1}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}\,(a_{\alpha_1})\; P\,(a_{\beta_1} \mid a_{\alpha_1}) = p_{\alpha_1 \beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}\,(a_{\alpha_1}) = p_{\alpha_1 \beta_1},$$

unde $P_1^{(n)}\,(a_{\alpha_1})$ reprezintă probabilitatea realizării pentru prima oară a stării a_{α_1} după n pași, iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}\,(a_{\alpha_1}) = 1$.

Justificarea afirmației că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}\,(a_{\alpha_1}) = 1$ se poate face, de exemplu, cu ajutorul funcțiilor generatoare, astfel cum a procedat W. Feller [3] în cazul evenimentelor recurente. În cazul nostru, vom folosi în plus ipoteza că lanțul considerat este un lanț ergodic, adică un lanț pentru care $\lim\limits_{n \to \infty} p_{\alpha_1}^{(n)}$ există și este diferită de zero.

Dacă notăm în mod convențional $p_{\alpha_1}^{(0)} = 1$ și $p_{\alpha_1}^{(m)} = 0$ $(m < 0)$, atunci putem să scriem

$$p_{\alpha_1}^{(k)} = P_1^{(1)}\,(a_{\alpha_1})\, p_{\alpha_1}^{(k-1)} + P_1^{(2)}\,(a_{\alpha_1})\, p_{\alpha_1}^{(k-2)} + \ldots + P_1^{(k)}\,(a_{\alpha_1})\, p_{\alpha_1}^{(0)},$$

egalitate valabilă pentru orice întreg $k \geqslant 1$.

Înmulţind ambii membri ai acestei egalităţi cu x^n şi însumînd egalităţile astfel obţinute pentru $k = 1,2,\ldots$, rezultă

$$G(x) = \frac{1}{1-F(x)},$$

unde $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n P_1^{(n)}(a_{\alpha_1})$ şi $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n p_{\alpha_1}^{(n)}$ sînt respectiv funcţiile generatoare ale şirurilor $\{P_1^{(n)}(a_{\alpha_1})\}_{n=1,2,\ldots}$ şi $\{p_{\alpha_1}^{(n)}\}_{n=0,1,2,\ldots}$

Să observăm că $\sum_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}(a_{\alpha_1}) \leqslant 1$. Vom arăta că inegalitatea $\sum_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}(a_{\alpha_1}) < 1$ nu este posibilă.

Într-adevăr dacă această inegalitate ar avea loc, atunci $F(x)$ ar fi o serie uniform convergentă pentru $x \leqslant 1$, iar $\lim_{n\to 1} F(x) = F(1) < 1$. Dar atunci şi $\lim_{n\to 1} G(x)$ există şi este egală cu $1/(1-F(1))$, de unde rezultă că $G(1)$ există şi este finit, adică seria $G(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha_1}^{(n)}$ este convergentă.

Acest lucru nu este însă posibil, deoarece lanţul considerat fiind un lanţ ergodic, urmează că termenul general al seriei $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha_1}$ nu tinde către zero, cînd $n \to \infty$, astfel încît nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă a seriei.

Rezultă, prin urmare, că nu este posibil să avem decît egalitatea $\sum_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}(a_{\alpha_1}) = 1$. Putem deci afirma că probabilitatea realizării stării a_{α_1} după un număr finit de paşi este egală cu unu.

Am arătat mai sus că probabilitatea $P(a_{\alpha_1} a_{\beta_1})$ de a se realiza succesiunea $a_{\alpha_1} a_{\beta_1}$, în care starea a_{α_1}, are loc întîi şi apoi imediat după aceasta starea a_{β_1}, este egală cu $p_{\alpha_1 \beta_1}$. De aceea, putem să scriem

$$P(a_{\alpha_1} a_{\beta_1}, a_{\alpha_2} a_{\beta_2}, \ldots, a_{\alpha_N} a_{\beta_N}) = p_{\alpha_1 \beta_1} P(a_{\alpha_2} a_{\beta_2}, \ldots a_{\alpha_N} a_{\beta_N} | a_{\alpha_1} a_{\beta_2}) =$$
$$= p_{\alpha_1 \beta_1} P(a_{\alpha_2(\beta_1)} \; a_{\beta_2}) P(a_{\alpha_3} a_{\beta_3}, \ldots, a_{\alpha_N} a_{\beta_N} | a_{\alpha_2(\beta_1)} a_{\beta_2}).$$

Pe de altă parte, probabilitatea $P(a_{\alpha_2(\beta_1)} a_{\beta_2})$ de a se realiza succesiunea de stări $a_{\alpha_2(\beta_1)} a_{\beta_2}$, în care starea a_{α_2} are loc pentru prima oară imediat după starea a_{β_1} şi apoi imediat după starea a_{α_2} are loc starea a_{β_2}, este

$$P(a_{\alpha_2(\beta_1)} \; a_{\beta_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}(a_{\alpha_2(\beta_1)}) P(a_{\beta_2} | a_{\alpha_2(\beta_1)}) = p_{\alpha_2 \beta_2} \sum_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}(a_{\alpha_2(\beta_1)}) = p_{\alpha_2 \beta_2},$$

unde $P_1^{(n)}(a_{\alpha_2(\beta_1)})$ reprezintă probabilitatea realizării pentru prima oară după n paşi a stării a_{α_2} urmînd imediat după starea a_{β_1}, iar $\sum_{n=1}^{\infty} P_1^{(n)}(a_{\alpha_2(\beta_1)}) = 1$ conform justificării date mai înainte, în cazul stării a_{α_1}.

Ținînd seama acum de expresia probabilității $P\,(a_{\alpha_2\,(\beta_1)}\;a_{\beta_1})$, rezultă

$$P\,(a_{\alpha_1}\,a_{\beta_1},\,a_{\alpha_2}\,a_{\beta_2},\,\ldots,\,a_{\alpha_N}\,a_{\beta_N}) = p_{\alpha_1\beta_1}\,p_{\alpha_2\beta_2}\,P\,(a_{\alpha_3}\,a_{\beta_3},\,\ldots,\,a_{\alpha_N}\,a_{\beta_N}\,|\,a_{\alpha_2\,(\beta_1)}\,a_{\beta_2})\,.$$

Continuînd cu acest procedeu, se vede ușor că

$$P\,(a_{\alpha_1}\,a_{\beta_1},\,a_{\alpha_2}\,a_{\beta_2},\,\ldots,\,a_{\alpha_N}\,a_{\beta_N}) = \prod_{k=1}^{N} p_{\alpha_k\,\beta_k}\,,$$

astfel încît teorema este demonstrată.

3. Să trecem acum la stabilirea proprietății de independență a celor s selecții de volum $[n\,p_i]$ $(i = 1,2,\ldots,\,s)$ efectuate din s distribuții multinominale, așa după cum s-a menționat la sfîrșitul punctului 1.

Fie $N = \sum_{i=1}^{s} [n\,p_i]$ și ν_{ij}, numărul succesiunilor $a_i\;a_j$ din cele $[np_i]$ probe, unde $\sum_{j=1}^{s} \nu_{ij} = [n\,p_i]$.

În aceste condiții, probabilitatea realizării simultane a tuturor succesiunilor $a_i\,a_j$ $(i,\;j = 1,\,2,\ldots\,s)$ este probabilitatea condiționată

$$P\left(\nu_{ij}\;(i,\,j = 1,2,\ldots,\,s)\,|\,\sum_{j=1}^{s} \nu_{ij} = [n\,p_i]\;\;(i = 1,2,\ldots,\,s)\right).$$

Această probabilitate condiționată este

$$\frac{N\,!}{\nu_{11}\,!\,\nu_{12}\,!\ldots\nu_{1s}\,!\ldots\nu_{s1}\,!\,\nu_{s2}\,!\ldots\nu_{ss}\,!} : \frac{N\,!}{[np_1]\,!\,[np_2]\,!\ldots[np_s]\,!}\times$$
$$\times\,p_{11}^{\nu_{11}}\,p_{12}^{\nu_{12}}\ldots p_{1s}^{\nu_{1s}}\ldots p_{s1}^{\nu_{s1}}\,p_{s2}^{\nu_{s2}}\ldots p_{ss}^{\nu_{ss}},$$

de unde rezultă că

$$P\left(\nu_{ij}\;(i,\,j= 1,2,\ldots,\,s)\,|\,\sum_{j=1}^{s} \nu_{ij} = [np_i],\;(i = 1,2,\ldots,\,s)\right) =$$
$$= \prod_{i=1}^{s} \frac{[np_i]\,!}{\nu_{i1}\,!\,\nu_{i2}\,!\ldots\nu_{is}\,!}\,p_{i_1}^{\nu_{i1}}\,p_{i_2}^{\nu_{i2}}\ldots p_{i_s}^{\nu_{is}}\,. \qquad (3.1)$$

Prin urmare, proprietatea de independență mai sus menționată este stabilită.

4. Rezultatele obținute devin intuitive prin considerarea unei scheme probabilistice realizate de un sistem de $s + 1$ urne

$$U_0,\;\;U_1,\;\;U_2,\ldots,\,U_s.$$

Presupunem că în urna U_0 se găsesc bile numerotate de la 1 la s în proporție respectiv de $q_1,\,q_2,\ldots,\,q_s$ $\left(\sum_{i=1}^{s} q_i = 1\right)$, iar în fiecare urnă $U_j\,(j=$

$=1,2,\dots, s$) se găsesc de asemenea bile numerotate de la 1 la s, dar în proporție respectiv de $p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{js}$ $\left(\sum_{k=1}^{s} p_{jk} = 1,\ j = 1,2,\dots, s\right)$.

Din cele $s + 1$ urne facem — în baza a două reguli distincte — extracții, punînd după fiecare extracție bila ieșită înapoi în urnă.

Regula întîia constă din următoarele :

Facem prima extracție din urna U_0. Dacă rezultatul extracției este o bilă numerotată j, atunci extracția a doua o facem din urna U_j. Dacă acum rezultatul extracției este o bilă numerotată k, atunci extracția a treia o facem din urna U_k.

Continuînd astfel extracțiile, obținem — conform acestei reguli — un șir de variabile aleatoare care se succed după legea unui lanț Markov, finit și omogen.

Potrivit cu notațiile noastre, dacă numărul total al extracțiilor din urne este numărul determinat n, atunci n_i $\left(\sum_{i=0}^{s} n_i = n\right)$ va reprezenta numărul bilelor extrase din urna U_i, iar n_{ij} $\left(\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = n_i\right)$, numărul bilelor numerotate j extrase din urna U_i $(i = 1,2,\dots,s)$. Numerele n_i și n_{ij} sînt evident variabile aleatoare.

Regula a doua diferă de regula întîi nu prin tehnica ei care rămîne aceeași, ci prin aceea că extracțiile din urne continuă atîta timp cît este necesar pentru a asigura respectiv din fiecare din urnele $U_1, U_2, \dots, U_s$ cel puțin cîte $[np_1], [np_2], \dots, [np_s]$ rezultate. Cu alte cuvinte, vom face atîtea extracții din urne pînă cînd fiecare stare a_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ se va realiza de cel puțin $[np_i]$ ori $(i = 1,2,\dots, s)$.

În urma celor n extracții determinate, este posibil ca numerele minimale $[np_i]$ $(i = 1,2,\dots, s)$ de bile extrase din unele urne să se realizeze, dar în alte urne să nu se realizeze. În acest caz, extracțiile din urne vor continua, însă rezultatele obținute nu vor fi înregistrate din urnele în care numerele minimale $[np_i]$ $(i = 1,2,\dots,s)$ s-au realizat, decît numai pentru a cunoaște din care urnă are loc extracția următoare.

În modul acesta, extracțiile din urne pot continua destul timp încă, dar — conform demonstrației teoremei de la punctul 2 — acest timp este finit, iar din totalul extracțiilor din fiecare urnă U_i $(i = 1,2,\dots,s)$ vom folosi numai primele extracții independente $[n\, p_i]$ $(i = 1,2, \dots, s)$.

În baza schemei probabilistice realizată de cele $s + 1$ urne din care se fac extracții după cele două reguli de mai sus, sîntem astfel conduși la s selecții independente de volum $[np_1], [n\, p_2], \dots, [np_s]$, efectuate din s distribuții multinominale cu s stări, unde fiecare din cele $[np_1], [np_2], \dots, [np_s]$ observații este precedată respectiv de starea $a_1, a_2, \dots, a_s$.

5. Trecem acum la problema care ne interesează : a determinării, unui criteriu cu caracter asimptotic utilizînd totalitatea datelor de observație aparținînd la două selecții independente de volum dat $n^{(1)}$ și $n^{(2)}$. După cum s-a menționat la punctul 1, vom considera în locul celor două selecții de volume date $n^{(1)}$ și $n^{(2)}$, două selecții de volume aleatoare, astfel

ca în fiecare din aceste selecții starea a_i să aibă loc de $[n^{(1)} p_i]$ ori, respectiv de $[n^{(2)} p_i]$ ori $(i = 1,2,\ldots, s)$. Numărul succesiunilor corespunzătoare $a_i\, a_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, s)$ — potrivit notației introduse mai înainte — este $\nu_{ij}^{(1)}$, respectiv $\nu_{ij}^{(2)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, s)$.

În acest caz, distribuția numărului de succesiuni $a_i\, a_j$ $(i, j = 1,2,\ldots, s)$ aparținînd celor două selecții de volume aleatoare se descompune respectiv în s distribuții multinominale din care se efectuează selecții independente de volume determinate $[n^{(1)} p_i]$ și $[n^{(2)} p_i]$ $(i = 1,2,\ldots,s)$.

În conformitate cu rezultatele obținute în lucrarea [1], despre care am amintit la început, urmează că în cazul a două selecții independente de volume date $[n^{(1)} p_i]$ și $[n^{(2)} p_i]$ (i fix), putem să scriem

$$\lim_{n^{(1)}\to\infty,\ n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0} P\left(\sqrt{\frac{[n^{(1)} p_i]\,[n^{(2)} p_i]}{[n^{(1)} p_i] + [n^{(2)} p_i]}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}}{[n^{(1)} p_i]} - \frac{\nu_{ij}^{(2)}}{[n^{(2)} p_i]}\right| < \right.$$

$$\left. < \lambda_{ij}\ (i \text{ fix}, j = 1,2,\ldots, s-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_{i1}\,p_{i2}\cdots p_{is}}}\int_G e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{p_{ij}}x_{ij}^2}\prod_{j=1}^{s-1} d\,x_{ij}\ (i\,\text{fix}), \qquad (5.1)$$

unde $G = \{|x_{ij}| < \lambda_{ij},\ x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{is} = 0\ (i\,\text{fix}, j = 1,2,\ldots, s-1)\}$.

Pe de altă parte, se constată ușor că

$$\sqrt{\frac{[n^{(1)} p_i]\,[n^{(2)} p_i]}{[n^{(1)} p_i] + [n^{(2)} p_i]}} = \sqrt{\frac{n^{(1)}\, n^{(2)}\, p_i}{n^{(1)} + n^{(2)}}} + O\left(\sqrt{\frac{n^{(1)} + n^{(2)}}{n^{(1)}\, n^{(2)}}}\right)$$

și

$$\frac{\nu_{ij}^{(1)}}{[n^{(1)} p_i]} - \frac{\nu_{ij}^{(2)}}{[n^{(2)} p_i]} = \frac{\nu_{ij}^{(1)}}{n^{(1)}\, p_i} - \frac{\nu_{ij}^{(2)}}{n^{(2)}\, p_i} + O\left(\frac{n^{(1)} + n^{(2)}}{n^{(1)}\, n^{(2)}}\right),$$

de unde rezultă că inegalitățile

$$\sqrt{\frac{[n^{(1)} p_i]\,[n^{(2)} p_i]}{[n^{(1)} p_i] + [n^{(2)} p_i]}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}}{[n^{(1)} p_i]} - \frac{\nu_{ij}^{(2)}}{[n^{(2)} p_i]}\right| < \lambda_{ij}\,(i \text{ fix},\ j = 1,2,\ldots, s-1)$$

se mai pot scrie sub forma

$$\sqrt{\frac{n^{(1)}\, n^{(2)}}{n^{(1)} + n^{(2)}}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}}{n^{(1)}} - \frac{\nu_{ij}^{(2)}}{n^{(2)}}\right| < \lambda_{ij}\sqrt{p_i} + O\left(\sqrt{\frac{n^{(1)} + n^{(2)}}{n^{(1)}\, n^{(2)}}}\right)$$

$$(i\,\text{fix},\ j = 1,2,\ldots, s-1).$$

Atunci, în locul lui (5.1), putem să considerăm relaţia

$$\lim_{n^{(1)}\to\infty,\, n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0} P\left(\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}}{n^{(1)}}-\frac{\nu_{ij}^{(2)}}{n^{(2)}}\right|<\lambda_{ij}\sqrt{p_i}\,(i\text{ fix}, j = 1,2,\ldots,s-1)\right)=\frac{1}{(2\,\pi)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_{i1}\,p_{i2}\cdots p_{is}}}\int_G \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{p_{ij}}x_{ij}^2}\prod_{j=1}^{s-1}\mathrm{d}\,x_{ij}\,(i\,\text{fix}),\tag{5.2}$$

unde $G=\{|\,x_{ij}|<\lambda_{ij},\ x_{i1}+x_{i_2}+\ldots+x_{is}=0\ (i\text{ fix}, j=1,2,\ldots,s-1)\}$.

Dacă punem acum $\lambda_{ij}\sqrt{p_i}=\lambda'_{ij}$ şi $x_{ij}=x'_{ij}/\sqrt{p_i}\,(i\text{ fix}, j=1,2,\ldots s-1)$, relaţia (5.2) devine

$$\lim_{n^{(1)}\to\infty,\, n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0} P\left(\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}}{n^{(1)}}-\frac{\nu_{ij}^{(2)}}{n^{(2)}}\right|< \lambda'_{ij}\,(i\text{ fix}, j=1,2,\ldots,s-1)\right)=\tag{5.3}$$

$$=\frac{1}{(2\,\pi)^{\frac{s-1}{2}}p_i^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{is}}}\int_{G'}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{p_ip_{ij}}x_{ij}'^2}\prod_{j=1}^{s-1}\mathrm{d}\,x'_{ij}\,(i\,\text{fix}),$$

unde $G'=\left\{|\,x'_{ij}|<\lambda'_{ij},\ \dfrac{x'_{i1}+x'_{i2}+\ldots+x'_{is}}{\sqrt{p_i}}=0\ (i\,\text{fix}, j=1,2,\ldots,s-1)\right\}\cdot$

Relaţia (5.3) este adevărată pentru orice i ($i=1,2,\ldots,s$) şi se referă la evenimente independente, astfel încît expresia asimptotică a probabilităţii evenimentului compus, care constă din realizarea simultană a inegalităţilor

$$\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}}{n^{(1)}}-\frac{\nu_{ij}^{(2)}}{n^{(2)}}\right|<\lambda'_{ij}\ (i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1),$$

este egală cu produsul celor s probabilităţi corespunzătoare din (5.3), adică

$$\lim_{n^{(1)}\to\infty,\, n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0} P\left(\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}}{n^{(1)}}-\frac{\nu_{ij}^{(2)}}{n^{(2)}}\right|<\lambda'_{ij}(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right)=\tag{5.4}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s(s-1)}{2}}\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\frac{s-1}{2}}\left(\prod\limits_{i=1}^{s}\prod\limits_{j=1}^{s}p_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\int_H \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{p_ip_{ij}}x_{ij}'^{1}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s-1}\mathrm{d}x'_{ij},$$

unde $H=\left\{|\,x'_{ij}|<\lambda'_{ij},\ \dfrac{x'_{i1}+x'_{i2}\ldots+x'_{is}}{\sqrt{p_i}}=0\ (i=1,2,\ldots s;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right\}\cdot$

Vom căuta să aducem problema noastră la cazul variabilelor independente. Aceasta revine — după cum vom arăta mai departe — la determinarea expresiei asimptotice a probabilității

$$P\left(\sqrt{\frac{n^{(1)}\, n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_{i-1}^{(1)}}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_{i-1}^{(2)}}\right|<\lambda'_{ij}\,(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right)$$

pentru $n^{(1)}\rightarrow\infty$ și $n^{(1)}/n^{(2)}\rightarrow\infty\, c\neq 0$.

În acest scop, vom folosi un rezultat obținut de P. Billinghslley într-una din lucrările sale [2] în care a demonstrat că

$$P\left(\left|\frac{n_{ij}-n_i\, p_{ij}}{\sqrt{n}}-\frac{\nu_{ij}-[np_i]\, p_{ij}}{\sqrt{n}}\right|>\varepsilon\right)\leqslant\left(1+8p_{ij}\,(1-p_{ij})\right)\,\varepsilon, \qquad (5.5)$$

$$(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1)$$

unde $\varepsilon>0$ este arbitrar.

În baza acestui rezultat, vom arăta că variabila aleatoare

$$\xi=\sqrt{\frac{n^{(1)}\, n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\times\operatorname{mod}\left(\left|\frac{n_{ij}^{(1)}-(n_i^{(1)}-1)p_{ij}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}-(n_i^{(2)}-1)\,p_{ij}}{n_i^{(2)}-1}\right|-\right.$$
$$\left.-\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}-[n^{(1)}\,p_i]\,p_{ij}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{\nu_{ij}^{(2)}-[n^{(2)}\,p_i]\,p_{ij}}{n_i^{(2)}-1}\right|\right)$$

tinde în probabilitate către zero, cînd $n^{(1)}\rightarrow\infty$ și $n^{(1)}/n^{(2)}\rightarrow c\neq 0$.

Într-adevăr, dacă pentru simplificarea scrierii notăm

$$\xi_1=\sqrt{\frac{n^{(1)}\, n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left(\frac{n_{ij}^{(1)}-(n_i^{(1)}-1)\,p_{ij}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{\nu_{ij}^{(1)}-[n^{(1)}\,p_i]\,p_{ij}}{n_i^{(1)}-1}\right)$$

și

$$\xi_2=\sqrt{\frac{n^{(1)}\, n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left(\frac{\nu_{ij}^{(2)}-[n^{(2)}\,p_i]\,p_{ij}}{n_i^{(2)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}-(n_i^{(2)}-1)\,p_{ij}}{n_i^{(2)}-1}\right),$$

putem să scriem

$$P(\xi>\varepsilon)<P\left(|\xi_1+\xi_2|>\varepsilon\right)<P\left(|\xi_1|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|\xi_2|>\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad (5.6)$$

$\varepsilon>0$ fiind arbitrar.

Să observăm acum că este suficient să luăm în inegalitatea (5.5), $\varepsilon/2$ în loc de ε, $(n_i^{(1)}-1)\sqrt{n^{(1)}+n^{(2)}}/\sqrt{n^{(1)}\,n^{(2)}}$, respectiv $(n_i^{(2)}-1)\sqrt{n^{(1)}+n^{(2)}}/\sqrt{n^{(1)}\,n^{(2)}}$ în loc de $\sqrt{n}$ și să ținem seama că $\varepsilon>0$ este arbitrar și fiecare din frecvențele $n_i^{(1)}/n^{(1)}$ și $n_i^{(2)}/n^{(2)}$ tinde în probabilitate către p_i, spre a vedea că atunci cînd $n^{(1)}\rightarrow\infty$ și $n^{(1)}/n^{(2)}\rightarrow c\neq 0$ variabilele aleatoare ξ_1 și ξ_2 tind în probabilitate către zero.

Rezultă deci — conform inegalităților (5.6) — că variabila aleatoare ξ tinde în probabilitate către zero, cînd $n^{(1)}\to\infty$ și $n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0$, de unde rezultă mai departe că

$$\lim_{n^{(1)}\to\infty,\ n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0} P\left(\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right|<\right.$$
$$\left.<\lambda'_{ij}\,(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right)=$$
$$=\lim_{n^{(1)}\to\infty,\ n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0} P\left(\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}-[n^{(1)}p_i]\,p_{ij}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{\nu_{ij}^{(2)}-[n^{(2)}p_i]\,p_{ij}}{n_i^{(2)}-1}\right|<\right.$$
$$\left.<\lambda'_{ij}\,(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right). \tag{5.7}$$

Pentru a determina expresia asimptotică a probabilității din partea dreaptă a lui (5.7), să observăm că variabilele aleatoare corespunzătoare se mai pot pune sub forma

$$\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{\nu_{ij}^{(1)}-[n^{(1)}p_i]\,p_{ij}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{\nu_{ij}^{(2)}-[n^{(2)}p_i]\,p_{ij}}{n_i^{(2)}-1}\right|<\lambda'_{ij}=$$
$$=\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{[n^{(1)}p_i]}{n_i^{(1)}-1}\,\frac{\nu_{ij}^{(1)}-[n^{(1)}p_i]\,p_{ij}}{[n^{(1)}p_i]}-\frac{[n^{(2)}p_i]}{n_i^{(2)}-1}\,\frac{\nu_{ij}^{(2)}-[n^{(2)}p_i]\,p_{ij}}{[n^{(2)}p_i]}\right|<$$
$$<\lambda'_{ij}\,(i=1,2,\ldots,s;\ \ j=1,2,\ldots,s-1).$$

Toate cele $s\,(s-1)$ variabile aleatoare de mai sus se referă la evenimente independente, iar pe de altă parte, factorii $[n^{(1)}p_i]/(n_i^{(1)}-1)$ și $[n^{(2)}p_i]/(n_i^{(2)}-1)$ tind respectiv în probabilitate, pentru $n^{(1)}\to\infty$ și $n^{(2)}\to\infty$, către 1.

De aici și în baza lui (5.4), putem să scriem

$$\lim_{n^{(1)}\to\infty,\ n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0} P\left(\sqrt{\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right|<\right.$$
$$\left.<\lambda'_{ij}\,(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s(s-1)}{2}}\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\frac{s-1}{2}}\left(\prod\limits_{i=1}^{s}\prod\limits_{j=1}^{s}p_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\int_H e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{p_i p_{ij}}x_{ij}'^{2}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s-1}dx'_{ij}, \tag{5.8}$$

unde $H=\left\{|x'_{ij}|<\lambda'_{ij},\ \dfrac{x'_{i1}+x'_{i2}+\ldots+x'_{is}}{\sqrt{p_i}}=0\,(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right\}$.

Din punct de vedere al problemei noastre, rezultatul obținut nu este îndeajuns de satisfăcător, deoarece criteriul corespunzător de natură asimptotică — conform lui (5.8) — depinde de probabilitățile de trecere p_{ij} $(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,s-1)$ care, în general, sînt necunoscute.

De aceea, se pune întrebarea dacă nu este posibil să îmbunătăţim criteriul considerat, în sensul de a găsi o expresie mai simplă pentru probabilitatea limită (5.8).

În acest scop, vom considera vectorul aleator ale cărui componente sînt variabilele

$$\frac{\sqrt{\dfrac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}\left|\dfrac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\dfrac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right|}{\sqrt{\dfrac{n_{i-1}^{(1)}\,n_{i-1}^{(2)}}{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}}:\sqrt{\dfrac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}}}=$$

$$=\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}\sqrt{\frac{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}{(n_i^{(1)}-1)\,(n_i^{(2)}-1)}}\left|\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right| \quad (i=1,2,\ldots,s\,;\ j= \tag{5.9}$$

$1,2,\ldots,s-1)$.

În baza lui (5.8), repartiţia limită, pentru $n^{(1)}\to\infty$ şi $n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0$, a vectorului aleator ale cărui componente sînt variabilele de la numărătorul raportului din partea întîia a lui (5.9) este o distribuţie normală cu $s\,(s-1)$ dimensiuni.

Pe de altă parte, vectorul aleator ale cărui componente sînt variabilele de la numitorul aceluiaşi raport tinde în probabilitate, pentru $n^{(1)}\to\infty$ şi $n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0$, către vectorul avînd drept componente constantele $\sqrt{p_i}>0$ $(i=1,2,\ldots,s)$.

Să aplicăm teorema din lucrarea [1] deja menţionată, care afirmă că dacă funcţiile de repartiţie ale şirului de vectori aleatori $\{X_1^{(n)}, X_2^{(n)},\ldots, X_r^{(n)}\}_{n=1,2,\ldots}$ tind, pentru $n\to\infty$, către o funcţie de repartiţie determinată $F\,(x_1, x_2,\ldots, x_r)$ şi dacă componentele fiecărui vector din şirul de vectori aleatori $\{Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)},\ldots, Y_r^{(n)}\}_{n=1,2,\ldots}$ tind respectiv în probabilitate, pentru $n\to\infty$, către constantele $c_i>0$ $(i=1,2,\ldots,r)$, atunci funcţiile de repartiţie ale şirului de vectori aleatori $\{X_1^{(n)}/Y_1^{(n)}, X_2^{(n)}/Y_2^{(n)},\ldots, X_r^{(n)}/Y_r^{(n)}\}_{n=1,2,\ldots}$ tind, pentru $n\to\infty$, către funcţia de repartiţie $F\,(c_1x_1, c_2x_2,\ldots, c_rx_r)$ în orice punct de continuitate al funcţiei $F\,(x_1, x_2, \ldots, x_r)$.

De aici rezultă că

$$\lim_{n^{(1)}\to\infty,\ n^{(1)}/n^{(2)}\to c\neq 0} P\left(\frac{n^{(1)}\,n^{(2)}}{n^{(1)}+n^{(2)}}\sqrt{\frac{n_i^{(1)}+n_i^{(2)}-2}{n_{i-1}^{(1)}\,n_{i-1}^{(2)}}}\left|\frac{n_{ij}^{(1)}}{n_i^{(1)}-1}-\frac{n_{ij}^{(2)}}{n_i^{(2)}-1}\right|<\right.$$

$$\left.<\lambda'_{ij}\ (i=1,2,\ldots,s\,;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s(s-1)}{2}}\left(\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s}p_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}\int_H e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{p_{ij}}x'_{ij}}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s-1}\mathrm{d}x'_{ij}, \tag{5.10}$$

$$\text{unde } H=\left\{|x'_{ij}|<\lambda'_{ij},\ \frac{x'_{i1}+x'_{i2}+\ldots+x'_{is}}{\sqrt{p_i}}=\right.$$

$$\left.=0\ (i=1,2,\ldots,s\,;\ j=1,2,\ldots,s-1)\right\}.$$

În general, deşi probabilităţile de trecere p_{ij} $(i = 1,2,\ldots, s\ ;\ j = 1,2,\ldots,s-1)$ nu sînt cunoscute, totuşi ele pot fi estimate din datele de observaţie corespunzătoare şi ale altor observaţii anterioare, care pot fi mult mai numeroase decît acelea furnizate de cele două selecţii.

Astfel, probabilităţile respective pot fi estimate cu ajutorul frecvenţelor f_{ij}/f_i $(i = 1,2, \ldots, s;\ j = 1,2,\ldots,s-1)$, unde f_i şi f_{ij} — a căror semnificaţie este aceeaşi ca şi a lui n_i şi n_{ij} — se referă acum la totalul observaţiilor anterioare.

În acest caz, probabilităţile de trecere care intervin în integrala din (5.10) pot fi înlocuite cu un prag de siguranţă suficient de mare prin frecvenţele corespunzătoare.

Primită la redacţie la 3 octombrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. D. Firescu, G. Theiler, *Asupra unor probleme de inferenţă statistică relativ la lanţurile Markov simple, finite şi omogene.* St. cerc. mat., **17**, 1 (1965).
2. P. Billinghslley, *Statistical Methods in Markov Chains.* The Annals of Mathematical Statistics, **32**, 1 (1961).
3. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications.* vol. I , 2^d ed. New York, 1957.
4. S. S. Wilks, *Mathematical Statistics.* New York, 1962.

ASUPRA CURBELOR IZOTROPE[1]

DE

RADU ROŞCA

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

Triedrul ciclic $\{T_c\}$ imaginat de E. Cartan [1] pentru curbele izotrope din spaţiul obişnuit, permite un studiu mai aprofundat al acestora. În această lucrare, cu ajutorul unui $\{T_c\}$ vom defini cîteva elemente geometrice legate de o curbă izotropă (A), şi felul cum ele se leagă cu transformarea asimptotică a curbei (A) într-o curbă de aceeaşi definiţie.

1. Un triedru ciclic $\{T_c\} = \{\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3\}$ [1] de primul ordin este format de vectori izotropi $\vec{I}_1, \vec{I}_3$ şi de un vector neizotrop $\vec{I}_2$, normat, astfel încît $(\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3) = i \; (i = \sqrt{-1})$.

Din tablourile

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_1^2 & \vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2 & \vec{I}_1 \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{I}_2 \cdot \vec{I}_1 & \vec{I}_2^2 & \vec{I}_2 \cdot \vec{I}_3 \\ \vec{I}_3 \cdot \vec{I}_1 & \vec{I}_3 \cdot \vec{I}_2 & \vec{I}_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{I}_1 \wedge \vec{I}_2 = i\vec{I}_1, \quad \vec{I}_2 \wedge \vec{I}_3 = i\vec{I}_3, \quad \vec{I}_3 \wedge \vec{I}_1 = i\vec{I}_2 \tag{2}$$

impunînd particularizări succesive triedului $\{T_c\}$ prin *diferenţiere exterioară*, se ajunge la un triedru de ordinul trei $\{\tau_c\}$, a cărui deplasare infini-

---

[1] Versiunea în limba franceză a apărut în Revue Roumaine de mathématiques pures et ppliquées, **9**, *8* (1964).

ST. CERC. MAT. TOM. 17, NR. 3, P.335–338, BUCUREŞTI, 1965

tezimală este dată de formulele

$$d\vec{A}=ds\,\vec{I}_1,\quad d\vec{I}_1=ds\,\vec{I}_2,\quad d\vec{I}_2=ds\,(\rho\,\vec{I}_1-\vec{I}_3),\quad d\vec{I}_3=-\,ds\,\rho\,\vec{I}_2,\qquad (3)$$

unde s şi ρ sînt respectiv *pseudoarcul* şi *pseudocurbura* lui (A).

2. Acestea fiind, se defineşte curba *izotropă asociată* unei curbe dată (A), curba (A') al cărui prim vector ciclic să coincidă cu al treilea vector ciclic al lui (A).

Plecînd de la formulele

$$\vec{I}_1'=\vec{I}_3,\quad \vec{I}_2'=a_2^k\,\vec{I}_k,\quad \vec{I}_3'=a_3^k\,\vec{I}_{k'}\qquad (k=1,2,3)$$

se găseşte cu ajutorul lui (2) relaţiile

$$ds'=\rho\,d s,\qquad d s=\rho'\,d s'\qquad (3')$$

care pun în evidenţă *caracterul de reciprocitate* al celor două curbe.

În al doilea rînd, dacă $\vec{\omega}$ este vectorul de *rotaţie instantanee* (vector Darboux), se găseşte pentru curbura lui Lancret expresia :

$$|\vec{\omega}|=i\sqrt{2\rho}$$

care dă o interpretare geometrică pentru *pseudocurbura* unei curbe izotrope.

În sfîrşit, pe desfăşurabila generată de axa *pseudorectificantă* (adică suprafaţa determinată de (A) şi vectorul $\vec{\omega}$) cele două geodezice care trec prin fiecare punct *sînt respectiv paralele la curba izotropă în joc şi una din asociate.*

Cu ajutorul triedrului Favard [5] pentru studiul suprafeţelor riglate, se consideră suprafaţa riglată R_A generată de $(A.\,\vec{I}_2)$.

Se obţine astfel o clasă de curbe izotrope pentru care pseudocurbura este de forma

$$\rho=\frac{1}{(c_1 s+c_2)^2},\qquad (c_1,\,c_2=\text{const.})$$

şi pentru care R_A aparţine unui ***complex liniar special***. Dacă $\rho=\text{const.}$ suprafaţa R_A este ***elicoidul cu plan director***. Reciproca este de asemenea adevărată, ***orice elicoid cu plan director poate fi considerat ca generat de axa neizotropă a triedului*** $\{\tau_c\}$ ***corespunzător unei curbe izotrope.***

3. Fiind dată o curbă izotropă (A), ea admite ∞^2 de transformate asimptotice care să fie tot izotrope (teorema lui B. Gambier). Funcţia transformatrice α, ρ şi modulul de transformare l (în mod necesar constant) fiind legate prin relaţia :

$$\alpha^2-2\,l\left(1+\frac{d\alpha}{ds}+\rho\,l\right)=0\qquad (s=\text{pseudoarcul lui }(A))\qquad (4)$$

Am completat acest rezultat [3] și am arătat că cele două curbe în corespondență sînt *aplicabile de primul ordin.*

Cum planele osculatoare unei curbe izotrope sînt tangente la ombilicală, semnificația geometrică din cazul teoriei generale nu mai este valabilă [2]. Introducerea suprafeței $[A, I_2]$ permite să se dea una în felul următor. Să notăm cu (B) și cu $\{\tau_B\} \equiv \{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ respectiv transformata lui (A) și triedrul ciclic corespunzător lui (B).

Fie V *momentul relativ* a două generatoare omoloage $(A, \vec{I}_2)$ și $(B, \vec{E}_2)$. Făcînd calculele se găsește

$$V = (\vec{I}_2, \vec{B} - \vec{A}, \vec{E}_2) = i\,\alpha^2$$

care dă interpretarea geometrică anunțată pentru funcția transformatrice α. Cu ajutorul triedrului Favard atașat generatoarei (A, B) care descrie suprafața riglată $[A, B]$, admițînd pe (A) și (B) ca asimptotice, se obține următorul rezultat :

Dacă curba (A) este o elice izotropă ($\rho = const.$) curbele (A) și (B) sînt superpozabile, și suprafața $[A, B]$ este un elicoid făcînd parte din clasa (γ). Reciproca este de asemenea adevărată. În plus cilindrele generate de axele pseudorectifiante a două elice izotrope în corespondență asimptotică sînt paralele.

În sfîrșit, la fiecare cuplu (A) și (B) de elice izotrope în corespondență asimptotică îi corespunde un al doilea cuplu (A^*) și (B^*) bine determinat, care este în aceeași poziție reciprocă ca (A) și (B)

Punctele care descriu aceste curbe au ca expresie

$$\vec{A}^* = \vec{A} - \frac{\vec{I}_2}{\rho}, \quad \vec{B}^* = \vec{B} - \frac{\vec{F}_2}{\rho}$$

și teorema standard de permutabilitate are loc aici și pentru natura suprafețelor studiate. Într-adevăr, $(A, A - B)$ și $(A^*, A^* - B^*)$ *descriu elicoizii din clasa* (γ) *pe cînd* $(A, A - A^*)$ *și* $(B, B - B^*)$ *elicoizi de arie minimă.*

Fie atunci (A) o elice izotropă de pseudo-curbură ρ și n transformate asimptotice superpozabile B_i după modulele distincte l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dacă nu se consideră decît punctele B_i, caracterul involutiv și permutabil al acestor transformări arată că numărul total de puncte introduse este :

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

pe cînd numărul de axe este $n2^{n-1}$.

Dar în virtutea rezultatului găsit mai sus, la acest număr mai trebuie adăugat 2^n puncte transformînd pe fiecare din cele precedente după același modul $-\frac{1}{\rho}$ și numărul total de axe devine astfel $(n+1)\,2^n$.

Se poate deci enunţa următoarea teoremă :

Fiind dată o elice izotropă (A), *ea formează cu* n *transformate superpozabile după* n *module constante* l_i, *o configuraţie Möbius de* 2^{n+1} *puncte şi* $(n+1)\,2^n$ *axe. Cînd punctul* (A) *se deplasează pe curbă, configuraţia rămîne egală cu ea însăşi ;* $n\,2^n$ *din axe descriind elicoizi din clasa* (γ) *şi* 2^n *axe elicoizi de arie minimă.*

Primită la redacţie la 3 octombrie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. Elie Cartan, *La théorie des groupes finis et continus.* Gauthier-Villars, Paris, 1937.
2. Bertrand Gambier, *Courbes de Betrand et leurs transformations.* Gauthier-Villars, Paris, 1927.
3. Radu Roşca, *Transformările asimptotice ale curbelor minima cu ajutorul triedrului ciclic Cartan.* Gazeta matematică şi fizică, 1949.
4. J. Cuichard, *Les courbes de l'espace à n dimensions.* Mémorial des Sc. Math., Fasc. XXIX.
5. J. Favard, *Cours de géométrie différentielle locale.* Gauthier-Villars, Paris, 1957.
6. A. V. Pogorelov, *Differential geometry.* Noordhoff, Groningen, 1960.
7. Mauro Picone, *Intorno alle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria :* «Sulle congruenze rettilinee W». Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1915.

ASUPRA UNEI CLASE DE REPERE CENTRALE[1]

DE

RADU ROŞCA

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

Într-un spaţiu eliptic Σ_3 cînd se studiază diferitele elemente geometrice legate de curbele de torsiune constantă, este cazul de a se face o distincţie după cum această constantă este egală sau diferită de curbura spaţiului. Această remarcă conduce la studiul unei clase de *repere centrale* T_l astfel încît la cele două suprafeţe ataşate un asemenea reper, să posede respectiv un cuplu de *asimptotice-izotrope* şi altul de *asimptotice-absolute*.

O proprietate a liniilor flecnodale pune în evidenţă o subclasă de repere T'_l pentru care *cîmpul de viteze este legat de* T'_l ca şi o generare simplă a suprafeţelor din Σ_3 analoage elicoidului de arie minimă.

Instrumentul fundamental de cercetare utilizat în această lucrare este *tetraedrul autodual* ataşat unei suprafeţe reglate din Σ_3 şi *produsele exterioare de puncte* care sînt înrudite cu multivectorii lui E. Cartan.

I. Fie $T = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ un *reper central*, ale cărui vîrfuri normate depind de v. Ecuaţiile lui Blaschke pentru deplasarea infinitezimală a lui T sînt:

$$\begin{aligned} \vec{e}\,'_1 &= c\,\vec{e}_2 - a\,\vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_2 &= -\,c\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_4, \\ \vec{e}\,'_3 &= a\,\vec{e}_1 - e\,\vec{e}_4, \\ \vec{e}\,'_4 &= -\,b\,\vec{e}_1 + e\,\vec{e}_3, \end{aligned} \qquad \left(\vec{e}\,'_k = \frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_k}{\mathrm{d}\,v}\right). \tag{1}$$

---

[1] Versiunea în limba franceză a apărut în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, *3* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 339–343, BUCUREŞTI, 1965

Scalarii care figurează în (1) sînt invarianţi ai căror raporturi dau *parametrii de distribuţie* ai celor patru suprafeţe care admit pe T ca reper central.

Acestea fiind reamintite, fie $S_{34} \equiv [\vec{e}_3, \vec{e}_4]$ suprafaţa riglată generată de dreapta $(\vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Expresia parametrică a unui punct $\vec{p}$ normat se poate scrie :

$$\vec{P} = \vec{e}_4 \cos u + \vec{e}_3 \sin u,$$

de unde, utilizînd notaţia lui R. Garnier [2], deducem pentru asimptotice ecuaţia :

$$2\, a\, b \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} v} + c\, U^2 + \left(b \frac{\mathrm{d} a}{\mathrm{d} v} - a \frac{\mathrm{d} b}{\mathrm{d} v} \right) \sin u \cos u + a\, b\, e = 0. \qquad (2)$$

Ne propunem să găsim condiţia ca S_{34} să admită *asimptotice izotrope*, ceea ce ar constitui reciproca unei propoziţii stabilite de noi în [4].

Considerînd spaţiul proiectiv real P_3 al lui $\sum_3$ ca un *subspaţiu proiectiv complex*, curbele izotrope din $\sum_3$ pot fi considerate drept coamele de întoarcere a desfăşurabilelor circumscrise *absolutului* Ω care defineşte metrica spaţiului $\sum_3$. Se obţine astfel, cu ajutorul lui (1), ecuaţia :

$$\frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} v} + e = \varepsilon\, i U \; (\varepsilon + 1,\; U = a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) \qquad (3)$$

care comparată cu (2) dă condiţiile căutate :

$$e = 0, \quad a = b\, l, \quad (l = \text{const.}). \qquad (4)$$

Notînd cu T_l clasa de repere centrale caracterizate de (4), cele două puncte $\vec{i}_k$ $(k = 1,2)$, care descriu asimptoticele izotrope, au ca parametri proiectivi respectiv $\operatorname{tg} u_1 = \frac{i}{l}$, $\operatorname{tg} u_2 = -\frac{i}{l}$.

Făcînd acum *produsele exterioare de trei puncte* $(\vec{e}_k\, \vec{e}_k'\, \vec{e}_k'')$, $(k = 3,4)$, cu ajutorul formulelor (1), şi a regulii de permutare privind vîrfurile lui T_l se găseşte că cele două curbe $(\vec{e}_3)$ şi $(\vec{e}_4)$ sînt *suplimentare* şi sînt descrise de cele două mijloace ale dreptei orientate $(\vec{i}_1, \vec{i}_2)$.

Spaţiul $\sum_3$ fiind mărginit, l este în mod necesar diferit de ± 1. (Cazul ± 1 duce la *paracilindru*, care nu admite asimptotice curbilinii izotrope).

Dacă d este distanţa necesar constantă definită de produsul scalar $\vec{i}_1 \vec{i}_2$, torsiunea τ_4 a curbei $(\vec{e}_4)$ care este dată de formula

$$\tau_4 = \frac{(\vec{e}'_4 \vec{e}''_4 \vec{e}'''_4 \vec{e}_4)^{1)}}{(\vec{e}_4 \vec{e}'_4 \vec{e}''_4)}$$

are ca valoare $-i \operatorname{tg} \frac{\mathrm{d}}{2}$.

Se poate deci enunţa următoarea propoziţie :

Condiția necesară și suficientă pentru ca o suprafață riglată S din $\sum_3$ să admită asimptotice curbilinii izotrope, este ca să fie generată de binormala comună a două curbe suplimentare a căror torsiune constantă să fie necesar diferită de cea a lui $\sum_3$.

Acest rezultat duce prin corelaţie pentru suprafaţa $S_{12} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ care este ***suplimentară*** celei precedente, la ***două asimptotice situate pe absolut***. (Din punct de vedere proiectiv, ***asimptotice pătratice***).

Dacă se formează acum sistemul de ecuaţii diferenţiale ale lui Wilczynski pentru suprafaţa S_{34}, se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} &\vec{e}''_3 + p_{11} \vec{e}'_3 + p_{12} \vec{c}'_4 + q_{11} \vec{e}_3 + q_{12} \vec{e}_4 = 0 \\ &\vec{e}''_4 + p_{21} \vec{e}'_3 + p_{22} \vec{e}'_4 + q_{21} \vec{e}_3 + q_{22} \vec{e}_4 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

şi se găseşte :

$$\begin{aligned} &p_{11} = -\frac{a'}{a} = -\frac{b'}{b} = p_{22}, && p_{21} = -\frac{c}{l}, \\ &p_{12} = cl, && q_{22} = b^2, \\ &q_{11} = 0, && q_{21} = 0, \\ &\left(a' = \frac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, v},\ b' = \frac{\mathrm{d}\, b}{\mathrm{d}\, v}\right). \end{aligned} \qquad (5)$$

Punctele flecnadale pe fiecare generatoare se obţin prin factorizarea *covariantului C a lui Wilczynski* [5], care în cazul de faţă devine :

$$C = \frac{2\, l \delta}{b} \vec{e}_4^{\,2} + 4\, b^2 (1 - l^2)\, \vec{e}_4\, \vec{e}_3 + \frac{2\, \delta}{lb} \vec{e}_3^{\,2}$$

($\vec{e}_3^{\,2}$ etc. n-au aici semnificaţia de *produs interior*), unde

$$\delta = c'\, b - c\, b'.$$

Discuția liniilor flecnodale duce la considerarea a două cazuri, şi anume :

1°. $c = 0$, se obține, cum se știe, suprafețele riglate de arie minima R_m, ale căror linii de stricțiune se reduc la cele *două axe* ale suprafeței.

---

[1]) Paranteza de la numărător exprimă produsul a patru puncte, care este o cantitate scalară.

Făcînd produsele interioare, exterioare şi de patru puncte ale lui $\vec{p}$ şi derivatele sale succesive pentru $u = \text{const.}$, se găseşte, pentru cele două curburi ale lui $(\vec{p})$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} &= \frac{(\vec{p}''\,\vec{p}'\,\vec{p})^2}{\vec{p}'^2} = \frac{(l^2-1)^2\,\mathrm{tg}^2\,u}{(1+l^2\,\mathrm{tg}^2\,u)^2} \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{(\vec{p}'\,\vec{p}''\,\vec{p}'''\,\vec{p})}{(\vec{p}''\,\vec{p}'\,\vec{p})^2} = -\,\frac{l}{l^2\sin^2 u + \cos^2 u}. \end{aligned} \tag{6}$$

Deducem de aci că toate asimptoticele curbilinii ale lui R_m fiind elici circulare din $\sum_3$, acest lucru este valabil şi pentru curbele $(\vec{i}_1)$, $(\vec{i}_2)$, pe care le numim *elici izotrope eliptice.*

Reciproca este de asemenea adevărată : *Orice cuplu de elici izotrope eliptice, în corespondenţă* asimptotică, determină cea mai generală suprafaţă R_m. Din consideraţii dualistice (se ştie [3] că suplimentarea unei suprafeţe minima din $\sum_3$ este de aceeaşi definiţie) rezultă că orice suprafaţă R_m posedă şi un *cuplu de asimptotice absolut.* În sfîrşit celelalte două suprafeţe ataşate reperului T_l, anume S_{13}, S_{24}, descriu în cazul de faţă desfăşurabilele circumscrise absolutului Ω.

Consideraţia unui tetraedru T_a autodual format din patru puncte fixe $\vec{a}_k (k = 1,2,3,4)$ permite stabilirea următoarei teoreme :

Cea mai generală suprafaţă minimă riglată din $\sum_3$, *(suprafaţă* R_m*) este generată de o dreaptă* G *care întîlneşte două axe fixe* D_1, D_2 *şi astfel încît vitezele scalare ale punctelor de incidenţă respective să fie într-un raport constant* k. *În plus, tetraedrul autodual care se poate construi pe cele două axe* D_1, D_2 *pune în joc şase suprafeţe* R_m *asociate în perechi suplimentare.*

2. $\delta = 0$, se poate deci scrie $a = k_1\,c$, $b = k_2\,c$, k_1 şi k_2 fiind două constante, şi cu ajutorul unei cvadraturi să se aleagă o nouă variabilă ω astfel ca $\mathrm{d}\omega = c\,\mathrm{d}v$.

În aceste condiţii, calculul coeficienţilor p_{ik} şi a *argumentelor* u_{ik}, v_{ik} şi ω_{ik}, care apar în expresia *semiinvariaţilor sistemului* (A), dă :

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= \frac{k_1}{k_2},\ q_{11} = k_1^2,\ q_{12} = 0,\ p_{11} = 0, \\ p_{21} &= -\frac{k_2}{k_1},\ q_{22} = k_2^2,\ q_{21} = 0,\ p_{22} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$u_{12} = 0 = u_{21},\ v_{12}\,\omega_{21} - v_{21}\,\omega_{12} = 0. \tag{8}$$

Din (2) rezultă anularea invariatului diferenţial bine cunoscut de *greutate 9* [5]:

$$\Omega_9 = \begin{vmatrix} u_{11} - u_{22} & u_{12} & u_{21} \\ v_{11} - v_{22} & v_{12} & v_{21} \\ \omega_{11} - \omega_{22} & \omega_{12} & \omega_{21} \end{vmatrix} \tag{9}$$

care exprimă că S_{34} *aparține unui complex liniar fix*, ceea ce are drept consecință (conform teoriei generale a sistemului (A)) că aceeași proprietate să aibă loc și pentru suprafața suplimentară.

Ecuațiile (7) avînd în cazul de față toți coeficienți constanți, se știe că orice punct $\vec{m}$ invariabil legat reperului T'_l corespunzător, descrie o elice circulară din Σ_3 cu o *viteză scalară* constantă. Punctele fixe ale mișcării lui T'_l sînt *punctele absolut* de forma $\vec{m} = \vec{m}_1 + i\,\vec{m}_2$ ($\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$, reale) definite de relația

$$\vec{m}' = s\,\vec{m}. \tag{10}$$

Coeficienții ecuației bipătrate în s care rezultă din (10) fiind

$$H = 1 + k_1^2,\ L = k_2^2,\ K = -\,k_1 k_2\,,$$

se găsește că cele două puncte $\vec{m}_1^{(1)}$, $\vec{m}_2^{(1)}$ care determină axa $D^{(1)}$ corespunzătoare rădăcinilor $\pm\, i\, 6^{(1)}$ au ca expresie

$$\begin{aligned} \vec{m}_1^{(1)} &= \frac{1}{(k_1 - \sigma^{(1)2})^2 + k_1^2}\left[(k_1^2 - \sigma^{(1)2})\,\vec{e}_2 + k_1\,\vec{e}_3\right], \\ \vec{m}_2^{(1)} &= \frac{1}{(\sigma^{(1)2} - 1 - k_1^2)^2 + k_2^2}\left[-\,k_2\,\vec{e}_1 + (\sigma^{(1)2} - 1 - k_1^2)\vec{e}_4\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Aceste două puncte determină axa $D^{(1)}$ a mișcării, iar expresiile punctelor $m_j^{(2)}$, $(j = 1{,}2)$ care determină a doua axă $D^{(2)}$ a mișcării se deduc din (11) înlocuind pe $\sigma^{(1)}$ cu $\sigma^{(2)}$. Dar $D^{(1)}$ și $D^{(2)}$ sînt suplimentare, și cum mișcarea lui T'_l este cu cîmp de viteze constant, rezultă, în virtutea generării suprafețelor R_m enunțat anterior, că S_{23} și S_{14} sînt suprafețe R_m. Vom numi aceste suprafețe *suprafețele adjuncte* reperului considerat. Se poate în final enunța următoarea teoremă :

Dacă liniile de stricțiune ale suprafețelor nedesfășurabile unui reper central T_l coincid cu liniile flecnodale (presupuse curbilinii), cîmpul de viteze este legat lui T_l iar cele două suprafețe adjuncte ale lui T_l sînt două suprafețe R_m, avînd drept axe pe cele două axe ale mișcării.

În plus, cele două *suprafețe nedesfășurabile de la care s-a plecat fac parte dintr-un complex liniar, avînd drept curbe ale complexului, respectiv asimptoticele izotrope și asimptoticele-absolut.*

Primită la redacție la 18 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bianchi, *Lezzioni di Geometria differentiale*. vol. II, part. II Bologna Zanichelli, 1927.
2. K. S. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry*. University of Toronto Press, 1956
3. Réné Garnier, *Géométrie et Cinématique Cayleyennes*. Gauthier Villars, Paris, 1951.
4. R. Roșca, *Transformations asymptotiques des courbes de l'éspace elliptique*. Journal de Math. pures et appliquées (1939)
5. S. Wilczynski, *Projective differential Geometry*, Chelsea Company, New York, 1910.

FUNCŢII MONOGENE PE SPAŢII RIEMANN

II. FUNCŢII DEFINITE PE O ALGEBRĂ CU BAZA INFINITĂ ŞI ECUAŢIE CARACTERISTICĂ $1+\theta^2+\varphi^2=0$ [1]

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

În algebra asociativă şi comutativă A_∞, de elemente ale bazei φ^n, $\theta\varphi^n$, n întreg, $\varphi^0=1$, cu legătura $1+\theta^2+\varphi^2=0$, se consideră funcţia

$$f(x,y,z;\theta,\varphi)=\sum_{-\infty}^{+\infty}[P_n(x,y,z)+\theta Q_n(x,y,z)]\varphi^n$$

şi forma diferenţială

$$\omega=\alpha_1\mathrm{d}x+\alpha_2\mathrm{d}y+\alpha_3\mathrm{d}z+\theta(\beta_1\mathrm{d}x+\beta_2\mathrm{d}y+\beta_3\mathrm{d}z)+\varphi(\gamma_1\mathrm{d}x+\gamma_2\mathrm{d}y+\gamma_3\mathrm{d}z),$$

cu P_n, $Q_n\in C^1$ şi $\alpha_i(x,y,z)$, $\beta_i(x,y,z)$, $\gamma_1(x,y,z)\in C^\circ$.

Condiţiile de monogeneitate se obţin anulînd produsul exterior $\omega\,\mathrm{d}f=0$. Se arată în continuare că $P_n(x,y,z)$ pentru orice n verifică o aceeaşi ecuaţie diferenţială de ordinul patru cel mult. Acelaşi rezultat şi pentru Q_n. Se stabilesc proprietăţi ale funcţiei hipercomplexe $f(x,y,z;\theta,\varphi)$.

1. În algebra asociativă şi comutativă A_∞, de elemente ale bazei

$$\varphi^n,\ \theta\varphi^n,\quad n=0,-1,+1,\dots,-k,k,\dots,\ \varphi^\circ=1, \tag{1}$$

cu legătura

$$1+\theta^2+\varphi^2=0, \tag{2}$$

să considerăm funcţia

$$f(x,y,z;\theta,\varphi)=\sum_{-8}^{+\infty}[P_n(x,y,z)+\theta Q_n(x,y,z)]\varphi^n \tag{3}$$

---

[1] Versiunea în limba franceză apare în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, *3* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 345–355, BUCUREŞTI, 1965

şi forma diferenţială

$$\omega = \alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y + \alpha_3\,\mathrm{d}z + \theta\,(\beta_1\,\mathrm{d}x + \beta_2\,\mathrm{d}y + \beta_3\,\mathrm{d}z) + \\ + \varphi\,(\gamma_1\,\mathrm{d}x + \gamma_2\,\mathrm{d}y + \gamma_3\,\mathrm{d}z), \tag{4}$$

cu P_n , $Q_n \in C^1$ şi $\alpha_i(x, y, z)$, $\beta_i(x, y, z), \gamma_i(x, y, z) \in C^0$.

Teorema 1.1. *Produsul exterior*

$$\omega \cdot \mathrm{d}f$$

este nul dacă funcţiile P_n, Q_n verifică sistemul infinit de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi, liniar

$$\begin{aligned}
&-\alpha_1\frac{\partial P_n}{\partial y} + \alpha_2\frac{\partial P_n}{\partial x} + \beta_1\left(\frac{\partial Q_n}{\partial y} + \frac{\partial Q_{n-2}}{\partial y}\right) - \beta_2\left(\frac{\partial Q_n}{\partial x} + \frac{\partial Q_{n-2}}{\partial x}\right) - \\
&\qquad - \gamma_1\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} + \gamma_2\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} = 0, \\
&-\alpha_2\frac{\partial P_n}{\partial z} + \alpha_3\frac{\partial P_n}{\partial y} + \beta_3\left(\frac{\partial Q_n}{\partial z} + \frac{\partial Q_{n-2}}{\partial z}\right) - \beta_3\left(\frac{\partial Q_n}{\partial y} + \frac{\partial Q_{n-2}}{\partial y}\right) - \\
&\qquad - \gamma_2\frac{\partial P_{n-1}}{\partial z} + \gamma_3\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} = 0, \\
&-\alpha_3\frac{\partial P_n}{\partial x} + \alpha_1\frac{\partial P_n}{\partial z} + \beta_3\left(\frac{\partial Q_n}{\partial x} + \frac{\partial Q_{n-2}}{\partial x}\right) - \beta_1\left(\frac{\partial Q_n}{\partial z} + \frac{\partial Q_{n-2}}{\partial z}\right) - \\
&\qquad - \gamma_3\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + \gamma_1\frac{\partial P_{n-1}}{\partial z} = 0, \\
&-\beta_1\frac{\partial P_n}{\partial y} + \beta_2\frac{\partial P_n}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial Q_n}{\partial y} + \alpha_2\frac{\partial Q_n}{\partial x} - \gamma_1\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} + \gamma_2\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial x} = 0, \\
&-\beta_2\frac{\partial P_n}{\partial z} + \beta_3\frac{\partial P_n}{\partial y} - \alpha_2\frac{\partial Q_n}{\partial z} + \alpha_3\frac{\partial Q_n}{\partial y} - \gamma_2\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial z} + \gamma_3\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} = 0, \\
&-\beta_3\frac{\partial P_n}{\partial x} + \beta_1\frac{\partial P_n}{\partial z} - \alpha_3\frac{\partial Q_n}{\partial x} + \alpha_1\frac{\partial Q_n}{\partial z} - \gamma_3\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial x} + \gamma_1\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Demonstraţie. Se calculează diferenţiala lui $f\ (x, y, z\,;\ \theta,\ \varphi)$ şi se înmulţeşte cu ω după regulele produsului exterior.

2. Din primele trei ecuații (5) eliminînd pe P_n, P_{n-1} sau Q_n și Q_{n-2} obținem

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x} & \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y} & \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial z} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_n}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_{n-2}}{\partial x} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial y} + \dfrac{\partial Q_{n-2}}{\partial y} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial z} + \dfrac{\partial Q_{n-2}}{\partial z} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_n}{\partial x} & \dfrac{\partial P_n}{\partial y} & \dfrac{\partial P_n}{\partial z} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_n}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_{n-2}}{\partial x} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial y} + \dfrac{\partial Q_{n-2}}{\partial y} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial z} + \dfrac{\partial Q_{n-2}}{\partial z} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_n}{\partial x} & \dfrac{\partial P_n}{\partial y} & \dfrac{\partial P_n}{\partial z} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x} & \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y} & \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial z} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0;$$

din ultimele trei ecuații din (5) eliminînd pe P_n, Q_n sau Q_{n-1} obținem

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_n}{\partial x} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial y} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial z} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial x} & \dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} & \dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial z} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_n}{\partial x} & \dfrac{\partial P_n}{\partial y} & \dfrac{\partial P_n}{\partial z} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial x} & \dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} & \dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial z} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_n}{\partial x} & \dfrac{\partial P_n}{\partial y} & \dfrac{\partial P_n}{\partial z} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_n}{\partial x} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial y} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial z} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0,$$

relații care sînt echivalente cu condițiile (5).

3. Dacă introducem operatorul

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = (\alpha, \beta, \nabla),$$

atunci relaţiile de la aliniatul precedent se scriu

$$\begin{aligned}
&(\gamma, \alpha, \nabla P_{n-1}) + (\alpha, \beta, \nabla (Q_n + Q_{n-2})) = 0,\\
&(\gamma, \alpha, \nabla P_n) + (\beta, \gamma, \nabla (Q_n + Q_{n-2})) = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha, \beta, \nabla P_n) = (\beta, \gamma, \nabla P_{n-1}),\\
&(\alpha, \beta, \nabla Q_n) = (\beta, \gamma, \nabla Q_{n-1}),
\end{aligned} \tag{6'}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha, \beta, \nabla P_n) = (\gamma, \alpha, \nabla Q_{n-1}),\\
&(\beta, \gamma, \nabla P_n) = (\gamma, \alpha, \nabla Q_n),
\end{aligned} \tag{6''}$$

formă sub care se vede că numai patru relaţii sînt independente, deoarece a doua relaţie din (6) şi prima relaţie din (6′) sînt consecinţe ale celorlalte.

Dacă notăm

$$\omega = \omega_x \,\mathrm{d}x + \omega_y \,\mathrm{d}y + \omega_z \,\mathrm{d}z \,,$$

atunci condiţiile (5) sînt echivalente cu

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\omega_y = \frac{\partial f}{\partial y}\,\omega_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\,\omega_z = \frac{\partial f}{\partial z}\,\omega_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\,\omega_x = \frac{\partial f}{\partial x}\,\omega_z,$$

iar dacă ω este o diferenţială totală, relaţiile (6), (6′), (6″) sînt condiţiile de monogeneitate în sensul lui V. S. Feodorov.

4. *a*) Dacă

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 1 \;, \quad \alpha_2 = 0 \;, \quad \alpha_3 = 0,\\
&\beta_1 = 0 \;, \quad \beta_2 = 1 \;, \quad \beta_3 = 0,\\
&\gamma_1 = 0 \;, \quad \gamma_2 = 0 \;, \quad \gamma_3 = 1,
\end{aligned}$$

sistemul (5) se reduce la

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\partial P_{n+1}}{\partial z} = \frac{\partial Q_n}{\partial y},\\
&\frac{\partial Q_n}{\partial z} = \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial x},\\
&\frac{\partial P_n}{\partial y} = -\frac{\partial Q_n}{\partial x} - \frac{\partial Q_{n-2}}{\partial x},
\end{aligned} \tag{7}$$

care sînt condiţiile de monogeneitate în cazul algebrei infinite asociate ecuaţiei lui Laplace [1], [2]. Funcţiile P_n, Q_n care verifică sistemul (7) sînt soluţii ale ecuaţiei lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

b) Dacă

$$\alpha_1 = \alpha(x), \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0,$$
$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \beta(y), \quad \beta_3 = 0,$$
$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma(z),$$

atunci funcţiile P_n, Q_n sînt soluţii ale ecuaţiei

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0.$$

c) Dacă formele diferenţiale

$$\alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y + \alpha_3\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\alpha^*,$$
$$\beta_1\,\mathrm{d}x + \beta_2\,\mathrm{d}y + \beta_3\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\beta^*,$$
$$\gamma_1\,\mathrm{d}x + \gamma_2\,\mathrm{d}y + \gamma_3\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\gamma^*$$

sînt diferenţiale totale, atunci componentele P_n, Q_n sînt soluţii ale ecuaţiei cu derivate parţiale ce rezultă din ecuaţia lui Laplace în urma transformării

$$u = \alpha^*(x, y, z) \quad , \quad v = \beta^*(x, y, z) \quad , \quad w = \gamma^*(x, y, z), \tag{8}$$

anume

$$(\beta, \gamma, \nabla)\frac{(\beta, \gamma, \nabla\Phi)}{(\alpha, \beta, \gamma)} + (\gamma, \alpha, \nabla)\frac{(\gamma, \alpha, \nabla\Phi)}{(\alpha, \beta, \gamma)} + (\alpha, \beta, \nabla)\frac{(\alpha, \beta, \nabla\Phi)}{(\alpha, \beta, \gamma)} = 0. \tag{9}$$

d) Dacă există $\mu \in C^1$ astfel ca

$$\mu(\alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y + \alpha_3\,\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\alpha^{**},$$
$$\mu(\beta_1\,\mathrm{d}x + \beta_2\,\mathrm{d}y + \beta_3\,\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\beta^{**},$$
$$\mu(\gamma_1\,\mathrm{d}x + \gamma_2\,\mathrm{d}y + \gamma_3\,\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\gamma^{**},$$

P_n şi Q_n verifică ecuaţia cu derivate parţiale

$$\begin{aligned}(\beta, \gamma, \nabla)\frac{1}{\mu}\,\frac{(\beta, \gamma, \nabla\Phi)}{(\alpha, \beta, \gamma)} + (\gamma, \alpha, \nabla)\frac{1}{\mu}\,\frac{(\beta, \gamma, \nabla\Phi)}{(\alpha, \beta, \gamma)} &+ \\ + (\alpha, \beta, \nabla)\frac{1}{\mu}\,\frac{(\alpha, \beta, \nabla\Phi)}{(\alpha, \beta, \gamma)} &= 0\end{aligned} \tag{10}$$

Aceste rezultate se verifică uşor observînd că în urma unei transformări (8) operatorii $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ se înlocuiesc cu

$$\frac{(\beta, \gamma, \nabla)}{(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad \frac{(\gamma, \alpha, \nabla)}{(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad \frac{(\alpha, \beta, \nabla)}{(\alpha, \beta, \gamma)},$$

respectiv.

5. Sistemul (5) conduce la ecuațiile de ordinul doi

$$
\begin{aligned}
(\beta, \gamma, \nabla) \frac{(\beta, \gamma, \nabla P_n)}{(\alpha, \beta, \gamma)} + (\gamma, \alpha, \nabla) \frac{(\gamma, \alpha, \nabla P_n)}{(\alpha, \beta, \gamma)} + (\alpha, \beta, \nabla) \frac{(\alpha, \beta, \nabla P_n)}{(\alpha, \beta, \gamma)} = \\
= (\nabla Q_n) \left[(\beta, \gamma, \nabla) \frac{\gamma \times \alpha}{(\alpha, \beta, \gamma)} - (\gamma, \alpha, \nabla) \frac{\beta \times \gamma}{(\alpha, \beta, \gamma)} \right] + \qquad (11) \\
+ (\nabla Q_{n-1}) \left[(\alpha, \beta, \nabla) \frac{\gamma \times \alpha}{(\alpha, \beta, \gamma)} - (\gamma, \alpha, \nabla) \frac{\alpha \times \beta}{(\alpha, \beta, \gamma)} \right]
\end{aligned}
$$

și

$$
\begin{aligned}
(\beta, \gamma, \nabla) \frac{(\beta, \gamma, \nabla Q_n)}{(\alpha, \beta, \gamma)} + (\gamma, \alpha, \nabla) \frac{(\gamma, \alpha, \nabla Q_n)}{(\alpha, \beta, \gamma)} + (\alpha, \beta, \nabla) \frac{(\alpha, \beta, \nabla Q_n)}{(\alpha_1 \beta, \gamma)} = \\
= (\nabla P_n) \left[(\gamma, \alpha, \nabla) \frac{\beta \times \gamma}{(\alpha, \beta, \gamma)} - (\beta, \gamma, \nabla) \frac{\gamma \times \alpha}{(\alpha, \beta, \gamma)} \right] + \qquad (11') \\
+ (\nabla Q_{n-1}) \left[(\alpha, \beta, \nabla) \frac{\beta \times \gamma}{(\alpha, \beta, \gamma)} - (\beta, \gamma, \nabla) \frac{\alpha \times \beta}{(\alpha, \beta, \gamma)} \right],
\end{aligned}
$$

unde am notat $\alpha \times \beta$ produsul vectorial al vectorilor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ și $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, deci

$$\alpha \times \beta = (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \; \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1, \beta_3 \;, \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1),$$

iar

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Se observă că ecuația (11) conține numai derivatele de ordinul întîi ale funcțiilor Q_n și Q_{n-1}.

Avem următoarea

TEOREMA 5.1. *Operatorii de ordinul doi ce intervin în (11) sau (11') sînt de tip eliptic.*

Demonstrație. Se vede că operatorii de ordinul doi ce intervin în (11) și (11') sînt identici. Dacă notăm cu λ_{ij}, coeficienții termenilor $\frac{\partial^2 P_n}{\partial u_i \, \partial u_j}$ $(u_1 = x, \; u_2 = y, \; u_3 = z)$, ce intervin în ecuația (8), avem

$$
\begin{aligned}
\lambda_{11} &= (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2)^2 + (\gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3)^2 + (\beta_3 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_3)^2, \\
\lambda_{22} &= (\beta_1 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_1)^2 + (\gamma_1 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_1)^2 + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1)^2, \\
\lambda_{33} &= (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^2 + (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)^2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2, \\
\lambda_{21} &= \lambda_{12} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2)(\beta_1 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_1), \\
\lambda_{32} &= \lambda_{23} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\beta_1 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_1)(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1), \\
\lambda_{13} &= \lambda_{31} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)(\beta_2 \gamma_3 - \beta_2 \gamma_2),
\end{aligned}
$$

şi forma patratică $\lambda_{ij}\,\mu_i\,\mu_j$ este pozitiv definită, deoarece

$$\lambda_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} > 0\,, \quad \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Se observă că ecuaţia caracteristicilor ecuaţiei de ordinul doi (11)

$$\lambda_{ij}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u_j} = 0\ ,\ i = 1, 2, 3,$$

are coeficienţii λ_{ij} obţinuţi în modul următor. Dacă se consideră matricea A_{ij} formată cu minorii de ordinul doi ai matricei

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{Vmatrix},$$

λ_{ij} sînt coeficienţii formei patratice

$$(A_{11}\,\mathrm{d}x + A_{12}\,\mathrm{d}y + A_{13}\,\mathrm{d}z)^2 + (A_{21}\,\mathrm{d}x + A_{22}\,\mathrm{d}y + A_{23}\,\mathrm{d}z)^2 + \\ + (A_{31}\,\mathrm{d}x + A_{32}\,\mathrm{d}y + A_{33}\,\mathrm{d}z)^2.$$

Din teoremă se mai deduce că natura operatorului (11) nu depinde de funcţiile α_i, β_i, γ_i, ci de structura algebrei A_∞, adică de ecuaţia caracteristică $1 + \theta^2 + \varphi^2 = 0$.

6. Avem următoarea

TEOREMA 6.1. *Funcţiile P_n, pentru orice n întreg, verifică o aceeaşi ecuaţie cu derivate parţiale de ordin $\leqslant 4$.*

Demonstraţie. *a*) Din prima ecuaţie (6″) şi ultima ecuaţie (6′) determinăm pe $\dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial y}$;

$$\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial x} = \frac{\gamma_1}{\gamma_3}\,\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial z} + \lambda, \quad \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} = \frac{\gamma_2}{\gamma_3}\,\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial z} + \mu, \ \gamma_3 \neq 0,$$

unde λ şi μ nu conţin decît derivatele lui P_n şi Q_n.

Dacă înlocuim derivatele $\dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial y}$ în (11), coeficientul lui $\dfrac{\partial Q_{n-1}}{\partial z}$ este

$$\frac{\gamma}{\gamma_3}\left[(\alpha, \beta, \nabla)\,\frac{\gamma\times\alpha}{(\alpha, \beta, \gamma)} - (\gamma, \alpha, \nabla)\,\frac{\alpha\times\beta}{(\alpha, \beta, \gamma)}\right]$$

şi acest coeficient este nul. În adevăr,

$$\frac{\gamma}{\gamma_3}\,(\alpha, \beta, \nabla)\,\frac{\gamma\times\alpha}{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\gamma}{\gamma_3}\,\frac{1}{(\alpha, \beta, \gamma)}\,(\alpha, \beta, \nabla)(\gamma\times\alpha)$$

şi

$$-\frac{\gamma}{\gamma_3}(\gamma,\alpha,\nabla)\frac{\alpha\times\beta}{(\alpha,\beta,\gamma)}=\frac{1}{\gamma_3}\,\frac{1}{(\alpha,\beta,\gamma)}(\gamma,\alpha,\nabla)(\alpha,\beta,\gamma)-$$

$$-\frac{\gamma}{\gamma_3}\,\frac{1}{(\alpha,\beta,\gamma)}(\gamma,\alpha,\nabla)(\alpha\times\beta)=\frac{\alpha\times\beta}{\gamma_3}\,\frac{1}{(\alpha,\beta,\gamma)}\cdot(\gamma,\alpha,\nabla)\,\gamma.$$

Avem şi

$$\gamma\,(\alpha,\beta,\nabla)\,(\gamma\times\alpha)=-\,(\gamma\times\alpha)\,(\alpha,\beta,\nabla)\,\gamma,$$

însă

$$(\alpha\times\beta)\,(\gamma,\alpha,\nabla)\,\gamma=(\gamma\times\alpha)\,(\alpha,\beta,\nabla)\,\gamma,$$

prin urmare coeficientul lui $\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial z}$ este nul.

b) Ţinînd seamă de acest rezultat, urmează că după înlocuirea de mai sus relaţia (11) nu conţine decît derivatele lui P_n şi Q_n.

Dacă considerăm ecuaţia (11) astfel modificată şi ultima ecuaţie (6″), punînd în evidenţă numai derivatele parţiale ale lui Q_n, aceste ecuaţii se scriu

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_n}{\partial x}&=a\frac{\partial Q_n}{\partial y}+b\\ \frac{\partial Q_n}{\partial x}&=c\frac{\partial Q_n}{\partial y}+d\frac{\partial Q_n}{\partial z}+e,\end{aligned}\tag{12}$$

unde b depinde de derivatele de ordinul întîi şi doi ale lui P_n, e conţine numai derivatele de ordinul întîi ale lui P_n, iar a,c,d sînt independente de P_n şi de derivatele sale.

Sistemul (12) se mai scrie

$$\frac{\partial Q_n}{\partial y}=\frac{d}{a-c}\,\frac{\partial Q_n}{\partial z}+\frac{e-b}{a-c},$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial x}=\frac{ad}{a-c}\,\frac{\partial Q_n}{\partial z}+\frac{ae-bc}{a-c},\quad a\neq c,$$

sau

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_n}{\partial x}&=m\frac{\partial Q_n}{\partial z}+n,\\ \frac{\partial Q_n}{\partial y}&=p\frac{\partial Q_n}{\partial z}+q.\end{aligned}\tag{13}$$

Dacă derivăm prima ecuaţie din (13) în raport cu y şi pe a doua în raport cu x, obţinem, egalîndu-le,

$$m\frac{\partial^2 Q_n}{\partial y\partial z}+m'_y\frac{\partial Q_n}{\partial z}+n'_y=p\frac{\partial^2 Q_n}{\partial x\partial z}+p'_x\frac{\partial Q_n}{\partial z}+q'_x. \qquad (14)$$

Derivînd din nou ecuaţiile (13) în raport cu z şi înlocuindu-le în (14) avem

$$m\left(p\frac{\partial^2 Q_n}{\partial z^2}+p'_z\frac{\partial Q_n}{\partial z}+q'_z\right)+m'_y\frac{\partial Q_n}{\partial z}+n'_y=$$

$$=p\left(m\frac{\partial^2 Q_n}{\partial z^2}+m'_z\frac{\partial Q_n}{\partial z}+n'_z\right)+p'_x\frac{\partial Q_n}{\partial z}+q'_x$$

sau

$$\frac{\partial Q_n}{\partial z}=\frac{pn'_z+q'_x-mp'_z-n'_y}{mp'_z+m'_y-pm'_z-p'_x}, \qquad (15)$$

dacă

$$mp'_z+m'_y-pm'_z-p'_x\neq 0,$$

relaţie care nu depinde de P_n şi nici de derivatele sale.

Cu acest rezultat sistemul (13) se scrie

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_n}{\partial x}&=m\frac{\partial Q_n}{\partial z}+n,\\ \frac{\partial Q_n}{\partial y}&=p\frac{\partial Q_n}{\partial z}+q,\\ \frac{\partial Q_n}{\partial z}&=r,\end{aligned} \qquad (16)$$

unde am notat cu r partea a doua a ecuaţiei (15). Eliminînd pe Q_n din (16) obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial}{\partial y}(mr+n)-\frac{\partial}{\partial x}(pr+q)=0, \qquad (17)$$

care este verificată de P_n pentru orice indice n.

Deoarece ordinul maxim al ecuaţiei (17) este dat de b şi

$$m=\frac{ad}{a-c},\quad n=\frac{ae-bc}{a-c},\quad p=\frac{d}{a-c},\quad q=\frac{e-b}{a-c},\quad (a\neq c),$$

urmează că ecuaţia (17) este cel mult de ordinul patru.

Teorema este demonstrată.

7. Să considerăm forma diferenţială

$$\omega=y\,\mathrm{d}x+\theta\,z\,\mathrm{d}y+\varphi\,x\,\mathrm{d}z,$$

care nu este o diferenţială totală şi nici nu admite un factor integrant. Sistemul (5) este în acest caz

$$y\frac{\partial P_n}{\partial y}+z\frac{\partial Q_n}{\partial x}+z\frac{\partial Q_{n-2}}{\partial x}=0,$$

$$z\frac{\partial P_n}{\partial x}-y\frac{\partial Q_n}{\partial y}=0,$$

$$z\frac{\partial P_n}{\partial z}-x\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y}=0,$$

$$y\frac{\partial Q_n}{\partial z}-x\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial x}=0.$$

Ecuaţiile verificate de P_n sau Q_n sînt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}+\frac{y^2}{z^2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial P_n}{\partial z}\right]=\frac{1}{y}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}$$

şi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 Q_n}{\partial x^2}+\frac{x^2}{z^2}\frac{\partial^2 Q_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q_n}{\partial z^2}+\frac{x^2}{z^2}\frac{\partial Q_n}{\partial y}\right]=\frac{1}{x}\frac{\partial^2 Q_n}{\partial z^2};$$

ecuaţiile sînt de ordinul trei şi diferite între ele.

8. Fie

$$\omega=\alpha_1 \mathrm{d}x+\alpha_2 \mathrm{d}y+\alpha_3 \mathrm{d}z+\theta(\beta_1 \mathrm{d}x+\beta_2 \mathrm{d}y+\beta_3 \mathrm{d}z)+\varphi(\gamma_1 \mathrm{d}x+\gamma_2 \mathrm{d}y+\gamma_3 \mathrm{d}z),$$

$$f(x,y,z;\ \theta,\varphi)=\sum_{-\infty}^{+\infty}[P_n(x,y,z)+\theta\, Q_n(x,y,z)]\,\varphi^n,$$

astfel că P_n, Q_n verifică sistemul infinit de ecuaţii cu derivate parţiale (5). Dacă există o funcţie $\mu\,(x,y,z)\in C^1$ astfel ca $\mu.\omega$ să fie o diferenţială totală, următoarele teoreme se demonstrează la fel ca în [3] şi sînt valabile într-un domeniu $D\subset R^3$, unde P_n, $Q_n\in C^1$.

TEOREMA 8.1. *Diferenţiala exterioară a formei exterioare*

$$f\mu\omega$$

este nulă.

TEOREMA 8.2. *Pentru orice curbă C închisă, simplă, situată în domeniul $D\subset R^3$, în care μ, α_i, β_i, γ_i, P_n, Q_n nu au singularităţi, avem*

$$\int_C f\,\mu\,\omega=0.$$

TEOREMA 8.3. *În condiţiile din teorema 8.2 integrala*

$$\int_{AB} f\mu\omega,$$

unde AB este un arc de curbă simplă, nu depinde de drum, ci numai de capetele A şi B.

TEOREMA 8.4. *Fie $A(a,b,c)$, $B(x,y,z)$; funcţia*

$$F(x,y,z;\ \theta,\ \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} [P_n^*(x,y,z) + \theta\, Q_n^*(x,y,z)],$$

definită de integrala

$$F(x,y,z;\ \theta,\ \varphi) = \int_{AB} f\,\mu\,\omega,$$

are componentele P_n^*, Q_n^* soluţii ale sistemului (5).

În particular funcţia

$$\Omega = \int_{AB} \mu\ \omega,$$

care are numai componentele P_0^*, P_1^*, Q_0^* diferite de zero şi toate celelalte identic nule în D, este o soluţie a sistemului (5).

Primită la redacţie la 21 mai 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. MARCEL N. ROŞCULEŢ, *Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi, de ordin oarecare.* St. cerc. mat., **6**, *3–4* (1955).
2. MARCEL N. ROŞCULEŢ, *Asupra algebrei infinite asociate ecuaţiei lui Laplace.* Revue de mathématiques pures et appliquées, **3**, *2* (1958).
3. MARCEL N. ROŞCULEŢ, *Funcţii monogene pe spaţii Riemann. Funcţii monogene pe o suprafaţă în spaţiu.* St. cerc. mat., **14**, *3* (1963).

UN EXEMPLU DE SPAŢIU ARMONIC[1]

DE

CORNELIU CONSTANTINESCU
Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

Se demonstrează, cu ajutorul unui exemplu, că în teoria axiomatică a lui Brelot axioma C nu rezultă din axiomele 1,2,3.

Scopul prezentei lucrări este de a arăta că axioma C din teoria axiomatică a lui Brelot nu rezultă din axiomele 1,2,3. Mai precis, vom construi un spaţiu local compact conex cu bază numărabilă şi un fascicul de funcţii armonice pe el (adică satisfăcînd axiomele lui Brelot 1,2,3), astfel încît funcţiile constante sînt armonice şi vom arată că există un şir descrescător de potenţiale $\{p_n\}$ pe acest spaţiu astfel încît

$$\inf p_n(a) \neq \widehat{\inf p_n}(a)$$

într-un anumit punct nepolar a.

Fie R o suprafaţă riemanniană cu următoarele proprietăţi :

1) R are un singur element frontieră (în sens Kerékjártó-Stoilow) ;

2) există pe R exact două funcţii minimale neproporţionale, una dintre ele fiind constantă ;

3) funcţia Green a lui R nu tinde la 0 către frontiera ideală a lui R.

Vom nota cu R^* compactificarea Alexandroff şi cu a^* punctul lui Alexandroff al lui R. Pentru orice mulţime deschisă nevidă U a lui R vom nota cu $\mathcal{H}(U)$ mulţimea funcţiilor reale continue pe U, armonice pe $U \cap R$. Se verifică imediat că perechea $(R^*, \mathcal{H})$ satisface axiomele 1 şi 3 ale lui Brelot şi axioma 2 în toate punctele diferite de a^*. Pentru a verifica valabilitatea acestei ultime axiome în punctul a^* să luăm un domeniu G pe R^* cu frontiera ∂G conţinută în R şi analitică, care conţine

---

[1] Acest articol a apărut în limba engleză în Revue Roumaine de mathématique pures et apliquées, **10**, *3* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 357–358, BUCUREŞTI, 1965

punctul a^*. Fie f o funcție reală continuă pe ∂G și u o funcție continuă și mărginită pe G, egală cu f pe ∂G și armonică în $G \cap R$. Există un număr real α astfel încît

$$u = H_f^G + \alpha (1 - H_1^G)\,.$$

Fie a punctul din frontiera Martin a lui R, a cărui funcție Martin asociată este singulară. În toate punctele frontierei Martin diferite de a funcția u are limita egală cu α [1] (teorema 13.6) Pentru ca u să admită o limită la frontiera ideală a lui R este necesar și suficient ca u să aibă limita egală cu α și în punctul a. Întrucît funcția $\dfrac{H_f^G}{H_1^G}$ se poate extinde prin continuitate pe frontiera Martin [1] (p. 134), rezultă că u are limita α în punctul a, dacă și numai dacă α este egal cu limita lui $\dfrac{H_f^G}{H_1^G}$ în a.

Fie R_0 un disc închis al lui R și $\{R_n\}$ o exhaustiune a lui R cu domenii relativ compacte cu frontiere analitice. Pentru orice n notăm cu p_n funcția pe $R^* - R_0$ egală cu 1 pe $R^* - R_n$ și egală cu $H_{f_n}^{R_n - R_0}$ pe $R_n - R_0$, unde f_n este egal cu 1 pe ∂R_n și egal cu 0 pe ∂R_0. $\{p_n\}$ este un șir descrescător de potențiale pe $R^* - R_0$, egale cu 1 în a^*. Are loc relația

$$\inf p_n = 1 - H_1^{R-R_0}$$

pe $R - R_0$. De aici rezultă

$$\widehat{\inf p_n}(a^*) = 1 - \limsup_{b \to a^*} H_1^{R-R_0}(b) < 1.$$

Primită la redacție la 25 noiembrie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Constantinescu, A. Cornea, *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

OBSERVAŢII ASUPRA LUCRĂRILOR LUI MOTINORI GOTŌ PRIVIND ECUAŢIILE BOOLEENE[1]

DE

SERGIU RUDEANU

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

În această Notă, unele rezultate ale lui M. Gotō, privind ecuaţiile într-o algebră booleană cu două elemente, sînt generalizate pentru cazul unei algebre booleene oarecare.

În lucrarea sa [1], M. Gotō a enumerat toate soluţiile unei ecuaţii oarecare (cu mai multe necunoscute) în algebra booleană cu două elemente. În lucrarea [2], M. Gotō a stabilit două forme parametrice ale soluţiei generale (vezi de asemenea [3]) şi a folosit aceste rezultate pentru a deduce o altă formulă pentru soluţia generală, în cazul unei algebre booleene finite oarecare (nu neapărat algebra cu două elemente). În această Notă demonstrăm (teorema 1) că rezultatele obţinute în [2] în cazul algebrei cu două elemente, rămîn de asemenea valabile într-o algebră booleană oarecare B (dacă, bineînţeles, parametrii variază în B). Un corolar imediat al teoremei 1 este caracterizarea soluţiei generale prin inegalităţi recurente, dată în lucrarea noastră [7], pe cînd nu cunoşteam lucrările lui M. Gotō (vezi de asemenea [4]). În încheiere dăm o condiţie necesară şi suficientă pentru soluţia generală (vezi § 3).

§ 1. NOTAŢII ŞI DEFINIŢII

Fie B o algebră booleană arbitrară, ale cărei operaţii fundamentale (disjuncţia, conjuncţia şi negaţia) vor fi notate respectiv prin „$\cup$", prin „." sau prin juxtapunere şi prin „$^{-}$". Se ştie (vezi, de exemplu, [5], [6]) că fiecare sistem de ecuaţii şi inecuaţii booleene este echivalent cu o singură ecuaţie de forma

---

[1] Versiunea în limba engleză apare în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, *3* (1965).

$$f(x_1,\dots,x_n)=0, \tag{1}$$

unde $f(x_1,\dots,x_n)$ este o funcţie booleană (adică f este formată prin suprapuneri ale funcţiilor fundamentale „$\cup$", „.", „$^-$"). O *soluţie* (*particulară*) a ecuaţiei (1) este un vector $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ de elemente $x_i^*\in B$ $(i=1,\dots,n)$ satisfăcînd $f(x_1^*,\dots,x_n^*)=0$. Soluţia generală a aceleiaşi ecuaţii este o familie $\{f_i(t_1,\dots,t_n)\}_{i=1,\dots,n}$ de funcţii booleene satisfăcînd următoarele două condiţii :

α) Pentru $t_1^*,\dots,t_n^*\in B$, elementele

$$x_i^*=f_i(t_1^*,\dots,t_n^*) \tag{2}$$

formează o soluţie particulară a ecuaţiei (1).

β) Invers, dacă $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ este o soluţie a ecuaţiei (1), atunci există $t_1^*,\dots,t_n^*\in B$ astfel încît au loc relaţiile (2).

Spunem de asemenea că familia $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ *defineşte* soluţia generală a ecuaţiei (1). Pot exista mai multe familii de funcţii definind soluţia generală a unei singure ecuaţii (vezi §3).

Ecuaţia (1) este *compatibilă* dacă are cel puţin o soluţie particulară. Se spune că două ecuaţii compatibile sînt *echivalente* dacă au aceleaşi soluţii particulare, adică dacă există o familie de funcţii booleene definind soluţia generală a ambelor ecuaţii.

§ 2. EXTENSIUNEA FORMULELOR LUI M. GOTŌ

Pentru a rezolva ecuaţia (1), o vom exprima în forma canonică disjunctivă, adică

$$\bigcup_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} c_{\sigma_1\dots\sigma_n}x_1^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}=0, \tag{3}$$

unde σ_i sînt 0 sau 1,

$$c_{\sigma_1\dots\sigma_n}=f(\sigma_1,\dots,\sigma_n), \tag{4}$$

$x^1=x$, $x^0=\bar{x}$, iar $\bigcup\limits_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}$ înseamnă că disjuncţia se face asupra celor 2^n valori posibile ale vectorului $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$.

Se ştie (vezi, de exemplu, [5], [6]) că ecuaţia (3) este compatibilă dacă şi numai dacă

$$\prod_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} c_{\sigma_1\dots\sigma_n}=0; \tag{5}$$

vom numi această proprietate *criteriul lui Whitehead* (coeficienţii $c_{\sigma_1\dots\sigma_n}$ sînt adesea numiţi *discriminanţii* ecuaţiei).

Demonstraţia teoremei 1 de mai jos se va baza pe următoarea idee, datorită în esenţă lui M. Gotō : fie

$$c_{\tau_1\dots\tau_p} = \prod_{\sigma_{p+1},\dots,\sigma_n} c_{\tau_1\dots\tau_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_n}, \tag{6.p}$$

unde $p = 1,2,\dots, n$ şi să considerăm următorul sistem de ecuaţii :

$$\bigcup_{\tau_1,\dots\tau_p} c_{\tau_1,\dots,\tau_p} x_1^{\tau_1}\dots x_p^{\tau_p} = 0, \tag{7.p}$$

unde $p = 1,2,\dots, n$ (ecuaţia (7.n) coincide cu (3)).

TEOREMA 1. *Dacă relaţia (5) este satisfăcută, atunci soluţia generală a ecuaţiei (3) este definită de formulele*

$$x_p = \bigcup_{\tau_1,\dots,\tau_{p-1}} (\bar{t}_p c_{\tau_1\dots\tau_{p-1}0} \cup t_p \bar{c}_{\tau_1\dots\tau_{p-1}1}) \prod_{i=1}^{p-1} (\bar{t}_i c^{\tau_i}_{\tau_1\dots\tau_{i-1}0} \cup t_i \bar{c}^{\tau_i}_{\tau_1\dots\tau_{i-1}1}), \tag{8.p}$$

unde $p=1, 2,\dots, n$.

Demonstraţia se bazează pe două leme.

LEMA 1. *Dacă* $c_0c_1 = 0$, *atunci ecuaţia*

$$c_1x_1 \cup c_0\bar{x}_1 = 0 \tag{7.1}$$

are soluţia generală

$$x_1 = \bar{t}_1 c_0 \cup t_1 \bar{c}_1. \tag{8.1}$$

Acest rezultat este binecunoscut (vezi, de exemplu, [6]).

LEMA 2. *Pentru fiecare p, relatiile (8.1), (8.2),…, (8 p.) implică*

$$x_1^{\tau_1}\dots x_p^{\tau_p} = \prod_{j=1}^{p} (\bar{t}_j c^{\tau_j}_{\tau_1\dots\tau_{j-1}0} \cup t_j \bar{c}^{\tau_j}_{\tau_1\dots\tau_{j-1}1}). \tag{9.p}$$

Demonstraţie. Pentru $p = 1$, lema 2 este afirmaţia adevărată că (8.1) implică $x_1^{\tau_1} = \bar{t}_1 c_0^{\tau_1} \cup t_1\bar{c}_1^{\tau_1}$. Să presupunem că lema este adevărată pentru $p - 1$; atunci relaţiile (8.1), (8.2),…, (8.p) implică

$$x_p = \bigcup_{\tau_1,\dots,\tau_{p-1}} (\bar{t}_p c_{\tau_1\dots\tau_{p-1}0} \cup t_p \bar{c}_{\tau_1\dots\tau_{p-1}1})\, x_1^{\tau_1}\dots x_{p-1}^{\tau_{p-1}}$$

şi

$$x_1^{\sigma_1}\dots x_p^{\sigma_p} = x_1^{\sigma_1}\dots x_{p-1}^{\sigma_{p-1}} \left[\prod_{\tau_1,\dots,\tau_{p-1}} (\bar{t}_p c^{\sigma_p}_{\tau_1\dots\tau_{p-1}0} \cup t_p \bar{c}^{\sigma_p}_{\tau_1\dots\tau_{p-1}1}) x_{1_1}^{\tau_1}\dots x_{p-1}^{\tau_{p-1}}\right] =$$

$$= x_1^{\sigma_1}\dots x_{p-1}^{\sigma_{p-1}} (\bar{t}_p c^{\sigma_p}_{\sigma_1\dots\sigma_{p-1}0} \cup t_p \bar{c}^{\sigma_p}_{\sigma_1\dots\sigma_{p-1}1}) =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{p-1} (\bar{t}_i c^{\sigma_i}_{\sigma_1\dots\sigma_{i-1}0} \cup t_i \bar{c}^{\sigma_i}_{\sigma_1\dots\sigma_{i-1}1})\right] (\bar{t}_p c^{\sigma_p}_{\sigma_1\dots\sigma_{p-1}0} \cup t_p \bar{c}^{\sigma_p}_{\sigma_1\dots\sigma_{p-1}1})$$

adică relaţia (9.p) se verifică.

Demonstrația teoremei 1. Raționînd prin inducție, presupunem că teorema este adevărată pentru $n-1$ (pentru $n=1$, se reduce la lema 1).

Să considerăm n elemente $t_1^*, \ldots, t_n^* \in B$ și fie

$$x_p^* = f_p\,(t_1^*, \ldots, t_p^*) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

unde $f_p\,(t_1, \ldots, t_p)$ sînt funcțiile definite de formulele (8.p) ($p=1,2, \ldots, n$). În conformitate cu ipoteza inductivă, elementele $x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*$ satisfac ecuația (7. n—1), adică avem

$$\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1}}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}} = 0\,. \tag{10}$$

Însă deoarece $c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1}} = c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 0}\, c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 1}$, relația (10) poate fi scrisă

$$\left[\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 0}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\right]\left[\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 1}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\right] = 0. \tag{11}$$

Pe de altă parte, avem

$$x_n^* = \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} (\overline{t}_n^*\, c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 0} \cup t_n^* \overline{c}_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 1})\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}, \tag{12}$$

în conformitate cu relația (8.n) și lema 2 ; dar (12) se poate scrie sub forma

$$x_n^* = t_n^* \left[\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 0}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\right] \cup \overline{t}_n^* \left[\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} \overline{c}_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 1}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\right] \tag{13}$$

Acum, relațiile (11), (13) și lema 1 arată că x_n^* este o soluție a ecuației

$$\left[\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 1}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\right] x_n \cup \left[\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 0}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\right] \overline{x}_n = 0, \tag{14}$$

adică avem

$$\left[\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 1}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\right] x_n^* \cup \left[\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{n-1} 0}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\right] \overline{x}_n^* = 0, \tag{15}$$

sau

$$\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_n} c_{\tau_1 \ldots \tau_n}\, x_1^{*\tau_1} \ldots x_{n-1}^{*\tau_{n-1}}\, x_n^{*\tau_n} = 0, \tag{16}$$

care arată că $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ este o soluție a ecuației (3).

Invers, fie $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ o soluție particulară a ecuației (3). Aceasta înseamnă că relația (16) are loc, adică (15) este adevărată. Cu alte cuvinte, ecuația (14) este compatibilă și are pe x_n^* ca soluție particulară. Conform criteriului lui Whitehead, $x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*$ satisfac relația (11), care este echivalentă cu (10). Aceasta înseamnă că $(x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*)$ este o soluție a ecuației (7 .n—1), prin urmare, conform ipotezei inductive, elementele $x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*$ sînt de forma (8.1), …, (8.n—1) pentru o alegere convenabilă $t_1^*, \ldots, t_n^*$ a valorilor parametrilor. Acum să aplicăm lema 1 ecuației (14) ; deducem că există un element t_n^*, astfel încît relația (13) are loc. Deoarece (13) este echivalentă cu (12), lema 2 arată că relația (8.n) este satisfăcută de $t_1^*, \ldots, t_n^*$ și x_n^*. Aceasta completează demonstrația.

Corolarul 1. *Ecuația (3) este echivalentă cu sistemul de ecuații (7.1), . . ., (7.n).*

Corolarul 2. *Ecuația (3) este echivalentă cu următorul sistem de inegalități*

$$\bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}} c_{\tau_1 \ldots \tau_{p-1} 0}\, x_1^{\tau_1} \ldots x_{p-1}^{\tau_{p-1}} \leqslant x_p \leqslant \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}} \overline{c}_{\tau_1 \ldots \tau_{p-1} 1}\, x_1^{\tau_1} \ldots x_{p-1}^{\tau_{p-1}},$$
$$(p = 1, \ldots, n). \quad (17.\mathrm{p})$$

Acest corolar coincide cu teorema 1 din [7] (vezi de asemenea [4]).

Observația 1. Diferența neesențială dintre formulele noastre și cele date de M. Gotō, constă într-o mică modificare a notației și în faptul că preferăm să lucrăm cu ecuații scrise în forma $f = 0$, în loc de $g = 1$.

Observația 2. Faptul că formulele (8.p) sînt de forma

$$x_1 = f_1(t_1),\ x_2 = f_2(t_1, t_2), \ldots, x_n = f_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

ne permite să găsim toate soluțiile particulare în cel mai rapid mod posibil (vezi [9]).

§ 3. FORMA GENERALĂ A SOLUȚIEI GENERALE

Fie

$$f_1(t_1, \ldots, t_n) = \bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} c_{p_1, \sigma_1 \ldots \sigma_n} t_1^{\sigma_1} \ldots t_n^{\sigma_n}, \quad (p = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

unde

$$c_{p, \sigma_1 \ldots \sigma_n} = f_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \tag{19}$$

o familie de funcții booleene. Fie α) și β) proprietățile definite în § 1, relative la ecuația (3).

Lema 3. *Dacă relația* (5) *este îndeplinită, atunci funcțiile* (18) *satisfac* α) *dacă și numai dacă sînt satisfăcute relațiile*

$$\bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} c_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \cdot c_{1, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_1} \ldots c_{n, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_n} = 0 \tag{20}$$

pentru orice $\tau_1, \ldots, \tau_n = 0$ sau 1.

Observația 3. Aceasta este lema 4 din [8], dar vom da aici o demonstrație mai scurtă.

Demonstrație. În virtutea relațiilor (4) și (19), trebuie să demonstrăm că proprietatea α) este echivalentă cu

$$f(f_1(\tau_1, \ldots, \tau_n), \ldots, f_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = 0 \quad (\forall \tau_1, \ldots, \tau_n);$$

dar aceasta este o consecință a teoremei de verificare [5].

Lema 4. *Dacă relația* (5) *este satisfăcută, atunci funcțiile* (*18*) *satisfac* β) *dacă și numai dacă relațiile*

$$\bar{c}_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \prod_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \bigcup_{p=1}^{n} \bar{c}_{p, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_p} = 0 \tag{21}$$

au loc pentru orice $\sigma_1, \ldots, \sigma_n = 0$ *sau* 1.

Demonstrație. Să considerăm sistemul de ecuații

$$x_p = \bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} c_{p, \sigma_1 \ldots \sigma_n} t_1^{\sigma_1} \ldots t_n^{\sigma_n}, \quad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

care poate fi scris sub forma

$$\bigcup_{p=1}^{n} (x_p + \bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} c_{p, \sigma_1 \ldots \sigma_n} t_1^{\sigma_1} \ldots t_n^{\sigma_n}) = 0 \tag{23}$$

unde „+" înseamnă diferența simetrică. Relația (23), considerată ca o ecuație în necunoscutele $t_1, \ldots, t_n$, este compatibilă dacă și numai dacă are loc relația

$$\prod_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \bigcup_{p=1}^{n} (x_p + \bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} c_{p, \sigma_1 \ldots \sigma_n} \tau_1^{\sigma_1} \ldots \tau_n^{\sigma_n}) = 0$$

care se reduce la

$$\prod_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \bigcup_{p=1}^{n} (x_p + c_{p, \tau_1 \ldots \tau_n}) = 0 \,. \tag{24}$$

Proprietatea β) afirmă că (3) implică (24), deci (vezi, de exemplu, [5] sau lema 5 din [7]) proprietatea β) este adevărată dacă și numai dacă relațiile

$$\bar{c}_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \prod_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \bigcup_{p=1}^{n} (\sigma_p + c_{p, \tau_1 \ldots \tau_n}) = 0 \tag{25}$$

sînt satisfăcute pentru orice $\sigma_1, \ldots, \sigma_n = 0$ sau 1; dar (25) coincide cu (21).

Corolarul 3. *Dacă relația* (5) *este satisfăcută, atunci funcțiile* (18) *definesc soluția generală a ecuației* (3) *dacă și numai dacă*

$$\bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} c_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \bigcup_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \prod_{p=1}^{n} c_{p, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_p} \cup \bigcup_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} \bar{c}_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \prod_{\tau_1, \ldots, \tau_n} \bigcup_{p=1}^{n} \bar{c}_{p, \tau_1 \ldots \tau_n}^{\sigma_p} = 0. \tag{26}$$

Să observăm, că relația (26) poate fi considerată ca o ecuație cu $n \cdot 2^n$ necunoscute, anume $c_{p, \sigma_1 \ldots \sigma_n}$. Să presupunem că $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ este o soluție particulară a ecuației (3); luînd în considerație teorema lui Löwenheim asupra determinării soluției generale (reproductive) cînd se cunoaște o soluție particulară ([5], vezi de asemenea [7]), deducem că

$$c_{p, \sigma_1 \ldots \sigma_n}^* = x_p^* c_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \cup \sigma_p \bar{c}_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \tag{27}$$

este o soluţie particulară a ecuaţiei (26). Aplicînd încă o dată teorema lui Löwenheim, obţinem

TEOREMA 2. *Dacă relaţia* (5) *este satisfăcută, atunci funcţiile* (18) *definesc soluţia generală a ecuaţiei* (3) *dacă şi numai dacă discriminanţii* $f_p(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ *sînt de forma*

$$f_p(\rho_1, \ldots, \rho_n) = c^*_{p,\rho_1\ldots\rho_n} F(c) \cup c_{p,\rho_1\ldots\rho_n} \overline{F}(c), \tag{28}$$

pentru toţi $p = 1, 2, \ldots, n$; $\rho_1, \ldots, \rho_n = 0$ *sau* 1; *unde* $c^*_{p,\rho_1\ldots\rho_n}$ *este dat de relaţia* (27) *şi* $F(c)$ *înseamnă membrul stîng din* (26), $c_{p,\sigma_1\ldots\sigma_n}$ *fiind interpretaţi ca parametri arbitrari.*

Această teoremă extinde teorema 2 din [8].

Observaţia 4. Aplicarea teoremei 2 sau a teoremei lui Löwenheim cere cunoaşterea unei soluţii particulare; în acest scop, putem folosi teorema 1.

Primită la redacţie la 15 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. M. GOTŌ, *On the General Solution of a Logical Algebraic Equation with Many Unknowns.* Bull. Electrotech. Lab., **20**, 81—87 (1956) (în japoneză).
2. M. GOTŌ, *Various Types of the General Solution of a Multi-valued Logical Algebraic Equation with Many Unknowns.* Bull. Electrotech. Lab, **20**, 671—682 (1956) (în japoneză).
3. M. GOTŌ, *General solutions of the Logical Algebraic Equation with Many Unknowns.* U.R.S.I., XII-th General Assembly, Boulder, 1957.
4. В. Н. ГРЕБЕНЩИКОВ, *Коалиции систем уравнений булевой алгебры и их решение.* Доклады Акад. наук СССР, **141**, 1317—1319 (1961).
5. L. LÖWENHEIM, *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietkalkul.* Math. Ann., **68**, 169—207 (1910).
6. A. DEL RE, *Lezioni di Algebra della Logica.* Napoli, 1907.
7. S. RUDEANU, *Ecuaţiile booleene şi aplicaţiile lor în studiul schemelor în punte.* II. Com. Acad. R.P.R., **12**, 611—618 (1961).
8. S. RUDEANU, *Asupra rezolvării ecuaţiilor booleene prin metoda lui Löwenheim.* St. cerc. mat., **13**, 295—308 (1962).
9. S. RUDEANU, *Solutions non-redondantes des équations booléennes.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. RPR (sub tipar).

EXTINDEREA ECUAŢIILOR DE ECHILIBRU A FIRELOR PERFECT FLEXIBILE ŞI INEXTENSIBILE ÎN CAZUL UNOR SARCINI CE SE EXPRIMĂ PRINTR-O FUNCŢIE CONTINUĂ, AVÎND DISCONTINUITĂŢI DE SPEŢA ÎNTÎI

DE

WILHELM KECS

Institutul de mine Petroşeni

Se studiază echilibrul firelor perfect flexibile şi inextensibile cu ajutorul teoriei funcţiilor generalizate pentru cazul cînd forţele ce solicită firul se exprimă printr-o funcţie continuă avînd discontinuităţi de speţa întîi.

Se consideră cîteva aplicaţii printre care echilibrul unui fir care se sprijină pe o suprafaţă cilindrică discontinuă aspră.

1°. În cadrul mecanicii curbelor materiale continuu deformabile se demonstrează că ecuaţiile de echilibru ale unui fir sub acţiunea unor forţe care se reprezintă printr-o funcţie continuă $\vec{F}(s)$ în raport cu arcul de curbă s sînt :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \vec{F}(s) = 0\,, \tag{1}$$

$$\vec{u}^0 \times \vec{T} = 0\,, \tag{2}$$

unde $\vec{u}^0$ şi $\vec{T}$ reprezintă respectiv versorul tangentei la curba de echilibru şi tensiunea din fir.

În majoritatea problemelor întîlnite în tehnică, distribuţia forţelor de-a lungul firului se exprimă din punct de vedere matematic prin funcţii continue pe porţiuni sau, mai precis, printr-o funcţie continuă peste tot, cu excepţia unui număr finit de puncte unde posedă discontinuităţi de speţa întîi.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 367–377, BUCUREŞTI, 1965

Asemenea caz apare frecvent la calculul mecanic al funicularelor şi al reţelelor electrice unde, de exemplu, pe lîngă greutatea proprie uniform distribuită a conductorului electric, acţionează suprasarcini datorită izolatorilor de la capetele firului, depunerii de chiciură, vîntului precum şi unele sarcini concentrate provenite din acţiunea unor elemente mecanice fie chiar datorită păsărilor care se pot aşeza pe conductor.

Studiul echilibrului firelor sub acţiunea unor asemenea sarcini se face prin aplicarea ecuaţiilor (1) şi (2) părţilor firului unde forţele se exprimă prin funcţii continue. Cînd firul este acţionat numai de sarcini concentrate, studiul nu se mai face pe baza ecuaţiilor (1) şi (2), ci se scrie echilibrul fiecărui punct unde acţionează sarcinile concentrate.

Vom arăta că toate aceste cazuri de încărcări ale firelor se pot studia sub o formă unitară prin aplicarea funcţiilor generalizate.

Fie $\widehat{AB}$ un fir perfect flexibil şi inextensibil de lungime l, fixat în punctele A şi B.

Vom măsura arcele de curbă din punctul fix A, considerînd sensul pozitiv de la A spre B.

Să presupunem că asupra firului AB acţionează forţe ce se exprimă printr-o funcţie vectorială $\vec{F}(s)$ continuă în raport cu arcul s peste tot cu excepţia unui număr finit de puncte unde are discontinuităţi de speţa întîi.

Evident că în cadrul acestor sarcini intră şi forţele concentrate, deoarece dacă $\vec{F}_1$ reprezintă o forţă acţionînd asupra firului în punctul M_0 definit de arcul $s_0 = \widehat{AM}_0$, atunci ea poate fi reprezentată prin funcţia :

$$\vec{G}(s) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } s \neq s_0 \\ \vec{F}_1 \quad ,, \quad s = s_0 \end{cases} \qquad (3)$$

care posedă limitele laterale în punctul $s = s_0$.

Pentru stabilirea ecuaţiei de echilibru vom suprima legătura din punctul A al firului, înlocuindu-l cu reacţiunea $\vec{R}_A$ şi vom secţiona firul

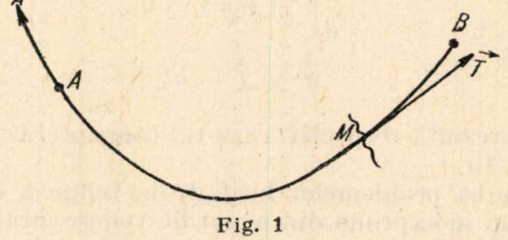


Fig. 1

într-un punct M definit de arcul $s = \widehat{AM}$, iar acţiunea părţii $\widehat{MB}$ asupra părţii $\widehat{AM}$ o vom înlocui prin forţa $\vec{T}$ aplicată în punctul M numită tensiune (fig. 1).

Să notăm cu $\vec{R}(s)$ rezultanta forţelor date ce acţionează asupra părţii $\overset{\frown}{AM}$.

Condiţia necesară de echilibru a porţiunii $\overset{\frown}{AM}$ a firului este :

$$\vec{R}_A + \vec{R}(s) + \vec{T}(s) = 0 . \tag{4}$$

Din ipoteza făcută privind forţele ce acţionează asupra firului, deducem că atît rezultanta forţelor $\vec{R}(s)$ cît şi tensiunea $\vec{T}(s)$ vor fi funcţii continue împreună cu derivata de ordinul întîi peste tot cu excepţia unui număr finit de puncte unde au discontinuităţi de speţa întîi.

Este important să observăm că punctele de discontinuitate ale tensiunii şi rezultantei vor fi numai punctele de aplicaţie ale forţelor concentrate. Între punctele de discontinuitate, tensiunea $\vec{T}$, conform ecuaţiei (2), este orientată după tangenta la curba de echilibru a firului.

În tratatele de specialitate, pentru scrierea ecuaţiei de echilibru sub forma diferenţială se derivează ecuaţia (4) în raport cu arcul de curbă s [7].

Această derivare însă este posibilă numai dacă forţele ce solicită firul se exprimă printr-o funcţie continuă $\vec{F}(s)$, caz în care rezultanta $\vec{R}(s)$ este o funcţie continuă împreună cu derivata de ordinul întîi, avînd expresia :

$$\vec{R}(s) = \int_0^s \vec{F}(s)\, \mathrm{d}s \tag{5}$$

iar derivata ei este :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}s} = \vec{F}(s) . \tag{6}$$

În acest caz obţinem cunoscuta ecuaţie (1) de echilibru iar din condiţia ca momentul tuturor forţelor corespunzătoare părţii $\overset{\frown}{AM}$ să fie nul în raport cu un punct arbitrar, obţinem ecuaţia (2) care exprimă faptul că tensiunea este tangentă la curba de echilibru.

Dat fiind felul în care am pus problema, rezultanta forţelor date $\vec{R}(s)$ nu mai este o funcţie derivabilă peste tot şi în consecinţă ecuaţia (4) nu poate fi derivată în raport cu arcul, deci relaţia (6) nu are loc peste tot.

Deoarece rezultanta $\vec{R}(s)$ este o funcţie integrabilă, conform teoriei funcţiilor generalizate ea are derivată de orice ordin în sens generalizat.

De aceea vom deriva relaţia (4) în sensul teoriei funcţiilor generalizate şi obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{7}$$

Derivata rezultantei $\vec{R}$ în sens generalizat o vom nota cu $\vec{\mathcal{F}}(s)$ adică :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}s} = \vec{\mathcal{F}}(s) \tag{8}$$

şi o vom numi forţă generalizată pe unitatea de lungime a firului.

În acest fel în locul ecuaţiei (1) de echilibru vom avea ecuaţia :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \vec{\mathcal{F}}(s) = 0 \tag{9}$$

care generalizează ecuaţia (1).

Deoarece tensiunea $\vec{T}$ cît şi rezultanta $\vec{R}$ sînt derivabile pe porţiuni, avînd discontinuităţi de speţa întîi, derivatele lor (v. [3], pag. 36) vor avea expresiile :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{T}_i\,\delta(s - s_i), \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}s} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{R}}{\mathrm{d}s} + \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{R}_i\,\delta(s - s_i), \tag{11}$$

unde $\Delta\vec{T}_i$, $\Delta\vec{R}_i$ reprezintă respectiv saltul tensiunii şi rezultantei corespunzătoare punctului de discontinuitate $s = s_i$ iar simbolurile $\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}$, $\delta(s - s_i)$, derivata în sens obişnuit şi funcţia generalizată a lui Dirac.

În baza relaţiilor (7) şi (9) ecuaţia de echilibru al firului se va scrie astfel :

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{R}}{\mathrm{d}s} + \sum_{i=1}^{n} (\Delta\vec{T}_i + \Delta\vec{R}_i)\,\delta(s - s_i) = 0\,. \tag{12}$$

Această egalitate poate să aibă loc (v. [4], pag. 88) numai dacă :

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{R}}{\mathrm{d}s} = 0\,, \\ &\Delta\vec{T}_i + \Delta\vec{R}_i = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{13}$$

Deoarece expresia $\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{R}}{\mathrm{d}s}$ defineşte forţa obişnuită $\tilde{\vec{\mathcal{F}}}(s)$, prima din ecuaţiile (13) se va scrie :

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \tilde{\vec{\mathcal{F}}}(s) = 0 \tag{14}$$

care coincide cu ecuaţia (1) şi se aplică numai pe porţiunile dintre punctele de discontinuitate ale tensiunii $\vec{T}$.

A doua ecuaţie din (13) ne arată că în fiecare punct de discontinuitate suma salturilor tensiunii şi rezultantei este egală cu zero.

2°. Dacă de exemplu firul este acţionat într-un punct s_0 de forţa concentrată $\vec{F}$, atunci rezultanta $\vec{R}(s)$ va avea expresia:

$$\vec{R}(s) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } s < s_0 \\ \vec{F} \quad ,, \quad s \geqslant s_0 \end{cases} \tag{15}$$

care se mai poate scrie sub forma:

$$\vec{R}(s) = \vec{F}\,\theta(s - s_0) \tag{16}$$

unde $\theta(s - s_0)$ reprezintă funcţia lui Heaviside anume:

$$\theta(s - s_0) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } s < s_0\,, \\ 1 \quad ,, \quad s \geqslant s_0\,. \end{cases} \tag{17}$$

Conform relaţiei (9) forţa generalizată pe unitatea de lungime a arcului va fi:

$$\vec{\mathcal{F}}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}s} = \vec{F}\,\delta(s - s_0)\,. \tag{18}$$

În consecinţă ecuaţia de echilibru a firului sub acţiunea unei singure forţe concentrate aplicate în punctul $s = s_0$ este:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \vec{F}\,\delta(s - s_0) = 0\,. \tag{19}$$

Ecuaţia de echilibru a unui fir supus la forţele concentrate $\vec{F}_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ aplicate în punctele $s_1 < s_2 < \ldots < s_i < \ldots < s_n$ va fi:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,\delta(s - s_i) = 0\,. \tag{20}$$

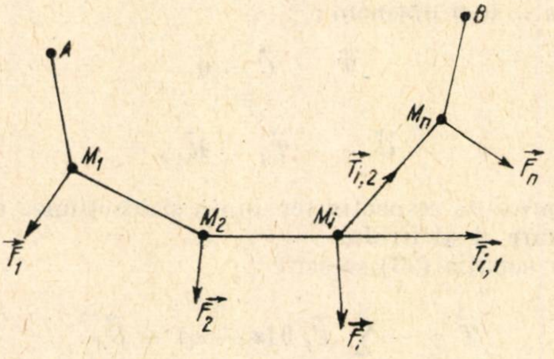


Fig. 2

După cum se ştie, firul sub acţiunea celor n forţe concentrate va lua forma unei linii poligonale $AM_1\,M_2 \ldots M_i \ldots M_n B$ (fig. 2).

Acest rezultat se regăseşte imediat din ecuaţiile (13).

Într-adevăr, în acest caz saltul tensiunii şi al rezultantei corespunzătoare punctului de discontinuitate M_i au expresiile:

$$\Delta \vec{T}_i = \vec{T}_{i,2} - \vec{T}_{i,1}, \tag{21}$$

$$\Delta \vec{R}_i = \vec{F}_i,$$

unde $\vec{T}_{i,2}$, $\vec{T}_{i,1}$ reprezintă respectiv tensiunea la dreapta şi la stînga punctului M_i (fig. 2).

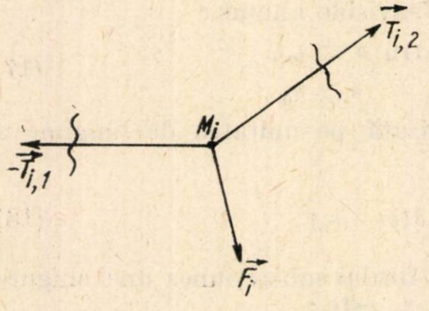


Fig. 3

În acest fel ecuaţiile (13) devin:

$$\frac{\tilde{d}\vec{T}}{ds} = 0, \tag{22}$$

$$\Delta \vec{T}_i + \vec{F}_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Prima ecuaţie ne arată că tensiunea este constantă pe porţiuni, adică curba de echilibru are forma unei linii poligonale, iar a doua ecuaţie ne arată că fiecare punct de aplicaţie al forţelor concentrate este în echilibru sub acţiunea forţei corespunzătoare şi tensiunilor laterale (fig. 3).

Să integrăm acum ecuaţia (20).

O primă integrală a acestei ecuaţii va fi:

$$\vec{T} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\, \theta(s - s_i) + \vec{C} = 0. \tag{23}$$

Pentru determinarea constantei de integrare este suficient să punem în ecuaţia (23) $s = 0$ şi obţinem:

$$\vec{T}_A + \vec{C} = 0 \tag{24}$$

sau

$$\vec{C} = -\vec{T}_A = \vec{R}_A, \tag{24'}$$

unde $\vec{T}_A$, $\vec{R}_A$ reprezintă respectiv tensiunea şi reacţiunea corespunzătoare punctului de fixare A al firului

Cu aceasta ecuaţia (23) se scrie:

$$\vec{T} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\, \theta(s - s_i) - \vec{R}_A. \tag{25}$$

care exprimă tensiunea în fiecare punct al firului cu excepţia punctelor de discontinuitate.

Notînd cu $\vec{r}(s)$ vectorul de poziţie al unui punct al firului, atunci din ecuaţia (25) obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,\theta(s-s_i) + \vec{R}_A}{T} \tag{26}$$

unde

$$T = |\vec{T}| = \sqrt{\left[\vec{R}_A + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,\theta(s-s_i)\right]^2}. \tag{27}$$

Avînd în vedere că versorul tangentei la curbă $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$ are numai discontinuităţi de speţa întîi, considerînd originea axelor în punctul A, prin integrare obţinem :

$$\vec{r} = \sum_{\substack{J=0\\ k\geqslant 1}}^{k-1} \frac{\sum\limits_{i=0}^{J} \vec{F}_i}{\sqrt{\left[\sum\limits_{i=0}^{J} \vec{F}_i\right]^2}}\,(s_{J+1} - s_J) + \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} \vec{F}_i}{\sqrt{\left[\sum\limits_{i=0}^{k} \vec{F}_i\right]^2}}\,(s - s_k) \tag{28}$$

pentru

$$s_k \leqslant s \leqslant s_{k+1},$$

unde se consideră $\vec{F}_0 = \vec{R}_A$ iar $s_0 = 0$, $s_{n+1} = l$; l fiind lungimea totală a firului, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Relaţia (28) exprimă ecuaţia liniei poligonale de echilibru al firului sub acţiunea celor n forţe concentrate în funcţie de reacţiunea $\vec{R}_A$ a cărei determinare depinde de condiţiile iniţiale ale problemei.

3°. Să considerăm acum un fir AB de lungime l supus acţiunii greutăţii proprii avînd greutatea specifică γ şi a unei forţe concentrate $\vec{F}$ aplicată în punctul M_0, definit de arcul $s_0 = \widehat{AM_0}$, vertical în jos (fig. 4).

Deoarece forţele ce solicită firul sînt paralele, rezultă că curba de echilibru al firului este plană.

Ecuaţia diferenţială de echilibru este :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \vec{\gamma} + \vec{F}\,\delta(s - s_0) = 0. \tag{29}$$

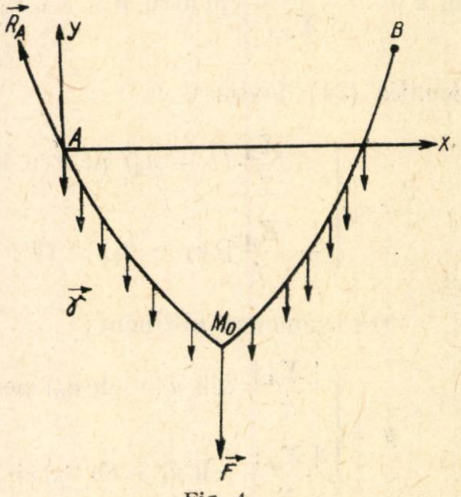


Fig. 4

Notînd cu $\vec{R}_A\,(X_A, Y_A)$ reacţiunea punctului A, prin integrarea ecuaţiei (29) obţinem :

$$\vec{T} = -\vec{\gamma} s - \vec{F}\,\theta(s - s_0) - \vec{R}_A\,, \tag{30}$$

unde $M\,(x, y)$ reprezintă un punct arbitrar al curbei, iar $s = \widehat{AM}$ arcul de curbă.

Proiectînd ecuaţia (30) pe axele de coordonate obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -\frac{X_A}{T}, \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\gamma s + F\,\theta(s - s_0) - Y_A}{T}, \tag{32}$$

unde T are expresia :

$$T = |\,\vec{T}\,| = \sqrt{X_A^2 + [\gamma s + F\,\theta(s - s_0) - Y_A]^2}\,. \tag{33}$$

Integrînd ecuaţia (31) avem :

$$x = \begin{cases} -X_A \displaystyle\int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{X_A^2 + (\gamma s - Y_A)^2}} & \text{pentru } 0 \leqslant s \leqslant s_0 \\ -X_A \displaystyle\int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{X_A^2 + (\gamma s - Y_A)^2}} - X_A \displaystyle\int_{s_0}^s \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{X_A^2 + (\gamma s + F - Y_A)^2}} & \\ & \text{pentru } s_0 < s \leqslant l. \end{cases} \tag{34}$$

Cu ajutorul substituţiilor :

$$\operatorname{sh} u = \frac{\gamma s - Y_A}{|X_A|} \text{ pentru } 0 \leqslant s \leqslant s_0 \text{ şi } \operatorname{sh} v = \frac{\gamma s + F - Y_A}{|X_A|} \text{ pentru } s_0 < s \leqslant l, \tag{35}$$

ecuaţia (34) devine :

$$x = \begin{cases} -\dfrac{X_A}{\gamma}(u - u_0) \text{ pentru } u_0 \leqslant u \leqslant u_1 \\ -\dfrac{X_A}{\gamma}[(u_1 - u_0) + (v - v_0)] \text{ pentru } v_0 \leqslant v \leqslant v_1\,. \end{cases} \tag{36}$$

De asemenea obţinem :

$$y = \begin{cases} \dfrac{|X_A|}{\gamma}(\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} u_0) \text{ pentru } u_0 \leqslant u \leqslant u_1 \\ \dfrac{|X_A|}{\gamma}(\operatorname{ch} u_1 - \operatorname{ch} u_0) + (\operatorname{ch} v - \operatorname{ch} v_0) \text{ pentru } v_0 \leqslant v \leqslant v_1 \end{cases} \tag{37}$$

unde

$$\operatorname{sh} u_0 = (\operatorname{sh} u)_{s=0}\,; \quad \operatorname{sh} u_1 = (\operatorname{sh} u)_{s=s_0}$$

iar

$$\operatorname{sh} v_0 = (\operatorname{sh} v)_{s=s_0}\,; \quad \operatorname{sh} v_1 = (\operatorname{sh} v)_{s=l}\,.$$

Rezolvarea completă a problemei depinde evident de condiţiile ei locale. Dacă cu ajutorul condiţiilor iniţiale se determină reacţiunea $\vec{R}_A$, atunci relaţiile (30), (36) şi (37) ne dau toate mărimile caracteristice ale curbei de echilibru.

4°. Să considerăm acum un fir perfect flexibil şi inextensibil de greutate neglijabilă rezemat pe o suprafaţă cilindrică aspră, înfăşurat după secţiunea dreaptă $\widehat{ABC}$ (fig. 5) avînd o discontinuitate de speţa întîi în punctul B.

Presupunînd că tensiunea la extremitatea A a firului este T_1 şi coeficienţii de frecare dintre fir şi suprafaţă pe porţiunile $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ sînt respectiv f_1 şi f_2, să determinăm tensiunea T_2 care trebuie aplicată în punctul C pentru ca firul să fie în echilibru.

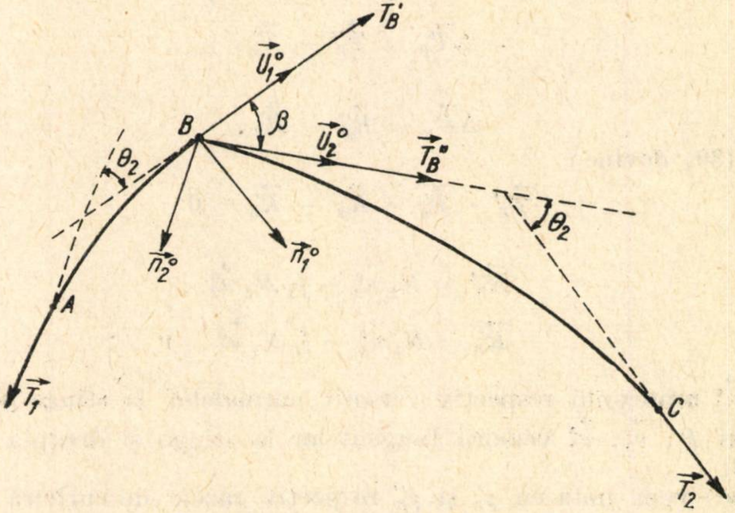


Fig. 5

Conform relaţiilor (13) ecuaţiile de echilibru sînt :

$$\frac{\widetilde{\mathrm{d}}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \widetilde{\vec{\mathcal{F}}} = 0 \tag{38}$$

$$\Delta \vec{T}_B + \Delta \vec{R}_B = 0 \tag{39}$$

unde $\Delta \vec{T}_B$ şi $\Delta \vec{R}_B$ reprezintă respectiv saltul tensiunii şi saltul rezultantei forţelor ce acţionează asupra firului pe porţiunea $\widehat{AB}$, corespunzător punctului de discontinuitate B.

Presupunînd că tendința de deplasare a firului este de la A spre C și notînd cu T'_B, T''_B respectiv tensiunea la stînga și dreapta punctului B în poziția de echilibru a firului, între tensiunile T'_B, T''_B, T_1 și T_2 au loc relațiile :

$$e^{-f_1\theta_1} \leqslant \frac{T'_B}{T_1} \leqslant e^{f_1\theta_1};\ e^{f_2\theta_2} \leqslant \frac{T_2}{T''_B} \leqslant e^{f_2\theta_2}, \tag{40}$$

unde θ_1 reprezintă unghiul format de tangenta în punctul A și tangenta la stînga punctului B, iar θ_2 unghiul format de tangenta în punctul C cu tangenta la dreapta punctului B.

În baza relațiilor (40) avem :

$$e^{-f_1\theta_1-f_2\theta_2} \leqslant \frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{T'_B}{T''_B} \leqslant e^{f_1\theta_1+f_2\theta_2}. \tag{41}$$

Pentru determinarea raportului $\frac{T'_B}{T''_B}$ vom lua în considerație ecuația (39).

Avînd în vedere că :

$$\Delta\vec{T}_B = \vec{T}''_B - \vec{T}'_B \tag{42}$$

și

$$\Delta\vec{R}_B = \vec{R}''_B - \vec{R}'_B. \tag{43}$$

ecuația (39) devine :

$$\vec{T}''_B - \vec{T}'_B + \vec{R}''_B - \vec{R}'_B = 0 \tag{44}$$

în care :

$$\vec{R}''_B = N_2\,\vec{n}^0_2 - f_2\,N_2\,\vec{u}^0_2 \tag{45}$$

$$\vec{R}'_B = N_1\,\vec{n}^0_1 - f_1\,N_1\,\vec{u}^0_1 \tag{46}$$

iar $\vec{n}^0_1$, $\vec{n}^0_2$ reprezintă respectiv versorii normalelor la stînga și dreapta punctului B; $\vec{u}^0_1$, $\vec{u}^0_2$ versorii tangentelor la stînga și dreapta aceluiași punct B.

Dacă vom nota cu ρ'_B și ρ''_B respectiv razele de curbură la stînga și dreapta punctului de discontinuitate B, atunci mărimile reacțiunilor normale la curbă în acest punct sînt date de expresiile :

$$N_1 = \frac{T'_B}{\rho'_B};\quad N_2 = \frac{T''_B}{\rho''_B}. \tag{47}$$

Proiectînd ecuația (44) pe direcția versorului $\vec{u}^0_2$, în baza relațiilor (45) și (46) obținem :

$$\frac{T'_B}{T''_B} = \frac{\rho'_B}{\rho''_B}\cdot\frac{\rho''_B - f_2}{\cos\beta\,(\rho'_B - f_1) - \sin\beta}. \tag{48}$$

Înlocuind valoarea raportului $\frac{T'_B}{T''_B}$ din relaţia (48) în (41) vom obţine dependenţa ce trebuie să existe între tensiunile T_1 şi T_2 pentru ca firul să fie în echilibru.

În relaţia (48) unghiul β reprezintă unghiul format de tensiunile T'_B şi T''_B.

Primită la redacţie la 17 octombrie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. Ştefan Banach, *Mechanika*, Biblioteka Matematycsna. Warazawa, 1956.
2. M. Bercovici, A. Arie, *Reţele electrice, Calculul mecanic*, Editura tehnică, Bucureşti, 1963.
3. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*. В. I, Москва, 1958.
4. Wilhelm Kecs, *Studii şi cercetări matematice*, **15**, *1* (1964).
5. Naftali Simion, *Funiculare*, Editura tehnică, Bucureşti, 1958.
6. Miron Nicolescu, *Analiza matematică*. Vol. II. Editura tehnică, Bucureşti, 1958.
7. C. Platrier, *Mécanique rationnele*. Tome II, Paris, 1955.
8. V. Vâlcovici, Şt. Bălan, R. Voinea, *Mecanica teoretică*, Editura tehnică, Bucureşti, 1963.

APLICAȚII ALE TEORIEI FUNCȚIILOR GENERALIZATE PRIVIND PROBLEMELE PLANULUI ELASTIC INFINIT

DE

WILHELM KECS
Institutul de mine Petroșeni

În prima parte a lucrării se determină reprezentarea unor sarcini ce acționează asupra planului elastic cu ajutorul teoriei funcțiilor generalizate și se introduce noțiunea de moment concentrat rotațional.
În partea a doua se dau soluțiile generalizate ale problemelor privind planul elastic infinit, cînd acesta este supus la sarcini masice, ce se exprimă prin funcții generalizate.
Soluțiile sînt exprimate prin intermediul produsului de convoluție, ilustrîndu-se modul de aplicare al acestora prin cîteva exemple.

În această lucrare ne vom ocupa de reprezentarea unor sarcini ce acționează asupra planului elastic cu ajutorul teoriei funcțiilor generalizate și vom introduce noțiunea de moment concentrat rotațional.

Rezultatele obținute vor fi grupate în capitolul I al prezentei lucrări.

În capitolul II vom da soluțiile generalizate ale problemelor privind planul elastic infinit, cînd acesta este supus la sarcini masice ce se exprimă prin funcții generalizate.

Soluțiile sînt exprimate prin intermediul produsului de convoluție, ilustrîndu-se modul de aplicare al acestora prin cîteva exemple.

CAPITOLUL I

1. În lucrarea [2] am arătat că momentul concentrat dirijat are expresia

$$\vec{\mathfrak{M}} = -\frac{M\vec{F}^0}{|\vec{U}^0\times\vec{F}^0|}\,\frac{\partial\,\delta(x-x_0,\ y-y_0)}{\partial u}. \qquad (1)$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 379–397, BUCUREȘTI, 1965

De aici rezultă că el reprezintă o funcţie de punctul $A\,(x_0, y_0)$, versorii $\vec{U}^0, \vec{F}^0$ precum şi de mărimea M a momentului concentrat dirijat.

Vom nota cu $\{\vec{\mathfrak{M}}\}$ mulţimea momentelor concentrate dirijate pentru care $\vec{U}^0$ şi $\vec{F}^0$ sînt situaţi în planul xOy, iar cu $\vec{\mathfrak{M}}$ un element oarecare al acestei mulţimi.

Dacă suma a două sau mai multe momente concentrate în punctul $A\,(x_0, y_0)$, din mulţimea $\{\vec{\mathfrak{M}}\}$, nu depinde de versorii $\vec{U}^0$ şi $\vec{F}^0$, spunem că ele formează un moment concentrat rotaţional în raport cu planul xOy corespunzător punctului $A\,(x_0, y_0)$.

Mulţimea astfel definită se va nota prin $\{\vec{\mathcal{R}}\}$, iar un element al acestei mulţimi cu $\vec{\mathcal{R}}$, unde

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathfrak{M}}_1 + \vec{\mathfrak{M}}_2 + \ldots + \vec{\mathfrak{M}}_n \; (n \geqslant 2). \tag{2}$$

Pentru explicitarea expresiei elementului $\vec{\mathcal{R}}$ vom înlocui în (2) momentele concentrate dirijate conform relaţiei (1) şi impunîndu-i condiţia să nu depindă de versorii $\vec{U}^0$ şi $\vec{F}^0$, vom obţine :

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{a}\,\frac{\partial\delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial x} + \vec{b}\,\frac{\partial\delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial y} \tag{3}$$

în care $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt vectori constanţi, depinzînd numai de M_i. Să arătăm că reprezentarea momentului concentrat rotaţional sub forma (3) este unică. În acest scop vom presupune că momentul concentrat rotaţional $\vec{\mathcal{R}}$ s-ar putea prezenta sub forma următoare cu ajutorul constantelor $\vec{a}'$ şi $\vec{b}'$.

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{a}'\,\frac{\partial\delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial x} + \vec{b}'\,\frac{\partial\delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial y}. \tag{3'}$$

Din egalitatea expresiilor (3) şi (3′) rezultă că avem :

$$(\vec{a} - \vec{a}')\,\frac{\partial\delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial x} + (\vec{b} - \vec{b}')\,\frac{\partial\delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Pentru ca relaţia (4) să aibă loc este necesar şi suficient să avem îndeplinite condiţiile :

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad \text{şi} \quad \vec{b} = \vec{b}'. \tag{5}$$

Într-adevăr, notînd cu $\varphi\,(x, y)$ o funcţie fundamentală arbitrară avem :

$$\left((\vec{a} - \vec{a}')\,\frac{\partial\delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial x} + (\vec{b} - \vec{b}')\,\frac{\partial\delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial y},\ \varphi(x, y)\right) = 0 \tag{6}$$

din care rezultă relaţia :

$$(\vec{a} - \vec{a}')\,\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x = x_0\\ y = y_0}} + (\vec{b} - \vec{b}')\,\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x = x_0\\ y = y_0}} = 0 \tag{6'}$$

care poate să aibă loc numai dacă

$$\vec{a} = \vec{a}' \text{ şi } \vec{b} = \vec{b}'$$

datorită liniarităţii expresiei (6′) în raport cu $\varphi(x, y)$.

În continuare vom arăta că mulţimea $\{\vec{\mathcal{R}}\}$ nu este vidă, fapt ce ne va permite, pe baza unicităţii reprezentării momentului concentrat rotaţional, să determinăm efectiv coeficienţii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ din relaţia (3).

Pentru aceasta vom considera momentele concentrate dirijate $\vec{\mathfrak{M}}_1$ şi $\vec{\mathfrak{M}}_2$ satisfăcînd condiţiilor :

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M\,; \quad & \vec{U}_1^0\cdot\vec{U}_2^0 = \vec{U}_1^0\cdot\vec{F}_1^0 = \vec{U}_2^0\cdot\vec{F}_2^0 = 0 \\ & \vec{U}_1^0\times\vec{F}_1^0 = \vec{U}_2^0\times\vec{F}_2^0 = \vec{K}, \end{aligned} \tag{7}$$

unde $\vec{K}$ reprezintă versorul axei OZ.

Momentele $\vec{\mathfrak{M}}_1$ şi $\vec{\mathfrak{M}}_2$ se consideră concentrate în originea axelor de coordonate.

În baza condiţiilor precedente, versorii $\vec{U}_1^0$, $\vec{U}_2^0$, $\vec{F}_1^0$ şi $\vec{F}_2^0$ vor avea expresiile :

$$\begin{aligned} & \vec{U}_1^0(\cos\alpha, \sin\alpha), \\ & \vec{F}_1^0(-\sin\alpha, \cos\alpha), \\ & \vec{U}_2^0 = \vec{F}_1^0, \\ & \vec{U}_1^0 = -\vec{F}_2^0. \end{aligned} \tag{8}$$

În conformitate cu (1) şi (8), expresiile momentelor concentrate dirijate $\vec{\mathfrak{M}}_1$ şi $\vec{\mathfrak{M}}_2$ sînt :

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{M}}_1 &= -M\vec{F}_1^0\left(\cos\alpha\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial y}\right), \\ \vec{\mathfrak{M}}_2 &= -M\vec{F}_2^0\left(-\sin\alpha\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Notînd cu $\mathcal{R}_x$ şi $\mathcal{R}_y$ proiecţiile pe axele de coordonate ale momentului concentrat rotaţional $\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathfrak{M}}_1 + \vec{\mathfrak{M}}_2$, avem :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x &= M\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial y}, \\ \mathcal{R}_y &= -M\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Din compararea relațiilor (3) și (10), rezultă că constantele $\vec{a}$ și $\vec{b}$ au expresiile :

$$\begin{matrix} \vec{a}(0, -M) \\ \vec{b}(M, 0) \end{matrix} \quad \text{adică} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \tag{11}$$

Expresiile (10) ale momentului concentrat rotațional $\vec{\mathcal{R}}$ pot fi scrise într-o formă restrînsă simbolică astfel :

$$\vec{\mathcal{R}} = - M\vec{K} \times \operatorname{grad} \delta(x, y). \tag{12}$$

Evident că relația (12) nu are sens din punct de vedere al teoriei funcțiilor generalizate, ea constituind doar o formă simbolică de scriere a expresiilor (10).

În cazul cînd momentul concentrat rotațional este aplicat nu în originea axelor de coordonate, ci într-un punct oarecare, A (x_0, y_0), atunci expresia momentului rotațional sub formă simbolică se va scrie astfel :

$$\vec{\mathcal{R}} = - M\vec{K} \times \operatorname{grad} \delta(x - x_0, y - y_0), \tag{12'}$$

proiecțiile $\mathcal{R}_x$ și $\mathcal{R}_y$ vor avea expresiile :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}_x &= M \frac{\partial \delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial y}, \\ \mathcal{R}_y &= - M \frac{\partial \delta(x - x_0, y - y_0)}{\partial x}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Dacă mărimea momentului rotațional se notează prin M, atunci evident $M_1 = M_2 = \frac{\mathcal{M}}{2}$ și în acest caz avem :

$$\vec{\mathcal{R}} = - \frac{\mathcal{M}}{2} \vec{K} \times \operatorname{grad} \delta(x - x_0, y - y_0). \tag{14}$$

2. Fie $y = y_0$ ecuația unei drepte iar $\vec{\tau}(x)$ un cîmp vectorial local integrabil definit pe dreapta considerată astfel :

$$\vec{\tau}(x) = \begin{cases} \vec{v}(x) \text{ pentru } x \in [a, b], \\ 0 \quad \text{ pentru } x \overline{\in} [a, b]. \end{cases} \tag{15}$$

Împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale parțiale prin punctele

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

și notăm cu A, B și M_i punctele de pe dreapta $y = y_0$ care corespund valorilor a, b și x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

Notăm cu Δx_i lungimea intervalului $[x_{i-1}, x_i]$ și cu ξ_i un punct oarecare interior intervalului considerat.

Vom asocia fiecare segment $\overline{M_{i-1}M_i}$, $(i = 1,2,\ldots, n)$, sarcina concentrată $\vec{F}_i$ avînd expresia :

$$\vec{F}_i(x, y) = \Delta x_i\, \vec{v}\,(\xi_i)\, \delta\,(x - \xi_i\,,\ y - y_0) \tag{16}$$

unde $\delta\,(x, y)$ reprezintă funcţia generalizată a lui Dirac. Din corespondenţa stabilită rezultă că segmentului $\overline{AB}$ îi corespunde sarcina :

$$\vec{Q}_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \vec{v}\,(\xi_i)\, \delta\,(x - \xi_i,\ y - y_0) \tag{17}$$

Vom obţine reprezentarea cîmpului (15) de vectori considerînd limita :

$$\vec{Q}\,(x, y) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \vec{v}\,(\xi_i) \delta(x - \xi_i,\ y - y_0) \tag{18}$$

în sensul teoriei funcţiilor generalizate.

Pentru a arăta că relaţia (18) există, vom evalua expresia :

$$(\vec{Q}_n(x, y),\ \varphi\,(x, y)) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i \vec{v}(\xi_i)\, \delta\,(x - \xi_i y - y_0),\ \varphi\,(x, y)), \tag{19}$$

unde $\varphi\,(x, y)$ reprezintă o funcţie fundamentală arbitrară. Relaţia (19) poate fi scrisă şi sub forma :

$$(\vec{Q}_n\,(x, y),\ \varphi\,(x, y)) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\, \vec{v}\,(\xi_i)\ \varphi\,(\xi_i\,,\ y_0)\,. \tag{19'}$$

Din expresia (19′) rezultă că relaţia (18) există şi avem :

$$\lim_{n\to\infty}\ (\vec{Q}_n,\ \varphi) = (\vec{Q},\ \varphi) = \int_a^b \vec{v}\,(x)\ \varphi\,(x, y_0)\, \mathrm{d}x. \tag{20}$$

Cu ajutorul funcţiei

$$\theta_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in [a,\ b] \\ 0 \text{ pentru } x \overline{\in} [a,\ b] \end{cases}$$

relaţia (20)devine :

$$(\vec{Q},\ \varphi) = (\vec{v}\,(x)\ \theta_1\,(x),\ \varphi\,(x, y_0)). \tag{20'}$$

În scopul explicitării funcţiei generalizate $\vec{Q}\,(x, y)$ vom introduce funcţia auxiliară $\vec{\alpha}\,(x, y)$ avînd expresia :

$$\vec{\alpha}\,(x, y) = \vec{v}\,(x)\ \theta_1\,(x) \times \theta\,(y - y_0) \tag{21}$$

în care simbolul ,,×'' reprezintă produsul direct, iar $\theta\,(y - y_0)$ funcţia lui Heaviside şi anume :

$$\theta\,(y - y_0) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } y \geqslant y_0\,, \\ 0 \text{ pentru } y < y_0\,. \end{cases} \tag{22}$$

Avînd în vedere că produsul direct coincide cu produsul în sens obişnuit, în cazul cînd funcţionalele sînt regulate, avem :

$$\vec{\alpha}(x, y) = \vec{v}(x)\,\overline{\theta}(x, y), \tag{21'}$$

unde

$$\overline{\theta}(x, y) = \theta_1(x)\,\theta(y - y_0) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in [a, b],\ y \geqslant y_0, \\ 0 \text{ pentru } x \overline{\in} [a, b] \text{ sau } y < y_0. \end{cases} \tag{23}$$

Derivînd în sensul teoriei funcţiilor generalizate expresiile (21) şi (21′), obţinem :

$$\frac{\partial \vec{\alpha}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{v}(x)\,\overline{\theta}(x, y)\right) = \vec{v}(x)\,\theta_1(x) \times \delta(y - y_0). \tag{24}$$

De aici rezultă :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \vec{\alpha}(x, y)}{\partial y}, \varphi(x, y)\right) &= (\vec{v}(x)\,\theta_1(x) \times \delta(y - y_0), \varphi(x, y)) = \\ &= (\vec{v}(x)\,\theta_1(x), \varphi(x, y_0)).\end{aligned} \tag{25}$$

Deoarece expresiile (20′) şi (25) coincid, pe baza egalităţii a două funcţii generalizate avem :

$$\vec{Q}(x, y) = \frac{\partial \vec{\alpha}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{v}(x)\,\overline{\theta}(x, y)\right). \tag{26}$$

Expresia (26) reprezintă sarcina echivalentă cu cîmpul vectorial (1) considerat.

În mod analog pentru cîmpul vectorial $\vec{\mu}(y)$ definit pe dreapta $x = x_0$ unde :

$$\vec{\mu}(y) = \begin{cases} \vec{w}(y) & \text{pentru } y \in [c, d] \\ 0 & \text{pentru } y \overline{\in} [c, d] \end{cases} \tag{27}$$

sarcina echivalentă acestui cîmp este dată de expresia :

$$\vec{R}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{w}(y)\,\omega(x, y)\right) \tag{28}$$

$$\omega(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } y \in [c, d],\ x \geqslant x_0, \\ 0 \text{ pentru } y \overline{\in} [c, d] \text{ sau } x < x_0. \end{cases} \tag{29}$$

Exemplul 1. Pe dreapta $y = y_0$ avem definit cîmpul vectorial $\vec{v}\left(\frac{P_1}{2a}, \frac{P_2}{2a}, \frac{P_3}{2a}\right)$, unde $x \in [-a, a]$, $a > 0$; P_1, P_2, P_3 fiind mărimi constante. Conform relaţiei (26) acest cîmp vectorial este echivalent cu sarcina $\vec{Q}$ ale cărei proiecţii Q_x, Q_y, Q_z pe axele de coordonate au expresiile :

$$\begin{aligned} Q_x(x, y, a) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_1}{2a}\overline{\theta}(x, y)\right), \\ Q_y(x, y, a) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_2}{2a}\overline{\theta}(x, y)\right), \\ Q_z(x, y, a) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_3}{2a}\overline{\theta}(x, y)\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Considerînd limitele expresiilor (30) în sensul teoriei funcţiilor generalizate pentru $a \to 0$, obţinem :

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \lim_{a\to 0} Q_x(x, y, a) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{P_1\theta_1(x)}{2a}\times\delta(y-y_0)\right] = P_1\delta(x, y-y_0) \\ q(x,y) &= \lim_{a\to 0} Q_y(x, y, a) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{P_2\theta_1(x)}{2a}\times\delta(y-y_0)\right] = P_2\delta(x, y-y_0) \\ r(x,y) &= \lim_{a\to 0} Q_z(x, y, a) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{P_3\theta_1(x)}{2a}\times\delta(y-y_0)\right] = P_3\delta(x, y-y_0) \end{aligned} \tag{31}$$

deoarece $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\theta_1(x)}{2a} = \delta(x)$.

Relaţiile (31) ne dau expresiile sarcinii concentrate $\vec{F}(P_1, P_2, P_3)$ aplicată în punctul $A\ (0, y_0)$.

Exemplul 2. Considerăm un pătrat $ABCD$ avînd latura $2\,a$, cu centrul în origine iar laturile paralele cu axele de coordonate (fig. 1).

Pe laturile AB şi CD avem definite respectiv cîmpurile

$$\vec{v}_1(x) \text{ şi } \vec{v}_2(x) = -\vec{v}_1(x),$$

unde

$$\vec{v}_1(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{4a^2}\vec{i} & \text{pentru } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{pentru } x \overline{\in} [-a, a] \end{cases} \quad P > 0 \tag{32}$$

$\vec{i}$ fiind versorul axei Ox.

În baza relaţiei (26), cîmpurile vectoriale $\vec{v}_1(x)$ şi $\vec{v}_2(x)$ sînt echivalente cu sarcina :

$$Q_x(x, y, a) = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P}{4a^2}h(x, y)\right],$$

unde

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in [-a, a],\ y \in [-a, a], \\ 0 \text{ pentru } x \overline{\in} [-a, a] \text{ sau } y \overline{\in} [-a, a]. \end{cases} \tag{33}$$

În mod similar dacă pe laturile BC și AD avem definite respectiv cîmpurile vectoriale

$$\vec{v}_3\,(y) \text{ și } \vec{v}_4\,(y) = -\,\vec{v}_3(y),$$

unde

$$\vec{v}_3\,(y) = \begin{cases} -\dfrac{P}{4a^2}\,\vec{j} & \text{pentru } y \in [-a,\ a], \\ 0 & \text{pentru } y \overline{\in} [-a,\ a], \end{cases} \tag{34}$$

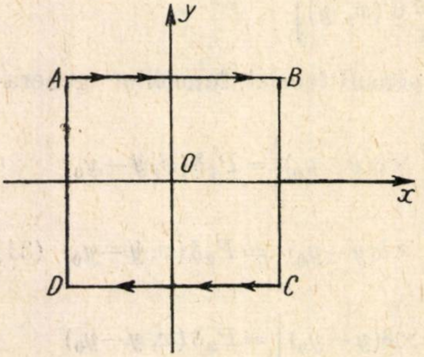


Fig. 1

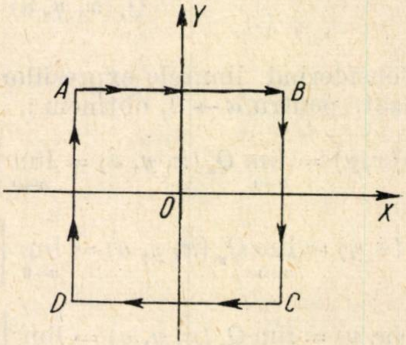


Fig. 2

$\vec{j}$ fiind versorul axei Oy, atunci cîmpurile considerate sînt echivalente cu sarcina :

$$Q_y(x,\,y,\,a) = \frac{\partial}{\partial x}\left[P \cdot \frac{h(x,\,y)}{4a^2}\right]. \tag{35}$$

Dacă pe laturile pătratului considerat acționează cîmpurile $\vec{v}_1\,(x)$, $\vec{v}_2(x)$, $\vec{v}_3\,(y)$ și $\vec{v}_4\,(y)$ (fig. 2), atunci cîmpurile vectoriale considerate sînt echivalente cu sarcina $\vec{Q}\,(x,\,y,\,a)$ ale cărei proiecții pe axele de coordonate sînt :

$$\begin{aligned} Q_x(x,\,y,\,a) &= -\,P\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{h\,(x,\,y)}{4\,a^2}\right], \\ Q_y(x,\,y,\,a) &= P\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h(x,\,y)}{4\,a^2}\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

În cazul cînd $a \to 0$, expresiile (36) devin :

$$\begin{aligned} p(x,\,y) &= \lim_{a\to 0} Q_x(x,\,y,\,a) = -\,P\frac{\partial}{\partial y}\left[\lim_{a\to 0}\frac{h(x,\,y)}{4a^2}\right] = -\,P\frac{\partial}{\partial y}\,\delta\,(x,\,y) \\ q\,(x,\,y) &= \lim_{a\to 0} Q_y(x,\,y,\,a) = P\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\lim_{a\to 0}\frac{h(x,\,y)}{4a^2}\right] = P\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\,(x,\ y) \end{aligned} \tag{37}$$

deoarece $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{h\,(x,\,y)}{4a^2} = \delta\,(x,\,y)$.

Expresiile (37) ne arată că limita cîmpurilor vectoriale reprezentate în figura 2, definește un moment concentrat rotațional.

CAPITOLUL II

Presupunem că asupra planului elastic infinit acționează sarcinile masice $X(x, y)$ și $Y(x, y)$ ce se exprimă prin funcții generalizate.

Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X(x,y) = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Considerînd problema ca o stare de deformație plană, ecuația de compatibilitate se va scrie sub forma:

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \tag{2}$$

unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ iar μ este coeficientul lui Poisson. Soluțiile acestei probleme exprimate prin intermediul produsului de convoluție în spațiul funcțiilor generalizate sînt date de ecuațiile:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{2\pi}(u_1 * X + u_2 * Y), \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{2\pi}(v_1 * X + v_2 * Y), \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{2\pi}(w_1 * X + w_2 * Y). \end{aligned} \tag{3}$$

Funcțiile u_i, v_i, w_i; $i = 1,2$ au expresiile:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{x}{2(1-\mu)(x^2+y^2)} - \frac{(1-2\mu)\cdot xy^2}{(1-\mu)(x^2+y^2)^2} - \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\ u_2 &= -\frac{y}{2(1-\mu)(x^2+y^2)} + \frac{(1-2\mu)\cdot x^2y}{(1-\mu)(x^2+y^2)^2} - \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\ v_1 &= -\frac{x}{2(1-\mu)(x^2+y^2)} + \frac{(1-2\mu)xy^2}{(1-\mu)(x^2+y^2)^2} + \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\ v_2 &= -\frac{y}{2(1-\mu)(x^2+y^2)} - \frac{(1-2\mu)x^2y}{(1-\mu)(x^2+y^2)^2} + \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\ w_1 &= -\frac{(1-2\mu)y(y^2-x^2)}{2(1-\mu)(x^2+y^2)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \\ w_2 &= \frac{(1-2\mu)x(y^2-x^2)}{2(1-\mu)(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pentru a arăta că soluţiile (3) răspund problemei, va fi necesară să arătăm că ele verifică ecuaţiile (1) şi (2).

În acest scop vom calcula expresiile :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + X &= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\right) * X + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) * Y\right] + X, \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + Y &= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) * X + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) * Y\right] + Y, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\Delta\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2\pi}\,[\,\Delta(u_1 + v_1) * X + \Delta\,(u_2 + v_2) * Y], \tag{6}$$

derivările considerîndu-se în sensul teoriei funcţiilor generalizate. Dacă funcţia $\Phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ reprezintă o funcţie obişnuită omogenă de gradul $-n+1$, local integrabilă, atunci derivata în sensul teoriei funcţiilor generalizate se calculează conform formulei :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_D + (-1)^{i-1}\,\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\int_\Gamma \Phi\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\ldots\mathrm{d}x_n, \tag{7}$$

([1], pag. 296) unde $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_D$ reprezintă derivata funcţiei Φ în sens obişnuit în domeniul D, iar Γ frontiera domeniului D.

Să observăm că funcţiile (4) considerate sînt omogene, local integrabile şi de gradul -1, din care cauză derivatele acestor funcţii se calculează conform formulei (7).

Aplicînd de două ori formula (7) pentru funcţiile u_1 şi v_1, obţinem :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_D + \delta\,(x, y)\int_\Gamma u_1\,\mathrm{d}y - w_1\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Alegînd în calitate de Γ cercul cu centrul în origine şi raza 1 găsim :

$$\int_\Gamma u_1\,\mathrm{d}y - w_1\mathrm{d}x = -2\pi\,; \tag{9}$$

deoarece

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_D = 0,$$

avem

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y} = -2\pi\;\delta\,(x, y). \tag{10}$$

În mod analog deoarece au loc relaţiile :

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_D = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_D = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right)_D = 0 \tag{11}$$

găsim :

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}=-2\pi\,\delta\,(x,y),\end{gathered}\tag{12}$$

Expresiile (5) în baza relaţiilor (10) şi (12) devin :

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+Y=0\end{gathered}\tag{13}$$

ceea ce demonstrează că ecuaţiile de echilibru (1) sînt satisfăcute.

În vederea verificării condiţiei de compatibilitate (2), vom calcula în prealabil expresiile :

$$\Delta\,(u_1+v_1)\ \text{şi}\ \Delta\,(u_2+v_2)\,.\tag{14}$$

În baza relaţiilor (4) avem :

$$u_1+v_1=-\frac{x}{(1-\mu)\,(x^2+y^2)}\,;\ u_2+v_2=-\frac{y}{(1-\mu)\,(x^2+y^2)}\cdot\tag{15}$$

Deoarece funcţia $\frac{2x}{x^2+y^2}$ este local integrabilă, putem scrie :

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\,(x^2+y^2)=\frac{2x}{x^2+y^2}\tag{16}$$

egalitate ce are loc atît în sens obişnuit cît şi în sensul teoriei funcţiilor generalizate.

Din acest motiv are loc relaţia :

$$u_1+v_1=-\frac{1}{2\,(1-\mu)}\frac{\partial}{\partial x}\ln\,(x^2+y^2).\tag{17}$$

Aplicînd operatorul Δ relaţiei precedente obţinem :

$$\begin{aligned}\Delta\,(u_1+v_1)&=-\frac{1}{2\,(1-\mu)}\,\Delta\left[\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2)\right]=\\ &=-\frac{1}{2\,(1-\mu)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta\ln\,(x^2+y^2)\right].\end{aligned}\tag{18}$$

Cum

$$\Delta \ln (x^2 + y^2) = 4\,\pi\delta(x, y), \tag{19}$$

relația (18) se va scrie sub forma

$$\Delta(u_1 + v_1) = -\frac{1}{2(1-\mu)}\frac{\partial}{\partial x}(4\pi\delta) = -\frac{2\pi}{1-\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\delta(x, y), \tag{18'}$$

În mod cu totul analog găsim :

$$\Delta(u_2 + v_2) = \frac{2\pi}{1-\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\delta(x, y)\,. \tag{20}$$

Avînd în vedere (18′) și (20), relația (6) devine :

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \tag{21}$$

ceea ce demonstrează faptul că condiția de compatibilitate (2) este satisfăcută.

Deci soluțiile (3) reprezintă într-adevăr soluțiile generalizate ale problemelor privind planul elastic infinit, cînd acesta este supus la sarcini masice ce se exprimă prin funcții generalizate.

În continuare vom rezolva cîteva probleme prin care se va ilustra și modul de aplicare al soluțiilor exprimate prin relațiile (3).

Exemplul 1. În punctul A (x_0, y_0) al planului elastic acționează forța concentrată $\vec{F}$ (P_1, P_2) care este echivalentă cu sarcina

$$\vec{Q}(X, Y) = \vec{F}\,\delta(x - x_0, y - y_0),$$

unde

$$X(x, y) = P_1\,\delta(x - x_0, y - y_0)$$
$$Y(x, y) = P_2\,\delta(x - x_0, y - y_0).$$

Conform relațiilor (3) avem :

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2\pi}[u_1(x - x_0, y - y_0)\,P_1 + u_2(x - x_0, y - y_0)P_2],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2\pi}[v_1(x - x_0, y - y_0)\,P_1 + v_2(x - x_0, y - y_0)P_2], \tag{22}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2\pi}[w_1(x - x_0, y - y_0)\,P_1 + w_2(x - x_0, y_0 - y_0)\,P_2].$$

Funcțiile u_i (x, y), v_i (x, y) și w_i (x, y), $i = 1{,}2$, sînt date de expresiile (4).

Exemplul 2. Planul elastic este supus în punctul $A\,(x_0,\ y_0)$ la un moment concentrat dirijat definit de versorii $\vec{U}^0$ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$; $\vec{F}^0$ $(\cos\beta, \sin\beta)$ şi de mărimea M a momentului.

În [2] s-a arătat că momentul concentrat dirijat corespunzător punctului $A\,(x_0,\ y_0)$ este echivalent cu sarcina:

$$\vec{Q}\,(X,Y) = -\frac{M\vec{F}_0}{|\vec{U}^0\times\vec{F}^0|}\left[\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x_0, y-y_0)\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\delta\,(x-x_0\,,\ y-y_0)\right],$$

unde

$$X\,(x,y) = -\frac{M\cos\beta}{|\vec{U}^0\times\vec{F}^0|}\left[\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\delta\,(x-x_0, y-y_0)+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-x_0, y-y_0)\right],$$

$$Y\,(x,y) = -\frac{M\sin\beta}{|\vec{U}^0\times\vec{F}^0|}\left[\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\delta\,(x-x_0, y-y_0)+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-x_0, y-y_0)\right].$$

În baza relaţiilor (3), tensiunile vor avea expresiile:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\frac{M\cos\beta}{2\pi|\sin(\beta-\alpha)|}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\right)_0+\sin\alpha\left(\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y}\right)_0\right]-\\
&\quad-\frac{M\sin\beta}{2\pi|\sin(\beta-\alpha)|}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial x}\right)_0+\sin\alpha\left(\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial y}\right)_0\right],\\
\sigma_{yy} &= -\frac{M\cos\beta}{2\pi|\sin(\beta-\alpha)|}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial x}\right)_0+\sin\alpha\left(\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y}\right)_0\right]-\\
&\quad-\frac{M\sin\beta}{2\pi|\sin(\beta-\alpha)|}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x}\right)_0+\sin\alpha\left(\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial y}\right)_0\right],\\
\sigma_{xy} &= -\frac{M\cos\beta}{2\pi|\sin(\beta-\alpha)|}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial w_1(x,y)}{\partial x}\right)_0+\sin\alpha\left(\frac{\partial w_1(x,y)}{\partial y}\right)_0\right]-\\
&\quad-\frac{M\sin\beta}{2\pi|\sin(\beta-\alpha)|}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial w_2(x,y)}{\partial x}\right)_0+\sin\alpha\left(\frac{\partial w_2(x,y)}{\partial y}\right)_0\right],
\end{aligned} \tag{23}$$

în care, de exemplu, expresia $\left(\frac{\partial H}{\partial x_0}\right)_0$ arată că în funcţia $\frac{\partial H}{\partial x}$ variabilele x şi y se înlocuiesc respectiv prin $x - x_0$ şi $y - y_0$.

Exemplul 3. Fie M mărimea momentului concentrat rotaţional aplicat în ordinea axelor după cum se arată în figura 3.

Conform celor arătate în Cap. I, privind momentul rotațional, înseamnă că acesta este echivalent cu sarcina $\vec{Q}\,(X, Y)$, unde

$$X\,(x,y) = \frac{M}{2}\frac{\partial}{\partial y}\delta\,(x, y)$$

$$Y\,(x,y) = -\frac{M}{2}\frac{\partial}{\partial x}\delta\,(x, y),$$

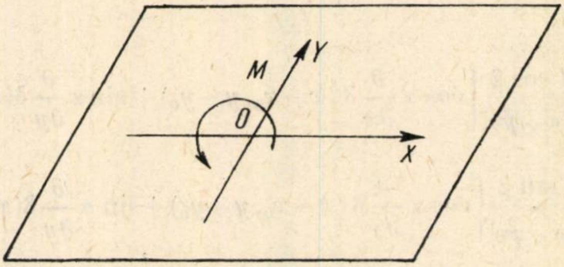


Fig. 3

Conform relațiilor (3) tensiunile sînt :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{M}{4\pi}\left(\frac{\partial u_1\,(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_2\,(x, y)}{\partial x}\right),\\ \sigma_{yy} &= \frac{M}{4\pi}\left(\frac{\partial v_1\,(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial v_2\,(x, y)}{\partial x}\right),\\ \sigma_{xy} &= \frac{M}{4\pi}\left(\frac{\partial w_1\,(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial w_2\,(x, y)}{\partial x}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Exemplul 4. Pe segmentul AB, unde $A\,(-a, a)$ și $B\,(a, a)$, avem definit cîmpul de vectori :

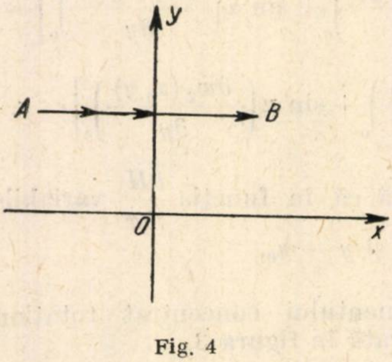


Fig. 4

$$\vec{v} = \begin{cases} P\,\vec{i} \text{ pentru } x \in [-a, a]\\ 0 \text{ pentru } x \overline{\in} [-a, a]\end{cases}$$

în care $a > 0$; $P > 0$ iar $\vec{i}$ reprezintă versorul OX (fig. 4).

După cum am arătat în Cap. 1, cîmpul vectorial considerat este echivalent cu sarcina $\vec{Q}\,(X, Y)$, unde

$$X\,(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\,[P\,\overline{\theta}\,(x, y)]$$

$$Y\,(x, y) = 0$$

în care

$$\bar{\theta}(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in [-a, a] \text{ şi } y \geqslant a, \\ 0 \text{ pentru } x \,\overline{\in}\, [-a, a] \text{ sau } y < a. \end{cases}$$

Tensiunile σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} conform relaţiei (3) sînt :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{P}{2\pi} \frac{\partial u_1}{\partial y} * \bar{\theta}(x, y), \\ \sigma_{yy} &= \frac{P}{2\pi} \frac{\partial v_1}{\partial y} * \bar{\theta}(x, y), \\ \sigma_{xy} &= \frac{P}{2\pi} \frac{\partial w_1}{\partial y} * \bar{\theta}(x, y). \end{aligned} \tag{25}$$

În baza relaţiilor (4) şi (7) vom avea :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_D \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)_D \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} &= \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_D - \frac{\pi(3 - 4\mu)}{4(1 - \mu)} \delta(x, y), \end{aligned} \tag{26}$$

unde simbolul $\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_D$ reprezintă derivata parţială a funcţiei H în sens obişnuit.

Deoarece

$$\lim_{y \to \infty} u_1(x, y) = \lim_{y \to \infty} v_1(x, y) = \lim_{y \to \infty} w_1(x, y) = 0$$

avem

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{2\pi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_D * \bar{\theta}(x, y) = \frac{P}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u_1(x-\xi, y-\eta)}{\partial y}\right)_D \bar{\theta}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{27}$$

sau

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} d\xi \int_{a}^{\infty}\left(\frac{\partial u_1(x-\xi, y-\eta)}{2\eta}\right)_D d\eta = \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} u_1(x-\xi, y-a)\, d\xi. \tag{27'}$$

În mod cu totul similar obţinem :

$$\sigma_{yy} = \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} v_1(x-\xi, y-a)\, d\xi$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{8(1-\mu)} \cdot (4\mu - 3)\, w_1(x, y) + \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} w_1(x-\xi, y-a)\, d\xi. \tag{28}$$

Deci tensiunile în cazul problemei considerate sînt :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} u_1\,(x-\xi,\, y-a)\,\mathrm{d}\xi,\\ \sigma_{yy} &= \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} v_1\,(x-\xi,\, y-a)\,\mathrm{d}\xi,\\ \sigma_{xy} &= \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} w_1\,(x-\xi,\, y-a)\,\mathrm{d}\xi + \frac{P}{8(1-\mu)}\,(4\mu-3)\,w_1\,(x, y)\,.\end{aligned} \tag{29}$$

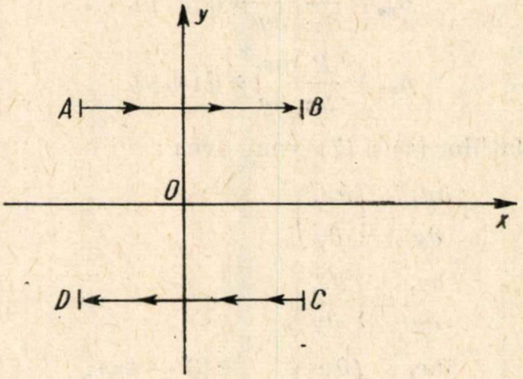


Fig. 5

Exemplul 5. Vom presupune că asupra planului elastic infinit acționează pe lîngă sarcina considerată în exemplul 4 o sarcină egală și de sens contrar dispusă simetric în raport cu axa OX (fig. 5). Conform celor arătate în Cap. I, exemplul 2, sarcinile considerate sînt echivalente cu sarcina $\vec{Q}\,(X,\; Y)$ avînd proiecțiile :

$$X\,(x, y) = -P\frac{\partial}{\partial y}\,h\,(x, y),$$
$$Y\,(x, y) = 0,$$

unde

$$h\,(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in [-a, a] \text{ și } y \in [-a, a],\\ 0 \text{ pentru } x \overline{\in} [-a, a] \text{ sau } y \overline{\in} [-a, a].\end{cases}$$

În baza relației (3) tensiunile vor fi :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{P}{2\pi}\frac{\partial u_1}{\partial y} * h\,(x, y),\\ \sigma_{yy} &= -\frac{P}{2\pi}\frac{\partial v_1}{\partial y} * h\,(x, y),\\ \partial_{xy} &= -\frac{P}{2\pi}\frac{\partial w_1}{\partial y} * h\,(x, y).\end{aligned} \tag{30}$$

Ţinînd seama de (26) avem

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{2\pi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_D * h\,(x, y) = -\frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} \mathrm{d}\,\xi \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial u_1 (x-\xi, y-\eta)}{\partial y}\right)_D \mathrm{d}\,\eta \quad (31)$$

sau încă

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} (u_1\,(x-\xi, y-a) - u_1\,(x-\xi, y+a))\,\mathrm{d}\,\xi\,. \quad (31')$$

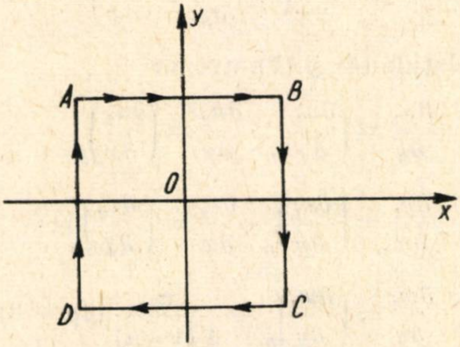


Fig. 6

În mod cu totul similar obţinem :

$$\sigma_{yy} = \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} (v_1\,(x-\xi, y-a) - v_1\,(x-\xi, y+\mathrm{a}))\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P}{8\,(1-\mu)}\,(4\mu-3)\,w_1\,(x, y) + \quad (32)$$

$$+\frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a} (w_1\,(x-\xi, y-a) - w_1\,(x-\xi, y+a))\,\mathrm{d}\,\xi\,.$$

Exemplul 6. De-a lungul pătratului $ABCD$ considerat în problema precedentă, acţionează pe unitatea de lungime sarcina P cum se arată în figura 6.

Cîmpul considerat conform celor arătate în Cap. I (36), este echivalent cu sarcina $\vec{Q}(X, Y)$, unde

$$X\,(x, y) = -P\frac{\partial}{\partial y}h\,(x, y),$$

$$Y\,(x, y) = P\frac{\partial}{\partial x}\,h\,(x, y).$$

În baza relaţiei (3) avem :

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{P}{2\pi}\left(-\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) * h,\\
\sigma_{yy} &= \frac{P}{2\pi}\left(-\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) * h,\\
\sigma_{xy} &= \frac{P}{2\pi}\left(-\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) * h.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Ţinînd seamă de relaţiile (4) şi (7), avem :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial y}=\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_D, \frac{\partial u_2}{\partial x}=\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_D,\\
&\frac{\partial v_1}{\partial y}=\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)_D, \frac{\partial v_2}{\partial x}=\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_D,\\
&\frac{\partial w_1}{\partial y}=\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_D+\frac{\pi}{4\,(1-\mu)}(4\mu-3)\;\delta\,(x, y),\\
&\frac{\partial w_2}{\partial x}=\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_D+\frac{\pi}{4\,(1-\mu)}(4\mu-3)\;\delta\,(x, y)\,.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Urmînd calcule analoage cu cele efectuate în problema precedentă obţinem :

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a}(u_1\,(x-\xi, y-a)-u_1\,(x-\xi, y+a))\,\mathrm{d}\xi-\\
&-\frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a}(u_2\,(x-a, y-\eta)-u_2\,(x+a, y-\eta))\,\mathrm{d}\eta,\\
\sigma_{yy} &= \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a}(v_1\,(x-\xi, y-a)-v_1\,(x-\xi, y+a))\,\mathrm{d}\xi-\\
&-\frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a}(v_2\,(x-a, y-\eta)-v_2\,(x+a, y-\eta))\,\mathrm{d}\eta\\
\sigma_{xy} &= \frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a}(w_1\,(x-\xi, y-a)-w_1\,(x-\xi, y+a))\,\mathrm{d}\xi-\\
&-\frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a}(w_2\,(x-a, y-\eta)-w_2\,(x+a, y-\eta))\,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Primită la redacţie la 6 noiembrie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщение и действия над ними*. Том 1, Москва, 1958.
2. W. Kecs, *Asupra problemelor privind semispaţiul elastic*. Bul. Mat. Soc. Şt. Mat. Fiz. R.P.R., *3–4*, 1962.
3. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, I, II, Hermann, Paris, 1950–1951.
4. И. М. Снеддон, Д. С. Берри, *Классическая теория упругости*. Москва, 1961.
5. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticităţii*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962.

VARIABILE ALEATOARE APROAPE CONTINUE[1]

DE

G. GODINI
Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

Se consideră un cîmp de probabilitate complet aditiv $[E, K, P]$, unde mulțimea E este presupusă un spațiu topologic. Se definește noțiunea de variabilă aleatoare aproape continuă și se dau unele proprietăți locale și globale ale unei astfel de variabile aleatoare.

§ 1. DEFINIȚIA ȘI PROPRIETĂȚILE VARIABILELOR ALEATOARE APROAPE CONTINUE

Vom considera un cîmp de probabilitate complet aditiv $[E, K, P]$, unde mulțimea E este presupusă un spațiu topologic.

DEFINIȚIA 1. *O variabilă aleatoare $f(\xi)$ este aproape continuă în punctul ξ_0, dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există o vecinătate a punctului ξ_0, $V_{\xi_0}^{\varepsilon} \in K$ (această vecinătate poate fi și mulțimea E), astfel încît pentru orice $\xi \in V_{\xi_0}^{\varepsilon}$ să avem:*

$$P\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} = 0. \tag{1}$$

De exemplu, dacă vom considera cîmpul de probabilitate complet aditiv $[E, K, P]$, unde $E = [0,1]$, K este corpul părților boreliene conținute în E, iar P măsura Lebesgue, variabila aleatoare

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \xi \text{ irațional} \\ 1 & ,, \quad \xi \text{ rațional} \end{cases} \tag{2}$$

este aproape continuă în orice punct irațional și nu este aproape continuă în nici un punct rațional.

Observația 1. Noțiunea de aproape continuitate este o generalizare a noțiunii obișnuite de continuitate în sensul că dacă vom considera cîmpul

---

[1] Lucrare prezentată la sesiunea științifică a tineretului din 19–20 iunie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 399–406, BUCUREȘTI, 1965

de probabilitate $[E,K,P]$, unde vom lua pentru E o mulţime măsurabilă *(L)*, K fiind corpul părţilor boreliene conţinute în E, iar P măsura Lebesgue normată, atunci continuitatea unei variabile aleatoare într-un punct ξ implică aproape continuitatea în acel punct.

Observaţia 2. Aproape continuitatea depinde de cîmpul de probabilitate $[E,K,P]$. Astfel, dacă vom considera variabila aleatoare $f(\xi)$ definită ca la (2) şi vom lua $E = [0,1]$, $K' = [\theta, E, I, R]$ (am notat cu I mulţimea numerelor iraţionale şi cu R mulţimea numerelor raţionale din E), iar $P(I) = P(R) = \frac{1}{2}$, $f(\xi)$ nu este aproape continuă în nici un punct din E; dar dacă vom lua pentru P măsura Lebesgue, ea este aproape continuă în orice punct iraţional.

Vom stabili acum cîteva proprietăţi locale ale variabilelor aproape continue definite pe un acelaşi cîmp de probabilitate $[E,K,P]$.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă $f(\xi)$ şi $g(\xi)$ sînt două variabile aleatoare aproape continue în punctul ξ_0, atunci suma lor $s(\xi) = f(\xi) + g(\xi)$ este aproape continuă în acelaşi punct.*

Fie, pentru aceasta, un $\varepsilon > 0$ dat. Avem atunci :

$$\{\xi \mid |s(\xi) - s(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} = \{\xi \mid |f(\xi) + g(\xi) - f(\xi_0) - g(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \left\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\xi \mid |g(\xi) - g(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

De aici :

$$P\{\xi \mid |s(\xi) - s(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\left\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} +$$

$$+ P\left\{\xi \mid |g(\xi) - g(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{3}$$

Dar $f(\xi)$ şi $g(\xi)$ sînt aproape continue în punctul ξ_0. Prin urmare există vecinătăţi, $\overline{V}_{\xi_0}^{\frac{\varepsilon}{2}}$ şi $\widetilde{V}_{\xi_0}^{\frac{\varepsilon}{2}}$ aşa încît să avem îndeplinite egalităţile :

$$\left.\begin{aligned} P\left\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} &= 0 \text{ pentru } \xi \in \overline{V}_{\xi_0}^{\frac{\varepsilon}{2}}, \\ P\left\{\xi \mid |g(\xi) - g(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} &= 0 \text{ pentru } \xi \in \widetilde{V}_{\xi_0}^{\frac{\varepsilon}{2}}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Să notăm cu $V_{\xi_0}^{\varepsilon} = \overline{V}_{\xi_0}^{\frac{\varepsilon}{2}} \cap \widetilde{V}_{\xi_0}^{\frac{\varepsilon}{2}}$. Pentru $\xi \in V_{\xi_0}^{\varepsilon}$ amîndouă din inegalităţile (4) sînt satisfăcute şi avem, ţinînd seama de (3) :

$$P\{\xi \mid |s(\xi) - s(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} = 0 \text{ pentru } \xi \in V_{\xi_0}^{\varepsilon}.$$

PROPOZIŢIA 2. *Dacă $f(\xi)$ este o variabilă aleatoare aproape continuă în punctul ξ_0, iar λ un număr real oarecare, atunci variabila aleatoare $\lambda f(\xi)$ este aproape continuă în punctul ξ_0.*

Dacă $\lambda = 0$, propoziţia este evidentă. Fie deci $\lambda \neq 0$. Avem atunci :

$$\{\xi \mid |\lambda f(\xi) - \lambda f(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} = \{\xi \mid |\lambda| \, |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} =$$
$$= \left\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right\}.$$

Deci

$$P\{\xi \mid |\lambda f(\xi) - \lambda f(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} = P\left\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right\} = 0$$

pentru $\xi \in V_{\xi_0}^{\frac{\varepsilon}{|\lambda|}}$ deoarece $f(\xi)$ este aproape continuă în ξ_0.

PROPOZIŢIA 3. *Dacă $f(\xi)$ şi $g(\xi)$ sînt două variabile aleatoare aproape continue în punctul ξ_0, atunci produsul lor este o variabilă aleatoare aproape continuă în punctul considerat.*

Putem presupune că $g(\xi_0) \neq 0$ pentru că în cazul contrar vom considera variabila aleatoare $g(\xi) + \lambda$ $(\lambda \neq 0)$ şi vom ţine seama de propoziţiile 1 şi 2.

Fie $p(\xi) = f(\xi)\, g(\xi)$ variabila aleatoare produs şi fie $\varepsilon > 0$ dat. Avem atunci :

$$\varepsilon \leqslant |p(\xi) - p(\xi_0)| = |f(\xi)\, g(\xi) - f(\xi)\, g(\xi_0) + f(\xi)\, g(\xi_0) -$$
$$- f(\xi_0)\, g(\xi_0)| \leqslant |f(\xi)|\, |g(\xi) - g(\xi_0)| + |g(\xi_0)|\, |f(\xi) - f(\xi_0)|.$$

Dar $f(\xi)$ este aproape continuă în punctul ξ_0. Atunci ea este mărginită într-o vecinătate a punctului ξ_0 cu excepţia unei mulţimi de probabilitate zero. Într-adevăr, $\varepsilon > 0$ fiind dat, există o vecinătate $\overline{V}_{\xi_0}$, aşa încît :

$$P\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} = 0 \text{ pentru } \xi \in \overline{V}_{\xi_0}. \tag{5}$$

Deci avem $f(\xi_0) - \varepsilon \leqslant f(\xi) \leqslant f(\xi) + \varepsilon$ pentru toate punctele $\xi \in \overline{V}_{\xi_0}$ cu excepţia unei mulţimi de probabilitate nulă. Adică relaţia $|f(\xi)| \leqslant M$ are loc într-o vecinătate a punctului ξ_0, în afara unei mulţimi de probabilitate zero.

Variabilele aleatoare $f(\xi)$ şi $g(\xi)$ sînt aproape continue şi deci există vecinătăţi $\widetilde{V}_{\xi_0}$, $\widetilde{\widetilde{V}}_{\xi_0}$, astfel ca să aibă loc relaţiile :

$$\left.\begin{aligned} &P\left\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2|g(\xi_0)|}\right\} = 0 \text{ pentru } \xi \in \widetilde{V}_{\xi_0}, \\ &P\left\{\xi \mid |g(\xi) - g(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right\} = 0 \text{ pentru } \xi \in \widetilde{\widetilde{V}}_{\xi_0}. \end{aligned}\right. \tag{5'}$$

Dar :

$$\{\xi \,||\, p(\xi) - p(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\xi \,||\, f(\xi)||g(\xi) - g(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\xi \,||\, g(\xi_0)||f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \left\{\xi \,||\, g(\xi) - g(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\xi \,||\, f(\xi)| > M\right\} \cup \left\{\xi \,||\, f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2|g(\xi_0)|}\right\}.$$

Dacă $\xi \in V^{\varepsilon}_{\xi_0}$, unde am notat $V^{\varepsilon}_{\xi_0} = \overline{V}_{\xi_0} \cap \widetilde{V}_{\xi_0} \cap \overset{\approx}{V}_{\xi_0}$, ținînd seama de (5) și (5′), obținem :

$$P\{\xi |\, p(\xi) - p(\xi_0)| \geqslant \varepsilon = 0,$$

adică tocmai aproape-continuitatea variabilei aleatoare produs în punctul ξ_0.

PROPOZIȚIA 4. *Dacă $f(\xi)$ este o variabilă aleatoare aproape continuă în punctul ξ_0 și $f(\xi_0) \neq 0$, atunci variabila aleatoare $g(\xi) = \dfrac{1}{f(\xi)}$ este aproape continuă în punctul ξ_0.*

Fie $\varepsilon > 0$ dat :

$$\{\xi \,||\, g(\xi) - g(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} = \left\{\xi \left|\left|\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{f(\xi_0)}\right| \geqslant \varepsilon\right.\right\} = \left\{\xi \left| \frac{|f(\xi) - f(\xi|_0)}{|f(\xi)||f(\xi_0)|} \geqslant \varepsilon\right.\right\}.$$

Variabila aleatoare $f(\xi)$ fiind aproape continuă în punctul ξ_0 și fiind diferită de zero în acest punct, există o vecinătate $\overline{V}_{\xi_0}$ a punctului ξ_0, unde $|f(\xi)| \geqslant m$ cu excepția unei mulțimi de probabilitate nulă. De asemenea, există o vecinătate $\overline{\overline{V}}_{\xi_0}$ a punctului ξ_0 în care are loc relația :

$$P\{\xi \,||\, f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \varepsilon m^2\} = 0 \text{ pentru orice } \xi \in \overline{\overline{V}}_{\xi_0}$$

Alegînd $V^{\varepsilon}_{\xi_0} = \overline{V}_{\xi_0} \cap \overline{\overline{V}}_{\xi_0}$, pentru orice $\xi \in V^{\varepsilon}_{\xi_0}$ avem

$$P\left\{\xi \,||\, g(\xi) - g(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Din propozițiile 3 și 4 rezultă

PROPOZIȚIA 5. *Cîtul a două variabile aleatoare aproape continue într-un punct ξ_0 este o variabilă aleatoare aproape continuă în punctul considerat, dacă numitorul nu se anulează în acel punct.*

Toate proprietățile de mai sus sînt și proprietăți ale variabilelor aleatoare continue obișnuite.

§ 2. PROPRIETĂȚILE GLOBALE ALE VARIABILELOR ALEATOARE APROAPE CONTINUE

(Variabile aleatoare aproape continue pe un spațiu compact)

DEFINIȚIA 2. *O variabilă aleatoare se spune că este aproape continuă pe mulțimea E dacă este aproape continuă în fiecare punct al acestei mulțimi.*

DEFINIŢIA 3. *O variabilă aleatoare $f(\xi)$ se numeşte uniform aproape continuă pe mulţimea E dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$, există o acoperire finită a mulţimii E, cu mulţimi deschise din K, $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n_\varepsilon} G_i^\varepsilon$ astfel ca pentru orice $\bar{\xi}_i \in G_i^\varepsilon$ să avem:*

$$P\{\xi \mid |f(\xi) - f(\bar{\xi}_i)| \geqslant \varepsilon\} = 0 \text{ pentru } \xi \in G_i^\varepsilon \ (i = 1,2,\ldots,n_\varepsilon) \tag{6}$$

PROPOZIŢIA 6. *O variabilă aleatoare uniform aproape continuă pe mulţimea E este aproape continuă pe aceeaşi mulţime.*

Demonstraţia este evidentă.

PROPOZIŢIA 7. *O variabilă aleatoare $f(\xi)$ aproape continuă pe mulţimea E compactă este uniform aproape continuă pe această mulţime cu excepţia unei mulţimi de probabilitate zero.*

Fie $\varepsilon > 0$ dat. Pentru orice punct $\xi \in E$ există o vecinătate $V_\xi \in K$ a punctului ales aşa încît să aibă loc relaţia:

$$P\left\{\xi' \mid |f(\xi') - f(\xi)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0 \quad \text{pentru } \xi' \in V_\xi.$$

Mulţimile V_ξ $(\xi \in E)$ formează o acoperire deschisă a mulţimii E compacte. Deci există un număr finit de vecinătăţi G_i^ε $(i = 1,\ldots,n_\varepsilon)$ aparţinînd punctelor ξ_i, astfel ca:

$$P\left\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_i)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0 \text{ pentru } \xi \in G_i^\varepsilon.$$

Fie $\bar{\xi} \in G_i^\varepsilon$ un punct pentru care avem

$$|f(\bar{\xi}) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Atunci:

$$|f(\bar{\xi}) - f(\xi)| \leqslant |f(\bar{\xi}) - f(\xi_i)| + |f(\xi_i) - f(\xi)|$$

şi deci:

$$P\{\xi \mid |f(\bar{\xi}) - f(\xi)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\left\{\xi \mid |f(\xi_i) - f(\xi)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0.$$

Dar relaţia (7) nu este îndeplinită pentru o mulţime de probabilitate zero. Relaţia (6) este deci satisfăcută pentru orice $\xi \in G_i^\varepsilon$ cu excepţia unei mulţimi de probabilitate nulă.

TEOREMA 1. *Dacă $f(\xi)$ este o variabilă aleatoare aproape continuă pe mulţimea E compactă, atunci $f(\xi)$ este mărginită pe E cu excepţia unei mulţimi de probabilitate zero.*

Variabila aleatoare $f(\xi)$ fiind aproape continuă în orice punct ξ, vom găsi pentru orice astfel de punct o vecinătate V_ξ așa încît $f(\xi')$ să fie mărginită în această vecinătate cu excepția unei mulțimi de probabilitate zero. Aceste vecinătăți formează o acoperire a mulțimii E compactă. Există deci un număr finit de vecinătăți care acoperă mulțimea E. Fie $G_1, G_2, \ldots$ $\ldots, G_n$ mulțimile deschise din acoperire, pentru care au loc relațiile :

$$P\{\xi \mid |f(\xi)| \geqslant M_k\} = 0 \text{ pentru } \xi \in G_k \qquad (k = 1,2,\ldots,n).$$

Să punem

$$M = \operatorname*{Max}_{i=1,\ldots n} M_i .$$

Atunci :

$$P\{\xi \mid |f(\xi)| \geqslant M\} = 0 \text{ pentru } \xi \in E .$$

Reciproca acestei teoreme nu este întotdeauna adevărată. De exemplu variabila aleatoare de la observația 2 nu este aproape continuă în nici un punct din E.

TEOREMA 2. *O variabilă aleatoare aproape continuă pe mulțimea E este integrabilă pe această mulțime.*

Dacă $f(\xi)$ este o variabilă aleatoare mărginită, atunci ea este integrabilă.

Dacă $f(\xi)$ nu este o variabilă aleatoare mărginită pe mulțimea E, fiind aproape continuă, conform teoremei 1, ea este mărginită cu excepția unei mulțimi de probabilitate zero. Pe această mulțime — să o notăm cu E' — $f(\xi)$ este integrabilă și

$$\int_{E'} f = 0.$$

Pe mulțimea $E'' = CE'$, $f(\xi)$ este mărginită și deci integrabilă. Cum $f(\xi)$ este integrabilă pe mulțimea E' și E'', ea este integrabilă pe mulțimea $E = E' \cup E''$ $(E' \cap E'' = \emptyset)$.

§ 3. CONVERGENȚA UNIFORMĂ ÎN PROBABILITATE

Fie $[E,K,P]$ un cîmp de probabilitate complet aditiv și fie $f_n(\xi)$ un șir de variabile aleatoare aproape continue pe E și convergente în probabilitate către o variabilă aleatoare $f(\xi)$. Este această variabilă aleatoare aproape continuă pe E?. Răspunsul la această întrebare nu este întotdeauna afirmativ. De exemplu, să considerăm cîmpul de probabilitate $[E, K, P]$ definit în felul următor : $E = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, K mulțimea tuturor părților boreliene din E, iar P măsura Lebesgue. Să considerăm șirul de variabile aleatoare continue pe E și deci aproape continue, definite în felul următor $f_n(\xi) = (\xi^2 - 1)^n$. Acest șir converge în probabilitate către variabila aleatoare

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{,, } \xi = 0 \end{cases}$$

care nu este aproape continuă în origine. Constatarea acestui fapt conduce la noțiunea de convergență în probabilitate.

DEFINIȚIA 4. *Fie* $f_n(\xi)$ *un șir de variabile aleatoare și* $f(\xi)$ *o variabilă aleatoare. Spunem că șirul* $f_n(\xi)$ *converge uniform în probabilitate* [2] *către* $f(\xi)$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* N_ε *astfel încît :*

$$P\{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| \geqslant \varepsilon\} = 0 \text{ dacă } n > N_\varepsilon .$$

Cu această definiție putem da un răspuns problemei puse la începutul acestui paragraf.

TEOREMA 3. *Dacă șirul de variabile aleatoare aproape continue în punctul* ξ_0 *converge uniform în probabilitate către variabila aleatoare* $f(\xi)$, *atunci* $f(\xi)$ *este aproape continuă în punctul* ξ *cînd* $f_n(\xi_0)$ *converge către* $f(\xi_0)$. (*Este suficient să existe un subșir* $f_{n_k}(\xi_0)$ *care să conveargă către* $f(\xi_0)$.

Fie $\varepsilon > 0$ dat și $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ două numere pentru care avem :

$$|f_n(\xi_0) - f(\xi_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pentru } n > N_1(\varepsilon),$$

și

$$P\left\{\xi \mid |f_n(\xi) - f(\xi)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\} = 0 \text{ pentru } n > N_2(\varepsilon).$$

Pentru un anume $n > \max(N_1, N_2)$ să determinăm o vecinătate V_{ξ_0}, așa încît :

$$P\left\{\xi \mid |f_n(\xi) - f_n(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\} = 0 \text{ pentru } \xi \in V_{\xi_0}. \tag{8}$$

Avem inegalitățile evidente :

$$\varepsilon \leqslant |f(\xi) - f(\xi_0)| \leqslant |f(\xi) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f_n(\xi_0)| + |f_n(\xi_0) - f(\xi_0)|$$

în care îl vom fixa pe n în așa fel încît să îndeplinească condiția (8) :

$$\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\xi \mid |f(\xi) - f_n(\xi)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\xi \mid |f_n(\xi) - f_n(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

---

[2]) Aceasta este echivalent cu a spune că șirul $f_n(\xi)$ converge uniform către $f(\xi)$ pe o mulțime care diferă de E printr-o mulțime de probabilitate zero.

$$P\{\xi \mid |f(\xi) - f(\xi_0)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\left\{\xi \mid |f(\xi) - f_n(\xi)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\} +$$

$$+ P\left\{\xi \mid |f_n(\xi) - f_n(\xi_0)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\} = 0$$

pentru $\xi \in V_{\xi_0}$.

Deci $f(\xi)$ este aproape continuă în punctul ξ_0.

Primită la redacţie la 17 noiembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. O. Onicescu şi colab., *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii.* Bucureşti, 1956.
2. M. Nicolescu, *Analiza matematică,* Bucureşti, 1960.
3. P. Halmoş, *Teoriia meri,* Moscova, 1953.

ASUPRA ALGEBRELOR DE FUNCŢII LIPSCHITZIENE. I

DE

V. ISTRĂŢESCU

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

Fie Cl^{α} $(X\ B)$ algebra Banach a funcţiilor continue care au valori într-o algebră Banach comutativă în care luăm norma

$$||f||_{CL^{\alpha}} = ||f||_c + m(f).$$

$$||f||_c = \sup_{t\in X} |f(t)|_B$$

$$m(f) = \sup_{t_1 \neq t_2} \left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{\rho(t_1\ t_2)^{\alpha}} \right| < \infty.$$

În această lucrare, se arată că dacă A este o subalgebră închisă care separă punctele lui X şi conţine unitatea, atunci există o submulţime închisă $F \subset X$ astfel încît

$$\sup_{t\in F} |f| + \sup_{t_1 \neq t_1,\, t_2 \in F} \left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{\rho(t_1,\ t_2)\alpha} \right| = ||f||_{CL^{\alpha}}$$ ($B = C$ corpul numerelor complexe).

Se arată apoi că F este unică şi minimală.

În această lucrare ne vom ocupa de o clasă de algebre Banach care intervin în multe probleme de analiză şi anume de algebrele ale căror elemente sînt funcţii definite pe un compact metric şi care satisfac o condiţie de tip Hölder.

1. Fie X un spaţiu Hausdorff compact şi metric : ρ metrica sa. Prin CL^{α} $(X,\ B)$ vom însemna algebra funcţiilor definite pe X cu valori în algebra Banach comutativă B cu element unitate pentru care

$$m(f) = \sup_{t_1 \neq t_2} \left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{\rho(t_1,\ t_2)^{\alpha}} \right| < \infty.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 407–411, BUCUREŞTI, 1965

Pentru $f \in CL^{\alpha}(X, B)$ vom pune

$$\|f\|_{CL^{\alpha}} = m(f) + \|f\|_{c} \cdot$$

Se verifică imediat că obţinem în acest mod o algebră Banach. În cele ce urmează B va fi corpul numerelor complexe şi o vom nota cu $CL^{\alpha}(X)$.

2. Să considerăm $A \subset CL^{\alpha}(X)$ o subalgebră închisă. Vom căuta să extindem pentru astfel de algebră noţiunea de frontieră.

DEFINIŢIA 2.1. *O mulţime $F \subset X$ o vom numi admisibilă dacă :*

1. *este închisă*

$$2.\ \sup_{t \in F} |f(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2,\, t_1 t_2 \in F} \left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{\rho(t_1, t_2)^{\alpha}} \right| = \|f\|_{CL^{\alpha}}\ ; (\forall) f \in A.$$

DEFINIŢIA 2.2. *O mulţime ${}_5\Gamma$ se va numi frontieră pentru algebra A dacă este admisibilă, minimală şi unică.*

În cele ce urmează ne vom ocupa de existenţa mulţimilor cu proprietăţile indicate în definiţiile 2.1 şi 2.2.

LEMA 2.1. *Dacă $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$ este un şir de mulţimi admisibile, atunci şi $F = \bigcap F_n$ este admisibilă.*

DEMONSTRAŢIE. Proprietatea 1) este evidentă. Trebuie să verificăm pe 2). Avem evident relaţiile

$$m_{F_1}(f) \geqslant m_{F_2}(f) \geqslant m_{F_3}(f) \geqslant \ldots \geqslant m_{F_n}(f) \geqslant m_{F_{n+1}}(f) \geqslant \ldots \tag{1}$$

$$\|f\|_{c(F_1)} \geqslant \|f\|_{c(F_2)} \geqslant \ldots \geqslant \|f\|_{c(F_n)} \geqslant \|f\|_{c(F_{n+1})} \geqslant \ldots \tag{2}$$

$$\|f\|_{c(F)} = \sup_{t \in F} |f(t)|$$

şi

$$\|f\|_{c(F_i)} + m_{F_i}(f) = \|f\|_{CL^{\alpha}(X)}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Fie acum M un punct limită al şirului $\{M_n\}$, unde M_n satisfac relaţia

$$\|f\|_{c(F_j)} = |f(M_n)| \cdot$$

Dacă

$$|f|(M_n) < |f|(M_{n-1})| \tag{4}$$

ar rezulta că

$$m_{F_{n-1}}(f) = \|f\|_{CL^{\alpha}(X)} - |f(M_{n-1})| > \|f\|_{CL^{\alpha}(X)} - |f(M_n)| = m_{F_n}(f)$$

adică

$$m_{F_{n-1}}(f) > m_{F_{n-1}}(f) \cdot$$

care adunată cu relaţia (4) ne duce la contradicţie. Rezultă astfel că $|f(M_j)| = |f(M_{j-1})|$ pentru orice j şi $m_{F_n}(f) = m_{F_{n-1}}(f)$. De aici deducem că pentru punctul M avem

$$|f(M)| = \|f\|_{c} \cdot$$

Pentru a demonstra lema mai avem de arătat că

$$m_F(f) = m(f).$$

Dacă

$$m_{F_j}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n^{j_0}) - f(y_n^j)|}{\rho(x_n^j, y_n^j)^\alpha},$$

deducem că pentru orice subşir de forma $\{x_n^{j(n)}, \ y_n^{j(n)}\}$ avem

$$m_F(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n^{j(n)} - f(y_n^{j(n)})|}{\rho(x_n^{j(n)}, \ y_n^{j(n)})^\alpha}$$

şi deci F este admisibilă.

Din lema 2.1 rezultă că familia mulţimilor $\{F\}$ considerată este inductivă faţă de relaţia de ordine

$$F_1 \leqslant F_2 \text{ dacă } F_1 \subset F_2 .$$

În acest caz lema lui Zorn arată că există cel puţin o mulţime minimală cu proprietatea

$$\sup_{t\in F} |f(t)| + \sup_{t_1\neq t_2,\, t_1,\, t_2\in F} \left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{\rho(t_1, \ t_2)^\alpha} \right| = \|f\|_{CL^\alpha(X)}.$$

Problema care se pune în mod natural în acest caz este aceea dacă există numai o astfel de mulţime.

Lema 2.2. *Există numai o mulţime F cu proprietăţile de mai sus.*

Demonstraţie. Să presupunem că nu este aşa. Rezultă că există două mulţimi F_1 şi F_2 cu proprietăţile indicate. Vom arăta că orice punct $M_1 \in F_1$ are proprietatea că orice vecinătate a sa conţine puncte $M_2 \in F_2$ şi în acest mod va fi demonstrată unicitatea.

Fie $x_0 \in F_1$ şi $x \in F_2$. Există funcţiile din A $\{f_1, \ldots, f_n\}$ astfel ca

$$U = \{x, \ (f_j(x) - f_j(x_0)) < \varepsilon\}$$

să satisfacă relaţia

$$U \cap F_2 = \varnothing.$$

Putem presupune evident că

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| \leqslant 1, \qquad (\forall)\, x \in X.$$

Mulţimea U este o vecinătate a lui x_0. Cum F_1 este minimală, rezultă că există $f \in A$ astfel ca

$$\sup_{x\in U} |f(x)| + m_U(f) = 1 \qquad \sup_{\overline{F_1 - U}} |f(x)| + \underset{\overline{F_1 - U}}{m(f)} < 1.$$

În adevăr, dacă nu ar fi aşa, atunci $F - U$ ar fi mulţime minimală care este conţinută în F_1, ceea ce contrazice definiţia lui F_1. În acest caz, putem aranja ca să avem relaţiile :

$$\|f\|_U = 1, \qquad \sup_{x\in F_1 - U} |f(\alpha)| < 1$$

ceea ce se obține prin înmulțire. Funcțiile ff_j satisfac relațiile

$$|f(x)f_j(x) - f_j(x_0)f(x)| < \varepsilon \qquad (\forall)\, x \in F_1.$$

ceea ce rezultă din modul cum am luat funcțiile f_j și mulțimea U. Avem însă

$$\|f\|_{CL^\alpha} = 1 + m(f)\cdot$$

Deoarece pentru două mulțimi admisibile $\|f\|_{F_1} = \|F\|_{F_2}$ exista un punct $x_2 \in F_2$ astfel ca $f(x_2) = 1$. De aici rezultă că

$$|f_j(x_2) - f_j(x_0)| < \varepsilon, \qquad (j = 1,2, \ldots, n)$$

adică $x_2 \in U$ ceea ce contrazice faptul că $U \cap F_2 =$ și $\varnothing$ lema este demonstrată.

DEFINIȚIA 2.3. *Mulțimea F dată de lemele 2.1 și 2.2 o vom numi frontiera Șilov a algebrei de funcții Lipschitziene A și o vom însemna cu Γ_A.*

Vom da acum cîteva exemple.

1°. Algebra funcțiilor continue și lipschitziene pe un spațiu metric compact are frontiera $\Gamma_A = X$.

2°. Să considerăm cercul $\{z, |z| \leqslant 1\}$ și să notăm cu Γ mulțimea $\{z, \; z \; = 1\}$. Algebra A va fi algebra funcțiilor analitice lipschitziene în $|z| \leqslant 1$. Frontiera Γ_A va fi în acest caz mulțimea Γ.

În mulțimea Γ_A, a unei algebre $A \subset CL^\alpha(X)$, apar puncte cu proprietăți speciale.

DEFINIȚIA 2.4. *Un punct $x_0 \in \Gamma_A$ este punct frontieră tare dacă există o funcție $f \in A$ astfel încît*

$$|f(x_0) + m_X(f) = 1$$

și

$$|f(x)| + m_X(f) < 1$$

pentru orice alt punct al spațiului.

Exemplul următor arată că astfel de algebre există. În adevăr, să considerăm algebra A de la exemplul 2 de mai sus. Avem pentru funcția

$$f(z) = \frac{1}{\alpha}(e^{i\theta_0} + z), \; x_0 \; e^{i\theta_0}$$

cu $\alpha = 3$ și deci orice punct de pe Γ este punct frontieră tare.

Vom reveni asupra acestor algebre considerînd și cazul funcțiilor continue vectoriale

Exemple. 1. Să considerăm algebra funcțiilor $CL^\alpha([0,1]^2)$. În acest caz este evident că frontiera este egală cu $[0,1]^2$. Pentru algebra funcțiilor analitice de două variabile se vede că frontiera este

$$\Gamma \times \Gamma, \; \Gamma = \{z, \; |z| = 1\}.$$

Vom vedea că atunci cînd considerăm algebre cu valori vectoriale, frontiera Șilov introdusă mai sus diferă de frontiera Șilov a algebrei considerată ca algebră Banach.

3. *Măsuri de reprezentare.* Se ştie că măsurile de reprezentare au un rol foarte mare în studiul proprietăţilor algebrelor ; în particular la stabilirea unei strînse legături între spaţiul X şi algebra A.

Vom căuta să arătăm acum că astfel de măsuri există.

DEFINIŢIA 3.1. *Prin măsură de reprezentare vom înţelege o măsură Baire pozitivă* μ_p *definită pe spaţiul local compact*

$$W_0 = \{X \cup Y\}, \qquad Y = \left\{(x, y),\ 0 < \rho(x, y) \leqslant \frac{d}{2}\right\},$$

unde d este diametrul lui X. Se ştie că în acest caz

$$f(p) = \int_X f(t)\,\mathrm{d}\mu_p(t) + \int_Y \frac{f(t) - f(t')}{\rho(t, t')^\alpha}\,\mathrm{d}\mu_p(t, t').$$

Este uşor de observat că măsura μ_p este concentrată pe mulţimea

$$W = \{\Gamma_A \cup (Y \cap (\Gamma_A \times \Gamma_A))\}$$

şi deci

$$f(p) = \int_{\Gamma_A} f(t)\,\mathrm{d}\mu_p\ (t) + \int_{Y \cap (\Gamma_A \times \Gamma_A)} \frac{f(t) - f(t')}{\rho(t, t')^\alpha}\,\mathrm{d}\mu_p(t, t').$$

Primită la redacţie la 19 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G. MARINESCU, *Spaţii vectoriale normate.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1958.
2. И. ГЕЛЬФАНД, Д. РАИКОВ, Г. ТИЛОВ, *Коммутативные нормированния кольца,* Москва, 1960.

TESTUL RAPORTULUI DE VEROSIMILITĂȚI PENTRU PROCESE ALEATOARE

DE

HARRY COHN

Centrul de statistică matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

O teoremă privind consistența testului raportului de verosimilități pentru procesele aleatoare în cazul că legea numerelor mari este aplicabilă. Ca aplicație a acestei teoreme se consideră cazul lanțurilor cu legături complete.

1° În lucrarea de față ne propunem să studiem proprietățile testului raportului de verosimilități în cazul proceselor aleatoare.

Fie $(\Omega, \mathcal{K})$ un spațiu măsurabil, P și Q două probabilități definite pe $\mathcal{K}$, $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un șir de variabile aleatoare, R dreapta reală, $\mathcal{B}^n$ corpul părților boreliene ale lui R^n, $N^* = 1,2,\ldots$ În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{K}$ este cel mai mic corp borelian în raport cu care variabilele (ξ_n) sînt măsurabile. Vom demonstra întîi următoarea :

LEMĂ. *Dacă există o funcție reală măsurabilă f astfel ca $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j$ să conveargă slab către c_1 în raport cu P și către c_2 în raport cu Q, unde $f_j = f\circ\xi_j$, c_1 și c_2 fiind două constante iar $c_1 \neq c_2$, atunci există o mulțime H astfel ca $P(H) = 1$ și $Q(H) = 0$.*

Demonstrație. Să notăm cu $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j$. Din convergența slabă a lui $(\eta_n)_{n\in N^*}$ în raport cu P rezultă că există un subșir de variabile aleatoare $(\eta_{n_k})_{k\in N^*}$ care converge aproape sigur în raport cu P, dar cum acest subșir converge slab în raport cu Q, rezultă că există un subșir $(\eta_{n_{k_j}})_{n\in N^*}$ care converge aproape sigur atît în raport cu P, cît și în raport cu Q. Dar prin ipoteză mulțimile $H = \{\omega \mid \lim_{n\to\infty} \eta_{n_{k_j}} = c_1\}$ și $H' = \{\omega \mid \lim_{n\to\infty} \eta_{n_{k_j}} = c_2\}$ au proprietatea că $P(H) = 1$ și $Q(H') = 1$ și cum aceste mulțimi sînt disjuncte, rezultă proprietatea enunțată mai sus.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 413–417, BUCUREȘTI, 1965

Vom considera acum raportul verosimilității

$$L_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{q_n(x_1, \ldots, x_n)}{p_n(x_1, \ldots, x_n)}$$

și fie $R_n(x_1, \ldots, x_n) = \ln L_n(x_1, \ldots, x_n)$, unde $p_n(x_1, \ldots, x_n)$ și $q_n(x_1, \ldots, x_n)$ sînt măsurabile Borel iar

$$P(\xi_1 < a_1, \ldots, \xi_n < a_n) = \int_{-\infty}^{a_1} \ldots \int_{-\infty}^{a_n} p_n(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

$$Q(\xi_1 < a_1, \ldots, \xi_n < a_n) = \int_{-\infty}^{a_1} \ldots \int_{-\infty}^{a_n} q_n(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Definim testul $T(a)$ al raportului de verosimilități în modul următor: acceptăm ipoteza H_0 că P este adevărata probabilitate dacă $R_n(x_1, \ldots, x_n) < a$ și acceptăm alternativa H_1 că Q este adevărata probabilitate dacă $R_n(x_1, \ldots, x_n) \geqslant a$.

Vom demonstra următoarea

TEOREMĂ. *Dacă condițiile lemei de mai sus sînt satisfăcute, atunci clasa de teste* $\{T(a),\ a \in R\}$ *conține numai teste consistente.*

Demonstrație. Vom folosi următorul rezultat al lui P. Billingsley (teorema 14.1, pag. 67 din [1]).

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate $\{\mathcal{K}_n, n = 1,2, \ldots\}$ un șir nedescrescător de subcorpuri boreliene ale lui $\mathcal{K}$ astfel ca $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ să genereze pe $\mathcal{K}$ și fie φ o funcție de mulțime cu variație mărginită pe $\mathcal{K}$. Dacă φ_n este restricția lui φ la $\mathcal{K}_n$, atunci

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}\varphi_n / \mathrm{d}P = \mathrm{d}\varphi / \mathrm{d}P$$

cu probabilitate 1 în raport cu P, derivatele de mai sus fiind luate în sensul lui Radon-Nykodim.

Vom lua $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ca fiind cel mai mic corp borelian în raport cu care variabilele $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt măsurabile iar $\varphi = Q$. Din teorema lui Lebesgue de dezvoltarea funcțiilor aditive și din teorema lui Radon-Nykodim avem

$$Q(E) = \int_E f(\omega) \mathrm{d}P(\omega) + Q(EH),$$

unde $f(\omega)$ este integrabilă pe Ω în raport cu măsura P, $E, H \in \mathcal{K}$, iar $P(H) = 0$.

Conform lemei de mai sus, $Q(H) = 1$ și prin urmare $f = 0$ cu probabilitate 1 în raport cu P. Pe de altă parte,

$$\int_A \ldots \int L_n(x_1, \ldots, x_n)\, p_n(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \begin{cases} Q(A) & \text{dacă } A H_n^* = \Phi, \\ 0 & \text{dacă } A \subset H_n^*, \end{cases}$$

unde $A \in \mathcal{B}^n$ iar $H_n = \{\omega \mid (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H_n^*$, H_n fiind mulţimea singulară corespunzătoare lui Q_n. Prin urmare

$$\mathrm{d}Q_n/\mathrm{d}P = \frac{q_n(x_1, \ldots, x_n)}{p_n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Folosind rezultatul enunţat se obţine că $R_n(x_1, \ldots, x_n)$ converge aproape sigur către $-\infty$ în raport cu P

Dacă considerăm acum dezvoltarea lui Lebesgue a probabilităţii P în raport cu Q obţinem

$$P(E) = \int_E g(\omega)\,\mathrm{d}Q(\omega) + P(EH')$$

iar din lema de mai sus $P(H') = 1$. Prin urmare $\dfrac{1}{L_n(x_1, \ldots, x_n)}$ converge aproape sigur către 0 în raport cu Q şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x_1, \ldots, x_n) = \infty$ cu probabilitate 1 în raport cu Q.

De aici obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} P(R_n(x_1, \ldots, x_n) \geqslant a) = \lim_{n\to\infty} Q(R_n(x_1, \ldots, x_n) < a) = 0$$

ceea ce demonstrează teorema.

Vom determina acum constanta a corespunzătoare erorii de genul întîi α dată.

Fie $\lambda_a = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \dfrac{q_n(x_1, \ldots, x_n)}{p_n(x_1, \ldots, x_n)} \geqslant e^a\right\}$. Constanta a ce satisface cerinţa ca α să fie eroarea de genul întîi se determina astfel ca

$$\int_{\lambda_a} p_n(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \alpha.$$

Deoarece $P(\lambda_a) \to 0$ cînd $a \to +\infty$, integrala de mai sus poate fi făcută oricît de mică dacă a este suficient de mare. Cazul cînd $P(\lambda_a) = \alpha$ nu are soluţie, poate fi redus la acesta (vezi [2]).

Deoarece testul raportului de verosimilităţi este optimal, eroarea de genul al doilea corespunzătoare pragului α este mai mică decît pentru orice alt test.

2°. Vom aplica acum rezultatele stabilite mai sus în cazul lanţurilor cu legături complete.

Vom presupune că probabilitatea P definită mai sus corespunde unui lanţ cu legături complete simplu şi omogen cu probabilitatea iniţială p şi cu familia $(T_x)_{x\in R}$ a aplicaţiilor de trecere, iar Q corespunde unui lanţ cu legături complete simplu şi omogen cu probabilitatea iniţială q şi cu familia $(S_x)_{x\in R}$ a aplicaţiilor de trecere. Vom nota prin $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R, \mathcal{B})$ o familie de probabilităţi complet aditive definite pe $\mathcal{B}$ şi vom presupune că $(T_x)_{x\in R}$ şi $(S_x)_{x\in R}$ sînt două familii de transformări definite pe $\mathfrak{M}$ cu valori în $\mathfrak{M}$. În acest caz, conform definiției lanțului cu legături complete,

$$p_{x_1,\ldots,x_n} = T_{x_n} p_{x_1\ldots x_{n-1}}\ , \ p_{x_1} = T_{x_1} p$$

$$q_{x_1\ldots,x_n} = S_{x_n} q_{x_1\ldots x_{n-1}}\ , \ q_{x_1} = S_{x_1} q$$

unde

$$p_{x_1\ldots x_n}(A) = P\,(\xi_{n+1}(\omega)\in A\,|\,\xi_j,\ 1\leqslant j\leqslant n)_{\xi_j(\omega)=x_j}$$

$$q_{x_1\ldots x_n}(A) = Q\,(\xi_{n+1}(\omega)\in A\,|\,\xi_j,\ 1\leqslant j\leqslant n)_{\xi_j(\omega)=x_j}$$

iar

$$p\,(A) = P\,(\xi_1(\omega)\in A),$$

$$q\,(A) = Q\,(\xi_1(\omega)\in A).$$

Vom presupune că sînt îndeplinite condiţiile teoremei ergodice din [3], pag. 615, atît în raport cu P, cît şi în raport cu Q; în acest caz lanțul considerat este ergodic, adică limitele

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,1}^{(\nu)}(p\,;\,A) = p_{1,1}^{(\infty)}(A)$$

$$\lim_{n\to\infty} q_{1,1}^{(n)}(q\,;\,A) = q_{1,1}^{(\infty)}(A)$$

există pentru orice $A\in\mathcal{B}$ iar

$$p_{1,1}^{(n)}(p\,;\,A) = P\,(\xi_n(\omega)\in A) =$$

$$= \int p\,(\mathrm{d}x_1)\int T_{x_1}p\,(\mathrm{d}x_2)\ \ldots \int T_{x_1\ldots x_n} p\,(\mathrm{d}x)\ \chi_{A^{(l)}(x_1,\ldots,x_n)}$$

$$q_{1,1}^{(n)}(q\,;\,A) = Q\,(\xi_n(\omega)\in A) =$$

$$= \int q\,(\mathrm{d}x_1)\int S_{x_1}q\,(\mathrm{d}x_2)\ \ldots \int S_{x_1\ldots x_n} q\,(\mathrm{d}x_n)\ \chi_{A^{(l)}(x_1,\ldots,x_n)}$$

cu $A^{(l)} = R\times\ldots\times R\times A$.

Vom mai presupune că orice $\lambda\in\mathfrak{M}$ admite densitate.

În acest caz

$$p\,(A) = \int_A f\,(x)\,\mathrm{d}x\ ,\quad T_{x_1\ldots x_{n-1}}\,p\,(A) = \int_A f\,(x\,|\,x_1,\ldots,x_{n-1})\,\mathrm{d}x.$$

$$q\,(A) = \int_A g\,(x)\,\mathrm{d}x\, S_{x_1,\ldots,x_n}\,q(A) = \int_A g\,(x\,|\,x_1,\ldots,x_{n-1})\,\mathrm{d}x.$$

Prin urmare raportul de verosimilităţi are forma:

$$L_n\,(x_1,\ldots,x_n) = \frac{g\,(x_1)\,g\,(x_2\,|\,x_1)\ldots g\,(x_n\,|\,x_1,\ldots,x_{n-1})}{f\,(x_1)\,f\,(x_2\,|\,x_1)\ldots f\,(x_n\,|\,x_1,\ldots,x_{n-1})}\,.$$

Vom aplica acuma teorema 2, pag. 618 din [3], luînd $f = \chi_A$ şi $f_n = \chi_A \circ \xi_n$. Atunci

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_A \circ \xi_n\right)_{n\in N^*}$$

converge slab către $E_p^\infty(\chi_A)$ în raport cu P şi către $E_Q^\infty(\chi_A)$ în raport cu Q, unde

$$E_P^\infty(\chi_A) = \int_R \chi_A \, p_{1,1}^{(\infty)}(\mathrm{d}x) = p_{1,1}^{(\infty)}(A),$$

$$E_Q^{(\infty)}(\chi_A) = \int_R \chi_A \, q_{1,1}^{(\infty)}(\mathrm{d}x) = q_{1,1}^{(\infty)}(A).$$

Dacă vom presupune că $p_{1,1}^{(\infty)}$ şi $q_{1,1}^{(\infty)}$ nu sînt identice, atunci sînt satisfăcute condiţiile teoremei demonstrate mai sus şi prin urmare obţinem :

TEOREMĂ. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile teoremei ergodice din* [*3*], *pag. 615, atît în raport cu* P *cît şi în raport cu* Q *şi dacă* $p_{1,1}^{(\infty)}$ *şi* $q_{1,1}^{(\infty)}$ *nu sînt identice, atunci familia de teste* $\{T(a),\ a \in R\}$, *pentru testarea ipotezei că probabilitatea limită a procesului este* $p_{1,1}^{(\infty)}$ *contra alternativei că probabilitatea limită a procesului este* $q_{1,1}^{(\infty)}$, *conţine numai teste consistente.*

Primită la redacţie la 3 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. P. Billingsley, *Statistical Inference for Markow Processes.* The University of Chicago Press, 1961.
2. H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton, 1946.
3. M. Iosifescu, *Случайные системы с полными связями с произвольным множеством состояний.* Revue de mathématiques pures et appliquées, **VIII**, *4* (1963).

ASUPRA COMPORTĂRII ASIMPTOTICE A SISTEMELOR CU LEGĂTURI COMPLETE

DE

HARRY COHN

Centrul de statistică matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

Se studiază o serie de proprietăți referitoare la comportarea asimptotică a unor sume normate de variabile aleatoare atașate unui sistem cu legături complete. Teorema 1.1 arată că comportarea asimptotică a funcțiilor de repartiție a acestor sume este identică, în anumite condiții, cu comportarea asimptotică a funcțiilor de repartiție a sumelor corespunzătoare procesului staționar atașat sistemului cu legături complete dat. Următoarele teoreme transpun proprietățile proceselor staționare la sistemele cu legături complete, dînd diferite variante pentru teorema limită centrală. Ca o consecință a teoremei 1.1 se obține legea slabă a numerelor mari. Teorema 4.1 generalizează rezultatul teoremei 1.1, la cazul variabilelor dependente de un tip mai general.

Noțiunea de lanț cu legături complete a fost introdusă în teoria probabilității de O. Onicescu și G. Mihoc în 1935 [8]. Ulterior această noțiune a fost generalizată de diferiți autori. Cea mai recentă generalizare o constituie sistemul cu legături complete introdus de M. Iosifescu în 1963 [6]. Un studiu sistematic al proceselor cu legături complete conținînd lucrări publicate pînă în 1960, este făcut în [1].

1. Fie $(X, \mathcal{F})$ și $(W, \mathcal{V})$ două spații măsurabile și $\{u(\cdot\,; x)\,;\, x \in X\}$ o familie de aplicații ale lui W în el însuși.

Să notăm

$$X^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} X_j,\ X_j = X,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ n \in N^* = \{1, 2, \ldots\}\,;$$

$\mathcal{F}^{(n)}$ σ - algebra produs corespunzătoare lui $X^{(n)}$;

$u(.\,;\, x^{(n)}) = u(.\,;\, x_n) \circ \ldots \circ u(.\,; x_1)$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 419–432, BUCUREȘTI, 1965

pentru $x^{(n)} = (x_1,...x_n) \in X^{(n)}$. Fie $B\ (W,\ \mathcal{V})$ spațiul Banach al funcțiilor φ definite pe W reale, mărginite și $\mathcal{V}$-măsurabile cu norma

$$\|\varphi\| = \sup_{c \in W} |\varphi_{(c)}|.$$

Să presupunem că

$$\{(c\ ;\ x^{(n)}) \mid u\ (c\ ;\ x^{(n)}) \in V\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^{(n)}$$

pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$, $n \in N^*$.

Fie P o funcție definită pe $W \times \mathcal{F}$ astfel ca pentru fiecare $c \in W$, $P\ (c\ ;.)$ este o probabilitate pe $\mathcal{F}$ și $P\ (.\ ;\ A) \in B\ (W, \mathcal{V})$ pentru fiecare $A \in \mathcal{F}$.

După [6] familia de aplicații $\{u\,(\cdot\ ;\ x)_{x \in X}\}$ și funcția P definesc un sistem omogen cu legături complete. Pentru fiecare $c \in W$ există un cîmp de probabilitate $(\Omega,\ \mathcal{K},\ P_c^{\cdot})$ și un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N^*}$ definite pe Ω cu valori în X astfel ca

$$P_c\,(\xi_1\,(\omega) \in A) = P\,(c\ ;\ A)$$

$$P_c\,(\xi_{n+1}\,(\omega) \in A \mid \xi_j, 1 \leqslant j \leqslant n)_{\xi_j\,(\omega) = x_j} = P\,(u\,(c\ ;\ x^{(n)})\ ;\ A)$$

pentru orice $n \in N^*$, $x^{(n)} \in X^{(n)}$, $A \in \mathcal{F}$.

Pentru fiecare $l \in N^*$, fie $P_{1,\,l}$ funcția definită pe $W \times \mathcal{F}^{(l)}$ prin relațiile

$$P_{1,\,l} = P \quad \text{dacă } l = 1$$

$$P_{1,l}\,(c\ ;A^{(l)}) = \int_X P\,(c\ ;\mathrm{d}x_1) \int_X \dots \int_X P(u\,(c\ ;x^{(l-1)})\ ;\mathrm{d}x_l)\,\chi_{A^{(l)}}\ x_1,\dots x_l) \text{dacă } l > 1,$$

unde $\chi_A\,(l)$ este indicatorul mulțimii $A^{(l)}$.

Pentru fiecare l și $n \in N^*$ fie $P_{1,l}^{(n)}$ funcția definită pe $W \times \mathcal{F}^{(l)}$ prin relațiile

$$P_{1,l}^{(n)} = P_{1,l} \qquad \text{dacă } n = 1,$$

$$P_{1,l}^{(n)}\ (c\ ;\ A^{(l)}) = \int_X P\ (c\ ;\ \mathrm{d}x)\,P_{1,l}^{(n-1)}\ (u\ (c\ ;\ x)\ ;\ A^{(l)}) \text{ dacă } n > 1.$$

Se verifică ușor că

$$P_{1,l}^{(n)}\ (c\ ;\ A^{(l)}) = P_c\,(\xi_n\,(\omega) \in A_1,\dots,\ \xi_{n+l-1}\,(\omega) \in A_l),$$

unde $A^{(l)} = A_1 \times \dots \times A_l$, $A_i \in \mathcal{F}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant l$.

În condiții destul de largi [6], pentru fiecare $l \in N^*$ există o probabilitate $P_{1,l}^{\infty}$ pe $\mathcal{F}^{(l)}$ astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} P_{1,l}^{(n)}\ (c\ ;\ A^{(l)}) = P_{1,l}^{\infty}\,(A^{(l)})$$

uniform în raport cu $c \in W$, $l \in N^*$, $A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$.

Se obține cu ușurință relația

$$P_{1,l}^{\infty}(X^{(k)} \times A^{(l-k)}) = P_{1,l}^{\infty}\,(A^{(l-k)} \times X^{(k)})$$

pentru orice $k, l \in N^*$, $(k < l)$, $A^{(l-k)} \in \mathcal{F}^{(l-k)}$, $A^{(k)} \in \mathcal{F}^{(k)}$. Această relaţie pune în evidenţă staţionaritatea măsurii $P_{1,l}^{\infty}$ pentru orice $l \in N^*$.

În cele ce urmează vom nota prin $E_c(\varphi)$ valoarea medie a variabilei aleatoare φ reale sau complexă, definită pe Ω şi P_c integrabilă. Fie f o funcţie definită pe X reală şi $\mathcal{F}$-măsurabilă şi să notăm $f_i = f \circ \xi_i$ şi

$$E^{\infty}(f) = \int_X f(x)\, P_{1,1}^{\infty}(\mathrm{d}x),$$

$$\sigma_n^2 = E_c(f_n - E_c^{\cdot}(f_n))^2.$$

În cele ce urmează vom presupune îndeplinite următoarele două condiţii :

Condiţia 1. Există un şir de numere reale $(\varepsilon_n)_{n \in N^*}$ astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} n\varepsilon_n = 0$$

şi

$$| P_{1,l}^{(n)}(c;\, A^{(l)}) - P_{1,l}^{\infty}(A^{(l)}) | < \varepsilon_n$$

pentru toţi $c \in W, l \in N^*, A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$

Condiţia 2. Există o constantă M $(M > 0)$ astfel ca $\sigma_n^2 < M$ pentru orice $n \in N^*$.

Să considerăm acum funcţiile de repartiţie

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(a_{t_1,\ldots,}a_{t_n}) = P_{1,t_n}^{\infty}\ (f(x_{t_1}) < a_{t_1,\ldots,}\, f(x_{t_n}) < a_{t_n})$$

pentru orice $t_1, \ldots, t_n \in N^*$ cu $1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ şi $a_{t_1}, \ldots, a_{t_n} \in R$. Pentru orice m, $n \in N^*$ să definim funcţia $P_{m,n}^{\infty}$ pe $\mathcal{F}^{(m-n+1)}$ prin relaţia $P_{m,n}^{\infty}(A^{(m-n+1)}) = P_{1,m-n+1}(A^{(m-n+1)})$, unde $A^{(m-n+1)} \in \mathcal{F}^{(m-n+1)}$.

Din cunoscuta teoremă a lui Kolmogorov, obţinem că există un cîmp de probabilitate $\{E, \mathcal{G}, P^{\infty}\}$ şi un şir de variabile aleatoare reale $(\eta_n)_{-\infty<n<+\infty}$ definite pe E, astfel ca repartiţiile acestor variabile să fie date de funcţiile $F_{t_1,\ldots,t_n}$; $\{t_1, \ldots, t_n \in z\}$. Deoarece, după cum am observat mai sus, $P_{1,l}^{\infty}$ este o măsură staţionară, şirul de variabile aleatoare $(\eta_n)_{-\infty<n+\infty}$ defineşte un proces staţionar în sens restrîns [1]).

Fie $\{x_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ un proces stocastic şi $\mathfrak{A}_a^b$$\sigma$-algebra generată de evenimentele de forma $\{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in H\}$, unde $a \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant b$, H fiind o mulţime boreliană k-dimensională. Vom considera condiţia

$$| P(B | \mathfrak{A}_{-\infty}^{k}) - P(B) | \leqslant \varphi(n), \tag{I}$$

unde $A \in \mathfrak{A}_{k+n}^{\infty}$ iar $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_{(n)} = 0$ (vezi [5]).

TEOREMA 1.1. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile 1 şi 2 de mai sus şi dacă* $\{\alpha_n\}_{n \in N^*}$ *este un şir de numere reale astfel ca* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \neq 0$, *atunci repar-*

---

[1]) Procesul $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ se numeşte staţionar în sens restrîns dacă funcţia de repartiţie a variabilelor aleatoare

$$\eta_{t_1}, \ldots, \eta_{t_n}$$

este identică cu funcţia de repartiţie a variabilelor aleatoare $\eta_{t_1+h}, \ldots, \eta_{t_n+h}$ pentru orice $t_1, \ldots, t_n$, $h \in Z$, $n \in N^*$

tiția asimptotică a variabilei aleatoare

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n E^{\infty}(f)}{\alpha_n}$$

este identică cu repartiția asimptotică a variabilei aleatoare

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i - n E^{\infty}(f)}{\alpha_n},$$

iar procesul staționar $\{\eta_n\}_{-\infty < n < +\infty}$ *satisface condiția* (*I*).

Demonstrație. Să notăm cu $\mathfrak{M}_a^b$ σ-algebra generată de mulțimea evenimentelor de forma $\{(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}) \in H\}$, $H \in \mathcal{B}^k$. Fie B o mulțime aparținînd lui $\mathcal{F}^{(l+1)}$. Avem

$$P_c\{(\xi_{n+k}, \ldots, \xi_{n+k+l}) \in B \mid \xi_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}_{\xi_i = x_i} = P_{1,l}^{(n)}(u(c;\ x^{(k)});\ B).$$

Dacă ținem seama de condiția 1, obținem

$$|P_{1,l}^{(n)}(u\ (c;\ x(k);\ \ B) - P_{1,l}^{\infty}(B)| < \varepsilon_n.$$

Pe de altă parte

$$P_{1,l}^{(n+k)}(c;\ B) = P_c\{(\xi_{n+k}, \ldots, \xi_{n+k+l}) \in B\}$$

și conform aceleiași condiții, rezultă

$$|P_{1,l}^{(n+k)}(c;\ B) - P_{1,l}^{\infty}(B)| < \varepsilon_{n+k}.$$

Aplicînd inegalitatea triunghiului, avem

$$|P_{1,l}^{(n)}(u\ (c;\ x^{(k)});\ B) - P_{1,l}^{(n+k)}(c;\ B)| \leqslant |P_{1,l}^{(n)}(u\ (c;\ x^{(k)});\ B) - P_{1,l}^{\infty}(B)| +$$
$$+ |P_{1,l}^{(n+k)}(c;\ B) - P_{1,l}^{\infty}(B)| < \varepsilon_n + \varepsilon_{n+k} = \varepsilon_{n,k}$$

Altfel scris, am obținut relația

$$|P_c(B^{-1} \mid \mathfrak{M}_1^k) - P_c(B^{-1})| < \varepsilon_{n,k},$$

unde $B^{-1} = \{\omega \mid (\xi_{n+k}, \ldots, \xi_{n+k+l}) \in B\} \in \mathfrak{M}_{k+n}^{k+n+l}$, l fiind un număr întreg și pozitiv arbitrar. Deoarece mulțimea evenimentelor pentru care relația de mai sus este satisfăcută este clasă monotonă, iar această relație este satisfăcută de mulțimile de tipul celor de mai sus, rezultă [4] că această relație este satisfăcută pentru orice $B \in \mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}$.

Dacă ținem seama de proprietatea 1.1.1 din [5], obținem că relația de mai sus este echivalentă cu relația

$$|P_c(\Lambda_1 \Lambda_2) - P_c(\Lambda_1) P_c(\Lambda_2)| < \varepsilon_{n,k} P_c(\Lambda_1), \tag{1}$$

unde $\Lambda_1 \in \mathfrak{M}_1^k$ și $\Lambda_2 \in \mathfrak{M}_{k+n}^{+\infty}$.

Prin urmare $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ satisface condiția (I).

Cînd $n \to \infty$, membrul drept din (1) tinde la 0, această proprietate punînd în evidență independența asimptotică a sistemului cu legături complete considerat.

Fie acum $A^{-1(k_0)} = \{\omega | (\xi_{k-k_0+1}, \ldots, \xi_k) \in A^{(k_0)}\}$ și $B^{-1(l_0)} = \{\omega | (\xi_{k+n+1}, \ldots, \xi_{k+n+l_0}) \in A^{(l_0)}\}$. Atunci relația (1) de mai sus devine

$$|P_c(A^{-1(k_0)} B^{-1(l_0)}) - P_c(A^{-1(k_0)}) P_c(B^{-1(l_0)})| =$$

$$= |P^{k-k_0}_{1,k_0+n+l_0}(c; A^{(k_0+n+l_0)}) - P^{k-k_0}_{1,k_0}(c; A^{(k_0)}) P^{n+k}_{1,l_0}(c; A^{(l_0)})| < \varepsilon_{n,k} P^{k-k_0}_{1,k_0}(c; A^{(k_0)}),$$

unde $A^{(k_0+n+l_0)} = A^{(k_0)} \times \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ ori}} \times A^{(l_0)}$, $A^{(k_0)} \in \mathcal{F}^{(k_0)}$ și $A^{(l_0)} \in \mathcal{F}^{(l_0)}$ și prin urmare $A^{(k_0+n+l_0)} \in \mathcal{F}^{(k_0+n+l_0)}$.

Prin trecere la limită asupra lui k obținem

$$|P^{\infty}_{1,k_0+n+l_0}(A^{(k_0+n+l_0)}) - P^{\infty}_{1,k_0}(A^{(k_0)}) P^{\infty}_{1,l_0}(A^{(l_0)})| < \varepsilon_n P^{\infty}_{1,k_0}(A^{(k_0)}). \qquad (2)$$

Să observăm că această relație este adevărată în particular cînd :

$$A^{(k_0)} = \{f(x_1) < a_1, \ldots, f(x_{k_0}) < a_{k_0}\}.$$

$$A^{(l_0)} = \{f(x_{k_0+n+1}) < a_{k_0+n+1}, \ldots, f(x_{k_0+n+l_0}) < a_{k_0+n+l_0}\}.$$

Atunci

$$A^{(k_0+n+l_0)} = \{f(x_1) < a_1, \ldots, f(x_{k_0}) < a_{k_0}, f(x_{k_0+n+1}) < a_{k_0+n+1}, \ldots, f(x_{k_0+n+l_0}) < a_{k_0+n+l_0}\}.$$

În acest caz relația (2) devine

$$|F_{1,\ldots,k_0+n+l_0}(a_1, \ldots, a_{k_0+n+l_0}) - F_{1,\ldots,k_0}(a_1, \ldots, a_{k_0}) F_{1,\ldots,l_0}(a_{k_0+n+1}, \ldots, a_{k_0+n+l_0})| < \varepsilon_n F_{1,\ldots,k_0}(a_1, \ldots, a_{k_0}). \qquad (3)$$

Să notăm cu $\mathfrak{N}_a^b$ σ-algebra generată de mulțimea evenimentelor de forma $\{(\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_k}) \in H\}$, unde $a \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant b$ iar $H \in \mathcal{B}^k$. Să observăm că familia de mulțimi pentru care relația (3) este satisfăcută este clasă monotonă. Deoarece procesul $\{\eta_n\}_{-\infty < n < +\infty}$ este staționar iar relația (3) este satisfăcută de mulțimile de tipul celor de mai sus, rezultă că

$$|P(N_1 N_2) - P(N_1) P(N_2)| < \varepsilon_n P(N_1)$$

pentru orice $N_1 \in \mathfrak{N}^k_{-\infty}$ și orice $N_2 \in \mathfrak{N}^{\infty}_{k+n}$.

Prin urmare procesul staționar $\{\eta_n\}_{-\infty < n < +\infty}$ satisface condiția (I).

Fie acum α, $\beta \in N^*$ și $\mu(\alpha + \beta)$ cel mai mare multiplu al lui $(\alpha + \beta)$ care nu-l depășește pe n. În cele ce urmează vom lua pe β drept cel mai mare număr întreg pentru care β^4 nu-l depășește pe n, iar $\alpha = \beta^3$. De aici rezultă $\mu \approx \beta$.

Fie acum :

$$y_m = \sum_{j=(m-1)(\alpha+\beta)+1}^{(m-1)(\alpha+\beta)+\alpha} (f(\xi_j) - E^{\infty}(f)), \quad 1 \leqslant m \leqslant \mu$$

$$y'_m = \sum_{j=(m-1)(\alpha+\beta)+\alpha+1}^{m(\alpha+\beta)} (f(\xi_j) - E^{\infty}(f)), \quad 1 \leqslant m \leqslant \mu$$

$$y'_{\mu+1} = \sum_{j=\mu(\alpha+\beta)+1}^{n} (f(\xi_j) - E^{\infty}(f)).$$

Vom demonstra acum că $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu+1} y'_m\right\}_{n\in N*}$ converge către 0 în probabilitate. Pentru aceasta este suficient să arătăm că expresia

$$E_c\left\{\left(\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu+1} y'_m\right)^2\right\} = \frac{1}{\alpha_n^2}\left(\sum_{m=1}^{\mu+1} E_c\,(y'_m)^2 + 2\sum_{j=1}^{\mu} E_c\left(y'_j \sum_{t=j+1}^{\mu+1} y'_t\right)\right) \tag{4}$$

tinde către 0.

Vom folosi următoarea

Lemă. *Dacă notăm cu $\mathfrak{M}_n$ cea mai mică σ-algebră în raport cu care variabila ξ_n este măsurabilă și dacă f și g sînt două variabile aleatoare reale, măsurabile în raport cu $\mathfrak{M}_k$ și respectiv $\mathfrak{M}_{k+n}$ și dacă există mărimile $E_c\,(f^2)$ și $E_c\,(g^2)$, atunci*

$$|E_c\,(fg) - E_c\,(f)\,E_c\,(g)| < 2\,(\varepsilon_n)^{1/2}\,E^{1/2}\,(f^2)\,E^{1/2}\,(g^2).$$

Lema de mai sus este o consecință imediată a lemei 1.1 din [5] în demonstrația căreia nu se face apel la ipoteza de staționaritate.

Vom demonstra acum că din condiția 2 rezultă

$$E^\infty\,(f^2) < M + 1. \tag{5}$$

După o inegalitate bine cunoscută, avem

$$[E_c\,(|f_n|^\lambda)]^{\frac{1}{\lambda}} \leqq [E_c\,(f_n^2)]^{\frac{1}{2}}$$

pentru $\lambda < 2$. Ridicînd ambii membri la pătrat, obținem, ținînd seama de condiția 2,

$$[E_c\,(|f_n|^\lambda)]^{\frac{2}{\lambda}} < M.$$

De aici rezultă

$$E_c\,(|f_n|^\lambda) \leq \max\,(M, 1) < M + 1.$$

Să considerăm acum funcțiile de repartiție

$$F_n\,(a) = P_c\,\{f\,(\xi_n) < a\},$$

$$F\,(a) = P_{1,1}^\infty\,\{f\,(x) < a\}.$$

Din condiția 1 rezultă că $F_n\,(a)$ converge către $F(a)$, convergența fiind uniformă în raport cu $a \in R$. Folosind acum condiția 2, obținem, conform corolarului de la pag. 185 din [7], că

$$\lim_{n\to\infty} E_c\,(|f_n|^\lambda) = E^\infty\,(|f|^\lambda).$$

De aici rezultă că $E^\infty\,(|f|^\lambda) < M + 1$ pentru $0 < \lambda < 2$. Să alegem un șir de numere pozitive $(\lambda_n)_{n\in N^*}$, $0 < \lambda_n < 2$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 2$. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} f^{\lambda_n} = f^2$. După lema lui Fatou avem

$$E^\infty\,(f^2) = \int_X \liminf |f^{\lambda_n}|\,\mathrm{d}P_{1,1}^\infty \leqslant \liminf \int_X |f^{\lambda_n}|\,\mathrm{d}P_{1,1}^\infty < M + 1.$$

Să demonstrăm acum că $E_c\left\{\left(\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu+1} y'_m\right)^2\right\} \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Folosind inegalitatea lui Schwartz, obținem

$$|E_c(f_j - E^\infty(f))^2| < 4M$$

pentru orice $j \in N^*$. Mai departe, avem

$$\frac{1}{\alpha_n^2} E_c(y'_m)^2 = \frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{j=(m-1)(\alpha+\beta)+1}^{m(\alpha+\beta)} E_c(f_j - E^\infty(f))^2 +$$

$$+ \frac{2}{\alpha_n^2} \sum_{\substack{i,j=(m-1)(\alpha+\beta)+\alpha+1 \\ i<j}}^{m(\alpha+\beta)} E_c(f_i - E^\infty(f))(f_j - E^\infty(f)) <$$

$$< \frac{4M\beta}{\alpha_n^2} + \frac{8M}{\alpha_n^2}(\beta^2 - \beta) = 0(n^{-\frac{1}{2}}).$$

De aici rezultă

$$\frac{1}{\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\mu+1} E_c(y'_m)^2 \leqslant (\mu + 1)\ 0\ (n^{-\frac{1}{2}}) = 0(n^{-\frac{1}{4}}).$$

Pe de altă parte, aplicînd lema de mai sus, obținem

$$\frac{1}{\alpha_n^2}|E_c(y'_i y'_j)| \leqslant \frac{1}{\alpha_n^2}|E_c(y'_i)\ E_c\ (y'_j)| +$$

$$+ 2\ (\varepsilon_\alpha)^{\frac{1}{2}} E_c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y'_i}{\alpha_n}\right)^2 E_c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y'_i}{\alpha_n}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_n^2} E_c(y'_i)\ E_c(y'_j) + 0\ (n^{-\frac{7}{8}}).$$

După cum am văzut mai sus putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} E_c(f_n) = E^\infty(f)$$

și prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} E_c(y'_i)\, E_c(y'_j) = \lim_{n\to\infty} E_c\left(\frac{y'_i}{\alpha_n^{\frac{1}{2}}}\right) E_c\left(\frac{y'_j}{\alpha_n^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.$$

De aici obținem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\frac{1}{\alpha_n^2} E_c(y'_i\, y'_j)\right] = 0$$

pentru orice $i, j \in N^*$. Deoarece $\mu^2 \approx n^{\frac{1}{2}}$ avem

$$\lim_{n\to\infty} E_c\left\{\left(\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu+1} y'_m\right)^2\right\} = 0$$

și deci $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu+1} y'_m\right\} n \in N^\star$ converge către 0 în probabilitate.

Prin urmare în expresia asimptotică a funcției caracteristice a variabilei aleatoare $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i - n E^\infty(f)}{\alpha_n}$, componenta $\frac{\sum_{m=1}^{\mu+1} y'_m}{\alpha_n}$ are contribuție nulă și ne vom ocupa deci de componenta $\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu} y_m$.

Fie

$$\Phi_{r,\infty}(t) = \int_{x^{(r)}} e^{it[g(x_1)+\ldots+g(x_r)]} P_{1,r}^{\infty}(dx^{(r)}),\ r \in N^\star,$$

unde $g(x_r) = f_{(x_r)} - E^{\propto}(f)$.

Se obține la fel ca în [6] că

$$E_c\left(e^{it\sum\limits_{m=1}^{\mu} ym}\right) = E_c(e^{ity_1})\ [\Phi_{\alpha_1\infty}(t)]^{\mu-1} + 2\,\varepsilon_{\beta+1}\sum_{j=1}^{\mu-2}\theta_j,$$

unde $|\theta_j| \leqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant \mu-2$.

Folosind condiția 1 obținem

$$\left(\varepsilon_{\beta+1}\sum_{j=1}^{\mu-2}\theta_j\right) \leqslant \mu\,\varepsilon_{\beta+1} = \frac{\mu}{\beta}\,\beta\,\varepsilon_{\beta+1} \to 0$$

cînd $n \to \infty$. Prin urmare

$$E_c\left(e^{i\frac{t}{\alpha_n}\sum\limits_{m=1}^{\mu} ym}\right) = \left[\Phi_{\alpha,\infty}\left(\frac{t}{\alpha_n}\right)\right]^{\mu} + \eta(t, n, c)$$

cu $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(t, n, c) = 0$ uniform în raport cu t în orice interval finit.

Să ne ocupăm acum de comportarea asimptotică a funcției caracteristice a variabilei aleatoare $\frac{1}{\alpha_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j - n E^\infty(f)\right)$. Vom face următoarele notații

$$z_m = \sum_{j=(m-1)(\alpha+\beta)+1}^{(m-1)(\alpha+\beta)+\alpha} (\eta_j - E^\infty(f)),\quad 1 \leqslant m \leqslant \mu,$$

$$z'_m = \sum_{j=(m-1)(\alpha+\beta)+\alpha+1}^{m(\alpha+\beta)} (\eta_j - E^\infty(f)),\quad 1 \leqslant m \leqslant \mu,$$

$$z'_{\mu+1} = \sum_{j=\mu(\alpha+\beta)+1}^{n} (\eta_j - E^\infty(f)).$$

Vom demonstra că și în acest caz componenta $\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu+1} z'_m$ converge către 0 în probabilitate.

Să notăm cu $E(\varphi)$ valoarea medie a variabilei aleatoare φ luată în raport cu măsura P^∞.

Vom arăta că

$$E\left\{\left(\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu+1} z'_m\right)^2\right\} = \frac{1}{\alpha_n^2}\left(\sum_{m=1}^{\mu+1} E\,(z'_m)^2 + 2\sum_{j=1}^{\mu} E\left(z'_j \sum_{t=j+1}^{\mu+1} z'_t\right)\right) \tag{6}$$

tinde către 0 cînd $n \to \infty$.

Dacă ținem seama de modul în care a fost construit procesul $\{\eta_n\}_{-\infty<n<\infty}$, obținem

$$\frac{1}{\alpha_n} E\,(z'_m)^2 = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{j=(m-1)(\alpha+\beta)+\alpha+1}^{m(\alpha+\beta)} E^\infty\,(g_j^2) + \frac{2}{\alpha_n} \sum_{t=(m-1)(\alpha+\beta)+\alpha+1}^{m(\alpha+\beta)} E^\infty\,(g_j\, g_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\beta}{\alpha_n} + \frac{2M}{\alpha_n}(\beta^2-\beta) = 0\,\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

de unde

$$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu+1} E\,(z'_m)^2 = 0\,\left(n^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Să ne ocupăm acum de al doilea termen din dreapta expresiei (6). Avem

$$\left|\frac{1}{\alpha_n} E\,(z'_i z'_j)\right| < 2\,(\varepsilon_\alpha)^{\frac{1}{2}}\, E^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z'_i}{\alpha_n}\right) E^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z'_j}{\alpha_n}\right) = 0\,\left(n^{-\frac{7}{8}}\right).$$

Prin urmare

$$\left|\frac{2}{\alpha_n}\sum_{j=1}^{\mu} E\left(z'_j \sum_{t=j+1}^{\mu+1} z'_t\right)\right| \leqq (\mu^2-\mu)\; 0\,\left(n^{-\frac{7}{8}}\right) = 0\,\left(n^{\frac{3}{8}}\right).$$

De aici rezultă că șirul de variabile aleatoare $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\mu} z'_m\right\}_{n\in N^*}$ tinde către 0 în probabilitate.

Pe de altă parte, aplicînd lema 1.1 din [5] și ținînd seama că pentru orice p, q și α avem relațiile :

$$E\left(\left|e^{it\sum\limits_{m=1}^{\alpha} z_m}\right|^p\right) = E\,(|e^{itz_\alpha}|^q) = 1,$$

obținem în cele din urmă

$$\left|E\left(e^{it\sum\limits_{m=1}^{\mu} z_m}\right) - E^{\mu}\,(e^{itz_1})\right| < \beta\,\varepsilon_\beta\,.$$

Deoarece $E(e^{itz_1}) = \Phi_{\alpha,\infty}\,(t)$ iar, conform condiției 1, $\beta\,\varepsilon_{\beta\to 0}$ cînd $n\to\infty$, obținem că expresia asimptotică a funcției caracteristice a variabilei aleatoare $\frac{1}{\alpha_n}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i - n\,E^\infty\,(f)\right)$ este dată de $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_{\alpha,\infty}\left(\frac{t}{\alpha_n}\right)$. Dar după cum am văzut mai sus, acelaşi lucru este valabil şi pentru expresia asimptotică a funcţiei caracteristice a variabilei aleatoare $\frac{1}{\alpha_n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n E^{\infty}(f)\right)$ şi teorema este demonstrată.

2. Teorema limită centrală. TEOREMA 2.1. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ *satisface condiţiile 1 şi 2, atunci şirul de funcţii de repartiţie*

$$F_n(a) = P_c\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n E^{\infty}(f)}{\alpha_n} \leqslant a\right\}$$

poate converge numai către legi stabile. Dacă repartiţia limită a lui $F_n(a)$ *are exponentul* α, *atunci* $\alpha_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$, *unde* $h(n)$ *este o funcţie cu variaţie lentă* 2).

TEOREMA 2.2. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ *satisface condiţia 2, iar* $\sum_{n \in N^*} (\varepsilon_n)^{\frac{1}{2}} < \infty$. *Atunci*

$$\sigma^2 = E^{\infty}(f^2) - [E^{\infty}(f)]^2 + 2 \sum_{h \in N^*} \{E^{\infty}(f(x_1) f(x_{h+1}) - [E^{\infty}(f)]^2\} < \infty.$$

Dacă în plus $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P_c\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n E^{\infty}(f)}{\sigma \sqrt{n}} \leqslant \lambda\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Demonstraţiile teoremelor 2.2 şi 2.3 se reduc la observaţia că fiind îndeplinite condiţiile teoremei 1.1 de mai sus, ne aflăm în condiţiile teoremei 1.1 şi respectiv 1.5 din [5].

TEOREMA 2.3. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ *satisface condiţia 1, iar* $E_c(|f_n|^{2+\delta}) < M$ *pentru orice* $n \in N^*$, M *fiind o constantă pozitivă şi dacă*

$$\sigma^2_{(n)} = E^{\infty}(f(x_1) + \ldots + f(x_n) - n E^{\infty}(f))^2$$

are proprietatea

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma_{(n)}}{\sqrt{n}} \neq 0,$$

atunci

$$\lim_{n \to \infty} P_c\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n E^{\infty}(f)}{\sigma_{(n)}} \leqslant \lambda\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

---

2) Funcţia $h(n)$ se numeşte funcţia cu variaţie lentă dacă $\lim_{n \to \infty} \frac{h(kn)}{h(n)} = 1$ pentru orice $k \in R$.

Demonstrație. Să observăm că din condiția $E_c(|f_n|^{2+\delta}) < M$ rezultă $E^\infty(|f|^{2+\delta}) < M+1$, după cum obținem imediat din relația (5) înlocuind 2 cu $2+\delta$. Conform teoremei 1.1, ne aflăm în condițiile teoremei 1.4 din [5] și teorema este demonstrată.

COROLAR. *Să presupunem că* $\sum\limits_{n\in N^*} \varepsilon_n < \infty$ *și* $|f| < M$. *Atunci*

$$\sigma^2 = E^\infty(f^2) - [E^\infty(f)]^2 + 2\sum_{h\in N^*} \{E^\infty(f(x_1)\,f(x_{h+1}) - [E^\infty(f)]^2\} < \infty.$$

Dacă $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P_c\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n\,E^\infty(f)}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \lambda\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

Demonstrație. Vom arăta că ne aflăm în condițiile teoremei 1.4 de mai sus. Din lema 1.1 din [5] obținem, luînd $g_i = f(x_i) - E^\infty(f)$,

$$|E^\infty(g_1\,g_{h+1})| < 4M^2\varepsilon_h.$$

Prin urmare

$$\sigma^2 = E^\infty(g^2) + 2\sum_{h\in N^*} E^\infty(g_1\,g_{h+1}) < \infty$$

Pe de altă parte

$$E^\infty\left\{\left(\sum_{i=1}^{\alpha} g_i\right)^2\right\} - \alpha\sigma^2 = -\,2\sum_{h=1}^{\alpha-1} h\,E^\infty(g_1\,g_{h+1}) - 2\alpha\sum_{h\geqslant\alpha} E^\infty(g_1,\,g_{h+1}).$$

Dar $\left[\Phi_{\alpha,\infty}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^\mu$ este funcția caracteristică a sumei $\sum\limits_{m=1}^{\mu} z_m$, z_m fiind variabile aleatoare independente și identic repartizate, avînd aceeași repartiție ca și variabila aleatoare ξ definită pe cîmpul de probabilitate $(X^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)}, P^\infty_{1,\alpha})$ prin relația :

$$\xi(x^{(\alpha)}) = \frac{g(x_1) + \ldots + g(x_\alpha)}{\sqrt{n}}.$$

Prin urmare

$$\frac{\sigma^2_{(n)}}{n} = E\left\{\sum_{m=1}^{\mu} z_m^2\right\} = \frac{\mu}{n}\,E^\infty\left\{\left(\sum_{i=1}^{\alpha} g(x_i)\right)^2\right\} \to \sigma^2.$$

Ne aflăm, deci, în condițiile teoremei 1.4 și corolarul este demonstrat. Rezultatul de mai sus conține, ca un caz particular, teorema de la pagina 631 din [6], condiția $\sum\limits_{n\in N^*} \varepsilon_n < \infty$ impusă aici fiind mai puțin restrictivă decît condiția $\sum\limits_{n\in N^*} n\,\varepsilon_n < \infty$ impusă în [6].

În cele ce urmează vom folosi încă o teoremă referitoare la procesele staţionare. Această teoremă mi-a fost comunicată de M. Iosifescu.

TEOREMĂ. *Să presupunem că procesul staţionar* $\{x_j\}_{-\infty<j<\infty}$ *satisface condiţia* (*I*), $E(x_j)=0$, $E(|x_j|^{2+\delta})<\infty$ *pentru un* δ *dat*, $0<\delta<\infty$ *şi*

$$\sum_{n\in N^*}[\varphi(n)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}<\infty.$$

În aceste condiţii

$$\sigma^2=E(x_0^2)+2\sum_{j=1}^{\infty}E(x_0\,x_j)<\infty \tag{1}$$

şi dacă $\sigma\neq 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}P_0\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{\sigma\sqrt{n}}<a\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Demonstraţie. Inegalitatea (1) rezultă din relaţiile

$$|R(j)|=|E(x_0\,x_j)|\leqq 2\,[\varphi(j)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}\,E^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}(|x_0|^{\frac{2+\delta}{1+\delta}})\,E^{\frac{1}{2+\delta}}(|x_j|^{2+\delta})\leqq$$

$$\leqq K\,[\varphi(j)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}},\qquad (k - \text{constant})$$

(cazul $\delta=\infty$ revine la $|x_j|<M$ şi atunci $|R(j)|<2M^2\,\varphi(j)$.)
Vom arăta că $\sigma^2_{(n)}=E(x_1+\ldots+x_n)^2\to\infty$, cînd $n\to\infty$. În adevăr,

$$\sigma^2_{(n)}=E(x_1+\ldots+x_n)^2=n\,E(x_0^2)+2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,R(j)=$$

$$=n\left[R(0)+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)R(j)\right]=$$

$$=n\left[\sigma^2-2\sum_{j\geqslant n}R(j)-2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j\,R(j)}{n}\right]=n\,\sigma^2(1+0\,(1))$$

Am ţinut seama că

$$\sum_{j\geqslant n}R(j)=0\,(1)$$

şi că din convergenţa seriei $\sum\limits_{n\in N^*}[\varphi(n)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}$ rezultă

$$n\,[\varphi(n)]^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}\to 0$$

şi prin urmare

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j\,R(j)}{n}\to 0.$$

Este deci posibil să aplicăm teorema 1.4 din [5] şi demonstraţia este terminată.

TEOREMA 2.4. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiţia* $E_c(|f_n|^{2+\delta}) < M$, *pentru orice* $n \in N^*$, M *fiind o constantă pozitivă iar* $\sum_{n\in N^*} (\varepsilon_n)^{\frac{1+\delta}{2+\delta}} < \infty$. *În aceste condiţii*

$$\sigma^2 = E^\infty(f^2) - [E^\infty(f)]^2 + 2\sum_{h\in N^*} \{E^\infty(f(x_1)\,f(x_{h+1})) - [E^\infty(f)]^2\} < \infty.$$

Dacă în afară de aceasta, $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P_c \left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n\,E^\infty(f)}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \lambda \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u.$$

Demonstraţie. Ne aflăm în condiţiile teoremei 1.1 şi prin urmare putem aplica teorema de mai sus.

3. **Legea numerelor mari.** TEOREMA 3.1. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiţiile 1 şi 2, atunci*

$$P_c \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)}{n} = E^\infty(f)$$

prin simbolul $P \lim u_n$ *înţelegînd limita în probabilitate a lui* u_n.

Demonstraţie. Să observăm că procesul staţionar este metric tranzitiv (vezi de exemplu [9]). Aplicînd teorema ergodică a lui Birchoff şi teorema 1.1 obţinem rezultatul de mai sus.

4. Rezultatul teoremei 1.1 şi prin urmare şi al teoremelor din § 1 şi § 2 poate fi generalizat la cazul variabilelor aleatoare dependente de un tip mai general.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate, $(X, \mathcal{F})$ un spaţiu măsurabil şi $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un şir de variabile aleatoare definite pe Ω ca valori în X. Fie f o funcţie reală definită pe X şi $\mathcal{F}$-măsurabilă şi $\xi_0 = 1$. Vom presupune că sînt îndeplinite următoarele două condiţii :

1) Există o funcţie de mulţime $P_{1.l}^{\infty}$ definită pe $\mathcal{F}^{(l)}$ pentru orice $l \in N^*$ astfel ca :

$$|P((\xi_{n+k}, \ldots, \xi_{n+k+l-1}) \in A^{(l)} \mid \xi_0, \ldots, \xi_n) - P_{1.l}^{\infty}(A^{(l)})| < \varepsilon_k$$

cu $k\varepsilon_k \to 0$ cînd $k \to \infty$, pentru orice $n, l, k \in N^*$ şi $A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$.

2) Există o constantă M, $(M > 0)$ astfel ca :

$$E(f^2(\xi_n)) < M \text{ pentru orice } n \in N^*.$$

În aceste condiţii se obţine cu uşurinţă că

1) $P^{\infty}_{1,l}$ este o probabilitate pe $\mathcal{F}^{(l)}$

2) $P^{\infty}_{1,l}$ este o măsură staţionară în sens restrîns

3) $\int_X f^2 \,\mathrm{d}P^{\infty}_{1,1} < M.$

Să notăm $E^{\infty}(f) = \int_X f\, P^{\infty}_{1,1}(\mathrm{d}x)$ şi fie $(E, \mathcal{G}, P^{\infty})$ cîmpul de probabilitate pe care este definit procesul staţionar $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ corespunzător măsurilor $(P^{\infty}_{1,l},\ l \in N^*)$.

TEOREMA 4.1. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *este un şir de variabile aleatoare care satisfac condiţiile 1 şi 2 de mai sus şi dacă* $(\alpha_n)_{n\in N^*}$ *este un şir de numere astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \neq 0$, *atunci repartiţia asimptotică a variabilei aleatoare*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) - nE^{\infty}(f)}{\alpha_n}$$

este identică cu repartiţia asimptotică a variabilei aleatoare

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i - n\,E^{\infty}(f)}{\alpha_n}$$

iar procesul $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ *satisface condiţia* (I).

Primită la redacţie la 28 octombrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G. Ciucu şi R. Theodorescu, *Procese cu legături complete.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960.
2. H. Cohn, *Le problème limite central pour les systèmes aléatoires a liaison complètes.* CR. Acad. Sc. Paris, **259**, *20*, 3423—3426 (1964).
3. L. L. Doob, *Stokastic Processes,* New York — London, 1952.
4. P. Halmoş, *Measure Theory,* NewYork, 1950.
5. L. A. Ibraghimov, *Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов.* Теория вероятности, **VIII**, *4*, 331—362 (1962).
6. M. Iosifescu, *Случайные системы с полными связями с произвольным множеством состояний.* Revue de Math. pures et appliquées, **VIII**, 611—635 (1963).
7. M. Loève, *Probability Theory,* Princeton, 1960.
8. O. Onicescu, G. Mihoc, *Sur les chaînes statistiques.* R. Acad. Sci. Paris, **200**, 511—512 (1935).
9. И. Розанов, *Стационарные случайные процессы.* Москва, 1963.

APLICAȚII ALE UNEI METODE SEMIINVERSE LA PROBLEMA SCURGERILOR PE SUB BARAJE

DE

SANDA MANEA
Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

Se studiază mișcarea apelor subterane pe sub baraje, presupuse impermeabile, în cazul cînd mediul poros de sub baraj ocupă un semicerc minus fundul de baraj, și cazul cînd mediul poros de sub baraj ocupă o bandă de lățime h minus fundul de baraj. În ambele cazuri se utilizează metoda semiinversă [1]. Pentru diverse valori date parametrilor de care depinde soluția problemei se obțin diferite profile pentru talpa barajului.

1. Metoda semiinversă constă în reducerea problemei mecanice plane la o problemă la limită pentru un domeniu canonic, frontiera domeniului fizic fiind parțial cunoscută. Aproximarea porțiunilor necunoscute se realizează prin folosirea de reprezentări conforme succesive, alese în mod convenabil. Metoda aceasta a fost propusă în [1].

Pentru a studia scurgerea apelor subterane pe sub baraje, presupuse impermeabile, în unele cazuri mișcarea reală tridimensională se reduce la o mișcare plană. Aici se vor considera de asemenea mișcări bidimensionale, folosind metoda semiinversă.

Fie C intersecția tălpii barajului cu planul xOy, C' intersecția suprafeței impermeabile pe care se găsește mediul poros de sub baraj cu același plan, C_1 și C_2 intersecțiile cu planul xOy a fundului bazinului amonte, respectiv a fundului bazinului aval. Mediul poros este considerat omogen și izotrop (fig. 1). Notăm cu H diferența de nivel a lichidului din cele două bazine, cu Q debitul de fluid ce trece din primul bazin în al doilea și cu k coeficientul de filtrație. Potențialul complex al mișcării, $f = \varphi + i\,\psi$, se va determina impunînd condițiile

$$\varphi = \begin{cases} -kH & \text{pe } C_1 \\ 0 & \text{pe } C_2 \end{cases}, \qquad \psi = \begin{cases} 0 & \text{pe } C \\ -Q & \text{pe } C' \end{cases}. \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 433–444, BUCUREȘTI, 1965

Domeniul mişcării în planul potenţialului complex f va fi un dreptunghi. Efectuînd reprezentarea conformă a domeniului mişcării din planul z pe acest dreptunghi se găseşte $f = f(z)$ şi deci caracteristicile mişcării se vor determina imediat. În general se introduce un plan ajutător $\zeta = \xi + i\eta$ şi se face reprezentarea conformă a domeniului din planul fizic şi a dreptunghiului pe acelaşi semiplan din planul ζ, punctelor D, E, F, G din planul z corespunzîndu-le în planul ζ punctele D'', E'', F'', G'' de abscise respectiv $-{}^1/_\varkappa$, -1, 1, ${}^1/_\varkappa$. Atunci $z = z(\zeta)$ şi $f = f(\zeta)$ reprezintă soluţia problemei sub formă parametrică. Notînd prin K integrala eliptică completă de speţa întîi, de modul $\varkappa$, prin K' integrala eliptică completă de speţa întîi de modul $\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}$, iar prin F (arcsin ζ, $\varkappa$) integrala eliptică de speţa întîi, se găseşte că funcţia

$$f = \frac{kH}{2K}\left[F\left(\arcsin\zeta, \varkappa\right) - K\right] \tag{2}$$

reprezintă conform dreptunghiul din planul f pe semiplanul inferior din planul ζ, iar pentru debit se obţine expresia

$$Q = kH\frac{K'}{2K}\cdot \tag{3}$$

2. Să considerăm mai întîi cazul unui mediu poros, omogen şi izotrop, limitat de semicercul C' (intersecţia cu planul xOy a suprafeţei stratului impermeabil pe care se găseşte mediul poros), de C (intersecţia tălpii barajului cu acelaşi plan), de segmentele de dreaptă C_1 şi C_2 (intersecţiile cu planul xOy a fundului celor două bazine) (fig. 2). Curba C nu este cunoscută dinainte, de asemenea lungimile segmentelor C_1 şi C_2. Domeniul mişcării din planul fizic poate fi reprezentat pe domeniul din planul z, unde raza semicercului C' este 1.

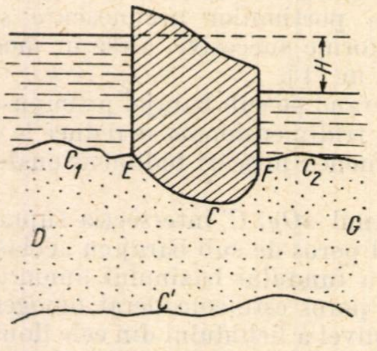


Fig. 1

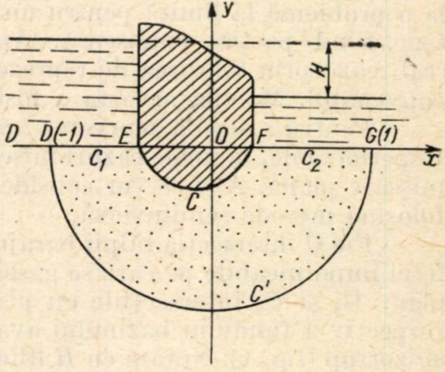


Fig. 2

Trecem la reprezentarea conformă a domeniului mişcării din planul z pe semiplanul inferior ζ şi la determinarea lui C, C_1 şi C_2.

Pentru început să considerăm în planul z domeniul limitat de semicercul C' și de segmentul DG. Cu ajutorul funcției

$$z_1 = \ln \frac{1+z}{1-z} \tag{4}$$

domeniul va trece în banda $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ din planul $z_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$. Determinația logaritmului este aceea pentru care logaritmul este real pentru z real. Această bandă se reprezintă conform pe semiplanul superior $w = u + \mathrm{i}v$. Punctelor $D\,(-1)$ și $G\,(+1)$ din planul z impunem să le corespundă punctele $D^1\,(\infty)$ și $G^1\,(0)$ din planul w. Atunci

$$w = \mathrm{e}^{-2z_1} \tag{5}$$

iar din (4) și (5) rezultă

$$z = \frac{1-\sqrt{w}}{1+\sqrt{w}}, \tag{6}$$

radicalul fiind luat cu determinația aritmetică. În planul w să luăm semicercul C'' de rază r, cu centrul în punctul $d + r$ (fig. 3). Acestui semicerc îi va corespunde în planul (z) o curbă C, care va fi tocmai curba de intersecție a tălpii barajului cu planul xOy. Din (6) rezultă că punctele E și F au abscisele respectiv $\frac{1-\sqrt{d+2r}}{1+\sqrt{d+2r}}$ și $\frac{1-\sqrt{d}}{1+\sqrt{d}}$, deci segmentele C_1 și C_2 sînt determinate. Folosind formula (6), punctele curbei C se determină din relațiile

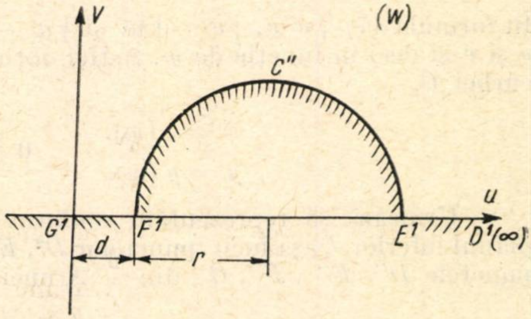


Fig. 3

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1-\sqrt{w\overline{w}}}{\sqrt{w\overline{w}}+\sqrt{w}+\sqrt{\overline{w}}+1}, \\ y &= \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\sqrt{\overline{w}}-\sqrt{w}}{\sqrt{w\overline{w}}+\sqrt{w}+\sqrt{\overline{w}}+1}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

unde w parcurge semicercul C'' de la E^1 la F^1.

Reprezentăm conform domeniul din planul w, limitat de semicercul C'' și de semidreptele $(-\infty, d)$; $(d + 2r, \infty)$ pe semiplanul superior w_1, așa încît punctului F^1 să-i corespundă originea și punctului E^1 să-i corespundă punctul de la ∞. Atunci

$$w_1 = -\left[\frac{w-d}{w-(d+2r)}\right]^2, \tag{8}$$

şi din (8) rezultă

$$w = \frac{\sqrt{w_1}\,(d + 2r) - \mathrm{i}\,d}{\sqrt{w_1} - \mathrm{i}}, \tag{8'}$$

unde $\sqrt{w_1}$ este luat cu determinaţia aritmetică. Din (8') se vede că punctele semicerului C'' se obţin pentru w_1 real şi pozitiv. Atunci notînd cu m un parametru real şi pozitiv,

$$u = \frac{d + dm + 2\,rm}{m + 1}, \quad v = \frac{2r\sqrt{m}}{m + 1}. \tag{9}$$

În formula (7) $\sqrt{w\overline{w}}$, $\sqrt{w} + \sqrt{\overline{w}}$ şi $\sqrt{\overline{w}} - \sqrt{w}$ se pot exprima în funcţie de u şi v şi deci în funcţie de m. Astfel obţinem reprezentarea parametrică a curbei C,

$$\begin{aligned} x &= x(m), \\ y &= y\,(m), \end{aligned} \qquad 0 \leqslant m \leqslant \infty. \tag{10}$$

Urmează să reprezentăm conform semiplanul superior w_1 pe semiplanul inferior ζ aşa încît punctelor D^2, E^2, F^2, G^2 din w_1 să le corespundă punctele D'', E'', F'', G'' din ζ. Atunci

$$\zeta = \frac{a\; w_1 + b}{w_1 + c}, \tag{11}$$

a, b, c, $\varkappa$ determinîndu-se din condiţia de corespondenţă a punctelor impusă mai sus.

Rezultă

$$a = -1, \quad b = c = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa} = \frac{d}{d + 2r}, \quad \varkappa = \frac{r}{r + d}, \tag{12}$$

şi din (11) şi (12) obţinem

$$w_1 = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}\,\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} = \frac{d}{d + 2r}\,\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}. \tag{13}$$

Folosind formulele (6), (8') şi (13) găsim funcţia care reprezintă conform domeniul mişcării din planul z pe semiplanul inferior ζ:

$$z = \frac{\sqrt{\sqrt{\dfrac{d}{d + 2r}\,\dfrac{1 - \zeta}{1 + \zeta}} - \mathrm{i}} - \sqrt{\sqrt{d\,(d + 2r)\,\dfrac{1 - \zeta}{1 + \zeta}} - \mathrm{i}d}}{\sqrt{\sqrt{\dfrac{d}{d + 2r}\,\dfrac{1 - \zeta}{1 + \zeta}} - \mathrm{i}} + \sqrt{\sqrt{d\,(d + 2r)\,\dfrac{1 - \zeta}{1 + \zeta}} - \mathrm{i}d}}. \tag{14}$$

Relaţiile (2) şi (14) ne dau soluţia problemei sub formă parametrică : pentru fiecare valoare a lui ζ în semiplanul inferior se poate găsi un punct z precum şi potenţialul complex f în acel punct.

Putem calcula acum viteza complexă $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}$, și găsim

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \pm \frac{2\,kH\,(d+r)}{\sqrt{-(1-z)^4\,(d+r)+(2d^2+4\,rd+r^2)\,(1-z^2)^2-(1+z)^4\,d(d+2r)(d+r)}}. \tag{15}$$

Urmează că în punctele D, E, F, G viteza complexă are următoarele valori :

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_D = \frac{\mathrm{i}\,kH}{2}\sqrt{d+r}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_E = \frac{\mathrm{i}kH}{2\,r\sqrt{d+2\,r}}(d+r)\,(1+\sqrt{d+2r})^2,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_F = -\frac{\mathrm{i}\,kH}{2r\sqrt{d}}(d+r)\,(1+\sqrt{d})^2, \quad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_G = -\frac{\mathrm{i}\,kH}{2}\sqrt{\frac{d+r}{d\,(d+2r)}}.$$

Există următoarele inegalități :

$$\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_D < \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_E \text{ pentru } d \text{ și } r > 0, \quad \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_E \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_F \text{ pentru } d\,(d+2r) \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_G < \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_F \text{ pentru } d \text{ și } r > 0, \quad \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_D \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_G \text{ pentru } d\,(d+2r) \leqslant 1.$$

3. Ca exemplu fie cazul particular în care $d = \frac{1}{2}$, $r = 2$. Determinăm curba C utilizînd formulele (7), (9) și dînd valori parametrului m de la 0 la ∞. Se obține atunci fundul de baraj din figura 4, în E și F, curba C avînd tangente verticale.

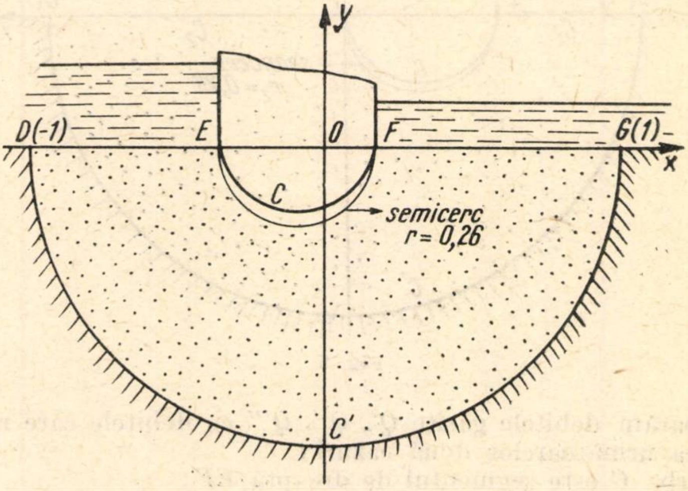


Fig. 4

Folosind formula (3), a 3-a formulă din (12) și cunoscînd raportul $\frac{K'}{K} = 0{,}87$, găsim $Q' = 0{,}435\ kH$. Raportul $\frac{K'}{K}$ pentru diverse valori ale lui $\varkappa$ se găsește tabelat, de exemplu în [2].

Considerăm acum că EF își menține lungimea constantă l. Făcînd pe d să varieze și cunoscînd $r = r\ (d,\ l)$ obținem diverse profile pentru secțiunea barajului cu planul xOy. Lungimea segmentului EF este

$$l = \frac{1-\sqrt{d}}{1+\sqrt{d}} - \frac{1-\sqrt{d+2r}}{1+\sqrt{d+2r}}.$$

De aici obținem

$$r = \frac{l^2(1-d^2-2d\sqrt{d}-2\sqrt{d}) + 4l(2d + d\sqrt{d} + \sqrt{d})}{8-8l(1+\sqrt{d}) + 4l^2(1+\sqrt{d})}.$$

În exemplul considerat mai înainte lungimea segmentului EF este $l = 0{,}53$. Luînd $d = 1$, obținem $r = 4{,}81$. În acest caz avem situația din figura 5. Găsim $\varkappa = \frac{r}{d+r} = 0{,}82$ și debitul $Q'' = 0{,}421\ kH$. Menținînd $l = 0{,}53$ și luînd $d = 0{,}336$, obținem $r = 1{,}315$ și situația din figura 6.

Aici $\varkappa = \frac{r}{d+r} = 0{,}79$ și debitul $Q''' = 0{,}445\ kH$.

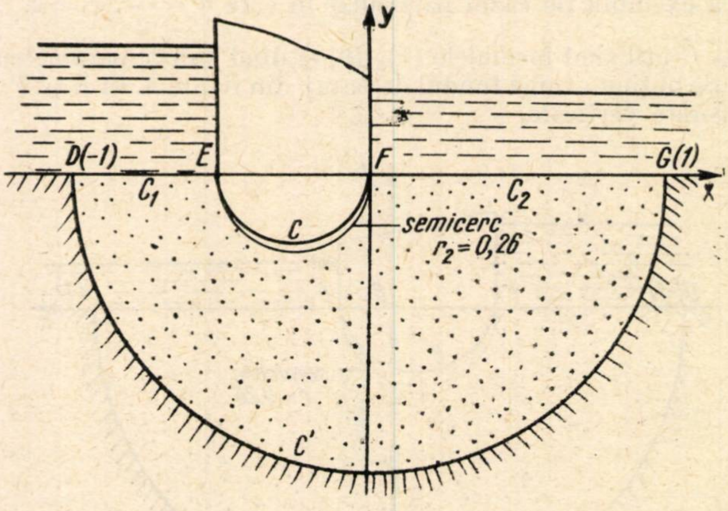


Fig. 5

Comparăm debitele găsite Q', Q'', Q''' cu debitele care rezultă din considerarea următoarelor două cazuri :

a) curba C este segmentul de dreaptă EF;

b) curba C este semicercul de diametru EF.

Rezolvarea acestor două probleme a fost dată în [3].

Cînd curba C este segmentul EF,

$$\varkappa = \frac{|e-f|}{1-ef},$$

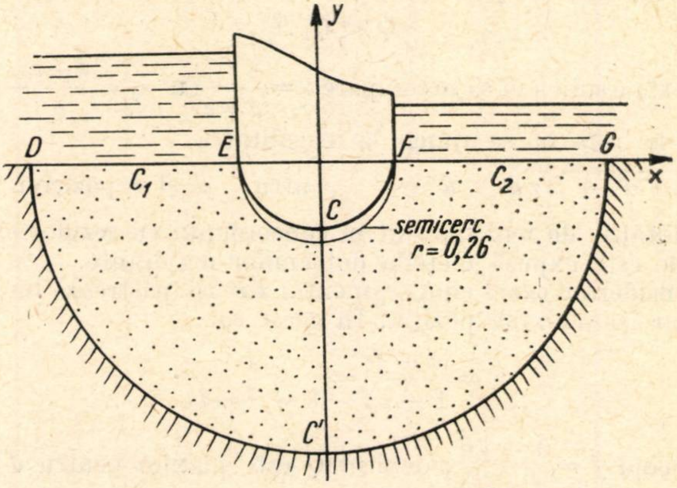


Fig. 6

e şi f fiind abscisele punctelor E şi F.

Pentru $d = \frac{1}{2}$, $r = 2$ avem $\varkappa = 0{,}5$ şi $Q_1' = 0{,}64\ kH$.

Pentru $d = 1$; $r = 4{,}81$ avem $\varkappa = 0{,}53$ şi $Q_1'' = 0{,}61\ kH$.

Pentru $d = 0{,}336$; $r = 1{,}315$ avem $\varkappa = 0{,}49$ şi $Q_1''' = 0{,}66\ kH$.

Cînd curba C este semicercul de diametru EF, debitul este

$$Q = \frac{kH}{\pi} \ln \frac{r_1^2 + r_2^2 - D^2 + \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 - D^2)^2 - 4\,r_1^2 r_2^2}}{2\,r_1 r_2},$$

unde $r_1 = 1$ este raza semicercului mare,
r_2 este raza semicercului mic,
D este distanţa dintre centrele celor două semicercuri.

r_2 şi D se găsesc foarte simplu deoarece se cunosc abscisele punctelor E şi F. Efectuînd calculele găsim :

pentru $d = \frac{1}{2}$; $r = 2$, $r_2 = 0{,}265$, $D = 0{,}09$, $Q_2' = 0{,}419\ kH$;

pentru $d = 1$; $r = 4{,}81$, $r_2 = 0{,}265$, $D = 0{,}265$, $Q_2'' = 0{,}39\ kH$;

pentru $d = 0{,}336$; $r = 1{,}315$, $r_2 = 0{,}265$, $D = 0$ $Q_2''' = 0{,}422\ kH$.

Se observă că există următoarele inegalități :

$$Q'_2 < Q' < Q'_1$$
$$Q''_2 < Q'' < Q''_1$$
$$Q'''_2 < Q''' < Q'''_1$$

Se poate arăta ușor că pentru orice d și r

$$Q < Q_1 .$$

Pentru aceasta e suficient să se compare $\varkappa = \dfrac{r}{d+r}$ cu $\varkappa_1 = \dfrac{d+r}{r} - \dfrac{\sqrt{d(d+2r)}}{r}$.

Plecînd de la $\varkappa > \varkappa_1$, se ajunge la inegalitatea

$$\sqrt{d^2 + 2rd} < d + r \quad \text{pentru} \quad d \text{ și } r \text{ pozitivi.}$$

Inegalitățile de mai sus sînt în concordanță cu rezultatele obținute în [4], unde este expusă metoda domeniilor majorante.

Să considerăm cazul cînd segmentul EF își păstrează lungimea constantă l, dar își schimbă poziția. În acest caz

$$\varkappa = \frac{|e-f|}{1-ef} = \frac{l}{1-f^2-lt}.$$

Cunoscînd $f = \dfrac{1-\sqrt{d}}{1+\sqrt{d}}$, debitul Q este maxim pentru $d = \left(\dfrac{2-l}{2+l}\right)^2$. Acest rezultat corespunde cazului cînd originea axelor se găsește la jumătatea segmentului EF.

Pentru $d = 0$ și $d = \infty$ debitul devine nul.

În figura 7 s-a reprezentat variația debitului Q în funcție de parametrii d și r.

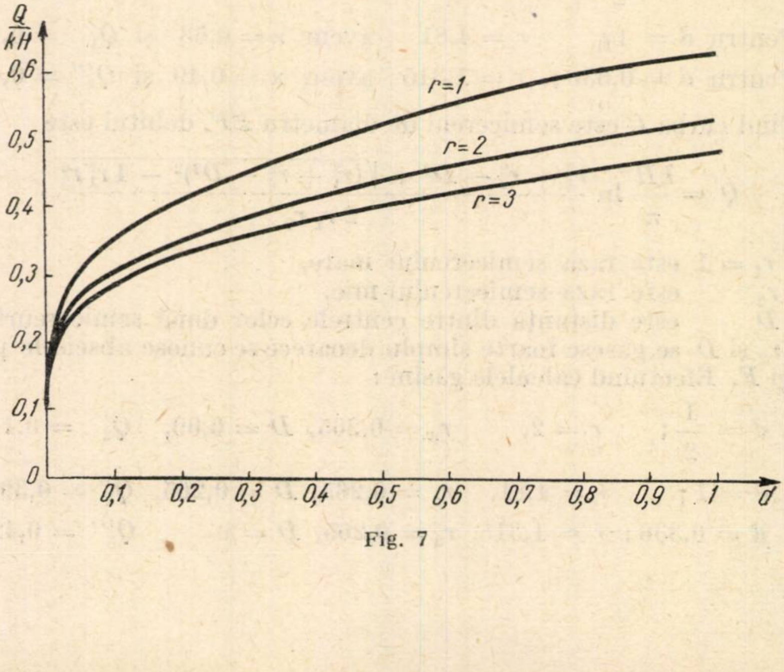


Fig. 7

4. Să considerăm acum cazul unui mediu poros, omogen şi izotrop care ocupă banda de lăţime h minus domeniul limitat de axa Ox şi curba C, intersecţia tălpii barajului cu planul xOy. Curba C nu este cunoscută dinainte. Va trebui să reprezentăm conform domeniul mişcării din planul fizic z pe semiplanul inferior ζ şi să determinăm curba C. Pentru început considerăm în planul z banda $-1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0$. Reprezentăm conform interiorul acestei benzi pe semiplanul superior w aşa încît punctelor $-\infty$, 0, $+\infty$ din z să le corespundă punctele ∞, 1, 0 din planul w. Vom avea

$$w = e^{-\pi z}, \tag{16}$$

de unde

$$z = -\frac{1}{\pi} \ln w, \tag{17}$$

determinaţia logaritmului fiind aceea pentru care logaritmul este real cînd w este real.

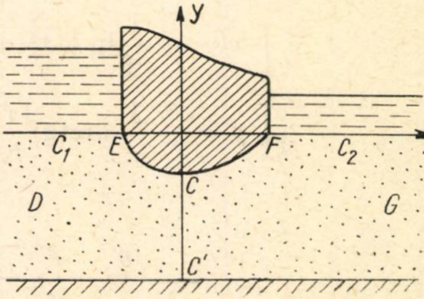


Fig. 8

Din (17) rezultă

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\pi} \ln |w|, \\ y &= -\frac{1}{\pi} \arg w. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

În planul w să considerăm semicercul de rază $r < 1$ cu centrul în punctul 1. Acestui semicerc îi corespunde în planul z o curbă C, care va fi tocmai curba de intersecţie a tălpii barajului cu planul xOy. Semiplanul superior w minus semicercul considerat se reprezintă conform pe semiplanul superior din planul t prin intermediul transformării lui Jukowski

$$t = \frac{1}{2}\left(w - 1 + \frac{r^2}{w-1}\right), \tag{19}$$

de unde

$$w = t + 1 + \sqrt{t^2 - r^2}, \tag{20}$$

radicalul avînd determinaţia aritmetică pentru t real şi $> r$.

Punctelor D, E, F, G din planul z le corespund punctele D', E', F', G' din planul t, cu abcisele respectiv ∞, r, $-r$, $-\frac{1}{2}(1 + r^2)$ (fig. 9). Se observă că punctele semicercului se obţin pentru t real şi $-r \leqslant t \leqslant r$. Atunci

$$w = t + 1 + i \sqrt{r^2 - t^2}$$

și deoarece

$$w = u + iv, \qquad u = t + 1, \qquad v = \sqrt{r^2 - t^2},$$

ecuațiile parametrice ale curbei căutate C vor fi

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\pi}\ln\sqrt{r^2 + 2\,t + 1}, \\ y &= -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r^2 - t^2}}{t + 1}, \end{aligned}\right. \qquad -r \leqslant t \leqslant r, \tag{21}$$

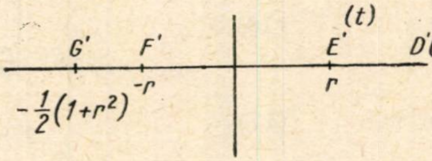


Fig. 9

radicalii fiind luați cu determinația aritmetică. Determinația logaritmului este aceea pentru care logaritmul este real și determinația lui arctg este aceea care se reduce la zero pentru $t = \pm r$.

Din (21) rezultă că punctele E și F au abscisele respectiv $-\frac{1}{\pi}\ln(1 + r)$ și $-\frac{1}{\pi}\ln(1 - r)$.

Urmează să reprezentăm conform semiplanul superior t pe semiplanul inferior ζ așa încît punctelor D', E', F', G' din planul t să le corespundă în planul ζ punctele D'', E'', F'', G'' de abscise respectiv $-1/\varkappa$, -1, 1, $1/\varkappa$. Atunci ζ are expresia generală

$$\zeta = \frac{a'\,t + b'}{t + c'}, \tag{22}$$

unde a', b', c', $\varkappa$ se determină din corespondența indicată :

$$a' = -\frac{1}{r}, \qquad b' = -r, \qquad c = 1, \qquad \varkappa = r. \tag{23}$$

Atunci

$$\zeta = -\frac{t + r^2}{r\,(t + 1)} \tag{24}$$

și

$$t = -\frac{r^2 + r\,\zeta}{1 + r\,\zeta}. \tag{25}$$

Folosind formulele (17), (20) și (25) obținem relația dintre z și ζ

$$z = -\frac{1}{\pi}\ln\left\{\frac{1}{1+r\zeta}\left[1-r^2+r\sqrt{(r^2-1)(1-\zeta^2)}\right]\right\}. \tag{26}$$

Relațiile (2) și (26) reprezintă soluția parametrică a problemei.

Pentru viteza complexă găsim

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} = -\frac{kH\pi}{2K}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}z}}{\pm\sqrt{(e^{-\pi z}-1)(1-r^2-e^{-\pi z})}},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_E = \mathrm{i}\,\frac{kH\pi}{2Kr} = -\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_F.$$

În punctul I, minimul curbei C, de coordonate $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\pi}\ln\sqrt{1-r^2} \\ y = -\dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{r\sqrt{1-r^2}}{1-r^2} \end{cases}$

viteza complexă este

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_I = \frac{kH\pi}{2kr}.$$

5. Considerăm cazul particular în care $r = \dfrac{1}{2}$. Utilizînd formula (21) obținem figura 10.

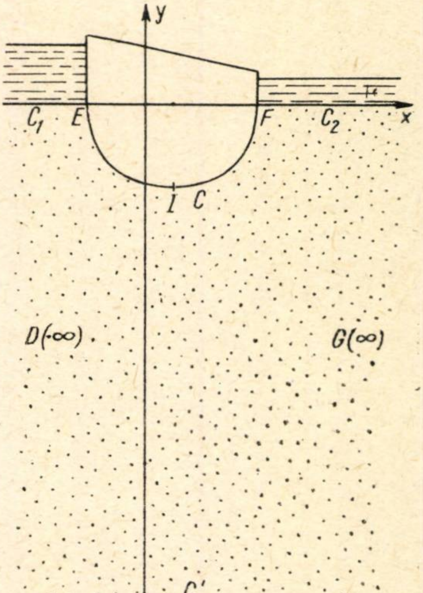


Fig. 10

Acest domeniu se reprezintă conform pe semiplanul inferior ζ prin funcția

$$z = -\frac{1}{\pi}\ln\left\{\frac{1}{2(2+\zeta)}\left[3+\sqrt{3(\zeta^2-1)}\right]\right\}.$$

Debitul Q_1 se obține cunoscînd că $r = \varkappa = \dfrac{1}{2}$:

$$Q_1 = 0{,}64\; kH.$$

Să comparăm debitul obținut la acest profil cu debitul ce se obține în cazul cînd talpa barajului este formată din segmentul EF de lungime $-\dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{1-r}{1+r}$ și din segmentul HI, punctul I fiind minimul curbei C, iar punctul H avînd coordonatele

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\pi} \ln \sqrt{1-r^2} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Folosind rezultatele expuse în [5], găsim în cazul $r = \dfrac{1}{2}$ că $Q_2 = 0{,}79\ kH$, deci $Q_2 > Q_1$, aşa cum trebuia.

Primită la redacţie la 2 noiembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Şt. I. Gheorghitza, *A Semi-inverse method in plane hydrodynamics*. Archivum Mechaniki Stosowanej, *6*, p. 681 (1959).
2. F. Oberhettinger, W. Magnus, *Anwendung der elliptischer Funktionen in Physik und Technik*. Springer-Verlag, Berlin, 1949.
3. Şt. I. Gheorghiţă, *Aplicaţii ale coordonatelor bipolare la mişcări sub baraje*. Gazeta „Matematică şi fizică", seria A, *5*, p. 232 (1963).
4. G. N. Polojii, *Metod dvijenia granicinîh tocek i majorantîh oblastei v teorii filtraţii*. Ukrainskii Matematiceskii Jurnal, *4*, p. 380 (1953).
5 Şt. I. Gheorghiţă, *Capitole din teoria mişcărilor în mediile poroase*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1957, p. 13.

ASUPRA UNEI CLASE DE PROBLEME DE PROGRAMARE PARAMETRICĂ

DE

I. DRĂGAN
Universitatea „Alexandru Ion Cuza"

§1. În cele ce urmează vom considera problemele de programare parametrică de forma

$$\text{(P)} \qquad AX = P_0, \quad X \geqslant 0, \quad f = (\alpha\theta^2 + \beta\theta + \gamma)\, X = \min.,$$

în care θ este un parametru, A o matrice numerică de tip $m \times n$, P_0, α, β, γ, vectori daţi n-dimensionali, iar X vectorul n-dimensional necunoscut.

Se ştie că în cazul $\alpha = 0$ o asemenea problemă poate fi rezolvată cu ajutorul algoritmului Gass-Saaty [1], [2], dar nu cunoaştem vreun algoritm pentru rezolvarea problemei propuse [3], [4]. În continuare, expunem tocmai un asemenea algoritm care constituie o extensiune a algoritmului Gass-Saaty. Presupunem cunoscută soluţia optimală a problemei pentru o anumită valoare a lui θ şi admitem, fără a restrînge generalitatea, că această valoare este $\theta_0 = 0$. Atunci cînd θ variază, soluţia cunoscută rămîne soluţie a problemei, dar s-ar putea să nu mai fie optimală. Se pune problema de a formula un algoritm cu ajutorul căruia să obţinem soluţiile optimale pentru diferitele valori ale lui θ. Vom presupune că parametrul θ variază pe intervalul $[0, +\infty)$. De asemenea, admitem că problema (P) este nedegenerată.

§2. Fie (S_0) soluţia optimală a problemei (P) pentru $\theta = 0$ şi $B_0 = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$ baza corespunzătoare acestei soluţii, în care $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sînt primele m coloane ale matricei A. Condiţiile de optimalitate ale soluţiei corespunzătoare bazei B_0 sînt

$$\delta_k = z_k - c_k = (\alpha_0\,\theta^2 + \beta_0\,\theta + \gamma_0)\, B_0^{-1} P_k - (\alpha_k\,\theta^2 + \beta_k\,\theta + \gamma_k) \leqslant 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 445–449, BUCUREŞTI, 1965

unde α_0, β_0, γ_0, sînt vectorii formați cu primele m componente ale vectorilor α, β, γ, iar P_k $(k = 1, 2, ..., n)$ sînt coloanele matricii A [5]. Condițiile (1) se scriu sub forma

$$\delta_k = z_k - c_k = u_k\,\theta^2 + v_k\,\theta + w_k \leqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

u_k, v_k, w_k, avînd expresiile

$$u_k = \alpha_0 B_0^{-1} P_k - \alpha_k, \quad v_k = \beta_0 B_0^{-1} P_k - \beta_k, \quad w_k = \gamma_0 B_0^{-1} P_k - \gamma_k \tag{3}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Conform ipotezei, $z_k - c_k \leqslant 0$ pentru $\theta = \theta_0 = 0$, deci $w_k \leqslant 0$. Făcînd θ să varieze în mod continuu pe intervalul $[0, +\infty)$ s-ar putea să avem încă $z_k - c_k \leqslant 0$. Se pune o primă problemă : A) să se găsească valoarea $\theta = \theta_1$ cu proprietatea că pentru $\theta_0 < \theta \leqslant \theta_1$ condițiile (2) să fie încă satisfăcute, în timp ce pentru $\theta = \theta_1 + \varepsilon$ (ε = număr pozitiv, arbitrar și suficient de mic) cel puțin una dintre diferențele $z_k - c_k$ să fie pozitivă. Un asemenea număr θ_1 fiind determinat, deducem că pe intervalul $[\theta_0, \theta_1]$ soluția optimală a problemei (P) este soluția (S_0) și se pune o a doua problemă : B) să se găsească soluțiile optimale pentru valorile $\theta > \theta_1$.

§ 3. Ne ocupăm de problema (A), folosind regula bine cunoscută a semnului trinomului de gradul al doilea. Considerăm trinomul

$$T_k = u_k\theta^2 + v_k\,\theta + u'_k\,, \tag{4}$$

al cărui termen liber este nepozitiv. Dacă rădăcinile trinomului T_k sînt complexe, pentru $\theta \in [0, +\infty)$ avem $T_k \leqslant 0$. Dacă trinomul (4) are rădăcini reale egale, ori avem $T_k \leqslant 0$ pentru $\theta \in [0, +\infty)$, ori trinomul este de forma $T_k = u_k\theta^2$ cu $u_k > 0$ și avem $\theta_1 = \theta_0 = 0$ (s-a ținut seama și de cazul $u_k = v_k = 0$). Dacă trinomul T_k are rădăcini reale distincte θ_m^k, θ_M^k ($\theta_m^k < \theta_M^k$), poate avea loc o schimbare de semn numai cînd θ, în variația sa, trece printr-o rădăcină. Pentru simplitate, în cazul unui trinom degenerat ($u_k = 0$), punem, prin convenție, $\theta_M = +\infty$, dacă $v_k > 0$, și $\theta_m^k = -\infty$, dacă $v_k < 0$. Se pot considera trei cazuri :

$$a)\ u_k > 0\,; \quad b)\ u_k \leqslant 0, \quad v_k > 0\,; \quad c)\ u_k \leqslant 0, \quad v_k < 0.$$

Folosind regula semnului trinomului în cele trei cazuri, rezultă

$$a)\ \theta_1 \leqslant \theta_M^k\ ; \quad b)\ \theta_1 \leqslant \theta_m^k\,; \quad c) \text{ nici o restricție pentru } \theta_1.$$

Ținînd seama de acestea, determinarea valorii θ_1 se face după regula : se află rădăcinile trinoamelor T_k și dacă există vreun trinom de forma $T_k = u_k\,\theta^2$ cu $u_k > 0$ avem $\theta_1 = \theta_0 = 0$, iar în cazul contrar, se arată ușor că

$$\theta_1 = \min_{\Delta_k > 0} \left(\min_{u_k > 0} \theta_M^k,\ \min_{\substack{u_k \leqslant 0 \\ v_k > 0}} \theta_m^k\right). \tag{5}$$

Determinarea rapidă a numărului θ_1 se poate face cu ajutorul unui tabel de calcul.

Facem observația că spre deosebire de cazul considerat de Gass-Saaty, în cazul problemei (P) s-ar putea ca soluția (S_0) să fie optimală nu numai pe intervalul $[\theta_0, \theta_1]$, ci şi pe alte intervale disjuncte cu acesta.

§ 4. Ne ocupăm de problema (B), folosind criteriul de intrare în bază şi teoremele fundamentale ale metodei simplex. Se ştie [5], că pentru a se trece de la o soluţie de bază nenegativă şi nedegenerată la altă soluţie de bază nenegativă, în metoda simplex se introduce în bază vectorul corespunzător celei mai mari dintre diferenţele $z_k - c_k$ şi că după alegerea acestui vector, vectorul care trebuie eliminat din bază este determinat în mod unic, dacă problema nu are soluţii de bază degenerate.

Să presupunem că, după determinarea numărului θ_1, am făcut schimbarea de parametru $\theta = \theta_1 + \theta'$ în problema (P). Trinoamele T_k devin

$$\overline{T}_k = \overline{u}_k \theta'^2 + \overline{v}_k \theta' + \overline{w}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

unde

$$\overline{u}_k = u_k, \quad \overline{v}_k = v_k + 2\theta_1 u_k, \quad \overline{w}_k = w_k + \theta_1 v_k + \theta^2_1 u_k \tag{7}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Ţinînd seama de definiţia numărului θ_1, pentru $\theta' = 0$ avem $\overline{\delta}_k \leqslant 0$, iar pentru $\theta' = \varepsilon$ (ε număr pozitiv şi arbitrar, suficient de mic) cel puţin o diferenţă $\overline{\delta}_k$ este pozitivă. Acele diferenţe $\overline{\delta}_k$ sînt pozitive pentru $\theta' = \varepsilon$ care îndeplinesc una dintre condiţiile : α) este de forma $\overline{\delta}_k = \overline{u}_k \theta'^2$ cu $\overline{u}_k > 0$; β) este de forma $\overline{\delta}_k = \overline{u}_k \theta'^2 + \overline{v}_k \theta'$ cu $\overline{v}_k > 0$.

Se pot prezenta două cazuri :

a) există o singură diferenţă $\overline{\delta}_k$ nulă pentru $\theta' = 0$;

b) există mai multe diferenţe $\overline{\delta}_k$ nule pentru $\theta' = 0$;

vom considera separat cele două cazuri.

Să presupunem că

$$P_k = x^0_{1k} P_l + x^0_{2k} P_2 + \ldots + x^0_{mk} P_m \quad (k = m + 1, m + 2, \ldots, n) \tag{8}$$

sînt descompunerile în baza B_0 ale vectorilor colonari din matricea A, ce nu fac parte din bază iar $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m, 0, 0, \ldots, 0)$ este soluţia de bază nenegativă şi nedegenerată corespunzătoare aceleiaşi baze. Soluţia (S_0) este soluţie optimală a problemei (P) pentru $\theta' \in [\theta_0 - \theta_1, 0]$ şi nu mai este soluţie optimală pentru $\theta' = \varepsilon$, numărul ε fiind pozitiv şi suficient de mic. Fie K mulţimea indicilor pentru care $\overline{\delta}_k > 0$ cînd $\theta' = \varepsilon$, mulţime cu un singur element atunci cînd există o singură diferenţă $\overline{\delta}_k$ nulă pentru $\theta' = 0$ (cazul *a*) şi cu unul sau mai multe elemente în cazul contrar (cazul *b*). Aplicăm algoritmul simplex pentru $\theta' = \varepsilon$. Dacă există un indice $k \in K$ încît $x_{ik} \leqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, problema (P) nu are soluţie optimală pe intervalul pe care $\overline{\delta}_k > 0$ şi trebuie reluat algoritmul începînd de la extremitatea dreaptă a intervalului. Admiţînd că această împrejurare nu se prezintă, alegem vectorul P_l de introdus în bază cu ajutorul criteriului din metoda simplex, care revine la

$$\overline{v}_l = \max_{k \in K} \overline{v}_k, \tag{9}$$

completat cu

$$\overline{u}_l = \max_{k \in K_0} \overline{u}_k , \tag{10}$$

cînd în (9) maximul este atins pentru toţi $k \in K_0$ şi cu regula indicelui minim, cînd în (10) maximul este atins pentru mai mulţi indici. Fie P_i vectorul de eliminat din bază, determinat în mod unic după alegerea vectorului P_l. Facem trecerea la noua soluţie de bază (S_1) şi considerăm diferenţele corespunzătoare δ_k^1 $(k = m + 1,\ m + 2, \ldots , n;\ k \neq 1)$ şi δ_i^1. Se ştie [5] că au loc egalităţile

$$\delta_k^1 = \overline{\delta}_k - \frac{x_{ik}^0}{k_{il}^0} \overline{\delta}_l \quad (k = m + 1, m + 2, \ldots , n ; k \neq l) \tag{11}$$

şi

$$\delta_i^1 = - \frac{1}{x_{il}^0} \overline{\delta}_l , \tag{12}$$

în care $x_{il}^0 > 0$ şi $\overline{\delta}_l > 0$ pentru $\theta' = \varepsilon$.

Din formulele (11) şi (12) deducem că $\delta_i^1 < 0$ pentru $\theta' \in [0, \varepsilon]$ şi

$$\delta_k^1 = u_k^1 \theta'^2 + v_k^1 \theta' + w_k' \qquad (k = m + 1, m + 2, \ldots , n ;\ k \neq l), \tag{13}$$

unde

$$u_k^1 = \overline{u}_k - \frac{x_{ik}^0}{x_{il}^0} \overline{u}_l , \quad v_k^1 = \overline{v}_k - \frac{x_{ik}^0}{x_{il}^0} \overline{v}_l , \quad w_k^1 = \overline{w}_k \ (k = m + 1, \ldots , n ; k \neq l), \tag{14}$$

deoarece $\overline{w}_l = 0$. Pe de altă parte $\overline{\delta}_k \leqslant 0$ pentru $\theta' = 0$, de unde $\overline{w}_k \leqslant 0$.

Dacă există o singură diferenţă $\overline{\delta}_k$ nulă pentru $\theta' = 0$, această diferenţă este $\overline{\delta}_l$ şi avem $\overline{\delta}_k < 0$ $(k = m + 1,\ m + 2, \ldots , n;\ k \neq l)$, de unde $\overline{w}_k < 0$ $(k = m + 1,\ m + 2, \ldots , n;\ k \neq l)$. De aceea, pentru $\theta' \in [0, \varepsilon]$, semnul lui δ_k^1 fiind dat de termenul liber, deducem $\delta_k^1 < 0$. Aşadar, în acest caz, după o singură schimbare de bază, noua soluţie de bază nenegativă şi nedegenerată (S_1) este soluţia optimală a problemei (P) cel puţin pentru $\theta' \in [0, \varepsilon]$, adică pentru $\theta \in [\theta_1, \ \theta_1 + \varepsilon]$.

Dacă există mai multe diferenţe $\overline{\delta}_k$ nule pentru $\theta' = 0$, diferenţa $\overline{\delta}_l$ este una dintre ele. Diferenţele δ_k^1 cu termeni liberi nenuli sînt negative pentru $\theta' \in [0, \varepsilon]$, în timp ce celelalte diferenţe ar putea fi negative, nule, sau pozitive. Dacă mai este cazul, aplicăm din nou algoritmul simplex pentru $\theta' = \varepsilon$, în acelaşi mod ca mai sus. După un număr finit de schimbări de bază, fie obţinem un interval pe care problema (P) nu are soluţie optimală, fie obţinem o soluţie a problemei (P), care este optimală cel puţin pentru $\theta \in [\theta_1, \theta_1 + \varepsilon]$. În primul caz reluăm algoritmul de la extremitatea dreaptă a intervalului, iar în cazul al doilea determinăm, prin procedeul descris, valoarea critică următoare.

Să precizăm cazul cînd s-a determinat un interval $(0, \theta^*)$ pe care problema (P) nu are soluţie optimală şi algoritmul trebuie reluat de la extremitatea dreaptă a intervalului. În această împrejurare, dispunem de o soluţie de bază nenegativă a problemei (P), dar s-ar putea ca pentru $\theta' = \theta^*$ soluţia să nu fie optimală. Atunci, după schimbarea de parametru $\theta' = \theta^* + \theta''$, se aplică algoritmul simplex pentru $\theta'' = \varepsilon$ şi, sau se obţine soluţia optimală cel puţin pentru $\theta'' \varepsilon [0, \varepsilon]$, sau se obţine un nou interval pe care problema (P) nu are soluţie optimală, decît cel mult în punctul $\theta'' = 0$.

Algortimul propus conduce după un număr finit de paşi la rezolvarea problemei $(\boldsymbol{P})$. În adevăr, atît în cazul cînd se trece de la o soluţie optimală pe un interval la soluţia optimală pe un interval alăturat, cît şi în cazul cînd se trece de la o soluţie optimală pe un interval la soluţia optimală pe un interval despărţit de primul printr-un interval deschis, pe care problema (P) nu are soluţie optimală, a fost depăşită cel puţin una dintre rădăcinile ecuaţiilor $\delta_h^q(\lambda) = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n;\ q \in Q;\ Q =$ $=$ mulţimea indicilor soluţiilor de bază nenegative); or, există un număr finit de asemenea rădăcini.

Facem observaţia că algoritmul propus poate fi folosit şi pentru rezolvarea problemelor de programare parametrică de forma

$$(P') \qquad AX = P\theta^2 + Q\,\theta + R\,, \quad X \geqslant 0\,, \quad f = cX = \min.$$

Primită la redacţie la 2 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. S. I. Gass, T. L. Saaty, *The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function*. Naval Research Logistics Quartely, **2** (1955).
2. S. I. Gass, *Linear Programming, methods and applications*. McGraw-Hill, New York, 1958.
3. G. Hadley, *Linear Programming*. Addison-Wesley, 1962.
4. P. Simmonard, *Programmation linéaire*. Dunod, Paris, 1963.
5. Д. Юдин, Е. Гольштейн, *Линейное программирование*. Гос. Физ.-Матем. Изд., Москва, 1963.

NUMĂRUL TIPURILOR DE MULTIPOLI (1—k) DUPĂ GRUPUL ALTERN

DE

ALEXANDRU I. ŞCHIOP

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

D. Slepian în [9] pune problema clasificării funcţiilor booleene după grupul simetric şi o rezolvă folosind teoria reprezentărilor liniare de grupuri.

Segalovici în [8], Paul Constantinescu şi Toma Gaşpar în [2] şi [3] găsesc numărul tipurilor de multipoli (1—k) după grupul simetric, respectiv negaţiilor, folosind reprezentarea liniară a grupurilor.

Această lucrare stabileşte numărul tipurilor de multipoli (1 — k) după grupul altern.

§1. Să considerăm mulţimea M a grupelor de k funcţii booleene (diferite de constante), care sînt în număr de

$$q = C^k_{2^{2n}-2}.$$

Orice multipol (1—k) va fi caracterizat de k funcţii boleene distincte, deci fiecare element din M va fi un multipol (1 — k).

DEFINIŢIE. *Doi multipoli* (1—k) *sînt de acelaşi tip după grupul* $G_{\frac{n!}{2}}$ (*alternant*) *dacă se deduc unul din altul prin permutări pare.*

Dacă notăm doi multipoli (1—k) prin Q şi R şi sînt de acelaşi tip, scriem :

$$Q \underset{G_{\frac{n!}{2}}}{\sim} R$$

Relaţia „$\sim$" este o relaţie de echivalenţă în M. $\sim$ Această relaţie împarte mulţimea M în clase de echivalenţă, în fiecare clasă intrînd multipoli de acelaşi tip (după grupul altern).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 451–456, BUCUREŞTI, 1965

Problema care se pune este aceea de a determina numărul tipurilor de multipoli după această relaţie de echivalenţă.

Orice funcţie booleeană de n variabile se poate scrie sub forma canonică disjunctivă astfel :

$$f_u = \sum_{v=0}^{2^{n-1}} \varepsilon_{uv} S_v , \tag{1}$$

unde $u = 0, 1, 2, \ldots, 2^{2^n} - 1$ iar S_v sînt funcţiile fundamentale.

O permutare a grupului altern induce o permutare σ a celor 2^n funcţii S_v, aceasta induce o permutare t a funcţiilor f_u (1) ; aceasta din urmă va induce o permutare T a multipolilor $(1-k)$.

Fie A_T matricea de permutări de ordinul q corespunzătoare permutării T.

Mulţimea celor $\frac{n!}{2}$ matrici de permutări A_T realizează o reprezentare liniară R a grupului altern care este reductibilă şi conţine reprezentarea identică de un număr de ori, egală cu numărul tipurilor de multipoli $(1 - k)$ după grupul altern [9], [1].

Fie $\gamma_{n,k}$ numărul căutat. Avem

$$\gamma_{n,k} = \frac{2}{n!} \sum_{\mathcal{C}} n_{\mathcal{C}}\, \chi(\mathcal{C}) \qquad [1] , \quad [7],$$

unde $n_{\mathcal{C}}$ este numărul elementelor dintr-o clasă de elemente conjugate a lui $G_{\frac{n!}{2}}$, $\chi(\mathcal{C})$ este caracterul clasei $\mathcal{C}$ în reprezentarea R, iar însumarea se face după toate clasele de elemente conjugate ale grupului altern [2], [3].

Deci pentru calculul lui $\gamma_{n,k}$ avem nevoie de clasele grupului altern şi de caracterele lor.

Pentru aceasta vom proceda folosind structura de cicluri a unei permutări.

§2. Două permutări din aceeaşi clasă de elemente conjugate ale grupului altern au aceeaşi structură ciclică.

Structura de cicluri $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ caracterizează o clasă formată numai din permutări pare dacă avem relaţia :

$$(-1)^{\sum \alpha_i (i-1)} = 1 \text{ (criteriul decrementului).} \tag{2}$$

Din partiţiile lui n de forma $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = n$, alegem cu criteriul de mai sus pe cele care generează clase de permutări pare, adică pentru care

$$(-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1})(i-1)} = 1. \tag{3}$$

Avînd posibilitatea de a ne extrage din partiţiile lui n pe cele care generează permutări pare, ne punem problema : cînd o clasă de elemente conjugate din $G_{n!}$ formată numai din permutări pare se află în întregime ca o clasă a lui $G_{\frac{n!}{2}}$ şi cînd nu?

În acest sens avem următorul rezultat :

Din clasele formate cu permutări pare, cele cu structura de ciclu de forma ($\alpha_1 = 1$ sau 0, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ sau 0, $\alpha_4 = 0, \ldots$) se subdivid în două clase ale grupului $G_{\frac{n!}{2}}$ cu un număr egal de elemente; restul rămîn în întregime ca şi clase ale lui $G_{\frac{n!}{2}}$.

Fiind dată structura de cicluri a unei clase $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, numărul elementelor din clasa respectivă este :

$$n_{\mathcal{C}} = \frac{n!}{\alpha_1!\; 2^{\alpha_2}\, \alpha_2! \ldots n^{\alpha_n}\, \alpha_n!} \tag{4}$$

§3. Pentru calculul caracterelor avem nevoie de structura de ciclu $(t_1, t_2, \ldots, t_\mu)$ a permutării celor μ funcţii, f_u, indusă de o clasă de permutări pare.

După ce am determinat structura de cicluri $(t_1, t_2, \ldots, t_\mu)$ corespunzătoare unei clase de elemente conjugate din $G_{\frac{n!}{2}}$, vom calcula caracterul clasei folosind rezultatul [2], [3] :

Fie $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ structura de cicluri a permutării Π a celor k funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_k$ corespunzătoare fiecărui multipol $(1-k)$.

Fiecare structură de cicluri este în corespondenţă biunivocă cu o partiţie a lui k. Avem

$$\sum_{i=1}^{m} i b_i = k$$
$$\chi(b) = \sum \prod C_{t_i}^{b_i}, \tag{5}$$

unde $C_{t_i}^{b_i}$ se calculează numai pentru indicii i pentru care $b_i \neq 0$ şi $b_i \leqslant t_i$ şi $C_{t_i}^{b_i} = 0$, unde $b_i > t_i$, iar suma se efectuează asupra tuturor structurilor de cicluri $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ corespunzătoare partiţiilor lui k.

În continuare vom arăta cum se ajunge la stabilirea structurii de cicluri $(t_1, t_2, \ldots, t_\mu)$.

Fiecărei structuri $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ce caracterizează o clasă a grupului altern îi asociem o structură de cicluri $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n})$ a permutării funcţiilor S_v şi toate permutările din aceeaşi clasă a lui $G_{\frac{n!}{2}}$ induc permutări de aceeaşi structură ciclică a funcţiilor S_v [1].

Pentru aceasta vom folosi formula

$$P = \prod_j [P(j)]^{\alpha_j}, \quad \text{unde } z_a z_b = \frac{ab}{c} z_c, \tag{6}$$

c fiind c.m.m.m.c al numerelor a şi b iar $P(j)$ este rezultatul acţiunii unui ciclu de lungime j asupra funcţiilor fundamentale S_v.

De exemplu,

$$P(3) = 2z_1 + 2z_3 \tag{7}$$

deoarece un ciclu de lungime 3 lucrează astfel :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(123)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (0)\ (1\ 2\ 4)\ (3\ 6\ 5)\ (7).$$

$P(j)$ în forma generală se poate deduce din formula (6) din [4] şi anume este dată de :

$$P(j) = \sum \frac{\eta_\delta}{\delta} z_\delta \tag{8}$$

iar

$$\eta_\delta = 2^\delta - \sum_{\gamma/\delta} n_\gamma, \quad 0 < \gamma < \delta .$$

Fiecărei structuri de cicluri $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^n})$ a permutării funcţiilor S_v îi asociem expresia :

$$\overline{P} = \sum_{j=1}^{2^n} \lambda_j z_j , \tag{9}$$

unde λ_j reprezintă numărul ciclurilor de lungime j iar z_j sînt nedeterminate.

Din (6) şi (9) determinăm pe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^n}$. Fiecărei structuri $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^n})$ îi asociem prin formulă

$$P^1 = \sum_j [P(j)]\lambda_j = t_1^1 z_1 + t_2 z_2 + \ldots + t_\mu z_\mu, \tag{10}$$

unde $t_1^1 = t_1 + 2$, $P(j)$ este dat de (8) iar $z_a z_b = \frac{ab}{c} z_c$, unde c este c.m.m.m.c. al lui a şi b, o structură de cicluri $(t_1, t_2, \ldots, t_\mu)$ a permutării celor μ funcţii f_u.

§ 4. În continuare vom arăta cum se calculează $\gamma_{n,k}$ pentru $n = 3$; $k = 1, 2, 3, 4$.

Partiţiilor lui $3\ (3 + 0 + 0{,}2 + 1 + 0{,}1 + 1 + 1)$ le corespund structurile de cicluri $(3, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ şi $(0, 0, 1)$.

Clasele sînt $C_1 : (3, 0, 0)$ şi $C_2 : (0, 0, 1)$.

Structurile de cicluri $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2 1)$ sînt:

C_1: Avem 3 cicluri de lungime 1, deci folosind (9) $P(1)^3 = 8z_1$ şi din (6) deducem $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_8 = 0$.

C_2: Avem un ciclu de lungime 3, deci $P(3) = 2\,z_1 + 2\,z_3$ deci $\lambda_1 = 2\ \lambda_3 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_4 = \ldots = \lambda_8 = 0$.

Structurile de cicluri $(t_1, t_2, \ldots, t_\mu)$ sînt

$C_1 : P = [P(1)]^8 = [2\,z_1]^8 = 254\,z_1\,(t_1 = 254,\ t_2 = \ldots = 0)$.

$C_2 : \overline{P} = [P(1)]^2\,[P(3)]^2 = 16\,z_1 + 80\,z_3\,(t_1 = 14,\ t_3 = 80,\ t_2 = \ldots = t_{254} = 0)$, $n_{\mathcal{C}_1} = 1$, $n_{\mathcal{C}_2} = 2$.

Calculul caracterelor. Avem

a) $k = 1$; $b_1 = 1$

$$\chi(C_1) = C_{254}^1 = 254.$$

$$\chi(C_2) = C_{14}^1 = 14.$$

$$\gamma_{3,1} = \frac{2}{3!}(254 + 2.14) = 94.$$

b) $k = 2 \begin{bmatrix} b_1 = 2, & b_2 = 0 \\ b_1 = 0, & b_2 = 1 \end{bmatrix}$

$$\chi(C_1) = C_{254}^2.$$

$$\chi(C_2) = C_{14}^2.$$

$$\gamma_{3,2} = \frac{3}{3!}[C_{254}^2 + 2\,C_{14}^2] = 10\,771.$$

c) $k = 3$

$b_1 = 3,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = 0,$

$b_1 = 1,\quad b_2 = 1,\quad b_3 = 0,$

$b_1 = 0,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = 1.$

$$\chi(C_1) = C_{254}^3.$$

$$\chi(C_2) = C_{14}^3 = C_{80}^1.$$

$$\gamma_{3,3} = \frac{2}{3!}\,C_{254}^3 + 2(C_{14}^3 + C_{80}^1).$$

$$d)\ k = 4,\quad b_1 = 4,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = 0,\quad b_4 = 0,$$

$$b_1 = 2,\quad b_2 = 1,\quad b_3 = 0,\quad b_4 = 0,$$

$$b_1 = 0,\quad b_2 = 2,\quad b_3 = 0,\quad b_4 = 0,$$

$$b_1 = 1,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = 1,\quad b_4 = 0,$$

$$b_1 = 0,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = 0,\quad b_4 = 1.$$

$$\chi(C_1) = C_{254}^4.$$

$$\chi(C_2) = C_{14}^4 + C_{14}^1\, C_{80}^1.$$

$$\gamma_{3,4} = \frac{2}{3!}[C_{254}^4 + 2(C_{14}^4 + C_{80}^1\, C_{14}^1)].$$

Primită la redacţie la 6 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Constantinescu Paul, *Asupra numărului de tipuri de funcţii booleene după unele subgrupuri ale grupului hiperoctaedric.* Bull. Math. de la Sos Sci. Math Phys de la R.P.R., (1960).
2. Constantinescu Paul, *Numărul tipurilor de sinonimie ale multipolilor* (1 – *k*). Analele Universităţii din Bucureşti, X **(29)** (1961).
3. Gaşpar Toma, *Numărul tipurilor de multipoli* (1 – *k*) *după grupul negaţiilor.* Analele Universităţii din Bucureşti, X (**29**) (1961).
4. Gaşpar Toma, *Numărul tipurilor de sinonimie al claselor de dipoli funcţionali echivalenţi cu selectori.* Studii şi cercetări matematice, **16**, *9* (1964).
5. Kuroş A. G., *Teoria grupurilor*, Editura tehnică, Bucureşti, 1959.
6. Moisil Gr. C., *Teorie algebrică a mecanismelor automate.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
7. Murnaghan F., *Теория представлений груп.* 1950 У. М. Москва.
8. Sagalovici I L., *О числе типов симетрий контактных* (*1* — *к*) *ролюзников*, Анал. Акад. СССР. *1* (1960).
9. Slepian D., *On the Number of Symmetry Types of Booleen Functions of n Variables.* Canada J. Math., **V**, *2* (1952).

O TEOREMĂ HAHN-BANACH PENTRU MODULE SEMISIMPLE DEFINITE PESTE INELE NORMATE

DE

GEORGE ISAC

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

În lucrare se pornește de la următoarea observație: anumite proprietăți algebrice ale unui inel Λ, se transportă în unele condiții într-o anumită clasă de Λ-module. În mod natural se pune problema: ce proprietăți cîștigă o anumită clasă de Λ-module în cazul cînd inelul Λ este normat?

1. Fie $\mathscr{C}$ familia tuturor inelelor unitare, comutative și asociative. Inelul $\Lambda \in \mathscr{C}$ spunem că este un inel ordonat față de relația de ordine „$\leqslant$" dacă:

O_1) Λ este o mulțime ordonată față de relația de ordine „$\leqslant$";

O_2) din $a \leqslant b$ rezultă, oricare ar fi $x \in \Lambda$, că $a + x \leqslant b + x$;

O_3) din $a \leqslant b$ și $c \geqslant 0$ rezultă că $ac \leqslant bc$.

Fie $W \in \mathscr{C}$ un inel integru ordonat și care față de relația de ordine formează o latice relativ completă [1].

Considerăm un inel $\Lambda \in \mathscr{C}$ normat cu valoarea normei în inelul W; altfel spus, presupunem că este definită o aplicație $\omega : \Lambda \rightarrow W$ care îndeplinește axiomele:

N_1) $\omega(0) = 0$, $\omega(\alpha) > 0$ cu $\alpha \neq 0$;

N_2) $\omega(\alpha\beta) = \omega(\alpha)\,\omega(\beta)$;

N_3) $\omega(\alpha - \beta) \leqslant \omega(\alpha) + \omega(\beta)$.

Observații. *a*) Din axiomele N_1 și N_3 rezultă că oricare ar fi $\beta \in \Lambda$, avem $\omega(-\beta) \leqslant \omega(\beta)$, dar, cum $\beta = -(-\beta)$, obținem mai departe că $\omega(-\beta) = \omega(\beta)$. De aici rezultă că $\omega(\alpha + \beta) \leqslant \omega(\alpha) + \omega(\beta)$.

b) Dacă se presupune că orice element pozitiv al lui W este valoarea normei unui element oricare din Λ, și că W este total ordonat, atunci inelele Λ și W simultan posedă sau nu posedă divizori ai lui zero.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 457–461, BUCUREȘTI, 1965

În adevăr, dacă α, $\beta \in \Lambda$ şi $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ dar $\alpha\beta = 0$, atunci $\omega(\alpha) > 0$, $\omega(\beta) > 0$ dar

$$\omega(\alpha) \cdot \omega(\beta) = \omega(\alpha\beta) = 0.$$

Invers, dacă inelul W are divizori ai lui zero, se pot găsi acele elemente pozitive a, b astfel încît $ab = 0$.

Atunci în Λ există acele elemente α, β astfel încît $\omega(\alpha) = a$, $\omega(\beta) = b$ şi $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Dar $\omega(\alpha\beta) = \omega(\alpha)\, \omega(\beta) = ab = 0$, de unde $\alpha\beta = 0$.

Fie $\Lambda \in \mathcal{C}$ un inel normat cu valoarea normei în inelul ordonat $W \in \mathcal{C}$ şi considerăm un Λ-modul A.

DEFINIŢIA 1. *Numim funcţie Minkowski a Λ-modulului A în inelul ordonat W o aplicaţie $p : A \to W$ care verifică axiomele:*

M_1) $p(x) \geqslant 0$ *oricare ar fi* $x \in A$,
M_2) $p(\alpha x) = \omega(\alpha)\, p(x)$ *oricare ar fi* $x \in A$ *şi* $\alpha \in \Lambda$
M_3) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ *oricare ar fi* $x, y \in A$.

LEMA 1. *Pentru orice monomorfism $\varphi : A \to \Lambda$ există o funcţie Minkowski a lui A în W.*

Demonstraţie. Considerăm inelul Λ ca un Λ-modul şi construim diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\omega"] & W \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Definim aplicaţia $p = \omega \circ \varphi$. Funcţia p astfel definită este o funcţie Minkowski. În adevăr, oricare ar fi $x \in A$, $x \neq 0$, $p(x) = \omega \circ \varphi(x) = \omega(\varphi(x)) \geqslant 0$ deoarece dacă $x \neq 0$ rezultă $\varphi(x) \neq 0$ oricare ar fi $\alpha \in \Lambda$ şi $x \in A$; rezultă

$$p(\alpha x) = \omega \circ \varphi(\alpha x) = \omega(\alpha \varphi(x)) = \omega(\alpha)\, \omega(\varphi(x)) = \omega(\alpha)\, p(x)$$

de asemenea oricare ar fi x, $y \in A$ rezultă că

$$p(x + y) = \omega \circ \varphi(x + y) = \omega(\varphi(x) + \varphi(y)) \leqslant \omega \circ \varphi(x) + \omega \circ \varphi(y) =$$
$$= p(x) + p(y).$$

DEFINIŢIA 2. *Funcţia $f : A \to W$ se numeşte subliniară dacă:*

S_1) $f(\alpha x) = \omega(\alpha) f(x)$ *oricare ar fi* $x \in A$ *şi* $\alpha \in \Lambda$
S_2) $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ *oricare ar fi* $x, y \in A$.

Proprietăţi. *a*) $f(x - y) \geqslant f(x) - f(y)$ oricare ar fi x, $y \in A$. În adevăr,

$$f(x) = f((x - y) - y) \leqslant f(x - y) + f(y)$$

de unde relaţia de mai sus

b) $f(-x) \geqslant -f(x)$. Se obţine din proprietatea *a*) în care punem $x = 0$, $y = x$.

Se observă că proprietăţile *a*) şi *b*) sînt adevărate şi pentru funcţii Minkowski.

2. Considerăm din nou un inel $\Lambda \in \mathcal{C}$ normat cu valoarea normei în inelul ordonat $W \in \mathcal{C}$ şi fie A un Λ-modul pe care îl presupunem semisimplu [2].

Se ştie că un modul semisimplu este în acelaşi timp şi proiectiv de unde rezultă că este şi fără torsiune [2].

LEMA 2. *Fie $\Lambda \in \mathcal{C}$ un inel integru, normat cu valoarea normei în inelul $W \in \mathcal{C}$ integru ordonat şi care este o latice relativ completă.*

Considerăm un Λ-modul semisimplu A şi un submodul al său M. Fie $x_0 \in A$ şi $x_0 \notin M$. Notăm cu M' submodulul generat de M şi x_0. Presupunem de asemenea că este dat monomorfismul $\varphi : A \to \Lambda$.

Atunci orice aplicaţie subliniară $f : M \to W$ care verifică relaţia $f(x) \leqslant p(x)$ oricare ar fi $x \in M$ poate fi prelungită pînă la o aplicaţie subliniară $f' : M' \to W$ şi care verifică de asemenea relaţia

$$f'(x) \leqslant p(x) \text{ oricare ar fi } x \in M'.$$

Demonstraţie. Deoarece Λ-modulul A este semisimplu, rezultă că $\alpha x = 0$, unde $\alpha \in \Lambda$, $x \in A$ şi $x \neq 0$ dacă şi numai dacă $\alpha = 0$.

Fie $y', y'' \in M$; atunci:

$$f(y') - f(y'') \leqslant f(y' - y'') \leqslant p(y' - y'') = p[(y' + x_0) + (-y'' - x_0)] \leqslant$$
$$\leqslant p(y' + x_0) + p(-y'' - x_0)$$

de unde

$$-p(-y'' - x_0) - f(y'') \leqslant p(y' + x_0) - f(y').$$

Din ipoteză rezultă că există

$$\underline{m} = \sup_y \{(-p(-y - x_0) - f(y)\},$$
$$\overline{m} = \inf_y \{p(y + x_0) - f(y)\}.$$

Prin urmare avem $\underline{m} \leqslant \overline{m}$.

Fie acum $c_0 \in W$ un element care îndeplineşte condiţia

$$\underline{m} \leqslant c_0 \leqslant \overline{m}.$$

Submodulul M' se defineşte prin:

$$M' = \bigcap_{\substack{M_i \supset M \\ M_i \supset \{x_0\}}} M_i,$$

unde M_i sînt submodule.

Avem următoarea egalitate

$$\bigcap M_i = \left\{ y + \alpha x_0 \,\middle|\, \begin{matrix} y \in M \\ \alpha \in \Lambda \end{matrix} \right\}.$$

De aici obținem rezultatul că orice $x \in M'$ are forma

$$x = y + \alpha x_0.$$

Acum definim aplicația $f' : M' \to W$ prin :

$$f'(x) = f(y) + \omega(\alpha)\, c_0 .$$

Să arătăm că f' astfel definită este o funcție subliniară.

În adevăr, dacă $x_1 = y_1 + \alpha_1 x_0$; $x_2 = y_2 + \alpha_2 x_0$ sînt două elemente ale lui M', avem următoarele relații :

$$f'(x_1 + x_2) = f(y_1 + y_2) + \omega(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot c_0 \leqslant f(y_1) + f(y_2) +$$
$$+ \omega(\alpha_1) c_0 + \omega(\alpha_2) c_0 = f'(x_1 + f'(x_2)$$

$f'(kx) = f(ky) + \omega(k)\, c_0 = \omega(k) f'(x)$ oricare ar fi $x \in M'$ și $k \in \Lambda$.

Deoarece modulul este fără torsiune, rezultă că dacă

$$x = y_1 + \alpha_1 x_0 ,$$
$$x = y_2 + \alpha_2 x_0 ,$$

atunci $y_1 - y_2 = (\alpha_2 - \alpha_1) x_0$. Dar această relație nu poate avea loc pentru $\alpha_2 \neq \alpha_1$ deoarece în acest caz $y_1 - y_2 \in M$ iar $(\alpha_2 - \alpha_1)\, x_0 \notin M$. Prin urmare trebuie să avem $\alpha_2 = \alpha_1$, de unde $y_1 = y_2$.

Din aceasta rezultă că $f'(x)$ este determinată în mod univoc de x.

Să arătăm acum că $f'(x) \leqslant p(x)$ oricare ar fi $x \in M'$. Considerăm relația

$$c_0 \leqslant p(y' + x_0) - f(y'). \qquad \text{(r)}$$

Să luăm un $\alpha \in \Lambda$, $\omega(\alpha) > 0$, dacă $\alpha \neq 0$.

Înmulțim relația (r) cu $\omega(\alpha)$, deducem

$$\omega(\alpha) c_0 \leqslant \omega(\alpha)\, p(y' + x_0) - \omega(\alpha) f(y')$$
$$\omega(\alpha) f(y') + \omega(\alpha)\, c_0 \leqslant p(\alpha y' + \alpha x_0).$$

Dacă notăm $\alpha y' = y$, obținem

$$f(y) + \omega(\alpha)\, c_0 \leqslant p(y + \alpha x_0)$$

de unde

$$f'(x) \leqslant p(x) \text{ oricare ar fi } x \in M'.$$

TEOREMA 1. *Fie A un Λ-modul semisimplu definit peste un inel $\Lambda \in \mathcal{C}$ integru și normat cu valoarea normei într-un inel integru ordonat $W \in \mathcal{C}$ și care este o latice relativ completă. Presupunem că este dat un monomorfism $\varphi : A \to \Lambda$. Fie $f(x)$ o aplicație subliniară definită pe un submodul $M \subset A$ care satisface relația $f(x) \leqslant p(x)$ oricare ar fi $x \in M$.*

Atunci f poate fi prelungită pînă la o aplicație subliniară F definită pe întreg Λ-modulul A și care verifică de asemenea relația $F(x) \leqslant p(x)$ oricare ar fi $x \in A$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{F}_p$ mulțimea tuturor aplicațiilor subliniare f' care sînt prelungiri ale aplicației subliniare f și care satisfac relația $f'(x) \leqslant \leqslant p(x)$ oricare ar fi $x \in \mathcal{D}_f$ (domeniul de definiție a lui f).

În $\mathcal{F}_p$ introducem următoarea relație de ordine :

$$f_1' < f_2^1 ; \; f_1', f_2' \in \mathcal{F}_p \text{ dacă } f' \text{ este o prelungire a lui } f_1'.$$

În acest mod $\mathcal{F}_p$ devine o mulțime parțial ordonată care satisface lema lui Zorn.

Dacă $\mathcal{F}_p' \subset \mathcal{F}_p$ este o submulțime total ordonată a lui $\mathcal{F}_p$, marginea sa superioară va fi f^* definită pe $\bigcup_{f' \in \mathcal{F}_p'} \mathcal{D}_{f'}$ prin egalitatea

$$f^*(x) = f'(x) \text{ pentru } x \in \mathcal{D}_{f'}, \; f' \in \mathcal{F}_p'$$

Prin urmare $\mathcal{F}_p$ are un element maximal $F(x)$ care, în baza lemei precedente, este o funcție subliniară definită pe întreg Λ-modulul A.

COROLAR. *Dacă inelul Λ din teorema precedentă este în plus semisimplu, atunci în orice Λ-modulul A orice funcție subliniară definită pe un submodul al lui A mărginit de o funcție Minkowski poate fi prelungită pînă la o funcție subliniară definită pe întreg Λ-modulul A și care rămîne mărginită de aceeași funcție Minkowski.*

În [2] se demonstrează că dacă inelul Λ este semisimplu, atunci orice Λ-modul este de asemenea semisimplu, prin urmare este adevărată teorema 1.

CONSECINȚĂ. *Fie $S : \Lambda \to W$ o seminormă ; să notăm cu $I = \{x | x \in \Lambda, s(x) = 0\}$ și presupunem că Λ este inel Artin.*

Dacă I este egal cu intersecția tuturor idealelor maximale ale lui Λ, atunci există un inel Λ' normat cu valoarea normei în W astfel încît în orice Λ'-modul orice funcție subliniară definită pe un Λ'-submodul și mărginită de o funcție Minkowski poate fi prelungită la întreg Λ'-modulul astfel încît să rămînă mărginită de aceeași funcție Minkowski.

Demonstrație. Considerăm inelul $\Lambda / I = \Lambda'$; se știe că seminorma s induce în Λ' o normă.

Să notăm cu $R(\Lambda)$ radicalul Jacobson al inelului Λ. Atunci avem $R(\Lambda) = I$.

Pe de altă parte, $\Lambda / R(\Lambda)$ este inel semisimplu. În acest mod rezultă că Λ' este semisimplu și aplicînd corolarul de mai sus rezultă afirmația din enunțul consecinței.

Primită la redacție la 25 noiembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. ROMULUS CRISTESCU, *Spații liniare ordonate.* Editura Academiei R.P.R., București, 1959.
2. А. КАРТАН и С. ЭЙЛЕНБЕРГ, *Гомологическая алгебра.* Изд-во иностранной литературы, Москва, 1960.
3. А. Г. КУРОШ, *Лекции по общей алгебре.* Изд-во физико-математической литературы, Москва, 1962.
4. H. MASCART, C. R. de l'Academie des Sciences, **258** *6*, 12 (1964).
5. M. A. NAIMARK, *Inele normate.* Academia R.P.R., Institutul de studii Româno-Sovietic, 1957.

ASUPRA PROBLEMEI DIRICHLET PENTRU ECUAȚIILE CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL DOI NELINIARE DE TIP ELIPTIC ÎN PLAN

DE

VIOREL IFTIMIE

Facultatea de matematică și mecanică a Universității din București,

În lucrare se stabilesc condiții suficiente de existență și unicitate ale soluțiilor generalizate pentru problema Dirichlet referitoare la ecuațiile cu derivate parțiale de tip eliptic neliniare în plan. Aceste condiții se exprimă cu ajutorul coeficienților Lipschitz ai funcției g din ecuația eliptică (1'). Condiția de elipticitate implică valabilitatea inegalității (9) care joacă un rol important în cursul demonstrațiilor.
Se folosesc operatorii din teoria derivatei areolare și a funcțiilor analitice generalizate studiați de N. Teodorescu [4] și I. N. Vekua [8].

1. În cele ce urmează ne vom ocupa de problema existenței soluțiilor ecuației

$$f(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1}$$

care iau valori date pe frontiera Γ a domeniului Ω, în care sînt definite. Ne vom baza pe rezultatele obținute în teoria derivatei areolare. După cum se știe, derivata areolară, introdusă ca noțiune de către D. Pompeiu, a fost studiată în profunzime de N. Teodorescu [3], care a și întrevăzut primul posibilitățile ei de aplicare; pe lîngă diversele aplicații ale derivatei areolare în mecanică etc. [4], [5], N. Teodorescu a studiat și ecuația liniară cu derivate areolare [5], ecuație la care se pot reduce unele tipuri de ecuații de forma (1), liniare. De asemenea, în [3] se introduce așa-numitul operator de derivare Π, care va fi mult uzitat în cele ce urmează.

Ulterior, I. N. Vekua regăsește aceste rezultate [6] și le generalizează la clase mai largi de funcții [7]. Noi vom folosi rezultatele teoriei derivatei areolare sub forma în care au fost puse de către I. N. Vekua, care le-a și aplicat ecuațiilor de forma (1), liniare și cvasiliniare. Spre deo-

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 3, P. 463-469, BUCUREȘTI, 1965

sebire de cele ce au fost făcute, vom studia cazul general neliniar al ecuației (1). Menționăm că în această lucrare vom obține soluții generalizate, de clasă $D_{2,p}(\bar{\Omega})$, $p > 2$, lucru ce este echivalent cu : soluția are derivate de ordinul I hölderiene de indice $\alpha = \frac{p-2}{p}$ în domeniul $\bar{\Omega}$ și admite derivate de ordinul II în sens generalizat (după Sobolev) de clasă $L_p(\bar{\Omega})$.

Vom presupune că domeniul Ω este simplu conex, mărginit, cu frontiera destul de netedă pentru a putea fi reprezentat conform pe cercul unitate, astfel încît funcția de reprezentare $\zeta = \varphi(z)$ să fie de clasă $D_{2,p}(\bar{\Omega})$, $p > 2$. Pentru aceasta este suficient ca $\Gamma \in C^1_\mu$, $\frac{1}{2} < \mu < 1$, unde prin C^1_μ am notat clasa funcțiilor ce admit derivate de ordinul I hölderiene de indice μ.

De asemenea, vom presupune că valorile soluțiilor pe frontieră sînt tot de clasă $D_{2,p}$. Printr-o schimbare simplă de funcție, reducem problema la determinarea soluțiilor ecuației (1), nule pe Γ. Prin aceste transformări, ecuația (1) evident nu-și schimbă forma și nici proprietățile pe care le vom impune funcției f nu vor suferi modificări.

Observînd că

$$r = \frac{(r+t)+(r-t)}{2}, \quad t = \frac{(r+t)-(r-t)}{2},$$

deci că funcția f poate fi considerată ca depinzînd de r și t numai prin intermediul lui $r + t$ și $r - t$, vom impune ca $r + t$ să poată fi explicitat, adică vom presupune că ecuația (1) poate fi scrisă sub forma :

$$\frac{1}{4}(r+t) = g(x, y, u, p, q, s, r-t). \tag{1'}$$

Problema de care ne vom ocupa se poate formula atunci astfel :

PROBLEMA D. Să se găsească soluțiile ecuației (1)′ în cercul unitate Ω (presupunînd îndeplinite pentru g anumite condiții), de clasă $D_{2,p}(\bar{\Omega})$, $p > 2$, astfel încît $u|_\Gamma = 0$.

2. După cum am specificat, instrumentul principal de lucru îl va constitui derivata areolară ; vom înlocui derivatele obișnuite prin derivatele areolară și medie, ținînd cont că în cazul funcțiilor de clasă c^1, aceste derivate au respectiv expresiile :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Obținem imediat

$$\begin{gathered} p = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad q = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial u}{\partial z}\right); \quad s = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right); \\ r = 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad t = 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Vom presupune că derivatele secunde există în mod generalizat.

Fundamentală în ceea ce urmează va fi o reprezentare integrală a funcțiilor de clasă $D_{2,p}(\bar{\Omega})$, $p > 2$, care se anulează pe frontiera cercului unitate. Se poate arăta [7] că orice asemenea funcție se reprezintă sub forma

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} g_0(z, \zeta)\, \rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta \equiv \Pi_0 \rho \tag{4}$$

în care

$$g_0(z, \zeta) = \frac{2}{\pi} \ln \left| \frac{z - \zeta}{1 - z\bar{\zeta}} \right|$$

iar $\rho(\zeta)$ este o funcție reală de punctul ζ, de clasă $L_p(\bar{\Omega})$, $p > 2$; $\frac{1}{4} g_0$ reprezintă tocmai funcția Green pentru cercul unitate. Deoarece $\rho(\zeta) \in L_p(\bar{\Omega})$, putem calcula direct derivatele funcției u:

$$\begin{gathered}\Pi_1 \rho \equiv \frac{\partial u}{\partial z} = \iint_{\Omega} \frac{\partial g_0(z, \zeta)}{\partial z} \rho(\zeta)\, d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) \rho(\zeta)\, d\xi d\eta, \\ \bar{\Pi}_1 \rho \equiv \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \frac{\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \right) \rho(\zeta)\, d\xi d\eta.\end{gathered} \tag{5}$$

Prelungim funcția $\rho(z)$ în tot planul punînd:

$$\rho_1(z) = \begin{cases} \rho(z) \text{pentru } |z| < 1, \\ -\dfrac{1}{z^4} \rho\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) \text{ pentru } |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

Funcția ρ_1 va fi evident de clasă L_p în tot planul E; cu ajutorul ei operatorul Π_1 se poate scrie:

$$\Pi_1 \rho \equiv T_E \rho_1 = -\frac{1}{\pi} \iint_{E} \frac{\rho_1(\zeta)\, d\xi d\eta}{\zeta - z}, \tag{5'}$$

unde prin T_E am notat operatorul lui Pompeiu relativ la tot planul.

Analog

$$\bar{\Pi}_1 \rho \equiv \bar{T}_E \rho_1 = -\frac{1}{\pi} \iint_{E} \frac{\rho_1(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}}\, d\xi d\eta. \tag{5''}$$

Expresiile $\Pi_1 \rho$, $\bar{\Pi}_1 \rho$ definesc operatori complet continui în spaţiul L_p avînd valori în spaţiul funcţiilor hölderiene, de indice $\alpha = \frac{p-2}{p}$. Atunci putem deriva în mod generalizat în (5′) şi (5″):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Pi_2 \rho \equiv \frac{\partial \Pi_1 \rho}{\partial z} \equiv \frac{\partial T_E \rho_1}{\partial z} = -\frac{1}{\Pi} \iint\limits_E \frac{\rho_1(\zeta)\, d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} \equiv \bar{\Pi}_2 \rho \equiv \frac{\partial \bar{\Pi}_1 \rho}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial \bar{T}_E \rho_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{\rho_1(\zeta) d\xi d\eta}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial^2 \Pi_0 \rho}{\partial z \partial \bar{z}} = \rho(z)$$

După cum au arătat Calderon şi Zygmund [1], operatorii Π_2 şi $\bar{\Pi}_2$ transformă spaţiul L_p $(\bar{\Omega})$, $p > 1$ în el însuşi. În plus Vekua a arătat [7] că normele operatorilor Π_2 şi $\bar{\Pi}_2$ în spaţiul L_2 sînt egale cu unitatea. Vom avea:

$$\| \Pi_2 \rho \|_{L_p} \leqslant \Lambda_p \| \rho \|_{L_p}; \ \Lambda_2 = 1,$$

$$\| \bar{\Pi}_2 \rho \|_{L_p} \leqslant \bar{\Lambda}_p \| \rho \|_{L_p}; \ \bar{\Lambda}_2 = 1.$$

Conform rezultatelor lui M. Riesz [2], normele Λ_p, $\bar{\Lambda}_p$ ale operatorilor Π_2 respectiv $\bar{\Pi}_2$ sînt funcţii continue de p.

3. Folosind (4), (5), (6), transformăm imediat ecuaţia (1′) într-o ecuaţie funcţională, în care ρ va fi funcţia necunoscută. Astfel, mai întîi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = F\left(z, u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \equiv F(z, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4). \tag{7}$$

Apoi

$$\rho = F(z, \Pi_0 \rho, \Pi_1 \rho, \bar{\Pi}_1 \rho, \Pi_2 \rho, \bar{\Pi}_2 \rho) \equiv G(\rho). \tag{8}$$

Vom stabili mai întîi o inegalitate ajutătoare pe care o verifică funcţia F.

LEMĂ. *Fie funcţia g din (1′) continuă în toate argumentele sale, admiţînd derivate de prim ordin în raport cu s şi $w \equiv r - t$ continui în toate argumentele, pentru $(x, y) \in \bar{\Omega}$, $|u| + |p| + |q| + |s| + |w| \leqslant M$, unde $M > 0$ este arbitrar fixat. Ecuaţia (1′) se presupune uniform eliptică. Atunci*

$$|F(z, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3', \varphi_4') - F(z, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3'', \varphi_4'')| \leqslant \frac{\alpha}{2}(|\varphi_3' - \varphi_3''| + \\ + |\varphi_4' - \varphi_4''|), \tag{9}$$

unde $\alpha = \alpha(M) < 1$.

Demonstrație. Evident

$$| F(z, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3', \varphi_4') - F(z, u, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3'', \varphi_4'') | =$$

$$= | g(x, y, u, p, q, s', w') - g(x, y, u, p, q, s'', w'') | \leqslant$$

$$\leqslant \max \left| \frac{\partial g}{\partial s} \right| \cdot | s' - s'' | + \max \left| \frac{\partial g}{\partial w} \right| \cdot | w' - w'').$$

Notăm $l_1 = \max \left| \frac{\partial g}{\partial s} \right|$ și $l_2 = \max \left| \frac{\partial g}{\partial w} \right|$; aceste maxime se consideră pentru domeniul indicat în enunțul lemei. După calcule elementare folosind (3), rezultă :

$$\leqslant \sqrt{l_1^2 + 4 l_2^2} \, (| \varphi_3' - \varphi_3'' | + | \varphi_4' - \varphi_4'' |).$$

Impunînd condiția de uniform-elipticitate ecuației (1'), obținem :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^2 \leqslant \frac{1}{16} - \Delta,$$

unde $\Delta = \Delta(M) > 0$, și imediat

$$l_1^2 + l_2^2 \leqslant \frac{1}{16} - \Delta$$

precum și

$$l_1^2 + 4 l_2^2 \leqslant \frac{1}{4} - 4 \Delta$$

de unde rezultă afirmația lemei, cu $\alpha = \sqrt{1 - 16 \Delta}$.

4. Acum putem demonstra o teoremă de existență și unicitate pentru problema D :

TEOREMA 1. *Problema D pentru ecuația uniform eliptică* (*1'*), *în care funcția g este presupusă continuă în toate argumentele sale, admițînd derivate de prim ordin în raport cu s și* $w \equiv r - t$ *continue în toate argumentele, lipschitziană în raport cu u, p, q, în orice domeniu* $(x, y) \in \bar{\Omega}$ $| u | + | p | + | q | + | s | + | w | \leqslant M$, *unde* $M > 0$ *este arbitrar fixat, are o soluție și numai una de clasă* $D_{2,p}(\bar{\Omega})$, $p > 2$, *dacă constantele lui Lipschitz corespunzătoare variabilelor u, p, q sînt suficient de mici.*

Demonstrație. Vom folosi ecuația echivalentă (8). Teorema va fi demonstrată imediat, folosind principiul contracției. Într-adevăr, folosind observațiile de pînă acum, rezultă că operatorul G transformă spațiul Banach $L_p(\bar{\Omega})$ în sine însuși. Rămîne de arătat că G este o contracție în acest spațiu. Dar :

$$| G(\rho_1) - G(\rho_2) | \leqslant \alpha_0 | \Pi_0 (\rho_1 - \rho_2) | + \alpha_1 | \Pi_1 (\rho_1 - \rho_2) | +$$

$$+ \bar{\alpha}_1 | \bar{\Pi}_1 (\rho_1 - \rho_2) | + \frac{\alpha}{2} (| \Pi_2 (\rho_1 - \rho_2) | + | \bar{\Pi}_2 (\rho_1 - \rho_2) |$$

în care $\alpha_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1$ reprezintă constantele lui Lipschitz ale funcţiei g relativ la variabilele u, p, q respectiv. Operatorii $\Pi_0, \Pi_1, \bar{\Pi}_1$ sînt în particular continui, deci

$$\|\Pi_0 \rho\|_{L_p} \leqslant K_0 \|\rho\|_{L_p}; \quad \|\Pi_1 \rho\|_{L_p} \leqslant K_1 \|\rho\|_{L_p} \cdot \quad \|\bar{\Pi}_1 \rho\|_{L_p} \leqslant \bar{K}_1 \|\rho\|_{L_p}.$$

Aşadar

$$\|G(\rho_1) - G(\rho_2)\|_{L_p} \leqslant \left(\alpha_0 K_0 + \alpha_1 K_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{K}_1 + \alpha \cdot \frac{\Lambda_p + \bar{\Lambda}_p}{2}\right) \|\rho_1 - \rho_2\|_{L_p}.$$

Deoarece Λ_p este funcţie continuă de p şi $\Lambda_2 = 1$, putem găsi un $\varepsilon > 0$, încît pentru $0 \leqslant p - 2 \leqslant \varepsilon(M)$ să avem $\alpha \Lambda_p < 1$. La fel pentru $\bar{\Lambda}_p$. În concluzie, dacă α_0, α_1 şi $\bar{\alpha}_1$ sînt suficient de mici, coeficientul lui $\|\rho_1 - \rho_2\|_{L_p}$ poate fi făcut strict mai mic decît 1, alegînd convenabil un $p > 2$. Prin urmare operatorul G are un punct fix şi numai unul, Q.E.D.

Observaţia 1. Un caz evident de aplicabilitate a teoremei 1 este acela în care funcţia g nu conţine u, p, q, constantele lui Lipschitz corespunzătoare, α_0, α_1, $\bar{\alpha}_1$ fiind în acest caz nule. Rămîn să fie verificate numai celelalte condiţii.

Observaţia 2. Dacă $F(z, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$, unica soluţie a problemei D este soluţia identic nulă. Dacă $\|F(z, 0, 0, 0, 0, 0)\|_{L_p}$ este suficient de mică, sau Δ este independent de M, putem obţine uşor o majorare a soluţiei problemei D care să depindă numai de α_0, α_1, $\bar{\alpha}_1$, α şi $\|F(z, 0, 0, 0, 0, 0)\|_{L_p}$.

Observaţia 3. Am obţinut o reprezentare integrală a soluţiei problemei D, prin formula (4), în care ρ verifică o anumită ecuaţie funcţională neliniară, din care s-ar putea determina, în mod unic.

Observaţia 4. Condiţiile privind derivabilitatea şi continuitatea funcţiei g nu sînt numaidecît necesare; le-am folosit numai pentru deducerea unor inegalităţi, pentru punerea în evidenţă a uniform-elipticităţii ecuaţiei (1′). Putem demonstra însă imediat următoarea teoremă :

TEOREMA 2. *Fie ecuaţia (1′) scrisă sub forma (7); presupunem că funcţia F verifică inegalitatea :*

$$|F(z, u', \varphi_i') - F(z, u'', \varphi_i'')| \leqslant \alpha_0(z)\,|u' - u''| + \alpha_1(z)\,|\varphi_1' - \varphi_1''| + \\ + \alpha_2(z)\,|\varphi_2' - \varphi_2''| + \frac{\alpha}{2}\left(|\varphi_3' - \varphi_3''| + |\varphi_4' - \varphi_4''|\right) \tag{10}$$

pentru $z \in \bar{\Omega}, |u| + \sum_{i=1}^{4} |\varphi_i| \leqslant M$ *cu* $M > 0$ *arbitrar fixat;* $\alpha_0(z)$, $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$ *sînt funcţii de clasă* $L_p(\bar{\Omega})$. *În plus* $F(z, u, \varphi_i)$ *este măsurabilă, iar* $F(z, 0, 0, 0, 0, 0) \in L_p(\bar{\Omega})$. *Atunci, dacă* $\|\alpha_0(z)\|_{L_p}$, $\|\alpha_1(z)\|_{L_p}$, $\|\alpha_2(z)\|_{L_p}$ *sînt suficient de mici, problema D pentru ecuaţia (1′) are o soluţie şi numai una de clasă* $D_{2,p}(\bar{\Omega})$, $p > 2$.

Demonstraţia o repetă aproape punct cu punct pe cea a teoremei 1. Observaţiile 1, 2 şi 3 rămîn valabile.

Primită la redacţie la 29 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Calderon and A. Zygmund, Acta Math., **88**, 85—139 (1952); Amer. Journ. Mat., **78**, 289—309 (1956).
2. M. Riesz, Acta Math., **49**, 465—497 (1926).
3. N. Teodorescu, Théses, Paris, 1931.
4. N. Teodorescu, Ann. di Matematica, Seria IV, Bologna XI (1933).
5. N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire*. Ann. Roumaine Math., Bucarest, *3* (1936).
6. И. Н. Векуа, Матем. сб., 31/73, *2*, 217—314 (1952).
7. И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*. Физматгиз, Москва, 1959.

400 DE ANI DE LA NAŞTEREA LUI GALILEU

Galileo Galilei[1]) a fost unul din cei mai de seamă oameni de ştiinţă ai tuturor timpurilor. Ca matematician, astronom, fizician a adus contribuţii importante nu numai la acele probleme pe care ştiinţa timpului său le punea în acel moment, dar a creat domenii noi ale ştiinţei, cum este mecanica, al cărei fondator este considerat pe drept cuvînt.

Galileo Galilei s-a născut la 15 februarie 1564 la Pisa dintr-o familie de intelectuali florentini. Tatăl său Vincenzo cunoştea bine matematicile, dar era mai ales versat în muzică, în particular în muzica antică greacă şi a publicat în 1567 o carte intitulată *Dialog asupra muzicei antice şi moderne.*

Este de observat că Galileo Galilei utilizează şi el mai tîrziu genul dialogului, deci discuţiei, în expunerea unora din cele mai celebre opere ale sale, probabil sub influenţa cărţii tatălui său. Se cunosc puţine date asupra copilăriei lui Galileu, copilărie petrecută în parte la Pisa şi în parte la Florenţa, unde se mută familia sa în 1574. Se ştie însă că deşi starea materială a lui Vincenzo Galilei nu era bună, el a dat o deosebită atenţie educaţiei fiului său insuflîndu-i mai ales independenţa de judecată faţă de principiul autorităţii, pe atunci dominant în şcoli.

În toamna anului 1580, deci la vîrsta de 16 ani, Galileu se înscrie la Universitatea din Pisa, unde a urmat medicina timp de cinci ani, după care se întoarce la Florenţa.

În timpul studenţiei la Pisa, urmează şi un curs de Filozofie ţinut de peripatecianul Francesco Buonamici, aşa cum rezultă din caetele de note rămase de la Galileo Galilei. La acest curs Galileu face cunoştinţă cu filozofia lui Aristotel şi se informează asupra doctrinei lui Nicolae Copernic, care au un rol important în activitatea ştiinţifică de mai tîrziu a lui Galileu.

După afirmaţia lui Galileu, rezultă că abia prin 1583, deci la vîrsta de aproape 20 de ani, începe să se ocupe cu matematicile studiind ,,Elementele lui Euclid'', însă progresul a fost atît de vertiginos încît tatăl său a acceptat ca el să se dedice acestei înclinări naturale.

Astfel, întors la Florenţa, Galileu îşi cîştigă existenţa dînd lecţii de matematică în care timp aprofundează nu numai opera lui Euclid, ci şi a altor savanţi greci ca : Ptolomeu, Pappus şi mai ales Archimede, care, după cum se ştie, s-a preocupat nu numai de probleme de matematică pură, ci şi de aplicaţii, cum sînt acele referitoare la plutirea corpurilor, la probleme de echilibru etc.

Rezultatele obţinute de Galileu în opera sa ştiinţifică sînt extrem de numeroase şi printre ele se numără descoperirea legii căderii corpurilor şi principiul inerţiei care fac din Galileu fondatorul mecanicii.

Conform filozofiei şi fizicii lui Aristotel, mişcarea unui corp putea avea loc numai dacă asupra corpului acţiona o forţă. Galileu introduce însă principiul inerţiei care spune că dacă într-un anumit moment asupra unui corp în mişcare nu mai acţionează nici o forţă, corpul continuă să se mişte în linie dreaptă şi cu viteză constantă.

---

[1]) În limba romînă este cunoscut sub numele de Galileu.

Principiul inerţiei enunţat de Galileu este deosebit de important, căci el conduce la legea fundamentală a mecanicei care ne arată că forţa nu este proporţională cu viteza, cum credea Aristotel, ci este proporţională cu acceleraţia, fapt care conduce pe Newton la legea fundamentală a mecanicei $m.a = F$. Acest principiu este utilizat trei secole mai tîrziu într-o formă mai generală în teoria relativităţii a lui Einstein.

Preocupările astronomice ale lui Galileu îl conduc în 1609, pe timpul cînd era profesor la Universitatea din Padova, la descoperirea lunetei astronomice pe care o îndreaptă spre cer (din Piaţa San Marco din Veneţia) descoperind inelul lui Saturn. Observaţiile sale astronomice îl fac să accepte teoria lui Copernic că soarele trebuie considerat ca fix, în timp ce Pămîntul se mişcă în jurul Soarelui pe o traiectorie dată de o curbă numită elipsă. Această teorie era însă combătută de biserica catolică şi Galileu are de suferit din această cauză. Este chemat de la Florenţa la Roma şi judecat de Inchiziţie la vîrsta de 70 de ani. Este achitat numai după ce declară că revine asupra convingerilor lui şi cartea lui *„Dialog asupra celor două sisteme mari ale lumii"* este interzisă. Galileu a continuat şi mai tîrziu să fie sub supravegherea Inchiziţiei, totuşi el nu a încetat să susţină noua teorie, în convorbiri particulare cu oamenii de ştiinţă ce puteau să-l viziteze pînă la sfîrşitul vieţii sale (8 ianuarie 1642).

Tradiţia spune că după judecată, după ce în genunchi declara că recunoaşte teoria că Pămîntul este fix ar fi spus „E pur si muove".

Acad. G. Vrănceanu

RECENZIE

SOLOMON MARCUS, *Lingvistică matematică. Modele matematice în lingvistică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1963, 220 p.

Apariția acestei cărți marchează un eveniment de seamă în dezvoltarea cercetărilor de lingvistică matematică la noi în țară.

Conține modele analitice și modele paradigmatice ale limbii.

Aceasta este prima carte de lingvistică matematică în limba română.

Are 220 pagini grupate în șapte capitole.

În capitolul I intitulat: *Teoria logică a opozițiilor lingvistice*, se studiază aspectul logic al opozițiilor lingvistice între mulțimi neordonate.

Sînt precizate multe noțiuni matematice cu care se lucrează mai departe, dîndu-se exemple din limbi naturale.

La începutul capitolului II intitulat: *Fonemul* se definesc și se studiază noțiunile care pregătesc terenul definirii noțiunii de fonem.

Notînd cu $\mathcal{F}(x)$ mulțimea valorilor relevante ale lui x, se definește *fonemul* asociat cuvîntului x ca fiind cuplul $\{x, \mathcal{F}(x)\}$.

Capitolul III intitulat: *Morfeme și cvasimorfeme*, cuprinde studiul opozițiilor între. mulțimi ordonate, obținîndu-se un model logic al noțiunii de *paradigmă* și, cu ajutorul acesteia, se introduce noțiunea de *morfem* (pentru limbile care au o morfologie paradigmatică).

Pentru limbile oarecare, se definește noțiunea de *cvasimorfem*.

În capitolul IV, care este intitulat: *Metode funcționale în analiza morfematică*, este dată o expunere a cercetărilor lui S. I. Fitialov și I. L. Bratcikov, referitoare la construirea morfologiei formale.

În capitolul V, intitulat: *Categorii gramaticale*, este prezentată noțiunea de „Categorie gramaticală elementară” introdusă de Dobrușin, studiată și extinsă apoi de către autor.

Dacă F este o familie inițială, se numește „Categorie gramaticală generată de familia inițială F“ mulțimea:

$$\mathcal{G}(F) = F \cup F_1, \text{ unde } F_1 = \{y\,;F \to y\}.$$

Se definește și se studiază un model mai general decît al lui Dobrușin, luînd în loc de familia inițială F o mulțime oarecare A inițială.

Astfel este introdusă noțiunea de „Categorie gramaticală”.

Autorul justifică necesitatea unei astfel de generalizări prin aplicațiile pe care le dă la adjectivele din limba română.

Este făcut un studiu matematic amănunțit al noțiunii de categorie gramaticală și se dau exemple din limbi naturale.

În încheiere este prezentat modelul lui Dobrușin de *rădăcină*, care generalizează pe acela de *familie inițială*.

Rădăcina Dobrușin este numită de către autor „*familie cvasiinițială*.

O familie F se numește *cvasiinițială* dacă satisface la una din condițiile: 1) F este familie inițială; 2) Există un context (f_1,f_2) astfel încît fraza $\underset{(x\in F)}{f_1\,x\,f_2}$ este reperată și pentru orice $F^\star \to F$; fraza $f_1\,y\,f_2$ este nereperată, oricare ar fi $y \in F^\star$ $(F^\star \cap F = \emptyset)$

Autorul demonstrează :

TEOREMA. *Fie F şi F^* două familii distincte, astfel încît $F^* \to F$, iar F^* este unica familie care domină pe F. În aceste condiţii, F este o familie cvasiiniţială.*

Capitolul VI este intitulat : Modele bazate pe partiţii şi relaţia de dominare.

Este introdusă noţiunea de partiţie derivată. Se dă condiţia necesară şi suficientă ca două partiţii A şi B să aibă aceeaşi derivată (în ipoteza că B este o mărire a partiţiei A).

După aceea se abordează problema coincidenţei derivatelor în cazul a două partiţii arbitrare.

Sînt introduse şi studiate noţiunile de limbă adecvată, limbă omogenă, limbă simplă, limbă izolantă şi limbă regulată.

În încheiere se arată că, în general, limbile naturale sînt limbi regulate.

În *capitolul VII, intitulat Modelarea matematică a părţii de vorbire*, este subliniată ideea că cerinţa de a clasifica cuvintele în părţi de vorbire pe baza unor criterii riguroase s-a manifestat o dată cu prelucrarea limbii pentru nevoile automatizării informaţiei.

Cercetările în acest sens au fost făcute de O.S. Kulagina, V. A. Uspenski, I. I. Revzin şi alţii.

Se numeşte partiţie în tipuri, partiţia derivată a partiţiei în vecinătăţi. Prin *tip* se înţelege un termen al partiţiei în tipuri.

Se discută despre noţiunea de tip ca aproximare a părţii de vorbire, arătîndu-se că orice tip aproximează o anumită parte de vorbire. Sînt date exemple din limba română şi franceză

★

În cea mai mare parte, cunoştinţele de matematică ce mijlocesc înţelegerea materialului prezentat, sînt date în cursul expunerii la capitolele respective sub o formă destul de accesibilă.

Trebuie subliniat faptul că accesibilitatea expunerii nu dăunează rigurozităţii ştiinţifice.

La sfîrşitul unor capitole se pun probleme şi se dau sugestii pentru cercetări ulterioare.

Expunerea este foarte clară. Are exemple din multe limbi naturale în special din limba română.

O însemnată parte din carte are la bază lucrări originale.

Conţine o amplă bibliografie cu lucrări tratînd probleme legate de modelarea în lingvistică.

Calităţile didactice şi de originalitate, fac ca această carte să fie citită cu folos atît de către matematicieni, cît şi de către lingvişti.

Ea va constitui, fără îndoială, multă vreme o carte de bază după care se vor iniţia toţi cei interesaţi de probleme de lingvistică matematică.

Constantin V. Crăciun

12
MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti.

1965 JUL 14

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 309 p., 15 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systémes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 3, P. 321—474, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informaţia" — c. 624

43831

Lei 12. —

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

4

TOMUL 17

1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — **redactor responsabil**;
ACAD. GR. C. MOISIL — **redactor responsabil adjunct**;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU — **membru corespondent al Academiei R.P.R.**
CIPRIAN FOIAȘ, — **secretar de redacție.**

Pentru a vă asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1965.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.
Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la **Comitetul de redacție pe adresa : str. Mihail Eminescu, nr. 47, București**
Revista apare de 10 ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

INSTITUTUL DE MECANICA FLUIDELOR, BUCUREȘTI,
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ, BUCUREȘTI,
CENTRUL DE MECANICA SOLIDELOR, BUCUREȘTI,

în colaborare cu

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

și împreună cu

MINISTERUL INDUSTRIEI CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI,
MINISTERUL TRANSPORTURILOR ȘI TELECOMUNICAȚIILOR,
COMITETUL DE STAT PENTRU CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ ȘI SISTEMATIZARE,
COMITETUL DE STAT AL APELOR,
CONSILIUL NAȚIONAL AL INGINERILOR ȘI TEHNICIENILOR,

organizează

CONFERINȚA DE MECANICĂ

care va avea loc la București între 27 septembrie și 1 octombrie 1965

Lucrările conferinței se vor desfășura în cadrul următoarelor secții :

I. Secția de mecanică generală

Probleme generale de mecanică, mecanică analitică, mecanică statistică, metode analitice în mecanică, metode numerice de calcul în mecanică, analogii, cinematica și dinamica corpului rigid, mecanica cerească, vibrații, stabilitatea sistemelor, instrumentație și control.

II. Secția de mecanica solidelor

Elasticitate, plasticitate, reologie, bare, plăci, pînze subțiri, flambaj, unde și șocuri în solide, calculul structurilor, proprietăți mecanice ale materialelor, oboseală, teoria mecanismelor, dinamica mașinilor, organe de mașini, mecanica solului, comportarea solidelor la temperaturi ridicate și coborîte, frecare și uzură, metode experimentale.

III. Secția de mecanica fluidelor

Mişcări incompresibile, mişcări compresibile, subsonice, transonice, supersonice, hipersonice, mecanica gazelor rarefiate, magneto-hidro-gazodinamică, termo-aerodinamică, probleme speciale de aeronautică şi astronautică, meteorologie, mişcări cu suprafaţă liberă, cavitaţie, mişcări în turbomaşini, mişcări prin conducte, vibraţii şi valuri în fluide, strat-limită, turbulenţă, reologie, mişcări în medii poroase, lubrificaţie, hidrodinamică fizico-chimică, mişcări cu transfer de căldură şi masă, metode experimentale.

IV. Secția de învățămîntul mecanicii

În această secţie se vor purta discuţii pe marginea unor referate pregătite de Comitetul de organizare, privind : probleme de organizare a învăţămîntului mecanicii în universităţi, institute de învăţămînt superior şi în învăţămîntul mediu, aspecte de istorie a mecanicii.

*

Lucrările prezentate trebuie să cuprindă rezultate originale în domeniile enunţate mai sus.

Pentru fiecare comunicare se acordă 20 de minute.

În vederea selecţionării lucrărilor şi a întocmirii programului, cei care doresc să participe vor trimite rezumate (de circa 200 de cuvinte, dactilografiate în 3 exemplare la 2 rînduri) pînă la 30 iunie a.c.

Se recomandă ca rezumatul să fie redactat cît mai clar, deoarece selecţionarea lucrărilor se bazează pe aceste rezumate.

Autorii vor fi informaţi în timp util asupra programării lucrărilor.

Textul complet al lucrărilor va fi trimis pînă la 15 august a.c., în 3 exemplare dactilografiate la 2 rînduri cu formulele scrise citeţ în cerneală şi figurile desenate în tuş pe calc.

Corespondenţa se va trimite pe adresa :

Comitetul de organizare
al Conferinţei de mecanică, Bucureşti,
Str. Const. Mille, nr. 15
Raionul 16 Februarie

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

TOM. 17, Nr. 4
1965

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

GH. MIHOC și E. BALAȘ, Problema orarelor optime 477
MARCEL N. ROȘCULEȚ, Cercetări asupra seriilor trigonometrice. II. Seria Fourier asociată unei funcții neintegrabile . . . 485
CABIRIA ANDREIAN CAZACU, Asupra unei probleme a lui L. I. Volkovîskii 499
VALERIU ȘT. UDRESCU, Omologia $\Lambda - (\Phi, \Psi)$ — modulelor 519
C. C. TEODORESCU și RADU BĂDESCU, Distribuția eforturilor, produse de variația de temperatură, în calea ferată sudată continuu 529
MARIUS I. STOKA, Asupra corespondenței de speța a treia între plane proiective 547
C. BĂNICĂ și N. POPESCU, Asupra categoriilor preabeliene . . 563
P. ISCOVICI și G. GODINI, Linie de așteptare cu stații de servire prioritare și număr limitat de solicitanți 577
PETRU L. IVĂNESCU, Programarea pseudobooleeană și aplicații ale ei 583
ION D. ION, Un sistem de axiome pentru algebra evenimentelor 599
MIHAI ȘABAC, Familii compozabile de distribuții și transformata Fourier 607
HENRI MOSCOVICI, Asupra spațiilor local convexe separate . . 615
G. DINCĂ, Asupra deformării plane a corpului perfect-plastic (utilizarea variabilelor complexe) 619

RECENZII 627

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 475–630, BUCUREȘTI, 1965.

PROBLEMA ORARELOR OPTIME[1]

DE

GH. MIHOC şi E. BALAŞ

Centrul de statistică matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, nr. 47, Bucureşti

Se consideră problema întocmirii unui orar de seminarii în care numărul întreruperilor (şi deci al ,,venirilor la facultate") pentru toate grupele de studenţi să fie minim, iar repartizarea pe grupe a numărului de întreruperi să fie cît mai ,,echitabilă". Se demonstrează echivalenţa acestei probleme cu o problemă de programare liniară cu variabile bivalente, pentru care se cunosc metode de rezolvare.

Problema clasică de afectare constă în afectarea a m locuri de muncă la m oameni, cunoscîndu-se randamentul fiecărui om la fiecare loc de muncă, astfel ca randamentul total să fie maxim.

O problemă de afectare mai generală este aceea a orarelor şcolare (afectare reciprocă între profesori, clase de elevi şi ore) şi universitare (unde intervin în plus şi sălile). Astfel de probleme au fost abordate în ultimii ani de mai mulţi autori, deşi relativ puţine lucrări au fost publicate. Într-un articol recent, P. Stahlknecht [11] trece în revistă rezultatele obţinute. El arată că majoritatea acestor lucrări (de ex. [1], [4], [6], [8]) au ca obiect generarea la calculatoare electronice a unor orare şcolare *compatibile* (lipsite de suprapuneri de ore, clase sau profesori) care să satisfacă diferite cerinţe. Problema *optimizării* orarelor fie că nu s-a pus, fie că nu s-a rezolvat. O altă parte din lucrări ([5], [9]) se ocupă de găsirea unor orare universitare compatibile, iar nota [10] formulează problema găsirii unui orar care să asigure pentru un număr maxim de studenţi posibilitatea audierii mai multor cursuri.

Noi vom considera următoarea problemă :

m grupe de studenţi fac seminarii cu p asistenţi. Fiecare grupă $i\ (i = 1,\dots, m)$ are t_i ore şi fiecare asistent $k\ (k = 1,\dots, p)$ are t^k ore de seminar săptămînal. Grupa i are săptămînal t_i^k ore cu asistentul k, astfel încît $\sum_{k=1}^{p} t_i^k = t_i\,(i = 1, \ldots, m)$ şi $\sum_{i=1}^{m} t_i^k = t^k\,(k = 1, \ldots, p)$. Săptămîna are t ore de lucru şi se compune din n faze (zile sau jumătăţi de zile), de cîte f ore, adică $t = n \cdot f$, fazele fiind despărţite între ele prin anumite intervale de timp. Ştiindu-se că în fiecare oră j ($j = 1, \ldots, t$) există s_j săli disponibile, să se întocmească un astfel de orar al seminariilor pentru cele m grupe de studenţi şi cei p asistenţi, încît numărul de întreruperi între orele de seminar ale aceleaşi grupe, însumat pentru toate grupele, să fie minim, repartizarea întreruperilor printre grupe fiind cît mai „echitabilă".

---

[1]) Versiunea în l. engleză a apărut în Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **11**, *4* (1965).

Pentru o formulare mai riguroasă a problemei, introducem următoarele definiţii :

1. Vom numi *orar* o matrice tridimensională $X = (x_{ij}^k)$, ale cărei elemente satisfac relaţiile

$$(1)\qquad x_{ij}^k = \begin{cases} 1 \text{ dacă grupa } i \text{ are seminar cu asistentul } k \text{ în ora } j \\ 0 \text{ dacă grupa } i \text{ nu are seminar cu asistentul } k \text{ în ora } j \end{cases} \qquad \begin{matrix}(i = 1, \ldots, m\,;\\ k = 1, \ldots, p\,;\\ j = 1, \ldots, t)\end{matrix}$$

$$(2)\qquad \sum_{j=1}^{t} x_{ij}^k = t_i^k, \qquad (i = 1, \ldots, m\,;\ k = 1, \ldots, p),$$

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^k \leqq 1, \qquad (k = 1, \ldots, p\,;\ j = 1, \ldots, t),$$

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k \leqq 1, \qquad (i = 1, \ldots, m\,;\ j = 1, \ldots, t).$$

Un orar este deci, conform acestei definiţii, o matrice care afectează fiecărei perechi formată dintr-o grupă de studenţi i şi un asistent k, cîte t_i^k ore din fondul de timp săptămînal; astfel ca una şi aceeaşi oră j să nu fie afectată mai mult decît o singură dată unei grupe i sau unui asistent k.

2. Vom numi *realizabil* un orar X care satisface relaţiei

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k \leqq s_j, \qquad (j = 1, \ldots, t).$$

Un orar este deci realizabil, dacă numărul grupelor, respectiv al asistenţilor, cărora li s-a afectat o anumită oră j, nu depăşeşte numărul s_j al sălilor disponibile pentru ora respectivă.

3. O anumită oră j ($j = 1, \ldots, t$) se va numi *început pentru grupa i în orarul X*, dacă $\sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k = 1$ şi se realizează una din condiţiile :

$$\alpha)\ j = rf + 1 \qquad (0 \leqq r \leqq n - 1), \text{ sau}$$

$$\beta)\ \sum_{k=1}^{p} x_{i,\,j-1}^k = 0.$$

Fie $J_i(X)$ mulţimea începuturilor pentru grupa i în orarul X, şi fie $|J_i(X)|$ numărul acestor începuturi.

4. Vom numi orar *minimal* un orar realizabil $\tilde{X}$, astfel ca

$$\sum_{i=1}^{m} |J_i(\tilde{X})| = \min_{X\in F}\left[\sum_{i=1}^{m} |J_i(X)|\right], \tag{6}$$

unde F este mulțimea orarelor realizabile.

5. Vom numi orar *optim* un orar minimal $\tilde{X}^{\circ}$, astfel încît

$$\max_i [\,|J_i(\tilde{X}^0)|\,] = \min_{\tilde{X}\in M} \{\max_i [\,|J_i(\tilde{X})|\,]\}, \tag{7}$$

unde M este mulțimea orarelor minimale.

Problema noastră poate fi acum formulată în felul următor :

PROBLEMA I. *Date fiind*

$$m, p, t, f, t_i^k\,(i = 1,\dots, m;\ k = 1,\dots, p),\ s_j\,(j = 1,\dots, t) \tag{8}$$

să se găsească un orar optim.

Observație. Problema orarelor *școlare* optime este un caz particular al problemei I. Aici fiecare clasă de elevi își are sala ei permanentă, astfel încît relații de tipul (5) sînt necesare numai pentru orele care se țin în săli speciale (de gimnastică, de laborator etc.). Afară de aceasta, problema minimizării numărului de întreruperi nu se pune aici pentru elevi, care au un program continuu dat prin $t_i = t\ (i = 1,\dots, m)$, ci pentru profesori.

Să notăm acum $t_{i_*} = \max_i [t_i]$ și să considerăm :

PROBLEMA II. Avem

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} z_{ij} - \frac{1}{t_{i_*}}\,u = \text{Max}, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{t} x_{ij}^k = t_i^k, \qquad (i = 1,\dots, m;\ k = 1,\dots, p), \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^k \leq 1, \qquad (k = 1,\dots, p;\ j = 1,\dots, t), \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k - y_{ij} = 0, \qquad (i = 1,\dots, m;\ j = 1,\dots, t), \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k \leqq s_j, \qquad (j = 1,\dots, t), \tag{13}$$

$$y_{ij} + y_{i,j+1} - 2z_{ij} \geqq 0, \quad (i = 1,\dots, m;\ j = rf+1,\dots \\ \dots, (r+1)f - 1;\ r = 0,\dots, n-1), \tag{14}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} z_{ij} + u \geqq t_i, \quad (i = 1,\dots, m), \tag{15}$$

$$x_{ij}^k, y_{ij}, z_{ij} = 0 \text{ sau } 1 \quad (i = 1,\dots, m; \\ k = 1,\dots, p;\ j = 1,\dots, t). \tag{16}$$

Aceasta este o problemă de programare mixtă cu variabile bivalente, singura variabilă nesupusă condiției de bivalență fiind u.

Observație. Întrucît u apare cu coeficient negativ în forma liniară care se maximizează, din relația (15) rezultă că în orice soluție optimă a problemei II, variabila u ia valoarea

$$\bar{u} = \max_{i} \left[t_{i\cdot} - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} z_{ij} \right] \tag{17}$$

care este un număr întreg pozitiv. Dacă punem

$$u = \sum_{s=0}^{q} 2^s u_s, \; u_s = 0 \text{ sau } 1\,(s = 0, \ldots, q), \tag{18}$$

obținem o problemă de programare liniară cu variabile bivalente, care se poate rezolva cu algoritmul aditiv descris în [2].

Cît privește substituția (18) (vezi [3]), mărimea lui q se determină astfel:

Din (17) rezultă că

$$\sum_{s=0}^{q} 2^s u_s \leqq t_{i\cdot}$$

și deci notînd cu $[a]$ partea întreagă a numărului a, valoarea maximă a lui s pentru care u_s poate lua valoarea 1 este

$$q = [\lg t_{i\cdot}].$$

Să notăm $X = (x^k_{ij})$, $Y = (y_{ij})$, $Z = (z_{ij})$. Avem următoarea:

TEOREMĂ. *Problemele* I *și* II *sînt echivalente, în sensul că*

α) *dacă* $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{u})$ *este o soluție optimă a problemei* II, *atunci* $\overline{X}$ *este un orar optim, și*

β) *pentru orice orar optim* $\overline{X}$, *există un triplet unic determinat* $(\overline{Y}, \overline{Z}, \overline{u})$, *astfel încît* $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{u})$ *este o soluție optimă a problemei* II.

Înainte de a demonstra teorema, vom formula cîteva leme.

Fie problema III, problema care se obține din II prin eliminarea restricțiilor (15) și a variabilei u.

Să considerăm apoi

PROBLEMA IV. Avem

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} y_{ij} y_{i,j-1} = \text{Max} \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{t} x^k_{ij} = t^k_i, \qquad (i = 1, \ldots, m;\; k = 1, \ldots, p) \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x^k_{ij} \leqq 1, \qquad (k = 1, \ldots, p;\; j = 1, \ldots, t), \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{p} x^k_{ij} - y_{ij} = 0, \quad (i = 1, \ldots, m;\; j = 1, \ldots, t), \tag{22}$$

$$(23)\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ij}^{k} \leqq s_j, \quad (j = 1, \ldots, t),$$

$$x_{ij}^{k},\ y_{ij} = 0 \text{ sau } 1, \quad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, p;$$

$$(24)\qquad j = 1, \ldots, t).$$

Avem

Lema 1. *Dacă* (X, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, $\overline{u}$) *este o soluție optimă a problemei* II, *atunci* (X, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$) *este o soluție optimă a problemei* III.

Demonstrație. Să presupunem că lema este falsă și că există o soluție ($\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Z}$) a problemei III astfel încît

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \widetilde{z}_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \overline{z}_{ij} = d_z \geqq 1.$$

Atunci există o valoare $\widetilde{u}$ care satisface relația (15) pentru $z_{ij} = \widetilde{z}_{ij}$ și pentru care

$$(25)\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \widetilde{z}_{ij} - \frac{1}{t_{i*}}\,\widetilde{u} > \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \overline{z}_{ij} - \frac{1}{t_{i*}}\,\overline{u},$$

ceea ce contrazice optimalitatea soluției (X, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, $\overline{u}$) pentru problema II.

Într-adevăr, din (17) rezultă că

$$0 < \widetilde{u}, \overline{u} \leqq t_{i*}$$

și deci

$$d_u = \widetilde{u} - \overline{u} < t_{i*}, \quad \frac{d_u}{t_{i*}} < 1 \leqq d_z,$$

de unde rezultă direct (25).

Lema 2. *Problemele* III *și* IV *sînt echivalente, în sensul că* : *a*) *dacă* (X, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$) *este o soluție optimă a problemei* III, *atunci* ($\overline{X}$, $\overline{Y}$) *este o soluție optimă a problemei* IV, *și b*) *pentru orice soluție optimă* (X, $\overline{Y}$) *a problemei* IV, *există un* $\overline{Z}$ *unic determinat, astfel încît* (X, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$) *este o soluție optimă a problemei* III.

Demonstrație. Un produs de variabile bivalente $y_{ij}\, y_{i.j+1}$ poate fi înlocuit (vezi [7]) printr-o variabilă bivalentă z_{ij}, cu introducerea următoarelor restricții :

$$(26)\qquad y_{ij} + y_{i.\,j+1} - 2\, z_{ij} \geqq 0,$$

$$(27)\qquad y_{ij} + y_{i,\,j+1} - z_{ij} \leqq 1.$$

Într-adevăr, din (26) rezultă implicația

$$(28)\qquad (y_{ij} = 0 \vee y_{i,\,j+1} = 0) \Rightarrow z_{ij} = 0$$

iar din (27) rezultă

$$(29)\qquad (y_{ij} = 1 \wedge y_{i,\,j+1} = 1) \Rightarrow z_{ij} = 1.$$

Aşadar, dacă problema III se completează cu restricţii de forma (27) pentru $i = 1, \ldots, m$ şi $j = rf + 1, \ldots, (r+1)f - 1$; $r = 0, \ldots, n-1$, ea devine echivalentă cu problema IV în sensul lemei 2. Dat fiind însă că în forma liniară care se maximizează în problema III toţi z_{ij} apar cu coeficienţi pozitivi şi toţi y_{ij} cu coeficienţi nuli, valoarea care rezultă pentru z_{ij} din relaţiile de forma (26), respectiv (14) în orice soluţie optimă, este

$$\bar{z}_{ij} = \left[\frac{1}{2}(y_{ij} + y_{i,j+1})\right],$$

unde prin parantezele drepte am notat iarăşi partea întreagă a expresiei $\frac{1}{2}(y_{ij} + y_{i,j+1})$.

În consecinţă, implicaţia (29) se realizează şi fără introducerea explicită a unor restricţii de forma (27). Aceasta demonstrează lema 2.

LEMA 3. *Dacă* $(X, \bar{Y})$ *este o soluţie optimă a problemei* IV, X *este un orar minim. Invers, pentru orice orar minim* X *există un* $\bar{Y}$ *unic determinat, astfel încît* $(X, \bar{Y})$ *este o soluţie optimă a problemei* IV.

Demonstraţie. Dacă $(X, \bar{Y})$ este o soluţie optimă a problemei IV, atunci X este un orar realizabil, căci, ţinînd seama de (24), relaţia (22) este identică cu (4).

Avînd în vedere relaţia (22), pentru orice X există un Y unic determinat. Fie $S = \{ Y \mid X \in F \}$, unde F este mulţimea orarelor realizabile. Atunci, notînd

$$(30) \qquad w_i(Y) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} y_{ij}\, y_{i,j+1}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

şi

$$w(Y) = \sum_{i=1}^{m} w_i(Y),$$

vom arăta că

$$(31) \qquad \left(w(\bar{Y}) = \max_{Y \in S}[w(Y)]\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} |J_i(X)| = \min_{X \in F}\left[\sum_{i=1}^{m} |J_i(X)|\right]\right).$$

Din definiţia unui început pentru grupa i în orarul X, rezultă că $w_i(Y)$ este numărul orelor care

i) sînt afectate grupei i în orarul X,

ii) nu constituie început pentru grupa i în orarul X.

Într-adevăr, din (22) rezultă că pentru o anumită oră j_*, produsul $y_{i,j_*-1}\, y_{ij_*}$ ia valoarea 1 în expresia (30), dacă şi numai dacă :

i) $\sum_{k=1}^{p} x_{ij_*}^{k} = 1$,

ii) $j_* \neq rf + 1$,

iii) $\sum_{k=1}^{p} x_{i,j_*-1}^{k} = 1$.

În consecință, numărul începuturilor pentru grupa i în orarul X, exprimat ca diferența dintre numărul total de ore afectate grupei i și numărul de ore afectate grupei i, dar care nu constituie început pentru grupa i, este

$$|J_i(X)| = t_i - w_i(Y), \tag{32}$$

iar de aici

$$\sum_{i=1}^{m} |J_i(X)| = \sum_{i=1}^{m} t_i - w(Y). \tag{33}$$

Avînd în vedere definiția lui S și faptul că X este un orar realizabil, (33) demonstrează validitatea relației (31) și cu aceasta lema 3.

Demonstrația teoremei. α) Din lemele 1, 2 și 3 rezultă că dacă $(X, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{u})$ este o soluție optimă a problemei II, atunci X este un orar minim. Să presupunem că el nu este însă optim. Atunci există un alt orar minim $\widetilde{X}$, astfel încît

$$\sum_{i=1}^{m} |J_i(\widetilde{X})| = \sum_{i=1}^{m} |J_i(X)|, \tag{34}$$

dar

$$\max_i [|J_i(\widetilde{X})|] < \max_i [|J_i(X)|]. \tag{35}$$

Avînd în vedere (30) și (32) precum și lemele 2 și 3, aceasta înseamnă că există o soluție $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}, \widetilde{u})$ a problemei II, astfel încît

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \widetilde{z}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \overline{z}_{ij},$$

dar

$$\widetilde{u} = \max_i \left[t_i - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \widetilde{z}_{ij} \right] < \max_i \left[t_i - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \overline{z}_{ij} \right] = \overline{u}$$

ceea ce contrazice optimalitatea soluției $(X, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{u})$.

Aceasta demonstrează prima parte a teoremei.

β) Din lemele 2 și 3 rezultă că pentru orice orar optim (și deci minim) X, există o pereche $(\overline{Y}, \overline{Z})$ unic determinată, astfel încît tripletul $(X, \overline{Y}, \overline{Z})$ este o soluție optimă a problemei III. Vom arăta că $(X, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{u})$, unde $\overline{u}$ este dat de relația (17), este o soluție optimă a problemei II.

Soluția $(X, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{u})$ este admisibilă : faptul că $(X, \overline{Y}, \overline{Z})$ este o soluție admisibilă a problemei III, înseamnă că relațiile (10),..., (14) sînt verificate, iar (17) garantează că relația (15) este și ea verificată.

Să presupunem acum că soluția nu este optimă. Atunci există o altă soluție admisibilă $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}, \widetilde{u})$, astfel încît

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \widetilde{z}_{ij} - \frac{1}{t_{i_*}} \widetilde{u} > \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1} \overline{z}_{ij} - \frac{1}{t_{i_*}} \overline{u}.$$

Cum însă $(X, \overline{Y}, \overline{Z})$ este o soluţie optimă a problemei III, avem

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1}\widetilde{z}_{ij} \leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=rf+1}^{(r+1)f-1}\overline{z}_{ij}$$

şi deci în acest caz $\widetilde{u} < \overline{u}$. Dar atunci din (17) rezultă că cel puţin una din restricţiile (15) nu se verifică pentru $\widetilde{u}$, adică soluţia $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}, \widetilde{u})$ nu este admisibilă.

Teorema este astfel demonstrată.

Primită la redacţie la 16 noiembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. J. S. Appleby, D. V. Blake, E. A. Newman, *Techniques for Producing School Timetables on a Computer and Their Application to Other Scheduling Problems*. The Computer Journal, *3*, 237–245 (1961).
2. E. Balaş, *Un algorithme additif pour la résolution des programmes linéaires en variables bivalentes*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **258**, 15, 3 817–3 820 (1964).
3. E. Balaş, *Extension de l'algorithme additif à la programmation en nombres entiers et à la programmation non linéaire*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **258**, *21*, 5 136–5 139 (1964).
4. J. Berghius, *La composition des horaires scolaires*. Communication au 23-e Congrès des utilisateurs des calculateurs Gamma-Tambour, Bologna, 1961.
5. W. H. Bossert, H. B. Harmon, Student Sectioning on the IBM 7090, IBM Corp., Cambridge 39, Mass., 1963.
6. J. Csima, C. C. Gotlieb, A Computer Method for Constructing School Timetables. Communications of the ACM, *7* 160–163 (1964).
7. R. Fortet, *L'algèbre de Boole et ses applications en recherche opérationnelle*. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, 4, 5–36 (1959).
8. C. C. Gotlieb, *The Construction of Class-Teacher Timetables*. Proceedings of the IFIP Congress, 73–77 (1963).
9. K. Kirchgässner, *Über Zuteilungsprobleme einer Universität*. Referat auf der Jahrestagung der DGU, Braunschweig, 1963.
10. G. R. Sherman, *A Combinatorial Problem Arising from Scheduling University Classes*. Journal of the Tennessee Academy of Science, 116–117 (1963).
11. P. Stahlknecht, *Zur elektronischer Berechnung von Stundenplänen*. Elektronische Datenverarbeitung, 1964, Heft. 2.

CERCETĂRI ASUPRA SERIILOR TRIGONOMETRICE

II. SERIA FOURIER ASOCIATĂ UNEI FUNCȚII NEINTEGRABILE [1]

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, nr. 47, București

Fie $f(x)$ o funcție definită pe $(-\pi, \pi)$, în afară de o mulțime de măsură nulă, neintegrabilă pe $(-\pi, \pi)$, astfel încît funcția $\varphi(x) = \sin x\, f(x)$ este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$; în lucrare se asociază lui $f(x)$ o serie Fourier și reciproc, fiind dată seria Fourier asociată unei funcții $f(x)$ care îndeplinește condițiile de mai sus, se dă un procedeu de determinare a lui $f(x)$. În continuare se stabilesc proprietăți ale coeficienților seriei atașate unei funcții neintegrabile $f(x)$.

1. Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul $(-\pi, \pi)$ în afara unei mulțimi de măsură nulă, neintegrabilă pe $(-\pi, \pi)$, periodică, de perioadă 2π, astfel încît integralele

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, \mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \dots$$

există și sînt finite. Toate integralele $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x$, $k = 0, 1, \dots$ sînt nule, nu există sau sînt divergente.

Dacă notăm

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, \mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{1}$$

obținem seria Fourier

$$b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots + b_n \sin nt + \dots \tag{2}$$

coeficienții $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ fiind determinați de (1).

---

[1] Versiunea în l. franceză va apărea în Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **11**, *6* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, Pag. 485–498, BUCUREȘTI, 1965.

Funcţia $f(t)\sin t$ fiind integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, urmează că funcţia

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} \left[\sin t\, f(t) - \frac{1}{2} b_1\right] \mathrm{d}t$$

este continuă pentru $x \in R$, şi

$$g(-\pi) = 0, \quad g(\pi) = 0.$$

Funcţia g este cu variaţia mărginită pe orice interval mărginit $[a, b] \subset R$ prin urmare seria sa Fourier

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{3}$$

converge uniform către g pe $[a, b]$. Avem

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos kt\, \mathrm{d}t, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin kt\, \mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, \ldots$$

sau

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \mathrm{d}x \int_{-\pi}^{x}\left(\sin t\, f(t) - \frac{1}{2} b_1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin t\, f(t) - \frac{1}{2} b_1\right)\mathrm{d}t \int_{t}^{\pi} \cos kx\, \mathrm{d}x,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, \mathrm{d}x \int_{-\pi}^{x}\left(\sin t\, f(t) - \frac{1}{2} b_1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin t\, f(t) - \frac{1}{2} b_1\right)\mathrm{d}t \int_{t}^{\pi} \sin kx\, \mathrm{d}x$$

de unde deducem

$$\alpha_k = -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin t\, f(t) - \frac{1}{2} b_1\right] \sin kt\, \mathrm{d}t,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin t\, f(t) - \frac{1}{2} b_1\right] \cos kt\, \mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t \sin kt\, \mathrm{d}t, \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t \cos kt\, \mathrm{d}t, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

prin urmare

$$\alpha_k = -\frac{\beta_k^*}{k}, \quad \beta_k = \frac{\alpha_k^*}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

unde α_k^* şi β_k^* sînt coeficienţii Fourier ai funcţiei integrabile $\sin t\, f(t)$, $t\in(-\pi, \pi)$. Seria Fourier a funcţiei g este aşadar

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-\beta_k^* \cos kx + \alpha_k^* \sin kx)$$

convergentă pentru orice $x \in R$ şi uniform convergentă pe orice interval $[\lambda, \mu] \subset R$, de unde deducem

$$\int_{\lambda}^{x} \sin t\, f(t)\, \mathrm{d}t = g(x) - g(\lambda) + \frac{1}{2} b_1 (x - \lambda) =$$

$$= \frac{1}{2} b_1 t \Big|_{\lambda}^{x} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k}(-\beta_k^* \cos k\,t + \alpha_k^* \sin kt)\Big|_{\lambda}^{x}$$

şi dacă derivăm, obţinem egalitatea

$$\sin x\, f(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2} b_1 \quad \text{sau} \quad f(x) = \frac{1}{\sin x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \frac{b_1}{\sin x}\cdot\frac{1}{2}$$

valabilă aproape peste tot în R. Putem să enunţăm acum următoarea

TEOREMĂ. *Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $(-\pi, \pi)$, neintegrabilă pe $(-\pi, \pi)$; fie $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ şirul de numere reale*

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, f(t)\, \mathrm{d}t, \\ b_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t f(t)\, \mathrm{d}t, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt f(t)\, \mathrm{d}t, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(toate integralele $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\, f(t)\, \mathrm{d}t$, $m = 0, 1, \ldots$ sînt nule, divergente sau nu există).

Presupunînd şirul (b_n) dat, o soluţie $f(x)$ a sistemului infinit de ecuaţii (α) definită pe $(-\pi, \pi)$, în afara unei mulţimi de măsură nulă, este

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x},$$

unde ψ este funcţia definită de integrala

$$\psi(x) = \int_{-\pi}^{x} \sin t \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt\right] \mathrm{d}t, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Demonstraţie. Funcţia $\sin t\, f(t)$ fiind integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, punem

$$(5)\qquad \sin t\, f(t) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin t \sin kt,$$

funcţiile $\frac{\sin mt}{\sin t}$, $(m \in N)$, sînt mărginite pe $(-\pi, \pi)$, deci funcţiile $\frac{\sin mt}{\sin t} \cdot$ $\cdot \sin t\, f(t)$ sînt integrabile pe $(-\pi, \pi)$; înmulţind în (5) ambii termeni cu $\frac{\sin mt}{\sin t}$, prin integrare obţinem

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

deci relaţia (5) este justificată.

Integrala pe orice interval închis a unei serii Fourier a unei funcţii integrabile este convergentă, deci

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin t\, f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin t \sin kt \right] \mathrm{d}t;$$

dacă notăm

$$\psi(x) = \int_{-\pi}^{x} \sin t\, f(t) \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{x} \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin t \sin kt \right] \mathrm{d}t$$

rezultă că pe intervalul $(-\pi, \pi)$ aproape peste tot avem

$$\sin x\, f(x) = \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\cdot$$

Teorema este demonstrată.

Observaţii. 1) Dacă $f(t)$ nu este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, însă funcţia

$$t\, f(t)$$

este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, atunci toate integralele

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt\, f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

există. În adevăr, putem scrie

$$\sin mt\, f(t) = m \cdot \frac{\sin mt}{mt} \cdot t\, f(t)$$

deoarece $\frac{\sin mt}{t}$ este mărginită pe $[-\pi, \pi]$ iar $t\, f(t)$ este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$; rezultă că

$$\sin mt\, t\, f(t) = m \cdot \frac{\sin mt}{mt}\, t\, f(t)$$

este integrabila pe $(-\pi, \pi)$ pentru orice m natural.

2) Vom numi seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$$

seria trigonometrică ataşată funcţiei $f(t)$. Prin ipoteză integralele

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\, f(t)\, dt, \qquad m = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

sînt nule, nu există sau sînt divergente. Funcţia f nefiind integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

nu există sau este divergentă, deci cel puţin una din integralele (6) nu există sau este divergentă.

2. În acest aliniat vom demonstra două leme

Lema 1. *Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $(-\pi, \pi)$ în afară de o mulţime de măsură nulă, neintegrabilă pe $(-\pi, \pi)$. Dacă există un număr m astfel ca funcţia*

$$\sin mx\, f(x)$$

să fie integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, atunci există o infinitate de numere naturale $m_1, m_2, \ldots$, pentru care funcţiile

$$\sin (m_k x) \cdot f(x), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

sînt integrabile pe $(-\pi, \pi)$.

Demonstraţie. Să luăm $m_1 = 2m$; avem

$$\sin 2m x = 2 \sin mx \cos mx.$$

Funcţia

$$\sin 2mx\, f(x) = 2 \cos mx \sin mx\, f(x)$$

este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$ deoarece $\cos mx$ este mărginită pe $[-\pi, \pi]$ iar $\sin mx\, f(x)$ este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$.

În general, pentru $m_k = m\, 2^k$, funcţiile

$$\sin (m_k x)\, f(x)$$

sînt integrabile pe $(-\pi, \pi)$. Lema este demonstrată.

Această lemă arată că dacă $f(x)$ este o funcţie neintegrabilă $(-\pi, \pi)$, însă există un număr natural m pentru care funcţia

$$\sin mx\, f(x)$$

este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, atunci există o serie Fourier ataşată funcţiei $f(x)$, anume

$$f(x) \simeq b_1 \sin m_1 x + b_2 \sin m_2 x + \ldots + b_p \sin m_p x + \ldots$$

cu coeficienţii $b_1, b_2, \ldots$, daţi de

$$b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin m_p t\, f(t)\, dt, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

LEMA 2. *Dacă funcţiile*

$$\sin x\, f(x), \qquad \cos x\, f(x)$$

definite pe $(-\pi, \pi)$ *în afară de o mulţime de măsură nulă sînt integrabile pe* $(-\pi, \pi)$, *atunci funcţia* $f(x)$ *este integrabilă pe* $(-\pi, \pi)$.

Demonstraţie. Funcţia

$$\sin^2 x\, f(x) = \sin x .\sin x\, f(x),$$

este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, deoarece este produsul unei funcţii integrabile cu o funcţie mărginită.

Funcţia

$$\cos^2 x\, f(x) = \cos x \cdot \cos x\, f(x),$$

este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$ din aceleaşi motive. Suma a două funcţii integrabile este o funcţie integrabilă, prin urmare

$$\cos^2 x\, f(x) + \sin^2 x\, f(x) = f(x)$$

este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$. Lema este demonstrată.

CONSECINŢE. 1) *Dacă integralele*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

există şi sînt finite, atunci toate integralele

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

există şi sînt finite.

2) *Dacă toate integralele*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

există şi sînt finite, se poate întîmpla *ca nici una din integralele*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

să fie convergente.

3) *Dacă integrala*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

există şi este finită, atunci şi integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

există şi este finită.

3. Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $(-\pi, \pi)$ în afară de o mulţime de măsură nulă, neintegrabilă pe $(-\pi, \pi)$, periodică de perioadă 2π; fie $m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots$ un şir de numere naturale, astfel încît integralele

$$(7) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin m_k t\, f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

există şi sînt finite. Toate integralele

$$(8) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

diferite de cele conţinute în (7) sînt nule, nu există sau sînt divergente; deoarece $f(x)$ nu este integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, cel puţin una din integralele (8), anume

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

nu există sau este divergentă. Dacă notăm

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin m_k t\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

obţinem seria trigonometrică

$$(9) \qquad b_1 \sin m_1 t + b_2 \sin m_2 t + \ldots + b_n \sin m_n t + \ldots$$

Funcţia $\sin m_1 t\, f(t)$ fiind integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, urmează că funcţia

$$(10) \qquad g(x) = \int_{-\pi}^{x} \left[\sin m_1 t\, f(t) - \frac{1}{2}\, b_1\right] \mathrm{d}t$$

este continuă pentru $x \in R$ şi

$$g(-\pi) = 0, \qquad g(\pi) = 0.$$

Funcţia g este cu variaţia mărginită pe orice interval mărginit $[a, b] \subset R$, prin urmare seria sa Fourier

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

converge uniform către g pe $[a, b]$. Avem

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos kt\, \mathrm{d}t; \quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin kt\, \mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

Dacă îl înlocuim pe g din (10), rezultă

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \mathrm{d}x \int_{-\pi}^{x} \left[\sin m_1 t\, f(t) - \frac{1}{2}\, b_1\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sin m_1 t\, f(t) - \frac{1}{2}\, b_1\right] \mathrm{d}t \int_{t}^{\pi} \cos kx\, \mathrm{d}x$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \mathrm{d}x \int_{-\pi}^{x} \left[\sin m_1 t\, f(t) - \frac{1}{2}\, b_1\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sin m_1 t\, f(t) - \frac{1}{2}\, b_1\right] \mathrm{d}t \int_{t}^{\pi} \sin kx \, \mathrm{d}x$$

sau

$$(11) \qquad \begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin m_1 t \sin kt\, f(t)\, \mathrm{d}t, \\ \beta_k &= \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin m_1 t \cos kt\, f(t)\, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

prin urmare

$$\alpha_k = -\frac{\beta_k^*}{k}, \qquad \beta_k = \frac{\alpha_k^*}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

unde α_k^* şi β_k^* sînt coeficienţii Fourier ai funcţiei integrabile $\sin m_1 t\, f(t)$, $t \in (-\pi, \pi)$.

Seria Fourier a funcţiei g este prin urmare

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(-\beta_k^* \cos kx + \alpha_k^* \sin kx\right)$$

convergentă pentru orice $x \in R$ şi uniform convergentă pe orice interval închis $[\lambda, \mu] \subset R$, de unde deducem

$$\int_{\lambda}^{x} \sin m_1 t\, f(t)\, \mathrm{d}t = g(x) - g(\lambda) + \frac{1}{2}\, b_1 (x - \lambda) =$$

$$= \frac{1}{2}\, b_1 t \Big|_{\lambda}^{x} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k}\left[-\beta_k^* \cos kt + \alpha_k^* \sin kt\right]_{\lambda}^{x}.$$

Dacă derivăm, obţinem egalitatea

$$\sin m_1 x\, f(x) = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\, b_1$$

sau

$$f(x) = \frac{1}{\sin m_1 x} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{b_1}{\sin m_1 x} \cdot \frac{1}{2}$$

valabilă aproape peste tot în R. Aceste elemente ne permit să demonstrăm următoarea

TEOREMĂ. *Fie* $f(x)$ *o funcție definită pe* $(-\pi, \pi)$, *neintegrabilă pe* $(-\pi, \pi)$; *fie* $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *șirul de numere reale*

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin m_1 t\, f(t)\,\mathrm{d}t,\\ b_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin m_2 t\, f(t)\,\mathrm{d}t,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin m_n t\, f(t)\,\mathrm{d}t,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

cu m_k *numere naturale (toate integralele* $\int_{-\pi}^{\pi} \cos pt\, f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin pt\, f(t)\,\mathrm{d}t$, $p = 0, 1, \ldots$, *în afară de cele conținute în sistemul* (β) *sînt nule, divergente sau nu există).*

Presupunînd șirurile (b_n) *și* (m_n) *date, o soluție* $f(x)$ *a sistemului infinit de ecuații* (β) *definită pe* $(-\pi, \pi)$ *în afara unei mulțimi de măsură nulă este*

$$f(x) = \frac{1}{\sin m_1 x}\,\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$$

unde $h(x)$ *este definită de integrala*

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin m_1 t \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin m_k t\right]\mathrm{d}t, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Demonstrație. Funcția $\sin m_1 t\, f(t)$ fiind integrabilă pe $(-\pi, \pi)$, punem

$$(12)\qquad \sin m_1 t\, f(t) \simeq \sum_{1}^{\infty} b_k \sin t \sin m_k t$$

funcțiile $\frac{\sin m_k t}{\sin m_1 t}$, $m_1, m_k \in N$, sînt mărginite pe $[-\pi, \pi]$, deci funcțiile

$$\frac{\sin m_k t}{\sin m_1 t}\cdot \sin m_1 t\, f(t) = \sin m_k t f(t), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

sînt integrabile pe $(-\pi, \pi)$; dacă în (12) înmulțim ambii termeni cu $\frac{\sin m_k t}{\sin m_1 t}$ și integrăm obținem

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin m_k t\, f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

deci relația (12) este justificată.

Integrala pe orice interval închis a unei serii Fourier a unei funcţii integrabile este convergentă, deci

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin m_1 t\, f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin m_1 t \sin m_k t \right) \mathrm{d}t$$

iar dacă punem

$$h(x) = \int_{-\pi}^{x} \sin m_1 t\, f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin m_1 t \sin kt \right) \mathrm{d}t$$

rezultă imediat că pe intervalul $(-\pi, \pi)$, aproape peste tot, avem

$$\sin m_1 x\, f(x) = \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Teorema este demonstrată.

Observaţie. În rezultatul obţinut se poate înlocui $\sin m_1 x$ cu $\sin m_k x$, m_k fiind un termen oarecare al şirului $m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots$.

4. Fie $f^*(x)$ o funcţie definită pe $(0, \pi)$ în afara unei mulţimi de măsură nulă, neintegrabilă pe $(0, \pi)$; fie $f(x)$ funcţia definită pe $(-\pi, \pi)$, astfel

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x), & x \in (0, \pi) \\ -f^*(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

periodică de perioadă 2π. Integralele

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt\, \mathrm{d}t, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

sînt nule în sensul valorii lui Cauchy. Să presupunem că funcţia $\sin x f(x)$, $x \in R$, este integrabilă pe $(0, \pi)$; conform celor spuse mai sus, seria Fourier ataşată funcţiei $f(x)$ este

$$f(x) \simeq b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$

Funcţia integrabilă $\sin x f(x)$ are seria Fourier

$$\sin x\, f(x) \simeq \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{13}$$

şi pentru că este o funcţie pară, $\beta_k = 0$.

Avem aşadar

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin x \sin kx \simeq \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

dacă înmulţim cu $\sin px$ şi integrăm, deoarece

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \sin kx \sin px\, \mathrm{d}x = 0, \qquad p, k = 1, 2, \ldots,$$

deducem că $\beta_p = 0$, $p = 1, 2, \ldots$

Avem însă

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin kx \cos px \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,[\sin (k+p)\,x + \sin (k-p)x]\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [\cos (1-k-p)\,x - \cos (1+k+p)\,x + \cos (1-k+$$

$$+ p)\,x - \cos (1+k-p)\,x]\, \mathrm{d}x$$

de unde rezultă imediat, după regula de calcul a coeficienților seriei Fourier (13), că

$$\alpha_0 = b_1, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2}\, b_2$$

și în general

$$\alpha_p = \frac{1}{2}\,(b_{p+1} - b_{p-1})$$

de unde obținem

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} b_{2p} = \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p-3} + \ldots + \alpha_1, \\ (14)\qquad &\frac{1}{2} b_{2p+1} = \alpha_{2p} + \alpha_{2p-2} + \ldots + \alpha_2 + \frac{1}{2}\,\alpha_0. \end{aligned}$$

Dacă ținem seamă de expresiile lui b_p, avem

$$\alpha_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin (p+1)\,x - \sin (p-1)\,x]\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

deci

$$\alpha_p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos px\, f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad p = 0,1, \ldots$$

adică legea de calcul obișnuită a coeficienților unei serii Fourier. Invers, din (14) rezultă

$$b_{2p} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,(\cos (2p-1)\,x + \cos (2p-3)\,x + \ldots + \cos x) f(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin x\, \frac{\sin 2px}{\sin x}\, f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2px\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

același rezultat se obține și pentru b_{2p+1}.

5. Fie

$$(15)\qquad b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$

o serie trigonometrică atașată unei funcții neintegrabile $f(x)$ cu coeficienții b_n, satisfăcînd inegalități de forma

$$|\, b_n \,| \leqslant M n^{\alpha}, \qquad \alpha < 1.$$

Fie

$$g(x) = -\frac{b_1}{1^2}\sin x - \frac{b_2}{2^2}\sin 2x - \ldots - \frac{b_n}{n^2}\sin nx - \ldots \tag{16}$$

seria obţinută integrînd formal de două ori termen cu termen seria (1). Avem inegalităţile

$$\left| -\frac{b_n}{n^2}\sin nx \right| \leqslant M\frac{1}{n^{2-\alpha}}, \qquad \alpha < 1,$$

deci seria (16) este absolut şi uniform convergentă pe R; suma ei pe care o notăm cu $g(x)$ este o funcţie continuă pe R.

TEOREMĂ. *Dacă coeficienţii* b_n *ai unei serii trigonometrice* (15) *satisfac inegalităţile de forma*

$$|b_n| \leqslant Mn^{\alpha}, \qquad \alpha < 1, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

atunci pentru orice $x \in R$ *avem*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\alpha-1}}{4\ln_p \dfrac{1}{|h|}}\,[g(x+2h) + g(x-2h) - 2g(x)] = 0, \tag{17}$$

unde p *este un număr natural şi* $\ln_p a = \ln(\ln_{p-1} a)$, $\ln_1 a = \ln a$.

Demonstraţie. Avem

$$\sin k(x+2h) + \sin k(x-2h) - 2\sin kx = -4\sin kx \sin^2 kh$$

iar dacă notăm primul termen din (17) cu $H(x, h)$ avem

$$H(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \left(\frac{\sin kh}{hk}\right)^2 \cdot \frac{|h|^{\alpha+1}}{\ln_p \dfrac{1}{|h|}}.$$

Fie N un număr natural. Alegem pe h astfel ca

$$|h| \leqslant \frac{1}{N} \quad \text{şi} \quad \ln_p \frac{1}{|h|} > 0.$$

Avem inegalităţile

$$\frac{\sin^2 hk}{k^2|h|} \leqslant |h|, \quad \frac{1}{|h|} - N \leqslant \frac{1}{|h|}, \quad |b_k| \leqslant Mk^{\alpha},$$

iar dacă scriem pe $H(x, h)$ astfel

$$H(x,h) = \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx \left(\frac{\sin hk}{hk}\right)^2 \frac{|h|^{\alpha+1}}{\ln_p \dfrac{1}{|h|}} + \sum_{k=N+1}^{k\leqslant \frac{1}{|h|}} b_k \sin kx \left(\frac{\sin hk}{hk}\right)^2 \cdot \frac{|h|^{\alpha+1}}{\ln_p \dfrac{1}{|h|}} +$$

$$+ \sum_{k > \frac{1}{|h|}} b_k \frac{|h|^{\alpha-1}}{k^2} \frac{1}{\ln_p \dfrac{1}{|h|}} \cdot \sin kx \cdot \sin^2 hk$$

obținem succesiv

$$\left|\sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx \left(\frac{\sin kx}{hk}\right)^2 \frac{|h|^{\alpha+1}}{\ln_p \frac{1}{|h|}}\right| \leqslant MN^{\alpha+1}\frac{|h|^{\alpha+1}}{\ln_p \frac{1}{|h|}},$$

$$\left|\sum_{k=N+1}^{k\leqslant \frac{1}{|h|}} b_k \sin kx \left(\frac{\sin kx}{hk}\right)^2 \cdot \frac{|h|^{\alpha+1}}{\ln_p \frac{1}{|h|}}\right| \leqslant M\frac{|h|^{\alpha}}{\ln_p \frac{1}{|h|}},$$

$$\left|\sum_{k>\frac{1}{|h|}} b_k \frac{|h|^{\alpha-1}}{k^2} \frac{1}{\ln_p \frac{1}{|h|}} \sin kx \sin^2 hk\right| \leqslant \frac{|h|^{\alpha-1}}{\ln_p \frac{1}{|h|}} \sum_{k>\frac{1}{|h|}} \left|\frac{b_k}{k^2} \sin kx \sin^2 hk\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|h|^{\alpha-1}}{\ln_p \frac{1}{|h|}} M \sum_{k>\frac{1}{|h|}} \frac{1}{k^{2-\alpha}} \leqslant \frac{|h|^{\alpha-1}}{\ln_p \frac{1}{|h|}} M \cdot \frac{1}{1-\alpha}|h|^{1-\alpha} = \frac{M}{1-\alpha}\frac{1}{\ln_p \frac{1}{|h|}}$$

de unde rezultă imediat că $H(x, h) \to 0$ cînd $h \to 0$. Teorema este demonstrată.

Dacă $\alpha = 0$, adică $|b_k| \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots$, din teorema precedentă obținem următoarea

TEOREMĂ. *Dacă coeficienții b_n ai unei serii trigonometrice*

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$

sînt mărginiți, atunci pentru orice $x \in R$ avem

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+2h) + g(x-2h) - 2g(x)}{h \ln_p \frac{1}{|h|}} = 0.$$

6. Fie $f^*(x)$ o funcție definită pe $(0, \pi)$ în afara unei mulțimi de măsură nulă, neintegrabilă pe $(0, \pi)$; fie $f(x)$ funcția definită pe $(-\pi, \pi)$, astfel

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x), & x \in (0, \pi), \\ -f^*(-x), & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

TEOREMĂ. *Dacă funcția*

$$\varphi(x) = x f(x), \qquad (\varphi(0+) = A, \qquad \varphi(0) = B)$$

este cu variația mărginită pe $[0, \pi]$, atunci seria Fourier

$$b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \ldots + b_n \sin nt + \ldots$$

atașată funcției $f(x)$ are coeficienții b_n mărginiți.

Demonstraţie. Întrucît funcţia $xf(x)$ este mărginită pe $[0, \pi]$, urmează că toate integralele

$$\int_0^{\pi} \sin mt\, f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

există şi sînt finite; în adevăr, funcţia

$$x\, f(x) \cdot \frac{\sin mx}{x} = \sin mx\, f(x)$$

este integrabilă pe $(0, \pi)$, fiind produsul între o funcţie mărginită şi o funcţie integrabilă.

Funcţia $\varphi(x)$ este cu variaţia mărginită pe $[0, \pi]$, deci putem scrie

$$\varphi(x) = \varphi(0) + P(x) - N(x),$$

unde

$$P(x) = \frac{1}{2}[V(x) + \varphi(x) - \varphi(0)],$$

$$N(x) = \frac{1}{2}[V(x) - \varphi(x) + \varphi(0)],$$

sînt crescătoare şi pozitive; $V(x)$ reprezintă variaţia totală a lui φ pe $[0, x]$. Avem

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mt f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [\varphi(0) + P(t) - N(t)] \frac{\sin mt}{t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\pi}\, \varphi(0) \int_0^{\pi} \frac{\sin mt}{t}\, \mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P(t) \frac{\sin mt}{t}\, \mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} N(t) \frac{\sin mt}{t}\, \mathrm{d}t.$$

Aplicăm a doua formulă a mediei şi obţinem

$$b_m = \frac{2\varphi(0)}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin mt}{t}\, \mathrm{d}t + \frac{2}{\pi} P(\pi) \int_a^{\pi} \frac{\sin mt}{t}\, \mathrm{d}t - \frac{2}{\pi} N(\pi) \int_b^{\pi} \frac{\sin mt}{t}\, \mathrm{d}t$$

însă

$$\left| \int_c^{\pi} \frac{\sin mt}{t}\, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_{mc}^{m\pi} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u \right| < \pi$$

de unde rezultă imediat că şirul (b_m) este mărginit.

Teorema este demonstrată.

Folosind acelaşi raţionament şi aceleaşi date se poate demonstra următoarea

TEOREMĂ. *Dacă funcţia*

$$\varphi(x) = x^{\alpha+1} f(x), \ \alpha < 1, \ (\varphi(0+) = A, \ \varphi(0) = B)$$

este cu variaţia mărginită pe $[0, \pi]$, *atunci coeficienţii* b_n *ai seriei Fourier*

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$

ataşată funcţiei $f(x)$ *satisfac inegalităţi de forma*

$$|b_n| \leqslant M n^{\alpha}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Primită la redacţie la 26 iunie 1964

ASUPRA UNEI PROBLEME A LUI L. I. VOLKOVÎSKII 1)

DE

CABIRIA ANDREIAN CAZACU

Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, nr. 47, Bucureşti

În această lucrare stabilim o metodă generală de a rezolva diferite probleme extremale relativ la omeomorfismele cvasiconforme, ale căror caracteristici satisfac anumite condiţii. Folosim în acest scop o formulă relativă la lungimea extremală, pe care am demonstrat-o la Colocviul de Analiză şi teoria funcţiilor din Bucureşti, 1962.

Definind reprezentările cvasiconforme, H. Grötzsch a rezolvat pentru această clasă de omeomorfisme diverse probleme extremale ale teoriei reprezentărilor conforme [1] — [3]. De atunci un mare număr de matematicieni au aprofundat sub diferite aspecte proprietăţile extremale ale reprezentărilor cvasiconforme [4]. Scopul acestei lucrări este de a da o soluţie problemelor extremale de tipul propus de L. I. Volkovîskii (a se vedea prefaţa lui B. V. Sabat în [5], p. 7), probleme relative la omeomorfisme cvasiconforme ale căror caracteristici satisfac anumitor condiţii.

§ 1. ENUNŢUL PROBLEMEI. PROPRIETĂŢI AUXILIARE ALE REPREZENTĂRILOR CVASICONFORME

1.1. Fie $\mathcal{R}$ şi R două suprafeţe riemanniene (bordate sau nu) şi Q o constantă, $1 \leqslant Q < +\infty$. Un omeomorfism $f: \mathcal{R} \to R$, care conservă orientarea, va fi numit Q-cvasiconform 2) dacă, pentru orice patrulater 3)

---

1) Versiunea în l. franceză a apărut în Rev. Roum. de Math. Pures et Appliq., **10**, *1*, 43–63 (1965).

2) În această lucrare, vom numi cvasiconform un omeomorfism Q-cvasiconform, indiferent de valoarea Q. (Asupra definiţiei reprezentărilor cvasiconforme, a se vedea [4], Cap. 4, p. 78).

3) Printr-un patrulater vom înţelege un domeniu jordanian (închis) pe frontiera căruia se disting patru puncte diferite — vîrfurile. Ori de cîte ori vom considera un omeomorfism al unui patrulater pe altul, vom presupune că vîrfurile se corespund.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 499–518, BUCUREŞTI, 1965.

$\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ de modul $\mathcal{M}$, modulul M al patrulaterului $f(\mathcal{P})$ verifică inegalitatea lui H. Grötzsch [1] : $M \leqslant Q\,\mathcal{M}$.

Exprimat cu ajutorul parametrilor locali z pe $\mathcal{R}$ şi w pe R, omeomorfismul f se scrie $w = w(z)$ şi în orice A-punct 4) z, adică a.p. în $\mathcal{R}$ 5), transformă în cercuri infinitezimale cu centrul w o familie de elipse infinitezimale omotetice cu centrul în z (numite elipse caracteristice). Această familie de elipse este dată prin caracteristicile lui M. A. Lavrentiev [7] : a) raportul axelor $p(z) \geqslant 1$ şi b) dacă $p > 1$, direcţia axei mari, definită prin unghiul $\alpha(z)$, pe care ea îl formează cu o direcţie $\tau(z)$, unghi luat în sens direct, plecînd de la $\tau(z)$, $(0 \leqslant \alpha < \pi)$. În aplicaţiile noastre, $\tau(z)$ va reprezenta tangenta (bine determinată a.p. în $\mathcal{R}$) la o curbă $\mathcal{K}$ a unei familii 6), care acoperă $\mathcal{R}$ simplu şi fără lacune. Funcţiile $p(z)$ şi $\alpha(z)$ sînt definite a.p. în $\mathcal{R}$, măsurabile şi independente de parametri.

Omeomorfismul cvasiconform f este soluţia generalizată a unui sistem de ecuaţii Beltrami [6], [8], [9]. Fie z un A-punct al lui $w(z) = u(z) + iv(z)$. Dacă $p(z) > 1$, vom nota prin $\theta(z) \in [0, \pi)$ argumentul direcţiei axei mari al elipselor caracteristice (cînd $\varphi(z)$ este argumentul direcţiei $\tau(z)$ de mai sus $\theta = \varphi + \alpha \pmod{\pi}$).

Funcţia $w = w(z)$ verifică ecuaţiile

$$au_x + bv_y = v_y,\quad bu_x + cu_y = -v_x \tag{1.1}$$

în care $a = p\cos^2\theta + p^{-1}\sin^2\theta$, $b = (p - p^{-1})\cos\theta\sin\theta$, $c = p\sin^2\theta + p^{-1}\cos^2\theta$, $ac - b^2 = 1$. Sub forma complexă, (1.1) se scrie

$$w_{\bar z} = \mu w_z,\quad \mu = -\frac{p-1}{p+1}\,\mathrm{e}^{2i\theta}, \tag{1.2}$$

$\mu(z)\,\mathrm{d}z^{-1}\,\mathrm{d}\bar z$ fiind o diferenţială invariantă în raport cu schimbarea parametrilor pe $\mathcal{R}$ 7). Reciproc, fie $\mu(z)\,\mathrm{d}z^{-1}\,\mathrm{d}\bar z$ o diferenţială pe $\mathcal{R}$, $\mu(z)$ fiind o funcţie măsurabilă definită a.p. în domeniul parametrului z şi astfel că $p = \dfrac{1+|\mu|}{1-|\mu|} \leqslant Q$, ($Q$ fiind o constantă din intervalul $[1, +\infty)$). Un omeomorfism $f : \mathcal{R} \to R$ care verifică (1.2) în sens generalizat, este Q-cvasiconform.

Uneori se definesc omeomorfismele cvasiconforme prin proprietatea lor de a transforma a.p. în $\mathcal{R}$ elipse infinitezimale cu centrul în z şi caracteristici : $p(z) \leqslant Q$, $\theta(z)$ (dacă $p(z) > 1$), în elipse infinitezimale cu centrul în w şi caracteristici : $p_1(z) \geqslant 1$ şi $\leqslant Q_1$ $\theta_1(z)$ (dacă $p_1(z) > 1$), p_1 fiind raportul axelor şi θ_1 argumentul direcţiei axei mari în raport cu

---

4) Conform [6], întrebuinţăm denumirea A-punct a lui $w(z)$ pentru orice punct z, în care $w(z)$ admite o diferenţială totală în sensul Stolz-Fréchet şi are jacobianul $J_{w/z}(z)$ nenul.

5) Atît măsura cît şi integralele care intervin sînt luate în sensul lui Lebesgue.

6) Vom nota prin aceeaşi literă curbele şi familia de curbe, cu excepţia cazului în care curbele familiei depind de un parametru ; atunci familia va fi notată fără acest parametru.

7) Dacă $p(z) = 1$, sistemul (1.1) sau (1.2) devine sistemul Cauchy-Riemann.

axa reală pozitivă a parametrului w iar Q şi Q_1 două constante din $[1, +\infty)$, [10], [6]. În acest caz, f verifică în orice A-punct z un sistem eliptic mai general

$$au_x + (b + b_1)\, u_y = a_1 v_y,$$

$$(b - b_1)\, u_x + cu_y = -\, a_1 v_x, \tag{1.3}$$

unde a, b, c au semnificaţia de mai sus şi a_1, b_1, c_1 se obţin înlocuind p şi θ resp. prin p_1 şi θ_1 : $a_1 = p_1 \cos^2 \theta_1 + p_1^{-1} \sin^2 \theta_1$ etc.

Sistemul (1.3) se scrie sub forma complexă

$$w_{\bar z} = \mu w_z + \mu_1 \overline{w_z}, \tag{1.4}$$

unde $\mu(z) = -\dfrac{a - c + 2bi}{a + c + a_1 + c_1} = -\dfrac{(p - p^{-1})\, e^{2i\theta}}{p + p^{-1} + p_1 + p_1^{-1}}$ şi $\mu_1(z) =$

$$= \frac{a_1 - c_1 + 2\, b_1 i}{a + c + a_1 + c_1} = \frac{(p_1 - p_1^{-1})\, e^{2i\theta_1}}{p + p^{-1} + p_1 + p_1^{-1}},\ [9].$$

La o schimbare de parametru pe $\mathcal{R}$, $\mu(z)\, dz^{-1}\, d\bar z$ este o diferenţială, în timp ce $\mu_1(z)$ un scalar (o funcţie). Invers, la o schimbare de parametru pe R, $\mu\, [z(w)]$ este un scalar, iar $\mu_1\, [z(w)]\, dw^{-1}\, d\bar w$ o diferenţială. În aplicaţiile noastre, vom avea pe R un sistem distinct de parametri w bine determinat, dar menţionăm că dacă se efectuează reprezentările conforme $z \to Z$ şi $w \to W$, ecuaţia (1.4) devine

$$W_{\bar Z} = \mu \frac{d\bar z}{d\bar Z} \frac{dZ}{dz}\, WZ + \mu_1 \frac{dW}{dw} \frac{d\bar w}{d\bar W}\, \overline{W_Z}, \tag{1.5}$$

care este eliptică cvasiliniară.

Inegalităţile $p \leqslant Q$ şi $p_1 \leqslant Q_1$, unde Q şi Q_1 sînt două constante $1 \leqslant Q$, $Q_1 < +\infty$, verificate a.p. în $\mathcal{R}$, implică caracterul uniform eliptic al sistemului (1.3) sau (1.4) care se exprimă prin existenţa unei constante q_0, astfel că $|\mu| + |\mu_1| \leqslant q_0 < 1$ a.p. în $\mathcal{R}$. Orice omeomorfism f, soluţie generalizată a sistemului (1.4), este $Q\, Q_1$-cvasiconform [11].

Un omeomorfism f care verifică în sens generalizat (1.1) respectiv (1.3) se numeşte omeomorfism cvasiconform cu o pereche, respectiv cu două perechi de caracteristici [8]).

Se consideră de asemenea cazul în care caracteristicile p, θ ; p_1, θ_1 depind de doi parametri z şi w ; sistemul (1.4) corespunzător este cvasiliniar, μ şi μ_1 avînd comportarea indicată mai sus în raport cu schimbarea parametrilor.

---

[8]) Evident, orice omeomorfism cu o pereche de caracteristici p, θ poate fi conceput ca un omeomorfism cu două perechi de caracteristici p, θ şi 1.

1.2. În cele ce urmează vom utiliza funcţia definită a.p. în $\mathcal{R}$

$$d_{\mathcal{K},f}(z) = \left|\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}\right|^{2}_{\mathcal{K}} J_{w/z}(z) \tag{1.6}$$

pentru orice omeomorfism cvasiconform f, şi familie de curbe $\mathcal{K}$ (ca mai sus), $\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{\mathcal{K}}$ fiind modulul derivatei lui $w(z)$ în direcţia $\tau(z)$ tangentă la $\mathcal{K}$ şi $J_{w/z}$ iacobianul lui $w = w(z)$, [12]. Evident, dacă f are caracteristicile p şi α în raport cu $\mathcal{K}$

$$d_{\mathcal{K},f}(z) = p^{-1}(z) \cos^2 \alpha(z) + p(z) \sin^2 \alpha(z), \tag{1.7}$$

în timp ce dacă f este definit prin două perechi de caracteristici: p, α în raport cu $\mathcal{K}$ pe $\mathcal{R}$ şi p_1, α_1 în raport cu familia $K = f(\mathcal{K})$ pe R,

$$d_{\mathcal{K},f}(z) = \frac{p^{-1}(z)\cos^2 \alpha(z) + p(z)\sin^2 \alpha(z)}{p_1^{-1}(z)\cos^2 \alpha_1(z) + p_1(z)\sin^2 \alpha_1(z)}. \tag{1.8}$$

Iată problemele extremale pe care le vom studia în această lucrare:

Se consideră o configuraţie geometrică, dată pe suprafaţa riemanniană $\mathcal{R}$ şi caracterizată printr-o mărime $\mathcal{M}$, care se exprimă cu ajutorul lungimii extremale a unei familii de curbe. Fie $\mathcal{F}_P$ familia omeomorfismelor cvasiconforme $f: \mathcal{R} \to R$, $f(\mathcal{R}) = R$, ale cărei caracteristici satisfac anumite relaţii P, astfel că:

1) $\mathcal{F}_P$ să fie mulţime nenulă şi

2) Pentru oricare familie de curbe $\mathcal{K}$ dată pe $\mathcal{R}$ ca mai sus, există un omeomorfism $f_{\mathcal{K}} \in \mathcal{F}_P$, pentru care $d_{\mathcal{K},f_{\mathcal{K}}}(z) = \inf\limits_{f \in \mathcal{F}_P} d_{\mathcal{K},f}(z)$ resp. $d_{\mathcal{K},f_{\mathcal{K}}}(z) = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}_P} d_{\mathcal{K},f}(z)$ a.p. în $\mathcal{R}$. Se caută omeomorfismul extremal, care face mărimea M, corespunzătoare configuraţiei imagine de pe R, minimum sau maximum în familia $\mathcal{F}_P$.

În § 3 şi § 4 vom rezolva două probleme cuprinse în acest enunţ general, stabilind mai întîi unele propoziţii auxiliare asupra reprezentărilor cvasiconforme la punctul 1.3 şi apoi asupra lungimii extremale ponderate în § 2 [13] – [14].

Remarcăm că ori de cîte ori vom utiliza o familie $\mathcal{F}_P$, va interveni numai una din relaţiile condiţiei 2) şi numai în teoremele care dau condiţiile necesare ca un omeomorfism să fie extremal. Dacă relaţia utilizată determină a.p. caracteristicile p şi α în raport cu $\mathcal{K}$, existenţa lui $f_{\mathcal{K}}$ rezultă din teorema de existenţă a lui M. A. Lavrentiev sub forma dată de L. Bers [8].

1.3. *Proprietăţi ale reprezentărilor cvasiconforme.* Fie $z = z(\zeta)$ o reprezentare cvasiconformă a unui dreptunghi $\mathfrak{R} = \{\zeta,\ \xi' \leqslant \xi \leqslant \xi''$,

$\eta' \leqslant \eta \leqslant \eta''\}$ pe un patrulater $\mathcal{R}$, care poate fi prelungită pînă la un omeomorfism cvasiconform al unei vecinătăţi a lui $\mathfrak{R}$ pe o vecinătate a lui $\mathcal{R}$. Se ştie că $\zeta\,(z)$ este de asemenea o reprezentare cvasiconformă.

1°. Aproape pentru toţi $\eta \in (\eta', \eta'')$, $z\ (\xi + i\eta)$ considerată ca funcţie de variabila ξ pe segmentul $\lambda_\eta : \eta = \text{const.}$ este A.C. (absolut continuă) şi imaginea $\mathcal{L}_\eta = z\ (\lambda_\eta)$ este o curbă rectificabilă, [4], p. 78. Fie ds elementul de arc pe $\mathcal{L}_\eta$ şi $s\ (\xi)$ lungimea arcului de pe $\mathcal{L}_\eta$ cuprins între punctele $z\ (\xi' + i\eta)$ şi $z\ (\xi + i\eta)$[9]. Funcţia $s\ (\xi)$ este A.C. şi strict crescătoare. Mai mult, aproape pentru toţi $\eta \in (\eta', \eta'')$, $s'\ (\xi) > 0$ a.p. pe λ_η, căci aproape toate punctele din $\mathfrak{R}$ sînt A-puncte pentru $z\ (\zeta)$ şi într-un A-punct derivata lui $z\ (\zeta)$ într-o direcţie oarecare este nenulă, iar $s'\ (\xi) = |z_\xi|$. Prin urmare, după o propoziţie a lui M. Zareţki, funcţia inversă $\xi\,(s)$ este de asemenea A.C., strict crescătoare.

2°. Fie η o valoare, astfel că $s\ (\xi)$ şi $\xi\,(s)$ sînt A.C.

Dacă $\mathcal{F}\ (\xi)$ resp. $F\ (s)$ este o funcţie definită a.p. pe λ_η (resp. $\mathcal{L}_\eta$)[10], finită şi măsurabilă, atunci

$$\int_{\lambda_\eta} \mathcal{F}\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathcal{L}_\eta} \mathcal{F}\ [\xi\,(s)]\ \xi'\,(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.9}$$

resp.

$$\int_{\mathcal{L}_\eta} F(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\lambda_\eta} F\ [s\,(\xi)]\, s'\,(\xi)\,\mathrm{d}\,(\xi), \tag{1.10}$$

ori de cîte ori una dintre integralele (1.9), sau (1.10), există[11] [15] (teorema 9, p. 318).

Vom utiliza de asemenea inegalitatea lui Schwarz : Fie $f\,(z)$ şi $g\,(z)$ două funcţii definite a.p. pe $\mathcal{L}_\eta$ şi să presupunem că $\int_{\mathcal{L}_\eta} f^2\,(z)\,\mathrm{d}s$, $\int_{\mathcal{L}_\eta} g^2\,(z)\,\mathrm{d}s$ sînt finite. Atunci

$$\left(\int_{\mathcal{L}_\eta} f\,(z)\, g\,(z)\,\mathrm{d}s\right)^2 \leqslant \int_{\mathcal{L}_\eta} f^2\,(z)\,\mathrm{d}s \int_{\mathcal{L}_\eta} g^2\,(z)\,\mathrm{d}s, \tag{1.11}$$

egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă $f\,(z)$ şi $g\,(z)$ sînt proporţionali a.p. pe $\mathcal{L}_\eta$.

3°. Omeomorfismul $z = z\,(\zeta)$ este bimăsurabil şi dacă $H\,(z)$ este o funcţie definită a.p. în $\mathcal{R}$, finită şi măsurabilă, atunci

$$\iint_{\mathcal{R}} H\,(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathfrak{R}} H\ [z\,(\zeta)]\ J_{z/\zeta}\,(\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{1.12}$$

---

[9] Pentru simplificarea notaţiei, vom scrie $s\ (\xi)$ în loc de $s\ (\xi, \eta)$, deşi ne referim la lungimea arcelor pe $\mathcal{L}_\eta$.

[10] Măsura pe $\mathcal{L}_\eta$ este luată în raport cu parametrul s.

[11] Ori de cîte ori spunem că o integrală există, înţelegem că există şi este finită.

unde $J_{z/\zeta}$ este determinantul funcţional al lui $z = z(\zeta)$, ori de cîte ori una din integralele (1.12) există [15] (teorema 3, p. 273 şi teorema 3, p. 413).

4°. Fie $H(z)$ o funcţie definită a.p. în $\mathcal{R}$, finită şi sumabilă pe $\mathcal{R}$. Atunci

$$\iint_{\mathcal{R}} H(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\eta'}^{\eta''} \mathrm{d}\eta \int_{\mathcal{L}_\eta} H(z)\,\frac{\mathrm{d}s}{\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}}, \tag{1.13}$$

unde $\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n} = |\operatorname{grad}\eta|$ este derivata lui η în direcţia normală la $\mathcal{L}_\eta$.

În adevăr, după 3° şi teorema lui Fubini, obţinem

$$\iint_{\mathcal{R}} H(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\eta'}^{\eta''} \mathrm{d}\eta \int_{\lambda_\eta} H[z(\zeta)]\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\right)^{-1} \mathrm{d}\xi$$

ţinînd seama că a.p. în $\mathcal{R}$

$$J_{\zeta/z}(z) = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}. \tag{1.14}$$

Putem deci aplica 2° a.p. în intervalul (η', η'') şi scrie

$$\int_{\lambda_\eta} H[z(\zeta)]\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\right)^{-1} \mathrm{d}\xi = \int_{\mathcal{L}_\eta} H(z)\,\frac{\mathrm{d}s}{\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}},$$

de unde rezultă (1.13).

5°. Fie $H(z)$ o funcţie definită a.p. în $\mathcal{R}$, finită, nenegativă şi măsurabilă ; dacă integrala

$$\int_{\eta'}^{\eta''} \mathrm{d}\eta \int_{\mathcal{L}_\eta} H(z)\,\frac{\mathrm{d}s}{\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}} \tag{1.15}$$

este finită, atunci are loc egalitatea (1.13).

În adevăr, existenţa integralei (1.15) implică existenţa $\displaystyle\int_{\mathcal{L}_\eta} H(z)\,\frac{\mathrm{d}s}{\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}}$ a.p. în (η', η''). Din 2° şi (1.14) deducem

$$\int_{\mathcal{L}_\eta} H(z)\,\frac{\mathrm{d}s}{\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}} = \int_{\lambda_\eta} H[z(\zeta)]\,J_{z/\zeta}(\zeta)\,\mathrm{d}\xi$$

a.p. în (η', η''), deci există

$$\int_{\eta'}^{\eta''} \mathrm{d}\eta \int_{\lambda_\eta} H[z(\zeta)]\,J_{z/\zeta}(\zeta)\,\mathrm{d}\xi.$$

Teorema lui Tonelli şi propoziţia 3° asigură (1.13).

6°. Fie $w = w(z)$ un alt omeomorfism cvasiconform al patrulaterului $\mathcal{R}$ pe un patrulater R (cu corespondenţa vîrfurilor), care se poate prelungi la un omeomorfism cvasiconform a unei vecinătăţi a lui $\mathcal{R}$ pe o vecinătate a lui R.

Fie $m(E)$ măsura Lebesgue superficială sau liniară în raport cu lungimea arcelor, după context, a unei mulţimi E. Din observaţiile precedente, rezultă :

6°.1. Cu excepţia unei mulţimi $E \subset \mathfrak{R}$, cu $m(E) = 0$, omeomorfismele $z(\zeta)$ şi $w[z(\zeta)]$ sînt total diferenţiabile cu iacobianul $J_{z/\zeta}$ resp. $J_{w/\zeta}$ nenul.

6°.2. Cu excepţia unei mulţimi $e^* \subset (\eta', \eta'')$ cu $m(e^*) = 0$: 1) curbele $\mathcal{L}_\eta$ şi $w(\mathcal{L}_\eta) = L_\eta$ sînt rectificabile, 2) funcţiile care exprimă lungimea arcelor lui $\mathcal{L}_\eta$ şi a lui L_η corespunzătoare segmentului cu originea $\xi' + i\eta$ şi extremitatea $\xi + i\eta$ a lui λ_η, pe care le vom nota $s_z(\xi)$ şi $s_w(\xi)$, sînt A.C. de ξ şi 3) inversele lor au aceeaşi proprietate; deci funcţiile $s_z(s_w)$ şi $s_w(s_z)$ sînt A.C. pe intervalul de variaţie corespunzător.

6°.3. Dacă $\mathcal{E}$ este o mulţime de măsură nulă a lui $\mathcal{R}$, atunci $m(\mathcal{E} \cap \mathcal{L}_\eta) = 0$, exceptînd o mulţime $e_{\mathcal{E}} \subset (\eta', \eta'')$, de măsură nulă. Reciproc, fie $\mathcal{E}$ o mulţime măsurabilă a lui $\mathcal{R}$, astfel încît cu excepţia unei mulţimi $e_{\mathcal{E}} \subset (\eta', \eta'')$ de măsură nulă, $m(\mathcal{E} \cap \mathcal{L}_\eta) = 0$, rezultă $m(\mathcal{E}) = 0$.

7°. Să presupunem acum că $z = z(\zeta)$ şi $w = w(z)$ sînt omeomorfisme cvasiconforme a lui $\mathfrak{R}$ pe $\mathcal{R}$ resp. a lui $\mathcal{R}$ pe R. Atunci, aproape pentru toţi η din (η', η''), curbele $\mathcal{L}_\eta$ şi L_η sînt local rectificabile, şi, alegînd un punct arbitrar $\xi_0 \in (\xi', \xi'')$,vom nota $s(\xi)$, sau dacă este necesar $s_z(\xi)$, lungimea arcului din $\mathcal{L}_\eta$ cu originea $z(\xi_0 + i\eta)$ şi extremitatea $z(\zeta)$, ($s(\xi) \gtreqless 0$ după cum $\xi \gtreqless \xi_0$ şi analog $s_w(\xi_0)$ lungimea arcului din L_η, cu originea $w[z(\xi_0 + i\eta)]$ şi extremitatea $w[z(\zeta)]$. Cu aceste notaţii, rezultatele din 1° şi 6°.2 devin : aproape pentru orice $\eta \in (\eta', \eta'')$, $s(\xi)$ şi inversa lui, resp. $s_z(\xi)$, $s_w(\xi)$ şi inversele lor, deci $s_z(s_w)$ şi $s_w(s_z)$ sînt locale A.C. (adică A.C. pe orice subinterval compact din interiorul intervalului lor de variaţie respectiv). Celelalte propoziţii 2° — 5°, 6°. 1 şi 6°. 3 se aplică fără nici o schimbare (cum se demonstrează printr-o trecere la limită cu ajutorul unei exhaustiuni a lui $\mathfrak{R}$ sau $\mathcal{R}$).

7°.1. Propoziţiile de la punctul 7° se extind evident la cazul în care se consideră o reuniune finită de dreptunghiuri $\mathfrak{R} = \bigcup\limits_{1}^{N} \mathfrak{R}_\sigma$, $\mathfrak{R}_\sigma = \{\zeta,\ \xi_\sigma \leqslant \xi \leqslant \xi_{\sigma+1},\ \eta' \leqslant \eta \leqslant \eta''\}$, $\xi' = \xi_1 < \dots < \xi_{N+1} = \xi''$ şi omeomorfismul $z = z(\xi)$ a cărui restricţie la $\mathfrak{R}_\sigma$: $z = z_\sigma(\zeta)$ este o reprezentare cvasiconformă a lui $\mathfrak{R}_\sigma$ pe un patrulater $\mathcal{R}_\sigma$, $\overset{0}{\mathcal{R}}_\sigma$ fiind presupuse două cîte două disjuncte. Se notează cu $\mathcal{R} = \bigcup\limits_{1}^{N} \mathcal{R}_\sigma$, cu $\lambda_{\eta\sigma}$ segmentul lui $\mathfrak{R}_\sigma$ de ordonată η, cu $\lambda_\eta = \bigcup\limits_1^N \lambda_{\eta\sigma}$ şi cu $\mathcal{L}_\eta = z(\lambda_\eta) = \bigcup\limits_1^N \mathcal{L}_{\eta\sigma}$, unde $\mathcal{L}_{\eta\sigma} = z_\sigma(\lambda_{\eta\sigma})$ 12). Omeomorfismul $w = w(z)$ are o definiţie analogă.

7°. 2. Aceeaşi observaţie, dacă $\mathcal{R}_\sigma = \{\zeta,\ \xi' \leqslant \xi \leqslant \xi'',\ \eta_\sigma \leqslant \eta \leqslant \eta_{\sigma+1}\}$, $\eta' = \eta_1 < \cdots < \eta_{N+1} = \eta''$.

7°. 3. Să remarcăm de asemenea că se pot formula toate aceste propoziţii plecînd de la segmentele $\gamma_\xi : \xi = \text{const}$.

§ 2. PROPOZIŢII AUXILIARE RELATIVE LA LUNGIMEA EXTREMALĂ

2.1. Vom utiliza noţiunea de lungime extremală cu pondere [16] sub forma următoare :

Fie $\pi(z)$ o funcţie măsurabilă, definită a.p. într-un domeniu G al suprafeţei riemanniene $\mathcal{R}$, $\pi \in (0, +\infty)$ şi $\mathcal{K}$ o familie de curbe local rectificabile în G. Dacă există funcţii $\rho \geqq 0$ definite a.p. în G, local sumabile pe fiecare curbă $\mathcal{K}$, cu $\int\limits_{\mathcal{K}} \rho\, ds \geqq 1$ şi astfel că $\pi\rho^2$ să fie sumabile pe G, adică $A_{\pi,\rho}(G) = \iint\limits_G \pi\rho^2\, dx\, dy < +\infty$, 13) lungimea extremală cu pondere π a familiei $\mathcal{K}$ este

$$l_\pi(\mathcal{K}) = (\inf_\rho (A_{\pi,\rho}(G))^{-1}. \tag{2.1}$$

În cazul contrar,

$$l_\pi(\mathcal{K}) = 0.$$

Dacă familia $\mathcal{K}$ este formată dintr-o subfamilie $\mathcal{K}^1$ de curbe local rectificabile şi o altă subfamilie $\mathcal{K}^2$ arbitrară, astfel încît mulţimile E_j ale punctelor situate pe curbele $\mathcal{K}^j$ $(j = 1, 2)$ sînt disjuncte, aria lui E_2 este nulă şi fiecare punct al lui E_2 aparţine unei curbe $\mathcal{K}^2$, punem, prin definiţie,

$$l_\pi(\mathcal{K}) = l_\pi(\mathcal{K}^1).\ ^{14)}$$

---

12) Pentru aproape orice $\eta \in (\eta', \eta'')$, funcţia $s(\xi)$ va fi definită pe fiecare $\lambda_{\eta\sigma}$ cu ajutorul unui $\xi_{0\sigma} \in (\xi_\sigma, \xi_{\sigma+1})$ şi va fi local A. C. în $\bigcup\limits_\sigma (\xi_\sigma, \xi_{\sigma+1})$ etc.

13) O astfel de metrică ρds va fi numită admisă (pentru lungimea extremală cu pondere π a lui $\mathcal{K}$).

14) În studiul omeomorfismelor cvasiconforme nu ne putem mărgini la cazul curbelor local rectificabile fiindcă imaginea unei astfel de curbe poate să nu aibă aceeaşi proprietate. Scopul modificării făcute asupra definiţiei obişnuite a lungimii extremale constă în faptul că ne permite să formulăm simplu propoziţii asupra unei familii $\mathcal{K}$ de mai sus, în timp ce dacă ne-am fi limitat la definiţia clasică, am fi formulat propoziţii pentru o subfamilie $\mathcal{K}^1$ din $\mathcal{K}$, neglijînd o subfamilie $\mathcal{K}^2$.

Lungimea extremală a unei familii corespunde ponderii 1 și va fi notată $l(\mathcal{K})$. Evident, dacă $\pi(z) = \text{const.}$ $l_\pi(\mathcal{K}) = \pi^{-1}\, l(\mathcal{K})$ și dacă $0 < k_0 \leqslant \pi(z) \leqslant k_1 < +\infty$, ($k_0$ și k_1 fiind constante),

$$k_1^{-1}\, l(\mathcal{K}) \leqslant l_\pi(\mathcal{K}) \leqslant k_0^{-1}\, l(\mathcal{K}). \tag{2.2}$$

Mai general, rezultă din definiția (2.1) următoarea *proprietate de monotonie*:

Fie $\pi_1(z)$ și $\pi_2(z)$ două funcții măsurabile, definite a.p. în G, finite și nenegative; dacă $\pi_1(z) \geqslant \pi_2(z)$ a.p. în G, atunci $l_{\pi_1}(\mathcal{K}) \leqslant l_{\pi_2}(\mathcal{K})$. Mai mult, dacă există pentru $l_{\pi_1}(\mathcal{K})$ o metrică extremală $\widetilde{\rho}(z)\,ds$, (adică astfel încît $l_{\pi_1}^{-1}(\mathcal{K}) = A_{\pi_1, \widetilde{\rho}}(G)$), egalitatea $l_{\pi_1}(\mathcal{K}) = l_{\pi_2}(\mathcal{K})$ implică $\pi_1(z) = \pi_2(z)$ a.p. în G, unde $\widetilde{\rho}(z) \neq 0$.

2.2. *Module.* Fie $\mathfrak{R}$ o suprafață riemanniană bordată și compactă. Să descompunem frontiera lui $\mathfrak{R}$ în grupe de curbe Jordan disjuncte $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Modulul $\mathfrak{M}$ al lui β_N în raport cu $\mathfrak{R}$, β_0 și β_ν ($\nu = 1, \ldots, \ldots, N-1$) este integrala lui Dirichlet $D(U)$ a funcției U armonică în $\mathfrak{R}$, zero pe β_0, constantă pe fiecare β_j ($j = 1, \ldots, N$) și astfel încît funcția armonică conjugată V să aibă perioadele $\int_{\beta_\nu} dV = 0$ [15]) și $\int_{\beta_N} dV = 1$. Funcția U se obține rezolvînd o problemă Dirichlet generalizată în sensul prof. C. Iacob, [17] — [20].

Modulul este egal cu lungimea extremală a familiei de arce sau de reuniuni finite de arce din $\mathfrak{R}$, care unesc β_0 cu β_N sau β_0 cu β_{ν_1}, β_{ν_1} cu $\beta_{\nu_2}, \ldots$ β_{ν_s} cu β_N, [21], în particular, el este egal cu lungimea extremală a familiei liniilor de nivel $\lambda = \{\lambda_V\}$ a funcției V. La fel modulul este egal cu inversa lungimii extremale a familiei reuniunilor finite de curbe Jordan, care separă β_0 și β_N pe $\mathfrak{R}$ [18] și, în particular, a familiei de linii de nivel $\gamma = \{\gamma_U\}$ a funcției U:

$$\mathfrak{M} = l(\lambda) = l^{-1}(\gamma). \tag{2.3}$$

Liniile de nivel γ_U ($0 \leqslant U \leqslant \mathfrak{M}$) și λ_V ($0 \leqslant V \leqslant 1$) acoperă simplu și fără lacune R.

Cu excepția unui număr finit de linii care trec prin zerourile grad U, γ_U constă dintr-una sau într-un număr finit de curbe Jordan, care separă β_0 și β_N, în timp ce λ_V constă dintr-un arc Jordan sau dintr-un număr finit de arce Jordan care unesc succesiv β_0 cu β_{ν_1}, β_{ν_1} cu $\beta_{\nu_2}, \ldots$ β_{ν_j} cu β_N. Liniile γ_U și λ_V care trec prin zerourile grad U, și dacă este necesar o linie λ_V auxiliară, descompun $\mathfrak{R}$ într-un număr finit de domenii $\mathfrak{R}_{jk}$, unde γ_U și λ_V formează un sistem ortogonal de coordonate curbilinii: $U_j \leqslant U \leqslant U_{j+1}$, $V_k \leqslant V \leqslant V_{k+1}$, $j = 1, \ldots, N_1$; $k = 1, \ldots, N_2$; $U_1 = 0$, $U_{N_1+1} = U(\beta_N) = \mathfrak{M}$, $V_0 = 0$, $V_{N_2+1} = 1$ (la o alegere convenabilă a constantei, care determină V în fiecare $\mathfrak{R}_{jk}$). Convenim să numim $\mathfrak{R}_{jk}$ dreptunghiuri, fiindcă sînt reprezentați prin $U + iV$ pe dreptunghiuri [16]).

---

[15]) Evident, curbele β_ν și condiția corespunzătoare $dV = 0$ apar numai dacă $N > 1$.

[16]) $U + iV$ poate fi luat ca parametru local peste tot pe $\mathfrak{R}$ cu excepția unui număr finit de puncte, zerourile grad U.

2.3. *Distanța extremală.* Un alt exemplu de curbe cu aceleași proprietăți este dat de liniile de nivel ale funcției armonice și ale conjugatei sale armonice, care intervin în definiția distanței extremale între două mulțimi finite și disjuncte de arce sau de curbe pe frontiera unei suprafețe riemanniene bordate și compacte (a se vedea [20], Cap. IV, 13).

2.4. *Familii modulare și cvasimodulare.* Vom numi *modulară* o familie $\varkappa = \{\varkappa_t\}$, $(t' \leqslant t \leqslant t'')$ formată de liniile de nivel ale unei funcții armonice t cu diferențială uniformă pe $\mathfrak{R}$ și astfel încît un număr finit din aceste linii și din liniile de nivel ale funcției armonice conjugate descompun $\mathfrak{R}$ într-un număr finit de dreptunghiuri în care aceste două familii constituie un sistem de coordonate ortogonale. [17]) Familiile $\gamma = \{\gamma_U\}$ și $\lambda = \{\lambda_V\}$, care intervin în definiția modulului și cele de la distanța extremală, sînt un exemplu.

Fie $\varphi : \mathfrak{R} \to \mathcal{R}$ un omeomorfism cvasiconform între suprafețele riemanniene bordate și compacte $\mathfrak{R}$ și $\mathcal{R}$. Dacă $\varkappa = \{\varkappa_t\}$ este o familie modulară pe $\mathfrak{R}$, vom numi $f(\varkappa) = \mathcal{K}$ imagine cvasiconformă a familiei modulare sau familie *cvasimodulară.* Cînd vom considera o astfel de familie $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_t\}$, t va avea semnificația de mai sus: $\varkappa_t$ va fi linie de nivel a funcției armonice care definește familia $\varkappa$, $K_t = f(\varkappa_t)$ și t va fi numit parametrul familiei modulare. Evident, $\varkappa$ și t sînt determinați abstracție făcînd de o reprezentare conformă.

Observație. Propozițiile de la punctul 1.3 rămîn valabile pentru familii cvasimodulare, cum rezultă din definiția lor și din 1.3, 7°; dacă $\mathcal{K}$, de exemplu, înlocuiește familia $\mathcal{L}$, parametrul t va juca rolul lui V în notația de la punctele 2.2 și 2.4 sau a lui η în cea de la punctul 1.3.

2.5. *Formule asupra lungimii extremale.* PROPOZIȚIA 1. *Fie $\mathcal{R}$ o suprafață riemanniană bordată și compactă, $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_t\}$, $t' \leqslant t \leqslant t''$, o familie cvasimodulară pe $\mathcal{R}$ și $\pi(z)$ o funcție măsurabilă, definită a.p. pe $\mathcal{R}$ și astfel încît*

$$0 < k_0 \leqslant \pi(z) < +\infty \tag{2.4}$$

a.p. pe $\mathcal{R}$, (k_0 — o constantă). Atunci

$$l_\pi^{-1}(K) = \int_{t'}^{t''} L_{\pi^{-1}}(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.5}$$

sau a.p. în (t', t'')

$$L_{\pi^{-1}}(t) = L_{\pi^{-1}}(\mathcal{K}_t) = \int_{\mathcal{K}_t} \pi^{-1}|\mathrm{grad}\ t|\ \mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

Cazul patrulaterului. Vom demonstra mai întîi propoziția 1 pentru familia $\mathcal{K} = \mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\eta\}$ din patrulaterul $\mathcal{R}$, imagine a familiei modulare $\lambda =$

---

[17]) Parametrul local pe $\mathfrak{R}$, definit cu ajutorul lui t și al conjugatei sale armonice, se va numi parametrul modular; coordonatele respective, coordonate modulare.

$= \{\lambda_\eta\}$ $(\lambda_\eta : \eta = \text{const.})$ a dreptunghiului $\mathfrak{R}$ printr-un omeomorfism cvasiconform $z = z(\zeta) : \mathfrak{R} \to \mathcal{R}$. Evident, rezultatul va fi valabil și pentru familia $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_\xi\}$, unde $\mathcal{C}_\xi = z(\gamma_\xi)$ și $\gamma_\xi : \xi = \text{const}$. Trebuie deci să demonstrăm că $l_\pi^{-1}(\mathcal{L}) = \int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta$, unde a.p. în (η', η''), $L_{\pi^{-1}}(\eta) = \int_{\mathcal{L}_\eta} \pi^{-1} \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s$. Remarcăm că a.p. în (η', η''),

$$0 < L_{\pi^{-1}}(\eta) < +\infty. \tag{2.7}$$

În adevăr, (2.4) implică $\iint_{\mathcal{R}} \pi^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$ și, în virtutea lui 1.3, 4°, această integrală este egală cu $\int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta$, ceea ce demonstrează a doua inegalitate (2.7); prima este evidentă.

a. 1) Să presupunem că există o metrică $\rho\mathrm{d}s$ admisă pentru lungimea extremală cu pondere π a lui $\mathcal{L}$. Avem deci $\int_{\mathcal{L}_\eta} \rho\mathrm{d}s \geqslant 1$ a.p. în (η', η'') și $A_{\pi,\rho}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} \pi\rho^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$. Din 1.3, 4°, rezultă $\int_{\eta'}^{\eta''} \mathrm{d}\eta \int_{\mathcal{L}_\eta} \pi\rho^2 \left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\right)^{-1} \mathrm{d}s < +\infty$, ceea ce implică $\int_{\mathcal{L}_\eta} \pi\rho^2\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\right)^{-1} \mathrm{d}s < +\infty$ a.p. în (η', η''). În consecință, putem aplica inegalitatea lui Schwarz a.p. în (η', η''):

$$1 \leqslant \left(\int_{\mathcal{L}_\eta} \rho\mathrm{d}s\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathcal{L}_\eta} \pi\rho^2\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\right)^{-1} \mathrm{d}s\right) L_{\pi^{-1}}(\eta)$$

de unde, împărțind cu $L_{\pi^{-1}}(\eta)$ și integrînd în raport cu η pe intervalul (η', η''), deducem

$$\int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta \leqslant A_{\pi,\rho}(\mathcal{R}). \tag{2.8}$$

Inegalitatea (2.8) arată că

$$\int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta \leqslant l_\pi^{-1}(\mathcal{L}).$$

a. 2) Pentru a stabili inegalitatea contrarie, să alegem metrica $\tilde{\rho}(z)\,\mathrm{d}s$, definită a.p. în $\mathcal{R}$ prin

$$\tilde{\rho}(z) = \pi^{-1}(z)\, L_{\pi^{-1}}^{-1}[\eta(z)]\, |\mathrm{grad}\ \eta(z)|. \tag{2.9}$$

Această metrică este admisă, fiindcă $\int_{\mathcal{L}_\eta} \tilde{\rho} \mathrm{d}s = 1$ a.p. în (η', η''), în timp ce, după (2.8), $L_{\pi^{-1}}^{-1}(\eta)$ este sumabilă în (η', η'') şi, cu ajutorul lui 1.3, 5°, putem scrie

$$\int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}^{-2}(\eta)\left(\int_{\mathcal{L}_\eta} \pi^{-1}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\eta =$$

$$= \int_{\eta'}^{\eta''} \mathrm{d}\eta \int_{\mathcal{L}_\eta} \pi\tilde{\rho}^2 \left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}n}\right)^{-1} \mathrm{d}s = A_{\pi\tilde{\rho}}(\mathcal{R}),$$

ceea ce arată că $A_{\pi\tilde{\rho}}(\mathcal{R}) < +\infty$. Prin urmare

$$l_\pi^{-1}(\mathcal{L}) \leqslant \int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

b. Dacă nu există metrică admisă pentru lungimea extremală a lui $\mathcal{L}$ cu pondere π, avem pe de o parte $l_\pi^{-1}(\mathcal{L}) = +\infty$ şi pe de altă $\int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta = +\infty$, fiindcă $\int_{\mathcal{L}_\eta} \tilde{\rho}\mathrm{d}s = 1$ a.p. în (η', η'') dar metrica $\tilde{\rho}\mathrm{d}s$ nu este admisă.

Observaţia 1°. Propoziţia 1 rămîne valabilă în cazul în care $\mathcal{R}$ este o reuniune finită de patrulatere $\mathcal{R} = \bigcup_1^N \mathcal{R}_\sigma$ şi $\mathcal{K}$ ($\mathcal{L}$ sau $\mathcal{C}$) o familie cvasimodulară, ca la punctul 1.3, 7°. Fie, de exemplu, $\mathcal{R}$ definit plecînd de la $\mathfrak{R}$ de la punctul 1.3, 7°. 1; propoziţia 1 se stabileşte pentru $\mathcal{L}$, repetînd demonstraţia dată mai sus, în timp ce pentru $\mathcal{C}$ ea rezultă imediat din proprietatea următoare a lungimii extremale [22], § 2, D: dacă $\mathcal{C} = \bigcup_1^N \mathcal{C}_\sigma$ şi $\mathcal{C}_\sigma$ *se găsesc în domenii disjuncte, atunci*

$$l_\pi^{-1}(\mathcal{C}) = \sum_1^N l_\pi^{-1}(\mathcal{C}_\sigma). \tag{2.10}$$

Observaţia 2°. Fie $\mathcal{R}$ un domeniu dublu conex, limitat de două curbe Jordan $\mathcal{C}_0$ şi $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}$ o familie cvasimodulară, care separă cele două curbe ale frontierei. Tăind $\mathcal{R}$ în lungul unei curbe a familiei cvasimodulare conjugate $\mathcal{L}$, obţinem din $\mathcal{R}$ un patrulater $\hat{\mathcal{R}}$, în timp ce $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{L}$ devin familii cvasimodulare în $\hat{\mathcal{R}}$: $\hat{\mathcal{C}}$ şi $\hat{\mathcal{L}}$. Evident, $l_\pi(\mathcal{C}) = l_\pi(\hat{\mathcal{C}})$ şi $l_\pi(\mathcal{L}) = l_\pi(\hat{\mathcal{L}})$. Să notăm cu ξ şi η parametrii familiei modulare γ resp. λ care constituie parametrii lui $\mathcal{C}$ şi $\hat{\mathcal{C}}$ resp. $\mathcal{L}$ şi $\hat{\mathcal{L}}$. Formulele propoziţiei 1 dau $l_\pi(\mathcal{C})$ şi $l_\pi(\mathcal{L})$.

Cazul general. Familia $\mathcal{K}$ corespunde familiei modulare $\varkappa$ prin omeomorfismul cvasiconform $\varphi : \mathfrak{R} \to \mathcal{R}$. Liniile lui $\varkappa$ și ale familiei ortogonale împart $\mathfrak{R}$ în dreptunghiuri $\mathfrak{R}_{\sigma\tau}$[18] a căror imagini prin φ sînt patrulaterele $\mathcal{R}_{\sigma\tau}$ pe $\mathcal{R}$. Să presupunem că intervalele corespunzătoare de valori t sînt $I_\tau = [t_\tau, t_{\tau+1}]$ și fie $\mathfrak{R}_\tau = \bigcup\limits_\sigma \mathfrak{R}_{\sigma\tau}$ resp. $\mathcal{R}_\tau = \bigcup\limits_\sigma \mathcal{R}_{\sigma\tau}$ reuniunea dreptunghiurilor acoperite de $\varkappa_t$, resp. $\mathcal{K}_t$, $t \in I_\tau$.

După observațiile 1° și 2° aplicate subfamiliei $\mathcal{K}^\tau = \{\mathcal{K}_t\}$, $t \in I_\tau$, vom putea scrie $l_\pi^{-1}(\mathcal{K}^\tau) = \int_{I_\tau} L_{\pi^{-1}}^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$ și conform (2.10) vom obține

$$l_\pi^{-1}(\mathcal{K}) = \sum_\tau l_\pi^{-1}(\mathcal{K}^\tau) = \int_{t'}^{t''} L_{\pi^{-1}}^{-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

PROPOZIȚIA 2 (Transformarea lungimii extremale printr-o reprezentare cvasiconformă). *Dacă $\mathcal{R}$, $\mathcal{K}$ și π sînt definite ca în propoziția* 1, *$f : \mathcal{R} \to R$ este un omeomorfism cvasiconform al lui $\mathcal{R}$ pe suprafața riemanniană R și $\mathrm{d}_{\mathcal{K},f}$ funcția* (1.6), *atunci*

$$l_\pi[f(\mathcal{K})] = l_{\pi d^{-1}_{\mathcal{K},f}}(\mathcal{K}) \tag{2.11}$$

unde π în $l_\pi[f(\mathcal{K})]$ înseamnă ponderea $\pi_0 f^{-1}$ pe R[19]).

Fie, de exemplu, $\mathcal{K} = \mathcal{L}$. Propoziția 1 aplicată familiei cvasimodulare $L = f(\mathcal{L})$ și ponderei $\pi[z(w)]$[20] ne dau

$$l_\pi^{-1}[f(\mathcal{L})] = \int_{\eta'}^{\eta''} L_{\pi^{-1}}^{-1}[f(\mathcal{L}_\eta)]\,\mathrm{d}\eta.$$

Funcția $d_{\mathcal{L},f}$ este definită a.p. în $\mathcal{R}$, măsurabilă și, dacă f este Q-cvasiconform, satisface a.p. în $\mathcal{R}$ inegalităților

$$Q^{-1} \leqslant d_{\mathcal{L},f} \leqslant Q. \tag{2.12}$$

Se poate aplica deci propoziția 1 familiei $\mathcal{L}$ și ponderei $\pi d^{-1}_{\mathcal{L},f}$

$$l^{-1}_{\pi d^{-1}_{\mathcal{L},f}}(\mathcal{L}) = \int_{\eta'}^{\eta''} L^{-1}_{\pi^{-1} d_{\mathcal{L},f}}(\mathcal{L}_\eta)\,d\eta.$$

Spre a demonstra propoziția 2, va ajunge să stabilim relația

$$L_{\pi^{-1} d_{\mathcal{L},f}}(\mathcal{L}_\eta) = L_{\pi^{-1}}[f(\mathcal{L}_\eta)] \tag{2.13}$$

a.p. în (η', η'').

---

[18] Pentru $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ de la punctul 2.2, $\sigma = j$ și $\tau = k$; pentru $\mathcal{K} = \mathcal{C}$, $\tau = j$ și $\sigma = k$, dar ordinea indicilor a fost schimbată, spre a scurta expunerea.

[19] Vom utiliza, peste tot în cele ce urmează, această prescurtare a notației.

[20] Ca de obicei ζ este parametrul pe $\mathfrak{R}$ corespunzînd familiei modulare $\lambda = \varphi^{-1}(\mathcal{L})$, (în notația de la punctul 2.2 și 2.4, $\zeta = U + iV$); z și w sînt parametrii pe $\mathcal{R}$ resp. R.

Aproape peste tot în $\mathcal{R}$, funcţia $d_{\mathcal{L},f}$ exprimată cu ajutorul parametrilor locali este egală cu

$$d_{\mathcal{L},f}(z) = \frac{\mathrm{d}s_w}{\mathrm{d}s_z} \cdot \frac{\mathrm{d}n_z}{\mathrm{d}n_w}, \tag{2.14}$$

unde am notat cu $\mathrm{d}s_z$, $\mathrm{d}n_z$, $\mathrm{d}s_w$, $\mathrm{d}n_w$ elementele de arc corespunzătoare în z pe $\mathcal{L}_\eta$ şi pe normala la $\mathcal{L}_\eta$ resp. în w pe $f(\mathcal{L}_\eta)$ şi pe normala la $f(\mathcal{L}_\eta)$, căci a.p. în $\mathcal{R}$, în orice A-punct al lui $w(z)$, unde tangenta la $\mathcal{L}_\eta$ există, avem

$$d_{\mathcal{L},f} = \left(\frac{\mathrm{d}s_w}{\mathrm{d}s_z}\right)^2 J_{w/z}^{-1}(z) \text{ şi } J_{w/z}(z) = \frac{\mathrm{d}s_w}{\mathrm{d}s_z} \frac{\mathrm{d}n_w}{\mathrm{d}n_z}. \tag{2.15}$$

După (2.7) aplicat cazului general: $\mathcal{R}$ — suprafaţă riemanniană bordată şi compactă, cu excepţia unei mulţimi $\tilde{e} \subset (\eta', \eta'')$ de măsură nulă, $L_{\pi^{-1} d_{\mathcal{L},f}}(\mathcal{L}_\eta) < +\infty$. Alegînd $\tilde{e}$ într-un mod convenabil, şi ţinînd seama de (2.14), de 1.3, 2°, 6°. 2 şi 6°. 3 şi de observaţia de la punctul 2.4, obţinem (2.13) pentru orice $\eta \in (\eta', \eta'') - \tilde{e}$.

PROPOZIŢIA 3 (de monotonie). *Fie f_j două omeomorfisme cvasiconforme ale suprafeţei riemanniene bordate şi compacte $\mathcal{R}$ pe suprafeţele riemanniene bordate şi compacte R_j $(j = 1, 2)$ astfel încît*

$$d_{\mathcal{K},f_1}(z) \geqslant d_{\mathcal{K},f_2}(z) \tag{2.16}$$

a.p. în $\mathcal{R}$, familia $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_t\}$, $t \in (t', t'')$ fiind cvasimodulară. Dacă $\pi(z)$ este o funcţie definită a.p. pe $\mathcal{R}$, $0 < k_0 \leqslant \pi(z) < +\infty$ şi măsurabilă, atunci

$$l_\pi[f_1(\mathcal{K})] \geqslant l_\pi[f_2(\mathcal{K})]. \tag{2.17}$$

Mai mult, dacă $\pi(z) \leqslant k_1 < +\infty$ a.p. în $\mathcal{R}$, egalitatea în (2.17) implică egalitatea în (2.16) a.p. în $\mathcal{R}$[21]).

Relaţia (2.17) rezultă din (2.16) şi din proprietatea de monotonie a ponderii de la punctul 2.1. Pentru cazul de egalitate, demonstraţia se obţine din proprietatea de monotonie de la punctul 2.1, cu ajutorul metricii extremale (2.9) şi ipotezei $\pi(z) \leqslant k_1 < +\infty$ a.p.

§ 3. PROBLEMA I

3.1. Vom considera acum problemele formulate la punctul 1.2 în care mărimea $\mathcal{M}$, căreia i se caută extremul, este legată de lungimea extremală a familiilor modulare conjugate $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{C}$ pe $\mathcal{R}$ prin relaţia

$$\mathcal{M} = l(\mathcal{L}) = l^{-1}(\mathcal{C}). \tag{3.1}$$

---

[21]) k_0 şi k_1 sînt constante.

Un exemplu este dat de problema modulară : Fie $\mathcal{R}$ o suprafaţă riemanniană bordată şi compactă, $\mathcal{B}_j$ $(j = 0, \ldots, N)$ grupe disjuncte de curbe ale frontierei lui $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$ modulul lui $\mathcal{B}_N$ în raport cu $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N - 1)$ şi (R punctul 2.2). Se caută printre omeomorfismele cvasiconforme $f : \mathcal{R} \to R$ ale unei familii $\mathcal{F}_P$, (punctul 1.2), pe acel care face M, modulul configuraţiei imagine pe $R = f(\mathcal{R})$, extrem.

Un alt exemplu este dat de cazul : $\mathcal{M}$ — distanţa extremală între două mulţimi finite, disjuncte, de arce sau de curbe de pe bordul lui $\mathcal{R}$, (punctul 2.3).

Vom demonstra o condiţie necesară (teorema 1) şi o condiţie suficientă (teorema 2) ca un omeomorfism $f \in \mathcal{F}_P$ să fie extremal pentru această problemă.

TEOREMA 1. *Dacă omeomorfismul* $f^* : \mathcal{R} \to R^*$ *al familiei* $\mathcal{F}_P$ *face* M *minim* (*maxim*), *dacă* K^* *este familia modulară* L^* (*resp.* C^*) *relativ la* M^*, *iar* $\mathcal{K}^* = f^{*-1}(K^*)$, *avem a.p. în* $\mathcal{R}$

$$d_{\mathcal{K}^*, f^*}(z) = \inf_{f \in \mathcal{F}_P} d_{\mathcal{K}^*, f}(z). \tag{3.2}$$

Conform condiţiei 2) relativă la familia $\mathcal{F}_P$, de la punctul 1.2, există un omeomorfism cvasiconform $f_{\mathcal{K}^*}$, pe care pentru a simplifica notaţiile îl vom însemna cu $\tilde{f} : \mathcal{R} \to \tilde{R}$, astfel încît

$$d_{\mathcal{K}^*, \tilde{f}}(z) = \inf_{f \in \mathcal{F}_P} d_{\mathcal{K}^*, f}(z)$$

a.p. în $\mathcal{R}$. Fiindcă $f^* \in \mathcal{F}_P$, avem $d_{\mathcal{K}^*, \tilde{f}}(z) \leqslant d_{\mathcal{K}^*, f^*}(z)$ a.p. în $\mathcal{R}$ şi propoziţia 3 de la punctul 2.5 implică

$$l\,[\tilde{f}(\mathcal{K}^*)] \leqslant l\,[f^*(\mathcal{K}^*)]. \tag{3.3}$$

Cazul minimului : $K^* = L^*$, $\mathcal{K}^* = \mathcal{L}^* = f^{*-1}(L^*)$. Fie $\tilde{M}$ şi M^* modulele configuraţiilor de pe $\tilde{R}$ respectiv R^*. Ţinînd seama de faptele următoare :

1) M^* dă minimul lui M,

2) lungimea extremală a unei subfamilii de curbe este cel puţin egală cu aceea a familiei ([22], § 2, D),

3) relaţiile (3.3) şi (3.1),

putem scrie inegalităţile

$$M^* \leqslant \tilde{M} \leqslant l\,[\tilde{f}(\mathcal{L}^*)] \leqslant l\,[f^*(\mathcal{L}^*)] = M^*.$$

Cu ajutorul cazului de egalitate al propoziţiei 3, punctul 2.5, rezultă (3.2) a.p. în $\mathcal{R}$.

Cazul maximului : $K^* = C^*$, $\mathcal{K}^* = \mathcal{C}^* = f^{*-1}(C^*)$. Teorema rezultă în mod analog din relațiile

$$M^* = l^{-1}[f^*(\mathcal{C}^*)] \leqslant l^{-1}[\tilde{f}(\mathcal{C}^*)] \leqslant \widetilde{M} \leqslant M^*.$$ [22]

TEOREMA 2. *Dacă omeomorfismul* $f^* \in \mathcal{F}_p$ *satisface relației*

$$d_{\mathcal{K}^*, f^*}(z) = \sup_{f \in \mathcal{F}_p} d_{\mathcal{K}^*, f}(z) \tag{3.4}$$

a.p. în $\mathcal{R}$, $K^* = f^*(\mathcal{K}^*)$ *fiind familia modulară* C^* (*resp.* L^*) *relativă la* M^*, *atunci* f^* *fac modulul* M *minim* (*resp. maxim*) *în* $\mathcal{F}_p$.

Fie $f \in \mathcal{F}_p$; după (3.4) vom avea $d_{\mathcal{K}^*, f^*}(z) \geqslant d_{\mathcal{K}^*, f}(z)$ a.p. în $\mathcal{R}$ și din propoziția 3, punctul 2.5, rezultă

$$l[f^*(\mathcal{K}^*)] \geqslant l[f(\mathcal{K}^*)].$$

Cazul maximului. Luînd $K^* = L^*$, avem $M^* = l(L^*)$ și $l[f(\mathcal{L}^*)] \geqslant M$, deci $M^* \geqslant M$.

Cazul minimului. La fel dacă $K^* = C^*$, atunci $M^* = l^{-1}(C^*) \leqslant l^{-1}[f(\mathcal{C}^*)] \leqslant M$.

3.2. *Soluția problemei extremale.* 1°. Să presupunem că teorema 1 și relațiile P determină a.p. în $\mathcal{R}$ caracteristicile p și α ale elipselor infinitezimale cu centrul z transformate în cercuri infinitezimale cu centrul w prin omeomorfismul extremal f, dacă există. Unghiul α este luat în raport cu o familie necunoscută $\mathcal{K}^*$, dar avem a.p. caracteristicile elipselor infinitezimale cu centrul w imagini de cercuri infinitezimale cu centrul z :

$$p \text{ și } \alpha^* = -\operatorname{arcctg}(p \operatorname{tg} \alpha), \tag{3.5}$$

α^* fiind unghiul axei mari cu K^*.

Într-adevăr, se știe că într-un A-punct al unui omeomorfism cvasiconform f, în care raportul axelor elipsei caracteristice este p, imaginea $f(\alpha)$ a unui unghi α făcut de o direcție τ cu direcția axei mari a acestor elipse este dată de relația $\operatorname{tg} f(\alpha) = p \operatorname{tg} \alpha$. Mai mult, cercurile infinitezimale cu centrul z sînt transformate în elipse infinitezimale cu centrul în w, avînd același raport al axelor p iar axa mare pe direcția imaginii axei mici a elipselor caracteristice, direcție cu care K^* formează deci unghiul $\alpha^* = f(\alpha) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Prin urmare, dacă f^* există și dacă w este parametrul modular pe R^* (adică curbele L^* și C^* sînt resp. $v = \text{const.}$ și $u = \text{const.}$), f^* este un omeomorfism cvasiconform cu două perechi de caracteristici : 1 ; p, θ_1 (în raport cu parametrul w), unde $\theta_1 = \alpha^*$ resp. $\alpha^* - \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ după cum familia $K^* = L^*$ sau C^*. El este soluție în sens generalizat a unui sistem eliptic, care în coordonatele modulare u și v pe R^*, are forma, obținută din (1.3),

---

[22] Se obține cazul maximului prin dualitate : dacă f face M maxim în familia $\mathcal{F}_p$, atunci f realizează minimul lui M^{-1} în aceeași familie și satisface relația (3.2) a.p. în $\mathcal{R}$, pentru curbele C^*, căci de data aceasta $l(C) = M^{-1}$.

$$u_x + b_1 u_y = a_1 v_y, \quad - b_1 u_x + u_y = - a_1 v_x, \tag{3.6}$$

unde $a_1 = p \cos^2 \theta_1 + p^{-1} \sin^2 \theta_1$ și $b_1 = (p - p^{-1}) \cos \theta_1 \sin \theta_1$.

Dacă se știe că există un singur omeomorfism a lui $\mathcal{R}$ soluție a sistemului (3.6) și dacă el verifică teorema 2, acest omeomorfism dă soluția unică a problemei extremale considerate.

Să remarcăm că acesta este cazul în care teoremele 1 și 2 constituie o *condiție necesară și suficientă* : ele determină a.p. în $\mathcal{R}$ același p și unghiurile α resp. $\hat{\alpha}$, astfel încît $\operatorname{tg} \alpha . \operatorname{tg} \hat{\alpha} = - p^{-2}$, fiindcă $\mathcal{L}^*$ și $\mathcal{C}^*$ au direcții conjugate în raport cu elipsele caracteristice.

Evident, dacă teorema 2 și P determină p și α a.p. pe $\mathcal{R}$, se obține, prin același procedeu, un sistem de tipul (3.6), condiție suficientă a problemei.

2°. Cînd teorema 1 sau 2 și P determină două perechi de caracteristici : p, α ; p_1, α_1 (α în raport cu $\mathcal{K}^*$ și α_1 în raport cu $K^* = f^* (\mathcal{K}^*)$) se obține din nou un sistem de tip (3.6), deoarece cunoscînd poziția lui K^*, se poate calcula în coordonatele modulare w caracteristicile $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{\theta}_1$ ale elipselor infinitezimale pe R^*, care corespund la cercuri infinitezimale pe $\mathcal{R}$: În adevăr, să presupunem p, α ; p_1, α_1 cunoscute într-un A-punct al lui f^* : $w = w(z)$. Fie $\zeta = \zeta(w)$ transformarea afină cu caracteristici p_1, α_1 și $\zeta(z) = \zeta\,[w(z)]$. Imaginea α_ζ a unghiului α prin $\zeta(z)$ va fi dată de $\operatorname{tg} \alpha_\zeta = p \operatorname{tg} \alpha$ și imaginea $\alpha_{1\zeta}$ a unghiului α_1 prin $\zeta(w)$ de $\operatorname{tg} \alpha_{1\zeta} = p_1 \operatorname{tg} \alpha_1$. Imaginile celor două axe mari ale elipselor din planul z resp. w formează deci în planul ζ unghiul $\nu = \alpha_\zeta - \alpha_{1\zeta}$ și imaginea acestuia prin $w(\zeta)$ va fi $p_1^{-1} \operatorname{tg} \nu$. Se obține astfel poziția imaginii axei mari a elipsei din planul z prin $w(z)$. Analog se obține poziția imaginii axei mici. Deci cunoaștem direcțiile prin punctul w, care corespund următoarelor direcții prin punctul z : tangenta la $\mathcal{K}^*$, axa mare și axa mică a elipsei din planul z, ca și unghiul acestor axe în raport cu $\mathcal{K}^*$: α și $\alpha + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Aceste date ne permit să determinăm cu ușurință $\widetilde{p}_1$ și $\widetilde{\theta}_1$. Dacă α sau $\alpha + \frac{\pi}{2} = 0 \pmod{\pi}$, se folosește ca o a treia direcție, preimaginea axei mari din planul w. În cazul în care axele corespund la axe, calculul lui $\widetilde{p}_1$ și $\widetilde{\theta}_1$ este încă mai simplu.

Rezultate relative la sistemul (3.6) ca și la sistemele cvasiliniare care se pot obține aplicînd teoremele 1 și 2, sînt date de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale [9] — [11], [23], p. 493, [24].

Diferite exemple de condiții P vor fi analizate în lucrarea [25].

3.3. *Generalizare.* Din analiza primei probleme se deduc trăsăturile esențiale care intervin în demonstrarea teoremelor 1 și 2, ceea ce conduce la următoarele probleme mai generale :

1°. *Se dă pe fiecare suprafață riemanniană bordată și compactă $\mathcal{R}$ o familie cvasimodulară unic determinată și o pondere π definită a.p. pe $\mathcal{R}$,*

$0 < k_0 \leqslant \pi(z) \leqslant k_1 < +\infty$ (k_0, k_1 — *constante*), *și măsurabilă. Se consideră o familie* $\mathcal{F}_P$ *de omeomorfisme cvasiconforme* $f : \mathcal{R} \to R$, *ca în enunțul general de la punctul* 1.2 *corespunzător primei relații din condiția* 2).

$$d_{\mathcal{K}, f_{\mathcal{K}}}(z) = \inf_{f \in \mathcal{F}_P} d_{\mathcal{K}, f}(z) \tag{3.7}$$

Se presupune că dacă $f_j : \mathcal{R} \to R_j$ ($j = 1, 2$) *aparțin lui* $\mathcal{F}_P$ *și dacă* K_{R_j} *este familia dată pe* R_j ($j = 1, 2$), *atunci*

$$l_\pi(K_{R_1}) \leqslant l_\pi[f_1 \circ f_2^{-1}(K_{R_2})] \tag{3.8}$$

Se caută omeomorfismul $f^* : \mathcal{R} \to R^*$ *care face* $M = l_\pi(K_R)$ *extrem în* $\mathcal{F}_P$ [23]).

TEOREMA 3. *Dacă* $f^* : \mathcal{R} \to R^*$, $f^* \in \mathcal{F}_P$ *face* M *minim și* $\mathcal{K}^* = f^{*-1}(K^*_{R^*})$ ($K^*_{R^*}$ — *familia dată pe* R^*), *avem, a.p. în* $\mathcal{R}$, *relația* (3.2).

TEOREMA 4. *Dacă* $f^* \in \mathcal{F}_P$ *satisface a.p. în* $\mathcal{R}$ *relația* (3.4) *relativ la familia* $\mathcal{K}^* = f^{*-1}(K^*_{R^*})$, *atunci* f^* *face* M *maxim*.

Demonstrațiile sînt analoge cu cele din cazul modular de mai sus.

Inversînd sensul inegalităților se obțin de asemenea teoremele:

TEOREMA 3′. *Dacă* $f^* : \mathcal{R} \to R^*$, $f^* \in \mathcal{F}_P$ *face* $M = l_\pi(K_R)$ *maxim și dacă* $K^* = f^{*-1}(K^*_{R^*})$, *atunci relația* (3.4) *este îndeplinită a.p. în* $\mathcal{R}$.

TEOREMA 4′. *Dacă* $f^* \in \mathcal{F}_P$ *satisface a.p. în* $\mathcal{R}$ *relației* (3.2) *în raport cu* $K^* = f^{*-1}(K^*_{R^*})$, *atunci* f^* *realizează minimul lui* M.

3°. În cazul în care avem egalitate în (3.8), presupunînd (3.7), teoremele 1 și 2′ dau condiția (3.2) necesară și suficientă pentru minim în timp ce presupunînd (3.9), teoremele 1′ și 2 dau condiția 3.4 necesară și suficientă pentru maxim. Enunțul este acel din teorema 3, § 4, care constituie un caz particular.

Remarcăm că problema I este legată de configurația K_R pe R dar nu de imaginea $f(\mathcal{K}_{\mathcal{R}})$. Se cunoaște poziția lui K_R pe R, dar nu aceea a preimaginii sale $f^{-1}(K_R)$ pe suprafața dată $\mathcal{R}$. Situația contrarie (cînd se pleacă de la o familie de curbe cunoscută pe R) va fi considerată în § 4.

§ 4. PROBLEMA II

4.1. Proprietatea de monotonie (propoziția 3° de la punctul 2.5) permite să rezolvăm un al doilea tip de problemă extremală, care se obține de asemenea din enunțul general de la punctul 1.2 :

Se consideră pe $\mathcal{R}$ o familie de curbe $\mathcal{K}$ imagine cvasiconformă a unei familii modulare, o pondere $\pi(z)$ definită a.p. în $\mathcal{R}$: $0 < k_0 \leqslant \pi(z) \leqslant$

---

[23]) Evident, s-ar putea cere (3.7) numai pentru familii $f^{-1}(K_R)$, $f \in \mathcal{F}_P$. Aceeași problemă se poate formula pentru $M = l_\pi^{-1}(K_R)$; teorema 1 se raportă atunci la maxim și teorema 2 la minim. Rezultatele se aplică dacă M crește sau descrește cu $l_\pi(K_R)$.

$\leqslant k_1 < +\infty$ şi măsurabilă, şi se ia $\mathcal{M} = l_\pi(\mathcal{K})$. Se caută printre omeomorfismele f ale unei familii $\mathcal{F}_P$, definită ca la punctul 1.2, omeomorfismul extremal care face $M = l_\pi(K)$, $K = f(\mathcal{K})$, minim sau maxim.

Pentru a rezolva această problemă vom demonstra ca la punctul 3.3 condiţia necesară şi suficientă următoare:

TEOREMA 5. *Omeomorfismul f, care face M minim, resp. maxim în $\mathcal{F}_P$, verifică a.p. în $\mathcal{R}$ relaţia*

$$d_{\mathcal{K}, f^*}(z) = \inf_{f\in\mathcal{F}_P} d_{\mathcal{K}, f}(z) \text{ resp. } \sup_{f\in\mathcal{F}_P} d_{\mathcal{K}, f}(z) \tag{4.1}$$

şi reciproc.

În adevăr, vom lua $\mathcal{K}_{\mathcal{R}} = \mathcal{K}$ şi vom considera pentru fiecare $f \in \mathcal{F}_P$ configuraţia R, $K_R = f(\mathcal{K})$ ca o configuraţie distinctă pe care K_R este unic determinată (deşi de data aceasta necunoscută). Vom avea egalitate în relaţia (3.8) şi teorema 3 rezultă din cazul 3.3, 3°. De altfel, ea se poate demonstra şi direct cu raţionamente de la punctul 3.3 înlocuind $\mathcal{K}^*$ prin $\mathcal{K}$.

Prima (resp. a doua) relaţie din condiţia 2) pentru $\mathcal{F}_P$ intervine numai pentru a arăta că f^*, care face M minim (maxim) verifică prima (a doua) relaţie (4.1).

4.2. *Soluţia problemei.* Cînd teorema 3 şi condiţiile P determină p şi α în raport cu $\mathcal{K}$ a.p. pe $\mathcal{R}$, omeomorfismul extremal este soluţie generalizată a sistemului Beltrami

$$w_{\bar{z}} = -(p-1)(p+1)^{-1} e^{2i(\varphi+\alpha)} w_z, \tag{4.2}$$

unde φ este argumentul direcţiei tangente la $\mathcal{K}$ în raport cu parametrul z. După L. Bers [8] existenţa şi unicitatea (abstracţie de o reprezentare conformă) a unui omeomorfism al lui $\mathcal{R}$ soluţie generalizată a lui (4.2) sînt asigurate. După punctul 3.2, 2°, se tratează cazul cînd avem p, α; p_1, α_1 (α în raport cu $\mathcal{K}$, α_1 în raport cu $f(\mathcal{K})$) şi se obţine din nou un sistem Beltrami.

Această problemă va fi de asemenea exemplificată în lucrarea [25].

Primită la redacţie la 6 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. H. GRÖTZSCH, *Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes.* Ber. sächs. Akad. Leipzig, **80**, 503–507 (1928).
2. H. GRÖTZSCH, *Über die Verzerrung bei nichtkonformen schlichten Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche.* Ber. Sächs. Akad. Leipzig, **84**, 114–120 (1932).
4. H. KÜNZI, *Quasikonforme Abbildungen.* Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960.
5. L. AHLFORS, L. BERS, *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения.* И. Л. Москва, 1961.

6. Л. И. Волковыский, *Квазиконформные отображения*. Львов, 1964.
7. M. A. Lavrentieff, *Sur une classe de représentations continues*. Rec. math. Moscou, **42**, 407—424 (1935).
8. L. Bers, *Quasiconformal Mapping and Teichmüller's Theorem*. Analytic Functions, Princeton, 1960, p. 89—110.
9. И. Н. Бекуа, *Обобщенные аналитические функции*. Гос. изд. физ. мат. лит., Москва, 1959.
10. Б. В. Шабат, *Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных*. Мат. сб. **17** (59), 193—210, (1945).
11. Б. В. Боярский, *Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами*. Мат. сб., **43** (85): 4, 451—503 (1957).
12. C. Andreian Cazacu, *Sur les transformations pseudo-analytiques*. Revue math. pures et appl., **2**, 383—397 (1957).
13. C. Andreian Cazacu, *Sur une classe de représentations quasi-conforme*. Colloque d'Analyse Bucarest. 1962, Seminaire d'Analyse, Rome, mai 1963.
14. C. Andreian Cazacu, *Sur l'application de la longueur extrémale dans la théorie des représentations quasi-conformes*. Math. Cluj, 1963.
15. T. Radó, P. V. Reichelderfer, *Continuous transformations in analysis*. Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.
16. M. Ohtsuka, *Sur un théorème étoilé de Gross*. Nagoya Math. Journ. **9**, 191—207 (1955).
17. C. Iacob, *Sur le problème de Dirichlet dans un domaine multiplement connexe et ses applications à la Hydrodynamique*. Journ. Math. pures et appl., 9e série 18, 363—383 (1939).
18. M. Jurchescu, *Modulus of a boundary component*. *Pacific Journ.* Math., **8**, 4, 791—809 (1958).
19. A. Pflüger, *Theorie der Riemannschen Flächen*. Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957.
20. L. V. Ahlfors, L. Sario, *Riemann surfaces*. Princeton, 1960.
21. C. Andreian Cazacu, *Überlagerungseigenschaften Riemannscher Flächen*, Revue math. pures et appl., **6**, 865—701 (1961).
22. J. Hersch, *Longueurs extrémales et théorie des fonctions*. Comm. Math. Helvetici, **29**, 301—337 (1955).
23. Б. В. Шабат, *Обобщения и аналогии теории аналитических функций*, Математика в СССР за сорок лет, Гос. из. физ. мат. лит., Москва, 1959, 481.
24. S. V, Parter, *On Mappings of Multiply Connected Domains by Solutions of Partial Differential Equations*. Comm. pure appl. Math., **13**, 167—182 (1960).
25. C. Andreian Cazacu, *Problèmes extrémaux des représentations quasi-conformes* (à paraître).

OMOLOGIA $\Lambda-(\Phi, \Psi)$ – MODULELOR

DE

VALERIU ȘT. UDRESCU

Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, nr. 47, București

Expunem, ca o generalizare a omologiei modulelor diferențiabile și a omologiei unei extinderi a acestora dată de C. Bănică și N. Popescu [1], omologia – pînă la relația Künneth, asupra căreia vom reveni – $\Lambda-(\Phi, \Psi)$ – modulelor: prin definiție, un $\Lambda-(\Phi, \Psi)$ – modul la stînga (A, φ, ψ) este un Λ – modul la stînga A înzestrat cu două Λ – endomorfisme φ și ψ, astfel ca $\varphi \circ \psi = 0 \;\&\; \psi \circ \varphi = 0$.

§ 1. $\Lambda-(\Phi, \Psi)$ – MODULE

1.1 Fie Λ un inel cu element unitate, fie $\mathcal{M}$ categoria Λ-modulelor la stînga unitare și fie $\mathcal{L}(A)$ inelul Λ-endomorfismelor lui $A \in \mathcal{M}$.

Fie $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(A)$ cu $\varphi \circ \psi = 0$ și fie:

$$Z_{\varphi,\psi}(A) = \ker \varphi, \quad B_{\varphi,\psi}(A) = \operatorname{im} \psi.$$

Deoarece $B_{\varphi,\psi}(A) \subset Z_{\varphi,\psi}(A)$, definim:

$$H_{\varphi,\psi}(A) = \frac{Z_{\varphi,\psi}(A)}{B_{\varphi,\psi}(A)}.$$

1.2. Fie $A \in \mathcal{M}$ și fie $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{L}(A)$.

Prin definiție, $(\varphi, \psi) \leqslant (\varphi_1, \psi_1)$ dacă există $\mu, \nu \in \mathcal{L}(A)$ astfel ca

$$\varphi_1 = \mu \circ \varphi \;\&\; \psi = \psi_1 \circ \nu.$$

Relația $\leqslant$ este o preordine ([2]; [4], pct. 1) în $\mathcal{L}(A) \times \mathcal{L}(A)$.

În plus, dacă $(\varphi, \psi) \leqslant (\varphi_1, \psi_1)$, atunci:

$$B_{\varphi,\psi}(A) \subset B_{\varphi_1,\psi_1}(A) \;\&\; Z_{\varphi,\psi}(A) \subset Z_{\varphi_1,\psi_1}(A)$$

și ca atare, un Λ-omomorfism

$$\alpha^{\varphi_1,\psi_1}_{\varphi,\psi} : H_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow H_{\varphi_1,\psi_1}(A),$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 519–528, BUCUREȘTI, 1965.

cu proprietăţile imediate:

1. $\alpha_{\varphi,\psi}^{\varphi,\psi} = \text{id.}$;

2. $(\varphi, \psi) \leqslant (\varphi_1, \psi_1) \leqslant (\varphi_2, \psi_2) \Rightarrow \alpha_{\varphi,\psi}^{\varphi_2,\psi_2} = \alpha_{\varphi_1,\psi_1}^{\varphi_2,\psi_2} \circ \alpha_{\varphi,\psi}^{\varphi_1,\psi_1}$,

este definit.

Evident, dacă $I = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n \in N}$ este un şir de perechi de Λ-endomorfisme din $\mathcal{L}(A)$ cu $\varphi_n \circ \psi_n = 0$, $(\forall)\, n \in N$, filtrant pentru $\leqslant$, atunci

$$\mathcal{H} = \{H_{\varphi,\psi}(A), \alpha_{\varphi,\psi}^{\varphi',\psi'}\}$$

este un sistem inductiv pe I.

Propoziţie. *Limita inductivă* $\varinjlim \mathcal{H}$ *a lui* $\mathcal{H}$ *pe* I *există şi ea este un functor covariant, aditiv, exact la dreapta, definit pe categoria tuturor sistemelor inductive pe* I *din* $\mathcal{M}$, *cu valori în categoria* $\mathcal{M}$.

Demonstraţie. Categoria $\mathcal{M}$ este abeliană şi satisface axioma AB6 din [4] (punctul 1.5). Restul, cu rezultatele punctului 1.8 din [4].

1.3. Fie $A \in \mathcal{M}$ şi $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{L}(A)$ cu $\varphi \circ \psi = 0$ & $\varphi_1 \circ \psi_1 = 0$.

Prin definiţie:

$$(\varphi, \psi) \sim (\varphi_1, \psi_1) \Leftrightarrow \{(\varphi, \psi) \leqslant (\varphi_1, \psi_1) \;\&\; (\varphi_1, \psi_1) \leqslant (\varphi, \psi)\}.$$

1.4. Fie $\mathcal{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$ categoria $\Lambda - (\Phi, \Psi)$ — modulelor la stînga: categoria ale cărei obiecte sînt tripletele (A, φ, ψ) cu $A \in \mathcal{M}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(A)$ şi astfel ca $\varphi \circ \psi = 0$ & $\psi \circ \varphi = 0$ şi ale cărei morfisme sînt Λ-omomorfismele lui $\mathcal{M}$ care comută cu φ şi ψ.

1.5. Fie $(A, \varphi, \psi) \in \mathcal{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$ şi fie:

$$Z_{\psi,\varphi}(A) = \ker \psi, \quad B_{\psi,\varphi}(A) = \operatorname{im} \varphi.$$

Deoarece $B_{\psi,\varphi}(A) \subset Z_{\psi,\varphi}(A)$, definim:

$$H_{\psi,\varphi}(A) = \frac{Z_{\psi,\varphi}(A)}{B_{\psi,\varphi}(A)}.$$

Fie

$$\widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) = \frac{A}{\operatorname{im} \varphi} \;\&\; \widetilde{B}_{\varphi,\psi}(A) = \frac{A}{\ker \psi}.$$

Definim un Λ — omomorfism $\widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \to Z_{\varphi,\psi}(A)$ prin comutativitatea diagramei:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{B}_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r, "\approx"] & B_{\varphi,\psi}(A) \arrow[dr, "\text{mono}"] & \\
\widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \arrow[ur, "\text{epi}"] \arrow[rrr, dashed] & & & Z_{\varphi,\psi}(A)
\end{tikzcd}$$

în care Λ — epimorfismul $\widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \to \widetilde{B}_{\varphi,\psi}(A)$ este indus de Λ — epimorfismul $A \to \widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A)$, din cauza lui $\psi \circ \varphi = 0$.

PROPOZIȚIE. *Dacă* $(A, \varphi, \psi) \in \mathfrak{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$, *atunci șirul*:

$$0 \longrightarrow H_{\psi,\varphi}(A) \longrightarrow \widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow Z_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow H_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow 0$$

este exact, iar diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & Z_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z}_{\psi,\varphi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \widetilde{B}_{\psi,\varphi}(A) \arrow[r, "="] \arrow[d] & \widetilde{B}_{\psi,\varphi}(A) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

este comutativă și exactă.

Demonstrație. Că
ker $(\widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \to Z_{\varphi,\psi}(A)) \approx H_{\psi,\varphi}(A)$ & coker $(\widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \to Z_{\varphi,\psi}(A)) \approx H_{\varphi,\psi}(A)$ este imediat. Restul, standard.

1.6. Fie (A', φ', ψ'), (A, φ, ψ), $(A'', \varphi'', \psi'') \in \mathfrak{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$.

PROPOZIȚIE. *Dacă* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *este un șir exact din* $\mathfrak{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$, *atunci șirurile*:

$$\ldots \longrightarrow H_{\varphi'',\psi''}(A'') \longrightarrow H_{\varphi',\psi'}(A') \longrightarrow H_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow H_{\varphi'',\psi''}(A'') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \widetilde{Z}_{\varphi',\psi'}(A') \longrightarrow \widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow \widetilde{Z}_{\varphi'',\psi''}(A'') \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Z_{\varphi',\psi'}(A') \longrightarrow Z_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow Z_{\varphi'',\psi''}(A'') \longrightarrow H_{\psi',\varphi'}(A') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{\psi,\varphi}(A) \longrightarrow H_{\psi'',\varphi''}(A'') \longrightarrow H_{\varphi',\psi'}(A') \longrightarrow \ldots,$$

$$\ldots \longrightarrow H_{\psi'',\varphi''}(A'') \longrightarrow H_{\varphi',\psi'}(A') \longrightarrow H_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow H_{\varphi'',\psi''}(A'') \longrightarrow \ldots,$$

sînt exacte.

Demonstrație. În $\mathfrak{M}$, diagrama comutativă și exactă:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce ([3], Ch. III, § 3), diagrama comutativă şi exactă :

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{Z}_{\varphi',\psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z}_{\varphi'',\psi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{\varphi',\psi'}(A') \arrow[r] & Z_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] & Z_{\varphi'',\psi''}(A'') &
\end{tikzcd}$$

care, la rîndul său, induce şirul exact (*loc. cit*).

$$H_{\psi',\varphi'}(A') \longrightarrow H_{\psi,\varphi}(A) \longrightarrow H_{\psi'',\varphi''}(A'') \xrightarrow{\Delta^{\varphi';\psi'}_{\psi'',\varphi''}} H_{\varphi',\psi'}(A') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow H_{\varphi'',\psi''}(A'')$$

Asemănător, plecînd de la diagrama comutativă şi exactă :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\psi'"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\psi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

obţinem şirul exact :

$$H_{\varphi',\psi'}(A') \longrightarrow H_{\varphi,\psi}(A) \longrightarrow H_{\varphi'',\psi''}(A'') \xrightarrow{\Delta^{\psi';\varphi'}_{\varphi'';\psi''}} H_{\psi',\varphi'}(A') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{\psi,\varphi}(A) \longrightarrow H_{\psi'',\varphi''}(A'').$$

Rămîne să observăm că Λ – omomorfismul $H_{\varphi'',\psi''}(A'') \to \widetilde{Z}_{\varphi',\psi'}(A')$ este definit de diagrama comutativă şi exactă :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] & H_{\varphi'',\psi''}(A'') \arrow[r, "\Delta^{\psi';\varphi'}_{\varphi'';\psi''}"] \arrow[dr, dashed] & H_{\psi',\varphi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\psi,\varphi}(A) \arrow[d] \\
 & & \widetilde{Z}_{\varphi',\psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & Z_{\varphi',\psi'}(A') \arrow[r] & Z_{\varphi,\psi}(A)
\end{tikzcd}$$

iar Λ – omomorfismul $Z_{\varphi'',\psi''}(A'') \to H_{\psi',\varphi'}(A')$ prin diagrama comutativă şi exactă :

$$\begin{tikzcd}
Z_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & Z_{\varphi'',\psi''}(A'') \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & & \\
H_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi'',\psi''}(A'') \arrow[r, "\Delta^{\psi';\varphi'}_{\varphi'';\psi''}"] \arrow[d] & H_{\psi',\varphi'}(A') \arrow[r] & H_{\psi,\varphi}(A) \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

diagrame în care probăm şi exactităţile necesare.

Restul, standard.

1.7. Fie (A', φ', ψ'), $(A', \varphi_1', \psi_1')$, (A, φ, ψ), (A, φ_1, ψ_1), (A'', φ'', ψ''), $(A'', \varphi_1'', \psi_1'') \in \mathfrak{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$.

PROPOZIŢIE. *Dacă* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *este un şir exact în* $\mathfrak{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$ *şi dacă* $(\varphi', \psi') \sim (\varphi_1', \psi_1')$, $(\varphi, \psi) \sim (\varphi_1, \psi_1)$, $(\varphi'', \psi'') \sim (\varphi_1'', \psi_1'')$, *atunci diagramele* :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{\psi''.\varphi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi'.\psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi.\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi''.\psi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z}_{\varphi'.\psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{\psi_1''.\varphi_1''}(A'') \arrow[r] & H_{\varphi_1'.\psi_1'}(A') \arrow[r] & H_{\varphi_1.\psi_1}(A) \arrow[r] & H_{\varphi_1''.\psi_1''}(A'') \arrow[r] & \widetilde{Z}_{\varphi_1'.\psi_1'}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Z_{\varphi''.\psi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\psi'.\varphi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\psi.\varphi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{\psi''.\varphi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi'.\psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Z_{\varphi_1''.\psi_1''}(A'') \arrow[r] & H_{\psi_1'.\varphi_1'}(A') \arrow[r] & H_{\psi_1.\varphi_1}(A) \arrow[r] & H_{\psi_1''.\varphi_1''}(A'') \arrow[r] & H_{\varphi_1'.\psi_1'}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{\psi''.\varphi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi'.\psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi.\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{\varphi''.\psi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H_{\psi'.\varphi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{\psi_1''.\varphi_1''}(A'') \arrow[r] & H_{\varphi_1'.\psi_1'}(A') \arrow[r] & H_{\varphi_1.\psi_1}(A) \arrow[r] & H_{\varphi_1''.\psi_1''}(A'') \arrow[r] & H_{\psi_1'.\varphi_1'}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

sînt comutative şi exacte.

Demonstraţie. Deoarece $(\varphi, \psi) \sim (\varphi_1, \psi_1)$, diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Z}_{\varphi.\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & Z_{\varphi.\psi}(A) \arrow[d] \\
\widetilde{Z}_{\varphi_1.\psi_1}(A) \arrow[r] & Z_{\varphi_1.\psi_1}(A)
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

Rezultă că diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{Z}_{\varphi'.\psi'}(A') \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \widetilde{Z}_{\varphi.\psi}(A) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \widetilde{Z}_{\varphi''.\psi''}(A'') \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & 0 \\
 & & \widetilde{Z}_{\varphi_1'.\psi_1'}(A') \arrow[rr] \arrow[dd] & & \widetilde{Z}_{\varphi_1.\psi_1}(A) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \widetilde{Z}_{\varphi_1''.\psi_1''}(A'') \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{\varphi'.\psi'}(A') \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z_{\varphi.\psi}(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z_{\varphi''.\psi''}(A'') \arrow[dr] & & \\
 & 0 \arrow[r] & Z_{\varphi_1'.\psi_1'}(A') \arrow[rr] & & Z_{\varphi_1.\psi_1}(A) \arrow[rr] & & Z_{\varphi_1''.\psi_1''}(A'') &
\end{tikzcd}$$

este comutativă şi exactă.

Acum, o tehnică standard şi rezultatele precedente asigură propoziţia.

1.8. Fie (A, φ, ψ), $(A', \varphi', \psi') \in \mathfrak{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$ şi fie $f, g : A \to A'$ două morfisme din $\mathfrak{M}(\Lambda, \Phi, \Psi)$.

Prin definiţie, morfismele f şi g sînt (Φ, Ψ)-*omotope*, dacă există un morfism $s : A \to A'$ astfel ca $f - g = s \circ \varphi + \psi'_{\circ} s$. Evident, dacă $x \in Z_{\varphi.\psi}(A)$, atunci $f(x) - g(x) \in B_{\varphi'.\psi'}(A')$, ceea ce arată că morfismele (Ψ, Φ)-omotope induc un acelaşi Λ-omomorfism $H_{\psi\varphi.}(A) \to H_{\psi'.\varphi'}(A')$.

Prin definiţie, morfismele f şi g sînt (Ψ, Φ) -*omotope*, dacă există un morfism $t : A \to A'$ astfel ca $f - g = t \circ \psi + \varphi' \circ t$. Asemănător, din $x \in Z_{\psi, \varphi}(A)$ rezultă $f(x) - g(x) \in B_{\psi', \varphi'}(A')$, ceea ce arată că morfismele (Ψ, Φ)-omotope induc un acelaşi Λ-omomorfism $H_{\psi, \varphi}(A) \to H_{\psi', \varphi'}(A')$.

Prin definiţie, două morfisme se zic *omotope*, dacă ele sînt atît (Φ, Ψ) -omotope cît şi (Ψ, Φ) -omotope.

§ 2. Λ – (Φ, Ψ) – COMPLEXE

2.1. Un $\Lambda - (\Phi, \Psi)$-*complex la stînga* (A, φ, ψ) este un Λ-modul la stînga, graduat A, înzestrat cu două Λ-endomorfisme φ, ψ de grad $+1$, astfel ca $\varphi \circ \psi = 0$ & $\psi \circ \varphi = 0$.

În definitiv, un Λ-(Φ, Ψ)-complex la stînga este un şir dublu

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & A^{n-1} \arrow[r, shift left, "\varphi^{n-1}"] \arrow[r, shift right, "\psi^{n-1}"'] & A^{n} \arrow[r, shift left, "\varphi^{n}"] \arrow[r, shift right, "\psi^{n}"'] & A^{n+1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \cdots
\end{tikzcd}$$

de Λ-module la stînga şi Λ-omomorfisme, astfel ca $\varphi^{n} \circ \psi^{n-1} = 0$ & $\psi^{n} \circ \varphi^{n-1} = 0$, pentru orice n.

2.2. Fie (A, φ, ψ) un Λ-(Φ, Ψ)-complex la stînga şi fie :

$$B_{\varphi, \psi}(A) = \sum_{n} B^{n}_{\varphi, \psi}(A); \quad B_{\psi, \varphi}(A) = \sum_{n} B^{n}_{\psi, \varphi}(A);$$

$$Z_{\varphi, \psi}(A) = \sum_{n} Z^{n}_{\varphi, \psi}(A); \quad Z_{\psi, \varphi}(A) = \sum_{n} Z^{n}_{\psi, \varphi}(A);$$

$$H_{\varphi, \psi}(A) = \sum_{n} H^{n}_{\varphi, \psi}(A); \quad H_{\psi, \varphi}(A) = \sum_{n} H^{n}_{\psi, \varphi}(A);$$

$$\widetilde{B}_{\varphi, \psi}(A) = \sum_{n} \widetilde{B}^{n}_{\varphi, \psi}(A); \quad \widetilde{B}_{\psi, \varphi}(A) = \sum_{n} \widetilde{B}^{n}_{\psi, \varphi}(A);$$

$$\widetilde{Z}_{\varphi, \psi}(A) = \sum_{n} \widetilde{Z}^{n}_{\varphi, \psi}(A); \quad \widetilde{Z}_{\psi, \varphi}(A) = \sum_{n} \widetilde{Z}^{n}_{\psi, \varphi}(A),$$

graduările canonice [3].

2.3. Fie $\mathcal{K}(\Lambda, \Phi, \Psi)$ categoria Λ-(Φ, Ψ)-complexelor la stînga : categoria ale cărei obiecte sînt Λ-(Φ, Ψ)-complexele la stînga şi ale cărei morfisme sînt Λ-omomorfismele de grad zero, care comută cu φ şi ψ.

PROPOZIŢIE. *Dacă* $(A, \varphi, \psi) \in \mathcal{K}(\Lambda, \Phi, \Psi)$, *atunci şirul :*

$$0 \longrightarrow H^{n}_{\psi, \varphi}(A) \longrightarrow \widetilde{Z}^{n}_{\varphi, \psi}(A) \longrightarrow Z^{n+1}_{\varphi, \psi}(A) \longrightarrow H^{n+1}_{\varphi, \psi}(A) \longrightarrow 0$$

este exact, iar diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B^n_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & Z^n_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^n_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^n_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z}^n_{\psi,\varphi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \widetilde{B}^n_{\psi,\varphi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{B}^n_{\psi,\varphi}(A) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

este comutativă și exactă.

2.4. Fie (A', φ', ψ'), (A, φ, ψ), $(A'', \varphi'', \psi'') \in \mathcal{K}(\Lambda, \Phi, \Psi)$.

PROPOZIȚIE. *Dacă* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *este un șir exact în* $\mathcal{K}$ (Λ, Φ, Ψ), *atunci șirurile :*

$$\ldots \to H^{n-2}_{\psi'',\varphi''}(A'') \to H^{n-1}_{\varphi,\psi'}(A') \to H^{n-1}_{\varphi,\psi}(A) \to H^{n-1}_{\varphi'',\psi''}(A'') \to$$
$$\to \widetilde{Z}^n_{\varphi',\psi'}(A') \to \widetilde{Z}^n_{\varphi,\psi}(A) \to \widetilde{Z}^n_{\varphi'',\psi''}(A'') \to 0,$$

$$0 \to Z^n_{\varphi',\psi'}(A') \to Z^n_{\varphi,\psi}(A) \to Z^n_{\psi',\varphi''}(A'') \to H^{n+1}_{\psi',\varphi'}(A') \to$$
$$\to H^{n+1}_{\psi,\varphi}(A) \to H^{n+1}_{\psi'',\varphi''}(A'') \to H^{n+2}_{\varphi',\psi'}(A') \to \ldots,$$

$$\ldots \to H^{n-1}_{\psi'',\varphi''}(A'') \to H^n_{\varphi',\psi'}(A') \to H^n_{\varphi,\psi}(A) \to H^n_{\varphi'',\psi''}(A'') \to H^{n+1}_{\psi',\varphi'}(A') \to \ldots$$

sînt exacte.

2.5 Fie (A', φ', ψ'), $(A', \varphi'_1, \psi'_1)$, (A, φ, ψ), (A, φ_1, ψ_1), (A'', φ'', ψ''), $(A'', \varphi''_1, \psi''_1) \in \mathcal{K}(\Lambda, \Phi, \Psi)$.

În categoria $\mathcal{K}(\Lambda, \Phi, \Psi)$, preordinea $\leqslant$ este generată de definiția de la punctul 1.2, în condiția suplimentară : μ și ν morfisme în $\mathcal{K}(\Lambda, \Phi, \Psi)$, iar relația $\sim$, de definiția de la punctul 1.3, în aceeași suplimentare.

PROPOZIȚIE. *Dacă* $0 \to A' \to A \to A'' \to O$ *este un șir exact în* $\mathcal{K}(\Lambda, \Phi, \Psi)$ *și dacă* $(\varphi', \psi') \sim (\varphi'_1, \psi'_1)$, $(\varphi, \psi) \sim (\varphi_1, \psi_1)$, $(\varphi'', \psi'') \sim (\varphi''_1, \psi''_1)$ (*în* $\mathcal{K}(\Lambda, \Phi, \Psi)$), *atunci diagramele :*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^{n-2}_{\psi'',\varphi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}_{\varphi',\psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}_{\varphi,\psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}_{\varphi'',\psi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z}^n_{\varphi',\psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H^{n-2}_{\psi''_1,\varphi''_1}(A'') \arrow[r] & H^{n-1}_{\varphi'_1,\psi'_1}(A') \arrow[r] & H^{n-1}_{\varphi_1,\psi_1}(A) \arrow[r] & H^{n-1}_{\varphi''_1,\psi''_1}(A'') \arrow[r] & \widetilde{Z}^n_{\varphi'_1,\psi'_1}(A') \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & Z^{n}_{\varphi'', \psi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}_{\psi', \varphi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}_{\psi, \varphi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}_{\psi'', \varphi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+2}_{\varphi', \psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & Z^{n}_{\varphi_1'', \psi_1''}(A'') \arrow[r] & H^{n+1}_{\varphi_1', \psi_1'}(A') \arrow[r] & H^{n+1}_{\psi_1, \varphi_1}(A) \arrow[r] & H^{n+1}_{\psi_1'', \varphi_1''}(A'') \arrow[r] & H^{n+2}_{\varphi_1', \psi_1'}(A') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^{n-1}_{\psi'', \varphi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n}_{\varphi', \psi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n}_{\varphi, \psi}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n}_{\varphi'', \psi''}(A'') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}_{\psi', \varphi'}(A') \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H^{n-1}_{\psi_1'', \varphi_1''}(A'') \arrow[r] & H^{n}_{\varphi_1', \psi_1'}(A') \arrow[r] & H^{n}_{\varphi_1, \psi_1}(A) \arrow[r] & H^{n}_{\varphi_1'', \psi_1''}(A'') \arrow[r] & H^{n+1}_{\psi_1', \varphi_1'}(A') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

sînt comutative şi exacte.

2.6. Luînd în definiţiile punctului 1.8 aplicaţiile s şi t Λ-omomorfisme de grad -1, obţinem omotopia morfismelor din $K(\Lambda, \Phi, \Psi)$.

2.7. Un Λ-(Φ^n, Ψ^n)-*complex la stînga* $(A, \varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n)$ este un Λ-modul la stînga, n-graduat A, înzestrat cu n perechi $(\varphi_1, \psi_1), \dots, (\varphi_n, \psi_n)$ de Λ-endomorfisme de grade respective $(1,0,\dots,0)$, $(1,0,\dots,0)$, ... $(0,\dots,0,1)$, $(0,\dots,0,1)$ şi astfel ca:

$$\varphi_i \circ \psi_i = \psi_i \circ \varphi_i = 0, \qquad i = 1, \dots, n;$$

$$\psi_i \circ \varphi_j + \psi_j \circ \varphi_i = \varphi_i \circ \psi_j + \varphi_j \circ \psi_i = 0, \qquad i \neq j,\ i, j = 1, \dots, n.$$

Explicit, dacă

$$A = \sum_{i_1, \dots, i_n} A^{i_1, \dots, i_n}$$

este n-graduarea lui A şi dacă

$$\varphi_i^{p_1, \dots, p_n},\ \psi_i^{p_1, \dots, p_n} : A^{p_1, \dots, p_n} \longrightarrow A^{p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + 1, p_{i+1}, \dots, p_n},$$

atunci condiţiile de Λ-(Φ^n, Ψ^n)-complex (la stînga), se scriu:

$$\varphi_i^{q_1, \dots, q_{i-1}, q_i+1, q_{i+1}, \dots, q_n} \circ \psi_i^{q_1, \dots, q_n} = 0;$$

$$\psi_i^{q_1, \dots, q_{i-1}, q_i+1, q_{i+1}, \dots, q_n} \circ \varphi_i^{q_1, \dots, q_n} = 0;$$

$$\psi_i^{q_1, \dots, q_{j-1}, q_j+1, q_{j+1}, \dots, q_n} \circ \varphi_j^{q_1, \dots, q_n} + \psi_j^{q_1, \dots, q_{i-1}, q_i+1, q_{i+1}, \dots, q_n} \circ$$
$$\circ\, \varphi_i^{q_1, \dots, q_n} = 0;$$

$$\varphi_i^{q_1, \dots, q_{j-1}, q_j+1, q_{j+1}, \dots, q_n} \circ \psi_j^{q_1, \dots, q_n} + \varphi_j^{q_1, \dots, q_{i-1}, q_i+1, q_{i+1}, \dots, q_n} \circ$$
$$\circ\, \psi_i^{q_1, \dots, q_n} = 0.$$

Standard [3], unui Λ-(Φ^n, Ψ^n)-complex la stînga $(A, \varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n)$ îi este asociat un Λ-(Φ, Ψ)-complex la stînga (A, φ, ψ), prin:

$$A = \sum_q A^q, \quad A^q = \sum_{q_1 + \dots + q_n = q} A^{q_1, \dots, q_n};$$

$$\varphi = \sum_{1, n} \varphi_i, \quad \psi = \sum_{1, n} \psi_i.$$

§ 3. OBSERVAŢII

3.1. Demonstraţiile propoziţiilor de la punctele 2.3—2.5 rezultă rapid din demonstraţiile propoziţiilor de la punctele 1.5—1.7.

3.2. Situaţia $\varphi = \psi = d$ este cazul clasic al modulelor diferenţiabile ([3], Ch. III). Evident, în acest caz, $H_{\varphi,\psi}(A) = H_{\psi,\varphi}(A) = H(A)$.

3.3. Situaţia $\varphi = d^i$, $\psi = d^{n-i}$ a fost examinată de C. Bănică şi N. Popescu în [1]. Să observăm aici că $(d^i, d^{n-i}) \leqslant (d^j, d^{n-j})$ (în sensul punctului 1.2) este echivalent cu $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$.

Punînd

$$H_{d^i, d^{n-i}}(A) = H_i(A) \;\&\; H_{d^{n-i}, d^i}(A) = H_{n-i}(A),$$

rezultatele din [1] se regăsesc printre cele de mai sus.

3.4. Fie $\mathfrak{M}(N)$ categoria ale cărei obiecte sînt perechile (A, d) cu $A \in \mathfrak{M}$ $d \in \mathfrak{L}(A)$ şi astfel ca $d^{n_A} = 0$, n_A fiind un număr natural, finit, care depinde de A şi ale cărei morfisme sînt Λ-omomorfismele lui $\mathfrak{M}$ care comută cu d.

Fie $1 \leqslant i < n_A$ şi fie $\varphi = d^i$, $\psi = d^{n_A - i}$.

Notînd

$$H_{\varphi,\psi}(A) = H_i(A) \;\&\; H_{\psi,\varphi}(A) = H_{n_A - i}(A),$$

obţinem o extindere a situaţiei din [1], cuprinsă încă, în generalizarea dată.

Să transcriem, drept exemplu, rezultatul punctului 1.6.

Fie $(A', d'), (A, d), (A'', d'') \in \mathfrak{M}(N)$ cu $(d')^{n_{A'}} = 0, d^{n_A} = 0, (d'')^{n_{A''}} = 0$.

Fie

$$\widetilde{Z}_i(A) = \widetilde{Z}_{\varphi,\psi}(A) \;\&\; Z_i(A) = Z_{\varphi,\psi}(A).$$

Dacă $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *este un şir exact în* $\mathfrak{M}(N)$ *şi dacă* $1 \leqslant i < \min(n_{A'}, n_A, n_{A''})$, *atunci şirurile :*

$$\cdots \longrightarrow H_{n_{A''}-i}(A'') \longrightarrow H_i(A') \longrightarrow H_i(A) \longrightarrow H_i(A'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \widetilde{Z}_i(A') \longrightarrow \widetilde{Z}_i(A) \longrightarrow \widetilde{Z}_i(A'') \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Z_i(A') \longrightarrow Z_i(A) \longrightarrow Z_i(A'') \longrightarrow H_{n_{A'}-i}(A') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n_A - i}(A) \longrightarrow H_{n_{A''}-i}(A'') \longrightarrow H_i(A') \longrightarrow \cdots,$$

$$\cdots \longrightarrow H_{n_{A''}-i}(A'') \longrightarrow H_i(A') \longrightarrow H_i(A) \longrightarrow H_i(A'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n_{A'}-i}(A') \longrightarrow \cdots$$

sînt exacte.

3.5. Propoziţiile precedente (cu excepţia propoziţiei de la punctul 1.2, unde am presupus numai $\varphi \circ \psi = 0$), rămîn adevărate dacă, în enunţurile lor, schimbăm, între ele, Λ-endomorfismele φ şi ψ.

3.6. Rezultatele expuse sînt proprii categoriilor abeliene.

Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană şi fie $\mathcal{A}(\Phi, \Psi)$ categoria ale cărei obiecte sînt tripletele (A, φ, ψ) cu $\mathcal{A}$ obiect în $\mathcal{A}$, φ şi ψ morfisme $A \to A$ astfel ca $\varphi\psi = 0$ & $\psi\varphi = 0$ şi ale cărei morfisme sînt morfismele din $\mathcal{A}$ care comută cu φ şi ψ. Rezultă imediat că $\mathcal{A}(\Phi, \Psi)$ este o categorie abeliană în care $\mathcal{A}$ se scufundă canonic. Definind $H_{\varphi.\psi}(A)$ şi $H_{\psi.\varphi}(A)$ ca mai sus, obţinem functori definiţi pe categoria $\mathcal{A}(\Phi, \Psi)$ cu valori în $\mathcal{A}$. Transpunerea rezultatelor este acum imediată.

Primită la redacţie la 9 iulie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. BĂNICĂ, C., POPESCU, N., *Diferenţiale generalizate*, Com. Acad. R.P.R., **XIII**, *6*, 523–528 (1963).
2. BOURBAKI, N., *Théorie des ensembles*. Ch. III, *Ensembles ordonnés*, Paris, Hermann, 1956, § 1, punctul 2.
3. CARTAN, H., EILENBERG, S., *Homological algebra*. Princeton, 1956, Ch. III.
4. GROTHENDIECK, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. Journal, **9**, 2, 3 (1957).

DISTRIBUȚIA EFORTURILOR, PRODUSE DE VARIAȚIA DE TEMPERATURĂ, ÎN CALEA FERATĂ SUDATĂ CONTINUU

DE

C. C. TEODORESCU și RADU BĂDESCU

Institutul politehnic, București

Autorii studiază distribuția eforturilor cauzate de variațiile temperaturii în linia ferată sudată pe porțiuni mari, aceasta fiind asimilată unei grinzi rectilinii așezate pe un balast considerat ca un mediu elastic. S-au tratat două cazuri, cazul A al unei rezistențe longitudinale, repartizate continuu în lungul axei grinzii, și cazul B al rezistențelor longitudinale punctuale aplicate în fiecare traversă. Alte cazuri vor face obiectul unei viitoare lucrări.

INTRODUCERE

Calea ferată cu șini lungi, sudate pe tronsoane de sute de metri, este liberă la cele două extremități, căci ea este supusă la dilatație în urma unei urcări de temperatură. Din cauză că dilatația nu este liberă, deoarece șinele sînt montate pe traverse îngropate în balast, rezultă rezistențe longitudinale care împiedecă dilatarea în sensul axei căii [1]).

Inginerii feroviari întrebuințează în calculele lor teoria lunecării traverselor, teorie care admite ipoteza unei rezistențe longitudinale constante, uniform repartizate de-a lungul axei căii. Cît timp variația temperaturii este mică, rămînînd în vecinătatea temperaturii de poză a șinelor T_0, această rezistență se opune la deplasare, dar pentru variații mai mari ale temperaturii, această rezistență, atingînd valoarea sa maximă, este anulată de dilatație și atunci calea alunecă și deci se deplasează. Aceasta este echivalent cu o serie de forţe de frecare care apar între şine şi plăcile de suport, între traverse şi balast.

---

[1]) Vom considera aici numai calea rectilinie.

Această teorie duce la diferenţe mari între măsurătorile experimentale şi cifrele corespunzătoare obţinute prin calcul; de aceea aceste ipoteze au fost modificate şi una din cele mai simple teorii actuale se bazează pe elasticitatea balastului. În adevăr, forţele, chiar de o intensitate mică, produc anumite deformaţii elastice ale balastului, deci deplasări ale căii. De altfel, în practica curentă, se ţine seama de elasticitatea suportului în calculul căii pentru sarcinile verticale.

În studiul pe care-l prezentăm în cele ce urmează, se examinează aspectul matematic al problemei determinării eforturilor produse de variaţia temperaturii T, în calea cu şini sudate continuu, *asimilînd calea cu o grindă aşezată pe un mediu elastic*. Calculul nu se mai bazează pe o ipoteză de rigiditate, ca în cazul lunecării, şi el ne va conduce, *într-o primă aproximaţie*, la aspecte matematice pe care credem folositor să le facem cunoscute.

Problema se poate ataca sub două aspecte diferite, pornind de la:

A) o rezistenţă longitudinală, repartizată continuu de-a lungul axei şinei;

B) o rezistenţă longitudinală punctuală, prin forţe aplicate în fiecare traversă.

Vom trata pe rînd aceste două aspecte, ceea ce constituie un punct de plecare, *o primă aproximaţie*, în studiul acestei importante probleme feroviare.

A) REZISTENŢĂ LONGITUDINALĂ CONTINUĂ

1) Primul caz particular

Luăm axa căii rectilinie $A'MA$ ca axă Ox (fig. 1), originea O în mijlocul fix M, şi considerăm mărimile următoare:

Deplasarea $u(x)$ a unui punct $P(x)$ al grinzii $A'OA$ cu care asimilăm calea;

Rezistenţa longitudinală $p(x)$ în acest punct;

Efortul normal $N\ (x)$ în secţiunea din P;

Tensiunea $\sigma\ (x)$ în aceeaşi secţiune.

Vom putea scrie:

$$N = -\int_x^l p\ (x)\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = p\ (x) \tag{A.1}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}, \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{A}\,\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{A}\,p\ (x),\ l = AM$$

A fiind aria secţiunii transversale a grinzii în punctul P. Deoarece deplasarea u este proporţională şi de sens opus cu rezistenţa longitudinală p, avem

$$p = -\,Cu \tag{A.2}$$

unde C este coeficientul de elasticitate în kg/cm^2.

Să scriem deplasarea u a punctului P faţă de punctul fix O. Vom avea (α fiind coeficientul de dilataţie liniară al oţelului, $\theta = T - T_0$ variaţia de temperatură faţă de temperatura de poză T_0)

$$u = \alpha\,\theta\,x - \int_0^x \frac{\sigma}{E}\,\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \alpha\theta - \frac{\sigma}{E}, \tag{A.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{E}\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = 0$$

şi ţinînd seamă de (A.1) şi (A.2), obţinem ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - B^2\,u = 0 \tag{A.4}$$

cu notaţia $B^2 = \dfrac{C}{AE}$, unde B are dimensiunea : cm^{-1}.

Eliminarea deplasării u între (A.1), (A.2) şi (A.4) pentru a găsi ecuaţia corespunzătoare care ne dă pe σ, ne duce la relaţia

$$u = -\frac{p}{C} = -\frac{A}{C}\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = \alpha\theta x - \int_0^x \frac{\sigma}{E}\,\mathrm{d}x$$

şi derivînd ultima egalitate găsim

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - \frac{C\sigma}{AE} - \frac{\alpha\theta C}{A} = 0 \tag{A.5}$$

Condiţiile la limite fiind

$$\begin{cases} \text{pentru } x = l, & \sigma = 0, \quad N = 0 \\ \text{pentru } x = 0, & u = 0, \quad p = 0 \end{cases} \tag{A.6}$$

iar soluţiile generale ale ecuaţiilor (A.4) şi (A.5) scriindu-se

$$u = C_1\,\mathrm{ch}\,Bx + C_2\,\mathrm{sh}\,Bx$$

$$\sigma = C_3\,\mathrm{ch}\,B\,(l-x) + C_4\,\mathrm{sh}\,B\,(l-x) + \alpha\theta\,E, \quad C_i \in R\ (i = 1, 2, 3, 4) \tag{A.7}$$

găsim valorile

$$C_1 = 0, \quad C_3 = -\,\alpha\theta\,E.$$

Deoarece avem

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = BC_2\,\mathrm{ch}\,Bx \tag{A.8}$$

după relaţia a doua (A.3) se deduce C_2 făcînd $x = l$

$$C_2 = \frac{\alpha\theta}{B\,\mathrm{ch}\,Bl}$$

Deplasarea u are deci expresia

$$u = \frac{\alpha\theta}{B \operatorname{ch} Bl} \operatorname{sh} Bx$$

din care, printr-o derivare, se deduce σ :

$$\sigma = E\,\alpha\theta - \frac{\alpha\,\theta\,E}{\operatorname{ch} Bl} \operatorname{ch} Bx = \alpha\theta\,E \left[1 - \frac{\operatorname{ch} Bx}{\operatorname{ch} Bl}\right]. \tag{A.9}$$

Pe de altă parte, cum $p = A\,\frac{d\sigma}{dx}$, a doua condiție (A.6) introdusă în expresia :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = -\,B\,[C_4 \operatorname{ch} B\,(l-x) - \alpha\theta\,E \operatorname{sh} B\,(l-x)]$$

ne dă valoarea :

$$C_4 = \alpha\theta\,E \operatorname{th} Bl.$$

Obținem din (A.7) σ și sub o altă formă :

$$\sigma = \alpha\theta\,E\,[1 - \operatorname{ch} B\,(l-x) + \operatorname{th} Bl \operatorname{sh} B\,(l-x)] \tag{A.10}$$

care de altfel este identică cu (A.9).

Din (A.1) deducem $N = A\sigma$ iar din (A.2)

$$\begin{aligned} p\,(x) &= -\,A\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = -C\,\frac{\alpha\theta}{B \operatorname{ch} Bl} \operatorname{sh} Bx = \\ &= \alpha\,B\,\theta\,E\ [\operatorname{sh}\ B\,(l-x) - \operatorname{th} Bl \operatorname{ch} B\,(l-x)]. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Astfel problema este rezolvată.

2) Al doilea caz particular

Dacă în timpul deplasării sale de-a lungul axei Ox, calea întîlnește un obstacol fix așezat în A (și în A'), obstacol care este materializat printr-o *forță constantă*

$$\overline{F} = \bar{i}\,\overline{F}$$

dirijată de-a lungul axei Ox înspre originea O, această problemă va fi tratată în același fel ca la punctul precedent, deoarece avem

$$N = F - \int_x^l p\,(x)\,\mathrm{d}x. \tag{A.12}$$

Celelalte condiții la limite se scriu în acest caz :

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{pentru } x = l, & \sigma = \dfrac{F}{A} = \sigma_a, & & N = F, \\ \text{pentru } x = 0, & u = 0, & & p = 0. \end{array}\right\} \tag{A.13}$$

Dacă punem $\sigma_t = \alpha\theta E$, atunci vom găsi ecuațiile diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - Bx = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x^2} - B\sigma + B^2\sigma_t = 0 \tag{A.14}$$

și soluțiile problemei la limită considerate sînt

$$u = \frac{\sigma_t - \sigma_a}{BE\,\mathrm{ch}\,Bl}\,\mathrm{sh}\,Bx, \quad p = AB\,(\sigma_a - \sigma_t)\,\frac{\mathrm{sh}\,Bx}{\mathrm{ch}\,Bl}$$

$$\sigma - \sigma_t = (\sigma_a - \sigma_t)\,\frac{\mathrm{ch}\,Bx}{\mathrm{ch}\,Bl} \tag{A.15}$$

care generalizează expresiile (A.8), (A.9) și (A.11), căci dacă facem $F = 0$ în (A.15), deci $\sigma_a = 0$, se obțin aceste expresii.

Pornind de la (A.15) se poate regăsi o relație dată de C. Micloși [3] pentru calea de lungime infinită. Este vorba de valoarea tensiunii σ din secțiunea P cînd lungimea l tinde către infinit. Pentru aceasta, vom înlocui în ultima relație (A.15) pe x[2]) prin $l - x$ și vom determina limita pentru un x fix,

$$\lim_{l\to\infty} \sigma = \sigma_\infty(x) = \lim_{l\to\infty}\left[\sigma_t - (\sigma_a - \sigma_t)\frac{\mathrm{ch}\,B\,(l-x)}{\mathrm{ch}\,Bl}\right] =$$

$$= \sigma_t + (\sigma_a - \sigma_t)\lim_{l\to\infty}\frac{\mathrm{ch}\,B\,(l-x)}{\mathrm{ch}\,Bl}.$$

Or, fiindcă

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\mathrm{ch}\,B\,(l-x)}{\mathrm{ch}\,Bl} = \lim_{l\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{B\,(l-x)} + \mathrm{e}^{-B\,(l-x)}}{\mathrm{e}^{Bl} + \mathrm{e}^{-Bl}} =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-Bx} + \mathrm{e}^{-B\,(2l-x)}}{1 + \mathrm{e}^{-2Bl}} = \mathrm{e}^{-Bx}$$

găsim pentru efortul unitar σ, aflat la distanța x de extremitatea A,

$$\sigma_\infty(x) = \sigma_t + (\sigma_a - \sigma_t)\,\mathrm{e}^{-Bx}. \tag{A.16}$$

Pentru $F = 0$ deci $\sigma_a = 0$, avem

$$\sigma_\infty(x) = \sigma_t\,(1 - \mathrm{e}^{-Bx}) \tag{A.17}$$

adică expresia găsită de C. Micloși în [1].

Relația (A.16) generalizează deci această expresie pentru cazul unei forțe constante F aplicate în A.

---

[2]) Înlocuind pe x prin $l - x$, luăm originea în A și schimbăm sensul pozitiv pe Ox. Expresiile (A. 15) ale lui u și p arată că noile expresii trebuie să schimbe semnul. Această schimbare de origine este necesară pentru că în lucrarea menționată [1] originea este așezată în extremitatea A.

De asemenea pentru $F \neq 0$ avem

$$u_\infty(x) = \frac{(\sigma_a - \sigma_t)e^{-Bx}}{BE}$$

$$p_\infty(x) = AB(\sigma_t - \sigma_a)e^{-Bx}$$

$$\sigma_\infty(0) = \sigma_a.$$

B) REZISTENŢE PUNCTUALE

1) Punerea în ecuaţie

Vom presupune ca în cazul A) că axa căii este rectilinie, M mijlocul ei este în originea O, A şi A' sînt cele două extremităţi libere ale grinzii cu care am asimilat calea. În momentul cînd se face poza liniei, la temperatura T_0, se presupune că nu avem nici un efort în cale. Admiţînd că de-a lungul căii *temperatura este în orice moment constantă* T, atunci cînd această temperatură variază cu $\theta = T - T_0$, şinele se vor dilata (contracta), cele două extremităţi A şi A' se vor deplasa simetric, dar mijlocul M rămîne fix. În aceste condiţii, traversele se opun la deplasare şi avem în fiecare traversă forţe X_p, acţionînd în puncte echidistante în axa şinei, puncte ce corespund pe verticală cu axele traverselor (fig. 2). Aceste forţe fiind necunoscute, vom avea un sistem hiperstatic cu un număr mare de necunoscute.

Însemnăm cu a distanţa între axele a două traverse vecine şi fie $2n$ numărul traverselor; lungimea căii va fi

$$2l = 2n \cdot a. \tag{B.1}$$

Vom numerota traversele şi forţele începînd de la mijloc, din O; pentru Oa, X_1 aplicată în $x_1 = a$, X_2 aplicată în $x_2 = 2a, \ldots, X_n$ aplicată în $x_n = na$ şi în mod analog pentru tronsonul OA'. Ţinînd seama de simetrie, vom examina numai jumătatea OA a grinzii.

Deplasarea traversei de rang p se efectuează pe de o parte prin variaţia $\theta = T - T_0$ a temperaturii, ceea ce conduce la o dilataţie — (contracţie) a tronsonului $Ox_p = pa$,

$$pa \cdot \alpha\theta$$

α fiind coeficientul de dilataţie liniară al oţelului, şi pe de altă parte prin scurtarea (lungirea) produsă de forţele ce revin la acest tronson

$$X_p + X_{p+1} + \ldots + X_n \text{ pentru intervalul } p, \ (x_{p-1}, x_p)$$

$$X_{p-1} + X_p + X_{p+1} + \ldots + X_n \text{ pentru intervalul } p-1, \ (x_{p-2}, x_{p-1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_p + X_{p+1} + \ldots + X_n \text{ pentru primul interval } (O, x_1)$$

Scurtarea totală va fi

$$a\,\frac{X_p + X_{p+1} + \dots + X_n}{A\,E} + a\,\frac{X_{p-1} + X_p + \dots + X_n}{AE} +$$
$$+ \dots + a\,\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{A\,E}$$

cu A în cm^2 – aria secţiunii transversale a grinzii – şi E în kg/cm^2 – coeficientul de elasticitate al oţelului.

Deplasarea totală a traversei x_p se va scrie atunci

$$(\text{B.2})\quad u_p = a\alpha\, p\,\theta - \frac{a}{AE}[X_1 + 2X_2 + \dots + pX_p + p\,X_{p+1} + \dots + pX_n].$$

În ipoteza elastică, atunci cînd avem

$$(\text{B.3})\qquad X_p = C\,u_p \geqslant 0,$$

unde C este coeficientul elastic al căii în kg/cm^2, vom putea grupa necunoscutele X, după ce am notat

$$(\text{B.4})\qquad \frac{AE}{aC} = y$$

şi obţinem relaţia

$$X_1 + 2X_2 + \dots + (p-1)\,X_{p-1} + (p+y)\,X_p + pX_{p+1} + \dots + pX_n =$$
$$(\text{B.5})\qquad = AE_p\,\alpha\theta.$$

Scriind relaţiile (B.5) care corespund la toate traversele tronsonului $O\,A$, adică dînd lui p valorile $1, 2, \dots, n$, obţinem sistemul

$$(\text{B.5})\quad \begin{aligned} &(1+y)\,X_1 + X_2 + \dots + X_p + X_{p+1} + \dots + X_n = \beta\theta,\\ &X_1 + (2+y)\,X_2 + \dots + 2X_p + 2x_{p+1} + \dots + 2X_n = 2\beta\theta,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &X_1 + 2X_2 + \dots + pX_p + (p+1+y)X_{p+1} + \dots + (p+1)\,X_n = (p+1)\beta\theta,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &X_1 + 2X_2 + \dots + pX_p + (p+1)\,X_{p+1} + \dots + (n+y)\,X_n = n\beta\theta, \end{aligned}$$

în care $\beta = AE\alpha$.

2. Rezolvarea sistemului liniar (B.5)

Sistemul (B.5) de n ecuaţii liniare cu n necunoscute $X_1, X_2, \dots, X_n$, ai cărui coeficienţi depind de parametrii $\beta\theta$ şi y, poate fi rezolvat prin metoda lui Cramer

$$(\text{B.6})\qquad X_p = \frac{D_n^p}{D_n}, \qquad (p = 1, 2, \dots, n)$$

dacă determinantul D_n este diferit de zero. Acest determinant simetric are expresia

$$
(\mathrm{B}.7)\quad D_n = \begin{vmatrix}
1+y & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 2+y & 2 & \dots & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\
1 & 2 & 3+y & \dots & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 2 & 3 & \dots & p+y & p & \dots & p & p \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 2 & 3 & \dots & p & p+1 & \dots & n-2 & n-1 \\
1 & 2 & 3 & \dots & p & p+1 & \dots & n-1+y & n-1 \\
1 & 2 & 3 & \dots & p & p+1 & \dots & n-1 & n+y
\end{vmatrix}
$$

adică un polinom de gradul n în y, cu

$$
(\mathrm{B}.8)\quad D_0 = 1,\ D_1 = y + 1,\ D_2 = y^2 + 3y + 1,\ D_3 = y^3 + 6y^2 + 5y + 1.
$$

Pentru a calcula pe D_n avem, scăzînd în (B.7) elementele fiecărei linii din elementele corespunzătoare ale liniei următoare, începînd de la a $(n-1)$-a linie,

$$
D_n = \begin{vmatrix}
1+y & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\
-y & 1+y & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\
0 & -y & 1+y & \dots & 1 & 1 & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1+y & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & -y & 1+y & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -y & 1+y
\end{vmatrix}
$$

Efectuînd în sens invers aceleași operații, ca mai sus, începînd de la linia a doua, găsim determinantul simetric

$$
D_n = \begin{vmatrix}
1+2y & -y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-y & 1+2y & -y & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -y & 1+2y & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1+2y & -y & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & -y & 1+2y & -y \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -y & 1+y
\end{vmatrix}
$$

Dezvoltarea acestui determinant după elementele primei coloane ne conduce la relaţia

$$D_n=(1+2y)\,D_{n-1}+y\begin{vmatrix} -y & 0 & 0\ \dots\ 0 & 0 & 0\\ -y & 1+2y & -y\ \dots\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -y & 1+2y\dots\ 0 & 0 & 0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 0 & 0 & 0\ \dots -y & 1+2y & -y\\ 0 & 0 & 0\ \dots\ 0 & -y & 1+y \end{vmatrix}$$

care se scrie, efectuînd dezvoltarea determinantului după elementele primei linii,

$$D_n=(1+2y)\,D_{n-1}-y^2\,D_{n-2}\,. \tag{B.9}$$

Avem o relaţie de recurenţă între trei polinoame consecutive D_n, D_{n-1}, D_{n-2} care este verificată de cele patru polinoame (B.8).

Calculul determinantului D^p_n:

$$D^p_n=\begin{vmatrix} 1+y & 1 & 1\ \dots\ 1 & 1\ \dots & 1 & 1\\ 1 & 2+y & 2\ \dots\ 2 & 2\ \dots & 2 & 2\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 1 & 2 & 3\ \dots\ p & p\ \dots & p & p\\ 1 & 2 & 3\ \dots\ p+1 & p+1+y\dots & p+1 & p+1\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 1 & 2 & 3\ \dots\ n-1 & p+1 & \dots n-1+y & n-1\\ 1 & 2 & 3\ \dots\ n & p+1 & \dots\ n-1 & n+y \end{vmatrix}$$

în care coloana p conţine coeficienţii respectivi ai coloanei lui $\beta\theta$, se efectuează observînd că ultima coloană se scrie sub forma

$$\begin{array}{c} 1+0\\ 2+0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ p+0\\ p+1+0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ n+y \end{array}$$

D_n poate deci să fie înlocuit prin suma a doi determinanţi, primul avînd două coloane identice — coloana p şi ultima — este identic nul, iar al doilea

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1+y & 1 & 1\ \dots & 1 & 0\\ 1 & 2+y & 2\ \dots & 2 & 0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 1 & 2 & 3\ \dots & n-1+y & 0\\ \hline 1 & 2 & 3\ \dots & n-1 & y \end{array}\right|$$

dezvoltat după elementele ultimei coloane, ne conduce la relaţia de recurenţă

(B.10) $$D_n^p = y\, D_{n-1}^p \, .$$

Din aproape în aproape avem

(B.11) $$D_n^p = y\, D_{n-1}^p = y^2 D_{n-2}^p = \ldots = y^{n-p} D_p^p$$

cu

$$D_p^p = \begin{vmatrix} 1+y & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & \ldots & 2 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & p-1-y & p-1 \\ 1 & \ldots & p-1 & p \end{vmatrix}$$

Cum ultima coloană poate fi scrisă

$$\begin{matrix} 1+0 \\ 2+0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p-1+0 \\ p+y-y \end{matrix}$$

determinantul D_p^p va fi diferenţa a doi determinanţi care vor fi tocmai D_p şi $y\, D_{p-1}$, ceea ce ne dă

(B.12) $$D_p^p = D_p - y\, D_{p-1}$$

şi

$$D_n^p = y^{n-p} D_p - y^{n-p+1} D_{p+1}$$

deci

(B.13) $$X_p = \frac{\dfrac{D_p}{y^p} - \dfrac{D_{p-1}}{y^{p-1}}}{\dfrac{D_n}{y^n}}\, \beta\theta$$

şi X_p se exprimă numai cu ajutorul determinantului D_m.

3. Calculul determinantului D_n

Pentru calculul acestui determinant, observînd că $\dfrac{D_n}{y^n}$ este de asemenea un polinom de gradul n în $\dfrac{1}{y} = z$, vom putea introduce şirul de polinoame, de grad egal cu indicii,

$$P_n(z) = \frac{D_n(y)}{y^n}, \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

cu $P(0) = 1$, $P_1(z) = z + 1$. Relaţia recurentă (B.9) devine

$$P_n(z) = (z + 2)\,P_{n-1}(z) - P_{n-2}(z) \tag{B.14}$$

şi prin substituţia

$$z + 2 = 2u$$

ea poate fi scrisă sub forma

$$P_n(2u - 2) = 2u\,P_{n-1}(2u - 2) - P_{n-2}(2u - 2) \tag{B.15}$$

cu

$$P_0 = 1, \quad P_1(2u - 2) = 2u - 1.$$

Aceasta este chiar relaţia recurentă a polinoamelor de speţa întîi $T_n(u)$ studiată de Cebîşev [2] dar pentru care

$$T_0 = 1, \quad T_1(u) = u.$$

Pentru a găsi relaţia care leagă $P_n(2u - 2)$ cu $T_n(u)$, putem scrie, din aproape în aproape,

$$\begin{aligned}
&T_0 = 1, && P_0 = 2T_0 - 1,\\
&T_1 = u, && P_1 = 2T_1 - P_0 = 2u - 1,\\
&T_2 = 2u^2 - 1, && P_2 = 2T_2 - P_1 = (4u^2 - 2) - (2u - 1) = 4u^2 - 2u - 1,\\
& && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{n-2} &= 2T_{n-2} - P_{n-3},\\
P_{n-1} &= 2T_{n-1} - P_{n-2},\\
P_n &= 2T_n - P_{n-1}.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Verificarea acestor relaţii este imediată căci, înmulţind cu $2u$ egalitatea ce ne dă P_{n-1} şi adunînd ultimele trei identităţi, găsim

$$(P_n - 2uP_{n-1} + P_{n-2}) = 2(T_n - 2uT_{n-1} + T_{n-2}) - (P_{n-1} - 2uP_{n-2} + P_{n-3})$$

şi fiecare din aceste trei paranteze este nulă în virtutea relaţiilor (B.14) şi (B.15). De altfel se poate stabili ultima relaţie (B.16) prin inducţie completă.

Pentru a calcula P_n în funcţie de T_i, vom înmulţi cele $(n + 1)$ egalităţi (B.16) respectiv cu $(-1)^n, (-1)^{n-1}, (-1)^{n-2}, \ldots, (-1)^2, (-1), 1$ şi pe urmă, adunînd toate aceste egalităţi, vom obţine dispariţia tuturor $P_i\,(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$ şi vom găsi

$$P_n(2u - 2) = 2\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}\,T_p(u) + (-1)^{n+1}. \tag{B.17}$$

Cum polinoamele lui Cebîşev $T_p(u)$ au expresia cunoscută

$$T_p(u) = \frac{1}{2}\left[\left(u + \sqrt{(u^2 - 1)^p}\right) + \left(u - \sqrt{(u^2 - 1)^p}\right)\right]$$

vom putea scrie

$$P_n(2u-2) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} [(u+R_0)^p + (u-R_0)^p] + (-1)^{n+1}$$

cu $R_0 = \sqrt{u^2-1}$, sau, întrucît avem de însumat progresii geometrice,

$$P_n(2u-2) = (-1)^n \left[\frac{1-(-u-R_0)^{n+1}}{1+u+R_0} + \frac{1-(-u+R_0)^{n+1}}{1+u-R_0} \right] + (-1)^{n+1}.$$

Dacă observăm că $R_0^2 = u^2-1$ și că suma

$$\frac{1}{1+u+R_0} + \frac{1}{1+u-R_0} - 1 = \frac{2(1+u)}{(1+u)^2-R^2} - 1 = 1-1$$

este nulă, vom avea

$$P_n(2u-2) = \frac{1}{2(1+u)} [(1+u-R_0)(u+R_0)^{n+1} + (1+u+R_0)(u-R_0)^{n+1}]$$

sau, cum $u^2-R_0^2 = 1$,

$$P_n(2u-2) = \frac{1}{2(1+u)} [(u+R_0)^{n+1} + (u+R_0)^n + (u-R_0)^{n+1} + (u-R_0)^n].$$

Revenind, în sfîrșit, la variabila $z = 2u-2$, de unde $u = \dfrac{z+2}{2}$, deducem expresia căutată

$$\text{(B.18)} \quad P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}(z+4)} [(z+4+R)(z+2+R)^n + (z+4-R)(z+2-R)^n]$$

cu $R = \sqrt{z^2+4z}$. Verificarea pentru cele trei polinoame $P_0 = 1$, $P_1 = z+1$, $P_2 = z^2+3z+1$ este imediată și se vede în plus că factorul $z+4$ se simplifică, așa încît *membrul al doilea al relației* (B.18) *depinde numai de puterile pare ale lui* $R : R^{2n} = z^n(z+4)^n$. Relația recurentă (B.14) este de asemenea verificată.

4. Calculul expresiei lui X_p

Dacă exprimăm pe X_p cu ajutorul polinoamelor $P_i(z)$, avem

$$\text{(B.19)} \quad X_p = \frac{P_p(z) - P_{p-1}(z)}{P_n(z)} \beta\theta$$

și diferența $P_p - P_{p-1}$ se scrie

$$P_p - P_{p-1} = \frac{1}{2^{p+1}(z+4)} \{(z+4+R)[(z+2+R)^p - 2(z+2+R)^{p-1}] + \\ + (z+4+R)[(z+2-R)^p - 2(z+2-R)^{p-1}]\}$$

sau

$$P_p - P_{p-1} = \frac{1}{2^{p+1}(z+4)}\{(z+4+R)(z+R)(z+2+R)^{p-1} +$$
$$+ (z+4+R)(z-R)(z+2-R)^{p-1}\}.$$

Efectuînd în fiecare termen produsul primelor două paranteze, găsim

$$P_p - P_{p-1} = \frac{1}{2^p}\left\{\left[z + \frac{(z+2)R}{z+4}\right](z+2+R)^{p-1} + \right.$$
$$\left. + \left[z - \frac{(z+2)R}{z+4}\right](z+2-R)^{p-1}\right\}$$

sau încă, după amplificare cu R a celor două fracţii,

$$\text{(B.20)} \qquad P_p - P_{p-1} = \frac{z}{2^{p+1}R}\left[(z+2+R)^p - (z+2-R)^p\right].$$

Se verifică imediat diferenţele

$$P_1 - P_0 = z, \quad P_2 - P_1 = z^2 + 2z, \quad P_3 - P_2 = z^3 + 4z^2 + 3z$$

şi se găseşte expresia lui X_p :

$$\text{(B.21)} \qquad X_p = 2^{n-p+1}\frac{z(z+4)\left[(z+2+R)^p - (z+2-R)^p\right]}{\{(z+4+R)(z+2+R)^n + (z+4-R)(z+2-R)^n\}R}\,\beta\theta.$$

În sfîrşit, împărţind numitorul cu $(z+4)$ şi procedînd ca mai sus se obţine

$$\text{(B.22)} \qquad X_p = 2^{n-p+1}\frac{z\left[(z+2+R)^p - (z+2-R)^p\right]}{(z+R)(z+2+R)^n - (z-R)(z+2-R)^n}\,\beta\theta$$

sau amplificînd numărătorul cu R

$$\text{(B.23)} \qquad X_p(z) = 2\,\frac{\left(1+\frac{z}{2}+\frac{R}{2}\right)^p - \left(1+\frac{z}{2}-\frac{R}{2}\right)^p}{\left(1+\frac{R}{z}\right)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{R}{2}\right)^n - \left(1-\frac{R}{z}\right)\left(1+\frac{z}{2}-\frac{R}{2}\right)^n}\,\beta\theta.$$

5. Altă expresie a lui $X_p(z)$

Polinomul $P_n(z)$ poate fi pus sub o altă formă mai restrînsă, folosind următoarea expresie a polinoamelor $T_n(u)$:

$$T_n(u) = \cos(n \arccos u)$$

şi pornind de la suma (B.17) care se scrie

$$P_n(2u-2) = (-1)^n + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}T_k(u)$$

sau

$$P_n(2u-2) = (-1)^n\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos k\varphi\right],\quad (\varphi = \text{arc cos}\, u).$$

Deoarece avem

$$1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos k\varphi = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(-1)^n\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\varphi\right)}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}\right]$$

deducem, înlocuind $2u - 2 = z$,

$$\text{(B.24)}\qquad P_n(z) = \frac{\cos\left[\dfrac{2n+1}{2}\,\text{arc cos}\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\right]}{\cos\left[\dfrac{1}{2}\,\text{arc cos}\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\right]}.$$

Mai departe, întrucît avem

$$P_p(2u-2) - P_{n-1}(2u-2) = \frac{\cos\left(\dfrac{2p+1}{2}\varphi\right) - \cos\left(\dfrac{2p-1}{2}\varphi\right)}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$$

vom găsi

$$P_p(z) - P_{p-1}(z) = \frac{-\sin(p\,\varphi)\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$$

şi dacă $z \in [-4{,}0]$

$$\text{(B.25)}\qquad X_p(z) = -\sin\left[\frac{1}{2}\,\text{arc cos}\left(1+\frac{z}{2}\right)\right]\frac{\sin\left[p\,\text{arc cos}\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\right]}{\cos\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\text{arc cos}\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\right]}\,\beta\theta$$

care este expresia căutată pentru $X_p(z)$.

Dacă $z \geqslant 0$, sau $z \leqslant -4$, vom găsi

$$X_p(z) = \text{sh}\left[\frac{1}{2}\,\text{arg ch}\left(1+\frac{z}{2}\right)\right]\frac{\text{sh}\left[p\,\text{arg ch}\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\right]}{\text{ch}\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\text{arg ch}\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\right]}\,\beta\,\theta$$

6. Discuţie

Dacă *z este negativ* aşa încît $-1 < 1 + \frac{z}{2} < 1$, adică $-4 < z < 0$, putem pune

$$1 + \frac{z}{2} = \cos\gamma, \qquad z = \frac{1}{y}$$

şi se găseşte pentru X_p expresia

$$X_p = -\sin\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin(p\gamma)}{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma\right]}\,\beta\theta \tag{B.26}$$

care se putea deduce direct din (B.25), căci

$$R = \sqrt{z^2 + 2z} = 2\sqrt{\left(1 + \frac{z}{2}\right)^2 - 1} = 2i\sin\gamma\,.$$

Dacă *z este pozitiv*, deci $1 + \frac{z}{2} > 1$, putem pune

$$1 + \frac{z}{2} = \mathrm{ch}\,\gamma$$

şi avem

$$X_p(z) = 2\,\frac{(\mathrm{ch}\,\gamma + \mathrm{sh}\,\gamma)^p - (\mathrm{ch}\,\gamma - \mathrm{sh}\,\gamma)^p}{\left(1 + \mathrm{cth}\,\frac{\gamma}{2}\right)(\mathrm{ch}\,\gamma + \mathrm{sh}\,\gamma)^n - \left(1 - \mathrm{cth}\,\frac{\gamma}{2}\right)(\mathrm{ch}\,\gamma - \mathrm{sh}\,\gamma)^n}\,\beta\theta$$

căci

$$R = 2\sqrt{\mathrm{ch}^2\gamma - 1} = 2\,\mathrm{sh}\,\gamma\,, \quad z = 2\,(\mathrm{ch}\,\gamma - 1)\,,$$

$$\frac{R}{z} = \frac{\mathrm{sh}\,\gamma}{\mathrm{ch}\,\gamma - 1} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{\gamma}{2}}\,.$$

Cum $\mathrm{ch}\,\gamma \pm \mathrm{sh}\,\gamma = e^{\pm\gamma}$, găsim expresia

$$X_p = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{sh}\,(p\,\gamma)}{\mathrm{sh}\,(n\,\gamma)\,\mathrm{sh}\,\frac{\gamma}{2} + \mathrm{ch}\,(n\,\gamma)\,\mathrm{ch}\,\frac{\gamma}{2}}\,\beta\theta$$

care se scrie

$$X_p = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{sh}\,(p\,\gamma)}{\mathrm{ch}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\gamma\right]}\,\beta\theta\,. \tag{B.27}$$

Dacă z este negativ, aşa fel încît $1+\frac{z}{2}<-1$, adică $z<-4$, se obţine o expresie analogă cu (B.27), dar ea nu prezintă nici un interes, deoarece în această problemă ne interesează numai limita lui z tinzînd către zero.

7. Trecerea la limită pentru l infinit şi a fix

Să căutăm limita lui $X_p(z)$ cînd lungimea l a căii creşte, tinzînd către infinit, ceea ce implică, pentru a fix, că şi n tinde către infinit. Punînd $x=lX$, cu $0\leqslant X\leqslant 1$, vom avea $l=an$, $x=ap=lX$, $p=nX$. Deci p va tinde şi el către infinit. Cînd X parcurge segmentul (0,1), x parcurge întreagă calea, de la mijlocul 0 pînă la infinit (axa Ox pozitivă).

Expresia lui X_p devine

$$X_p(z)=2\,\frac{w^{nX}-w^{-nX}}{Aw^n-Bw^{-n}}$$

dacă punem $w=1+\frac{z}{2}+\frac{R}{2}$, $A=1+\frac{R}{z}$, $B=1-\frac{R}{z}$.

Pentru z pozitiv, w este de asemenea pozitiv, mai mare ca unitatea, deci $X_p(z)$ se scrie

$$X_p(z)=2w^{n(X-1)}\,\frac{1-w^{-2nX}}{A-Bw^{-2n}}$$

şi această expresie tinde către zero pentru $X\in(0,1)$ sau către

$$\frac{2}{A}=\frac{2z}{z+R}=\frac{\sqrt{z^2+4z}-z}{2}=\frac{\sqrt{1+4y}-1}{2y},$$

dacă $X=1$. Limita lui $X_p(z)$ la extremitatea din dreapta a căii, cînd această extremitate tinde către infinit, este deci egală cu

$$\lim_{l\to\infty} x_p(z)=\frac{\sqrt{1+4y}-1}{2y},$$

rezultat obţinut prin consideraţii geometrice într-o altă lucrare.

Se obţine acelaşi rezultat dacă z este negativ deci y de asemenea negativ.

CONCLUZII

Am arătat prin analiza matematică a problemei, că ipoteza balastului elastic ne conduce la o distribuţie a rezistenţelor longitudinale după o lege exponenţială, ceea ce este destul de îndepărtat de distribuţia uniformă care este la baza teoriei lunecării prin frecare.

Ipoteza elastică a fost întrebuinţată de diferiţi cercetători şi în prezent ea nu mai poate fi neglijată. Fără îndoială că această ipoteză prezintă încă puncte dificile, ca de exemplu faptul că coeficientul C de tasare al balastului este departe de a fi o constantă şi că el variază în limite destul de largi. Poate că şi ipoteza corpului ideal elastic este prea simplă pentru cazul balastului şi nu răspunde decît pentru forţele foarte mici, pe cînd pentru valori mai mari ale acestor forţe se produce o întărire, care ne duce la o caracteristică diferită.

Am prezentat două aspecte ale problemei : rezistenţa longitudinală continuă şi forţe aplicate în puncte discrete. Cea de-a doua soluţie, obţinută rezolvînd sistemul static nedeterminat cu n necunoscute, deşi a condus la calcule laborioase, totuşi a dus la o expresie simplă, care constituie un algoritm, pentru calculele numerice la maşina electronică. Pe lîngă aceasta ni se pare mai aproape de realitate să considerăm forţe izolate, care acţionează în puncte discrete şi care lasă şina liberă între reazeme, în loc de a lua o rezistenţă continuă.

Dezvoltările precedente nu pot rezolva problema flambajului căii, căci am presupus forţele lucrînd în axa şinei, şi aceasta este rectilinie. Dar noi am atacat şi problema reacţiunilor excentrice faţă de axa şinei, şi am căutat în acest caz o soluţie a celor două aspecte A) şi B) menţionate mai sus : forţe repartizate continuu şi forţe acţionînd în puncte discrete. Rezultatele obţinute în această direcţie vor face obiectul unui alt studiu.

Primită la redacţie la 6 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. C. Micloşi, *Sur les problèmes de la voie ferrée sans joints.* Studii şi cercetări ştiinţifice — Baza Academiei R.P.R. — Timişoara, **III**, 3—4 (1956).
2. C. Micloşi, *La théorie de la voie ferrée continue à rails soudés, base pour l'évaluation des résultats expérimentaux.* Metalurgia şi construcţia de maşini, 10, *4* (1958).
3. C. Micloşi, *Théorie des lückenlosen Gleises als Grundlage für die Durchführung von Versuchen.* Deutsche Eisenbahntechnik, *12* (1958).
4. C. C. Teodorescu, *Teoria şinei fără joante supusă la variaţii de temperatură.* Revista Căilor Ferate, *2* şi *4* (1961).
5. C. C. Teodorescu, *Die Kräfte, Spannungen und Verschiebungen infolge von Temperaturschwankungen in stossfrei verschweissten Schienen.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Verkehrswesen — Dresden — Jahrgang 60/61 — Heft 3.

ASUPRA CORESPONDENȚEI DE SPEȚA A TREIA ÎNTRE PLANE PROIECTIVE

DE

MARIUS I. STOKA

Institutul pedagogic, București

Fiind date două plane proiective A_2 (x, y) și E_2 (u^1, u^2) corespondența $u^i = u^i$ (x, y) dintre ele este de speța a treia dacă componentele conexiunii proiective a planului A_2 au forma (4), unde a și m satisfac ecuațiile (3).

În această lucrare se determină conexiunile proiective de speța a treia pentru care a și m sînt polinoame.

În partea a doua a lucrării se obțin conexiunile de speța a treia polinomiale de gradele întîi și doi.

În partea a treia se determină grupurile de mișcări ale conexiunilor obținute în partea a doua.

Fie două plane proiective A_2 (x, y) și E_2 (u^1, u^2) între care este definită corespondența

$$u^i = u^i\,(x, y), \qquad (i = 1{,}2). \tag{1}$$

Dacă notăm cu Γ^i_{jk} conexiunea afină simetrică a spațiului A_2, conexiunea proiectivă a acestui spațiu are componentele [6] [1]).

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{\delta^i_j}{3}\Gamma_k - \frac{\delta^i_k}{3}\Gamma_j, \qquad (\Gamma_j = \Gamma^i_{jk}).$$

Corespondența dintre cele două plane este complet determinată de conexiunea proiectivă ale cărei componente satisfac ecuațiile [6] [2])

$$\left\{\begin{aligned} & d_{y^2} - 2c_{xy} - b_{x^2} - 2da_x + 3cb_x - ad_x + 3\,(c^2 + db)_y = 0, \\ & a_{x^2} - 2b_{xy} - c_{y^2} - 2ad_y + 3bc_y - a_y d + 3\,(b^2 + ac)_x = 0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

---

[1]) P. 100

[2]) P. 143

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 547–562 BUCUREȘTI, 1965.

unde am notat

$$\Pi^1_{22} = a,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = b,\ \Pi^2_{12} = -\Pi^1_{11} = c,\ \Pi^2_{11} = d,\ a = \frac{\partial a}{\partial x}, \ldots$$

După O. Boruvka [1], corespondența (1) este de prima, a doua sau a treia speță după cum ecuația

$$ay'^3 + 3by'^2 - 3cy' - d = 0, \quad \left(y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

care este ecuația curbelor caracteristice a corespondenței are rădăcini distincte, o rădăcină dublă sau o rădăcină triplă.

Prof. G. Vrănceanu a arătat că [6] [3], corespondența (1) este de speța a treia dacă $b = -am$, $c = -am^2$, $d = -am^3$, $(a \neq 0)$.

Cu aceste valori sistemul (2) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &a_{x^2} - 2ma_{xy} + m^2 a_{y^2} - 2m_y a_x - 2(m_x - 2mm_y) a_y + 2(mm_{y^2} + m_y^2 - m_{xy}) = 0, \\ &2(m_x - mm_y) a_x + 2m(-m_x + mm_y + 3m_y^2) a_y + (m_{x^2} - 2mm_{xy} + \\ &\qquad + m^2 m_{y^2} - 2mm_y^2 - 4m_x m_y) a = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Deci, corespondența (1) este de speța a treia dacă conexiunea proiectivă Π^i_{jk} a spațiului A_2 are componentele

$$\Pi^1_{22} = a,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = ma,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = m^2 a,\ \Pi^2_{11} = -m^3 a, (a \neq 0), \tag{4}$$

unde funcțiile $a(x, y)$ și $m(x, y)$ satisfac sistemul (3).

Conexiunea Π^i_{jk} este polinomială dacă

$$a = P_1(x, y)\,[P_2(x, y)]^3, \quad m = \frac{P_3(x,y)}{P_2(x,y)}, \tag{4'}$$

unde $P_i(x, y)$, $(i = 1, 2, 3)$ sînt polinoame.

În această lucrare vom determina conexiunile proiective de speța a treia pentru care a și m sînt polinoame.

În a doua parte a lucrării obținem conexiunile de speța a treia polinomiale de gradele unu și doi.

În partea a treia determinăm grupurile de mișcări ale conexiunilor obținute în partea a doua.

I

Să presupunem mai întîi că a este o constantă. În acest caz sistemul (3) se scrie

$$\left.\begin{aligned} &mm_{y^2} + m_y^2 - m_{xy} = 0, \\ &m_{x^2} - 2mm_{xy} + m^2 m_{y^2} - 2mm_y^2 - 4m_x m_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Din prima ecuație deducem

$$m_x - mm_y = \varphi(x), \tag{6}$$

unde φ este un polinom.

---

[3] P. 145.

De aici rezultă că

$$m = \lambda_1(x) y + + \lambda(x),$$

$\lambda(x)$ şi $\lambda_1(x)$ fiind polinoame.

Înlocuind această valoare în (6) şi scriind că coeficientul lui y este nul, găsim

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = \lambda_1^2,$$

de unde, ţinînd seama că λ_1 este un polinom, rezultă $\lambda_1 = 0$.

Deci $m = \lambda(x)$

Cu această valoare a doua ecuaţie (5) ne dă

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = 0,$$

adică

$$m = \alpha x + \beta$$

α şi β fiind constante şi $\alpha \neq 0$ [4])

Conexiunea Π^i_{jk} are deci componentele

$$\Pi^1_{22} = a, \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = a(\alpha x + \beta), \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = a(\alpha x + \beta)^2, \Pi^2_{11} = = -a(\alpha x + \beta)^3.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x' = \sqrt[3]{\dfrac{a}{\alpha}}(\alpha x + \beta), \\ y' = \sqrt[3]{a^2 \alpha y} \end{cases}$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\Pi'^1_{22} = 1, \Pi'^1_{12} = -\Pi'^2_{22} = x', \Pi'^1_{11} = -\Pi'^2_{21} = x'^2, \Pi'^2_{11} = -x'^3.$$

Deci, dacă a este constant, atunci conexiunea proiectivă are componentele

$$\Pi^1_{22} = 1, \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x, \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = x^2, \Pi^2_{11} = -x^3.$$

Să considerăm acum cazul în care m este o constantă.

În acest caz sistemul (3) se reduce la ecuaţia

$$\frac{\partial^2 a(x,y)}{\partial x^2} - 2m \frac{\partial^2 a(x,y)}{\partial x \partial y} + m^2 \frac{\partial^2 a(x,y)}{\partial y^2} = 0,$$

---

[4]) Dacă $\alpha = 0$, conexiunea are componentele constante, caz studiat de prof. G. Vrănceanu.

care se mai poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} - m\frac{\partial a(x,y)}{\partial y}\right] - m\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} - m\frac{\partial a(x,y)}{\partial y}\right] = 0$$

De aici deducem

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} - m\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = P_1(mx+y)$$

de unde

$$a(x,y) = xP_1(mx+y) + P_2(mx+y),$$

unde P_1 şi P_2 sînt polinoame.

Făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = mx + y, \end{cases}$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\Pi'^1_{22} = x'\,P_1(y') + P_2(y'),\ \Pi'^1_{11} = \Pi'^2_{21} = \Pi'^1_{12} = \Pi'^2_{22} = \Pi'^2_{11} = 0.$$

Deci :

Dacă m este o constantă, conexiunea proiectivă Π^i_{jk} se reduce la forma

$$\Pi^1_{22} = x\,P_1(y) + P_2(y),$$

unde P_1 şi P_2 sînt polinoame, componentele nescrise fiind nule.

Să presupunem acum că polinomul $m(x,y)$ nu conţine variabila y adică $m = m(x)$.

Înlocuind această valoare în sistemul (3), acesta devine

$$\left.\begin{aligned} &a_{x^2} - 2a_{xy}\,m + a_{y^2}\,m^2 - 2a_y\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = 0, \\ &a\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}x^2} + 2(a_x - ma_y)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ţinînd seama că $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} \neq 0$, din a doua ecuaţie (7) deducem

$$a_x = ma_y - \frac{m''}{2m'}a, \qquad \left(m' = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right), \tag{8}$$

care înlocuită în prima ecuaţie (7) ne dă

$$\frac{a_y}{a} = \frac{3m''^2 - 2m'\,m'''}{4m'^3}. \tag{9}$$

De aici rezultă

$$a(x,y) = f(x)\,e^{\varphi(x)\,y} \tag{10}$$

unde am pus

$$\varphi(x) = \frac{3m''^2 - 2m'm'''}{4m'^3}.$$

Dar $a(x, y)$ este un polinom, deci din (10) rezultă

$$\varphi(x) = 0$$

adică

$$2m'm''' - 3m''^2 = 0.$$

Singura soluţie polinomială a acestei ecuaţii este

$$m = \alpha x + \beta.$$

Cu această valoare, din (8) şi (9) deducem $a_x = a_y = 0$, adică $a = \text{const.}$, caz considerat mai sus.

Deci, dacă $a(x, y)$ nu este o constantă, $m(x, y)$ este o constantă sau conţine variabila y.

Să presupunem că $m(x, y)$ este un polinom liniar în y, adică

$$m = \alpha(x)y + \beta(x).$$

Să punem

$$a(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x), \tag{11}$$

unde $a_i(x)$, $(i = 0, 1, \ldots, m)$ sînt polinoame.

Înlocuind aceste valori în prima ecuaţie (3) obţinem

$$a_0''y^n + \ldots + a_n'' - 2(\alpha y + \beta)(na_0'y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}') +$$

$$(\alpha y + \beta)^2[n(n-1)a_0y^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}] - 2\alpha(a_0'y^n + \ldots + a_n') -$$

$$- 2[(\alpha' - 2\alpha^2)y + \beta' - 2\alpha\beta](na_0y^{n-1} + \ldots + 2a_{n-1}) +$$

$$+ 2(\alpha^2 - \alpha')(a_0y^n + \ldots + a_n) = 0.$$

Anulînd coeficientul lui y^n obţinem

$$a_0'' - 2(n+1)\alpha a_0' + (n+1)[(n+2)\alpha^2 - 2\alpha']a_0 = 0. \tag{12}$$

Dar $\alpha(x)$ este un polinom neidentic nul, deci $(n+2)\alpha^2 - 2\alpha' \neq 0$ De aici rezultă că, dacă $a_0 \neq 0$, membrul întîi al ecuaţiei (12) este un polinom.

Deci singura soluţie polinomială a ecuaţiei (12) este $a_0 = 0$.

Analog, anulînd coeficienţii celorlalte puteri ale lui y, deducem $a_i = 0$, $(i = 1, \ldots, n)$

Rezultă $a(x, y) = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci, polinomul $m(x, y)$ nu poate fi liniar în raport cu y.

Să punem atunci

$$m(x, y) = \alpha_0(x)y^p + \ldots + \alpha_p(x), \quad (\alpha_0 \neq 0;\ p > 1).$$

Înlocuind în prima ecuaţie (3) găsim

$$\begin{aligned} & a_0'' y^n + \ldots + a_n'' - 2(\alpha_0 y^p + \ldots + \alpha_p)(na_0' y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}') + \\ & + (\alpha_0 y^p + \ldots + \alpha_p)^2 [n(n-1) a_0 y^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}] - \\ & - 2(p\alpha_0 y^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1})(a_0' y^n + \ldots + a_n') - 2[\alpha_0' y^p + \ldots + \alpha_p' - \\ & - 2(\alpha_0 y^p + \ldots + \alpha_p)(p\alpha_0 y^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1})](na_0 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}) + \\ & + 2[(\alpha_0 y^p + \ldots + \alpha_p)(p(p-1)\alpha_0 y^{p-2} + \ldots + 2\alpha_{p-2}) + \\ & + (p\alpha_0 y^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1})^2 - (p\alpha_0' y^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}')](a_0 y^n + \ldots + a_n) = 0. \end{aligned}$$

Anulînd coeficientul lui y^{2p+n-2} din această ecuaţie, găsim

$$a_0 \alpha_0^2 (2p + n)(2p + n - 1) = 0.$$

Dar $\alpha_0 \neq 0$, deci de aici rezultă $a_0 = 0$. Analog obţinem $a_i = 0$, $(i = 1, \ldots, n)$, adică $a(x, y) = 0$, ceea ce este imposibil.

Rezultă că, dacă $a(x, y)$ nu este o constantă, $m(x, y)$ este o constantă.

Avem deci teorema:

Conexiunea proiectivă Π_{jk}^i ale cărei componente au forma (4), unde a şi m sînt polinoame, poate fi redusă, prin schimbări de variabile, la una din formulele

$$1° \ \Pi_{22}^1 = xP_1(y) + P_2(y), \ \Pi_{11}^1 = \Pi_{12}^1 = \Pi_{21}^2 = \Pi_{22}^2 = \Pi_{11}^2 = 0,$$

unde P_1 şi P_2 sînt polinoame şi

$$2° \ \Pi_{22}^1 = 1, \ \Pi_{12}^1 = -\Pi_{22}^2 = x, \ \Pi_{11}^1 = -\Pi_{21}^2 = x^2, \ \Pi_{11}^2 = -x^3.$$

II

Să determinăm acum conexiunile proiective de speţa a treia ale căror componente sînt polinoame de gradul întîi şi doi.

Conexiunea (4) are componentele polinoame de gradul întîi numai dacă $m = \text{const.}$

După cum am arătat mai sus, dacă $m = \text{const.}$, printr-o schimbare de variabile putem reduce conexiunea la forma

$$\Pi_{22}^1 = xP_1(y) + P_2(y),$$

componentele nescrise fiind nule.

Pentru ca Π_{22}^1 să fie un polinom de gradul întîi, trebuie ca $P_1(y) = \alpha$, $P_2(y) = \beta y + \gamma$, cel puţin una din constantele α şi β fiind nenulă, căci în caz contrar conexiunea Π_{jk}^i ar fi constantă.

Presupunînd că $\alpha \neq 0$ şi făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \alpha x + \beta y + \gamma$$

$$\bar{y} = \sqrt{|\alpha|}\, y$$

conexiunea proiectivă devine

$$\bar{\Pi}^1_{22} = \pm \bar{x},$$

componentele nescrise fiind nule.

Dacă $\alpha = 0$, rezultă $\beta \neq 0$ și, făcînd schimbarea de variabile

$$\bar{x} = \beta^2 x$$

$$\bar{y} = \beta y + \gamma$$

conexiunea devine

$$\bar{\Pi}^1_{22} = \bar{y},$$

componentele nescrise fiind nule.

Regăsim astfel un rezultat pe care l-am dat anterior [4] și anume :

Conexiunea proiectivă liniară care determină între planele A_2 și E_2 o corespondență de speța a treia poate fi redusă, prin schimbări de variabile, la una din formele

$$1^\circ\ \Pi^1_{22} = x, \quad 2^\circ\ \Pi^1_{22} = -x, \quad 3^\circ\ \Pi^1_{22} = y,$$

componentele nescrise fiind nule.

Corespondența dintre planele A_2 și E_2 este

$$u^1 = \frac{v^1}{v^3}, \quad u^2 = \frac{v^2}{v^3},$$

unde v^1, v^2, v^3 sînt trei soluții independente ale sistemului [6] 5)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^j\, \partial x^k} + \Pi^s_{jk} \frac{\partial v}{\partial x^s} - M_{jk}\, v = 0, \quad (x^1 = x,\ x^2 = y), \tag{13}$$

unde am pus

$$M_{jk} = \Pi^i_{sj}\, \Pi^s_{ki} + \frac{\partial \Pi^i_{jk}}{\partial x^i}.$$

În cazul conexiunii 1°, sistemul (13) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + x \frac{\partial v}{\partial x} - v = 0$$

care are soluția

$$v = k_1\, x + k_2\, e^y + k_3\, e^{-y}.$$

Corespondența căutată este deci

$$u^1 = xe^y \qquad u = e^{2y}.$$

---

5) P. 127.

Ţinînd seama că u^1 şi u^2 satisfac sistemul

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \, \partial x^k} + \Gamma^s_{jk} \frac{\partial u^i}{\partial x^s} = 0,$$

rezultă că

$$\Gamma^1_{12} = -1, \; \Gamma^2_{22} = -2, \; \Gamma^1_{22} = x, \; \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{11} = 0.$$

Analog, în cazul conexiunii proiective 2° obţinem

$$u^1 = \frac{x}{\sin y}, \; u^2 = \operatorname{cotg} y$$

conexiunea afină fiind

$$\Gamma^1_{12} = \operatorname{cotg} y, \; \Gamma^2_{22} = 2 \operatorname{cotg} y, \; \Gamma^1_{22} = -x, \; \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{11} = 0,$$

iar în cazul conexiunii proiective 3°

$$u^1 = x - \frac{y^3}{6}, \; u^2 = y$$

şi

$$\Gamma^1_{22} = y, \; \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} = 0.$$

Rezultă că :

Conexiunile afine corespunzătoare conexiunilor proiective liniare de speţa a treia sînt de una din formele

$$1°. \; \Gamma^1_{12} = -1, \quad \Gamma^2_{22} = -2, \quad \Gamma^1_{22} = x; \quad 2°. \; \Gamma^1_{12} = \operatorname{cotg} y, \quad \Gamma^2_{22} = 2 \operatorname{cotg} y,$$

$$\Gamma^1_{22} = -x; \quad 3°. \; \Gamma^1_{22} = y, \tag{14}$$

componentele nescrise fiind nule. Echivalenţa dintre spaţiile A_2 şi E_2 este globală numai în cazul 3°.

Să determinăm acum conexiunile proiective de speţa a treia ale căror componente sînt polinoame de gradul doi.

Conexiunea (4) are componentele polinoame de gradul doi numai dacă $m = \text{const}$. În acest caz, printr-o schimbare de variabile putem reduce componentele conexiunii la forma

$$\Pi^1_{22} = x P_1 (y) + P_2 (y), \; \Pi^1_{11} = \Pi^1_{12} = \Pi^2_{11} = \Pi^2_{12} = \Pi^2_{22} = 0.$$

Ţinînd seama că Π^1_{22} este un polinom de gradul doi rezultă că $P_1 (y) = \alpha_1 y + \alpha_2$, $P_2 (y) = \beta_1 y^2 + \beta_2 y + \beta_3$, adică

$$\Pi^1_{22} = \alpha_1 xy + \beta_1 y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \beta_3.$$

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ şi $\Delta = \beta_2^2 - 4\beta_1 \beta_2 \neq 0$, atunci $\beta_1 \neq 0$ (în caz contrar Π^1_{22} ar fi un polinom de gradul întîi) şi făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{4 \varepsilon \beta_1}{\beta_2^2 - 4\beta_1 \beta_3} x & (\varepsilon \Delta = \Delta) \\ \overline{y} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon (\beta_2^2 - 4\beta_1 \beta_3)}} (2\beta_1 y + y_2) & \end{cases}$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\Pi^1_{22} = \overline{y}^2 + \varepsilon, \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{15}$$

componentele nescrise fiind nule.

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \Delta = 0$, prin transformarea

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{\beta_1} x, \\ \overline{y} = y + \dfrac{\beta_2}{2\beta_1}, \end{cases}$$

conexiunea devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{y}^2 \tag{16}$$

componentele nescrise fiind nule

Dacă $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_1} [\alpha_2 x + (\beta_2 - 2\varepsilon\beta_3 \sqrt{\varepsilon\alpha_2})\, y + \alpha_2\beta_3], \\ \overline{y} = \sqrt{\varepsilon\alpha_2}\, y, \end{cases} \qquad (\varepsilon\alpha_2 = |\alpha_2|)$$

tensorul Π^i_{jk} devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{y}^2 + \varepsilon\overline{x}, \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{17}$$

Dacă $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_1^2\beta_3 - \alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1 \neq 0$, prin transformarea

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\alpha_1 \sqrt[3]{\alpha_1}}{\alpha_1^2\beta_3 - \alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1} \left(x + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} y + \dfrac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2} \right), \\ \overline{y} = \sqrt[3]{\alpha_1} \left(y + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \right), \end{cases}$$

conexiunea proiectivă devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{x}\,\overline{y} + 1, \tag{18}$$

componentele nescrise fiind nule.

Dacă $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_1^2\beta_3 - \alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1 = 0$, făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x} = x + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} y + \dfrac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2}, \\ \overline{y} = \sqrt[3]{\alpha_1} \left(y + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \end{cases}$$

conexiunea Π^i_{jk} devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \overline{x}\,\overline{y}, \tag{19}$$

celelalte componente fiind nule.

Vom demonstra că cele şapte conexiuni proiective determinate (15),..., (19) sînt distincte, adică nu putem găsi o transformare proiectivă care să le poată schimba una în alta.

Fie deci o transformare proiectivă

$$(20)\qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + 1}, \\[2ex] \overline{y} = \dfrac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + 1}, \end{cases}$$

care transformă tensorul Π^i_{jk} după formulele

$$(21)\qquad \overline{\Pi}^i_{rs} = \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^k} = \Pi^s_{jk}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^s}, \qquad (i, j, k, r, s = 1, 2).$$

Dacă Π^i_{jk} şi Π^i_{jk} sînt doi dintre tensorii (15),..., (19), formula (21) devine

$$(22)\qquad \frac{\partial \overline{y}}{\partial x} = 0,\ \Pi^1_{22}\left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial y}\right)^2 = \Pi^1_{22}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}.$$

Prima din aceste două relaţii se scrie

$$(23)\qquad (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\, y + \beta_1 - \beta_3\gamma_1 = 0,$$

care ne dă

$$\begin{cases} \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 0, \\ \beta_1 - \beta_3\gamma_1 = 0, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} \gamma_1(\beta_2 - \beta_3\gamma_2) = 0, \\ \beta_1 - \beta_3\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Dacă $\gamma_1 \neq 0$, din (23) rezultă $\beta_2 = \beta_3\gamma_2$, $\beta_1 = \beta_3\gamma_1$ care înlocuite în (20) ne dă $\overline{y} = \beta_3$ ceea ce este imposibil.

Deci $\gamma_1 = 0$ şi din (23) rezultă $\beta_1 = 0$.

Cu aceste valori, a doua relaţie (22) devine

$$\overline{\Pi}^1_{22} = \frac{\alpha_1(\gamma_2 y + 1)^3}{(\beta_2 - \gamma_2\beta_3)^2}\,\Pi^1_{22}.$$

De aici rezultă că cele şapte conexiuni (15),..., (19) sînt distincte. De asemenea, rezultă că aceste conexiuni nu sînt echivalente cu nici o conexiune constantă sau liniară.

Deci avem teorema:

Dacă tensorul care defineşte o corespondenţă de speţă a treia între două plane proiective are componentele polinoame de gradul al doilea, prin schimbări de variabile putem reduce acest tensor la una din formele canonice

$$1°\ \Pi^1_{22} = y^2 - 1,\ 2°\ \Pi^1_{22} = y^2 + 1,\ 3°\ \Pi^1_{22} = y^2,\ 4°\ \Pi^1_{22} = y^2 - x,$$

$$5°\ \Pi^1_{22} = y^2 + x,\ 6°\ \Pi^1_{22} = xy,\ 7°\ \Pi^1_{22} = xy + 1,$$

componentele nescrise fiind nule.

Să determinăm acum corespondențele dintre spațiile A_2 și E_2 definite de cele șapte conexiuni proiective de mai sus.

În cazul conexiunii $\Pi^1_{22} = y^2 \pm 1$, sistemul (13) se scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (y^2 \pm 1)\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

avînd soluția

$$v = k_1\left(x \mp \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12}\right) + k_2 y + k_3.$$

Deci, corespondența dintre spațiile A_2 și E_2 este

$$u^1 = x \mp \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12}, \quad u^2 = y.$$

Cu aceste valori, sistemul (14) ne dă

$$\Gamma^1_{22} = y^2 \pm 1, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} = 0. \tag{24}$$

Considerînd conexiunea proiectivă $\Pi^1_{22} = y^2$, corespondența este

$$u^1 = x - \frac{y^4}{12}, \quad u^2 = y,$$

iar conexiunea afină a spațiului A_2 are singura componentă nenulă

$$\Gamma^1_{22} = y^2. \tag{25}$$

În cazul conexiunii $\Pi^1_{22} = y^2 - x$, corespondența este

$$u^1 = \frac{x - y^2 + 2}{\sin y,}, \quad u^2 + \operatorname{cotg} y,$$

iar conexiunea afină are componentele

$$\Gamma^1_{12} = \operatorname{cotg} y, \quad \Gamma^1_{22} = y^2 - x, \quad \Gamma^2_{22} = 2 \operatorname{cotg} y, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 0. \tag{26}$$

În cazul conexiunii $\Pi^1_{22} = y^2 + x$, avem corespondența

$$u^1 = e^y (x + y^2 + 2), \quad u^2 = e^{2y},$$

conexiunea afină a spațiului A_2 avînd componentele

$$\Gamma_{12} = -1, \quad \Gamma^1_{22} = y^2 + x, \quad \Gamma^2_{22} = -2, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 0. \tag{27}$$

Considerînd conexiunea proiectivă $\Pi^1_{22} = xy$, sistemul (13) se scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + xy\frac{\partial v}{\partial x} - yv = 0. \tag{13'}$$

Din primele două ecuații deducem

$$v = k_1 x + f(y),$$

care înlocuită în a treia ne dă

$$f''(y) - y f(y) = 0.$$

Cele două soluții independente ale acestei ecuații sînt [2]

$$f_1(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.4 \ldots (3k-2)}{(3K)!} y^{3k},$$

$$f_2(y) = y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2.5 \ldots (3k-1)}{(3k+1)!} y^{3k+1}.$$

Cu aceasta, soluția sistemului (24) este

$$v = k_1 x + k_2 f_1(y) + k_3 f_2(y),$$

și deci corespondența dintre spațiile A_2 și E_2 are ecuațiile

$$u^1 = \frac{x}{f_3(y)}, \; u^2 = \frac{f_1(y)}{f_2(y)}.$$

Conexiunea afină corespunzătoare are componentele

$$\Gamma^1_{12} = \frac{f_2'(y)}{f_2(y)}, \; \Gamma^1_{22} = x y, \; \Gamma^2_{22} = -\frac{2f_2'(y)}{f_2(y)}, \; \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 0. \tag{28}$$

În cazul conexiunii proiective $\Pi^1_{22} = xy + 1$, sistemul (13) se scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \; \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} = 0, \; \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (xy+1)\frac{\partial v}{\partial x} - yv = 0. \tag{13''}$$

Soluția acestui sistem este

$$v = k_1 x + f(y),$$

unde $f(y)$ satisface ecuația

$$f''(y) - y f(y) = -k_1 y.$$

Cu notația de mai sus soluția acestei ecuații este [3] 6)

$$f(y) = k_1 \left[f_1 \int \frac{f_2}{w} \mathrm{d}y - f_2 \int \frac{f_1}{w} \mathrm{d}y \right] + k_2 f_1 + k_3 f_2,$$

unde am notat $w(y) = f_1 f_2' - f_2 f_1'$.

Deci, sistemul (13″) are soluția

$$v = k_1 \left[x + f_1 \int \frac{f_2}{w} \mathrm{d}y - f_2 \int \frac{f_1}{w} \mathrm{d}y \right] + k_2 f_1 + k_3 f_2.$$

---

6) P. 117.

Corespondența dintre spațiile A_2 și E_2 este

$$\begin{cases} u^1 = \dfrac{x}{f_2(x)} = \dfrac{f_1(y)}{f_2(y)} \displaystyle\int \dfrac{f_2(y)}{w(y)} \mathrm{d}y - \int \dfrac{f_1(y)}{w(y)} \mathrm{d}y, \\ u^2 = \dfrac{f_1(y)}{f_2(y)}. \end{cases}$$

Cu aceste valori, conexiunea afină a spațiilor A_2 are componentele

$$\Gamma_{12} = -\frac{f_2'(y)}{f_2(y)}, \ \Gamma^1_{22} = xy + 1, \ \Gamma^2_{22} = -\frac{2f_2'(y)}{f_2(y)}, \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 0. \tag{29}$$

Rezultă că :

Conexiunile afine corespunzătoare conexiunilor proiective pătratice de speța a treia sînt de formele (24),... (29). Echivalența dintre spațiile A_2 și E_2 este globală numai în cazul conexiunilor (24), (25).

III

Vom determina acum grupurile de transformări care lasă invariantă conexiunea Π^i_{jk} de speța a treia în cazurile în care componentele ei sînt polinoame de gradele unu și doi.

Dacă notăm cu $X f = \xi^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ o transformare infinitezimală a grupului care lasă invariantă conexiunea Π^i_{jk}, atunci avem [5][7])

$$\frac{\partial \Pi^i_{ik}}{\partial x^l} \xi^l + \Pi^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Pi^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} = \Pi^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s}. \tag{30}$$

Ținînd seama că transformările care lasă invariantă conexiunea proiectivă Π^i_{jk} sînt transformări proiective, rezultă că

$$\xi^i = a^i + a^i_j \, x^j + a_j \, x^i x^j, \qquad (i, j = 1,2).$$

În cazul conexiunii $\Pi^1_{22} = \pm x$, sistemul (30) se scrie

$$\begin{cases} a^2_1 + a_1 y = 0, \\ a^1 + a^1_2 y + 2a^2_2 x - 4a_2 x y = 0, \end{cases}$$

de unde deducem

$$a^1 = a^2_1 = a^1_2 = a^2_2 = a_1 = a_2 = 0,$$

Grupul are deci două transformări infinitezimale

$$X_1 f = x \frac{\partial f}{\partial x}, \ X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

---

[7]) P. 498.

și deci are ecuațiile finite

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a\,x, \\ y' &= y + b. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Dacă $\Pi^1_{22} = y$, sistemul (30) devine

$$\left\{\begin{aligned} & a^2_1 + a_1\,y = 0, \\ & a^2 + (3a^2_2 - a^1_1)\,y - 4a_2\,y^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

deci

$$a^2 = a^2_1 = a_1 = a_2,\; a^1_1 = 3a^2_2$$

Rezultă că grupul este definit de operatorii

$$X_1 f = 3x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y},\; X_2 f = y \frac{\partial f}{\partial x},\; X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

el avînd ecuațiile finite

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a^3\,x + b\,y + c, \\ y' &= a\,y. \end{aligned}\right.$$

Avem deci :

Grupurile care lasă invariantă conexiunea proiectivă liniară de speța a treia a unui spațiu A_2 sînt cu doi sau cu trei parametrii după cum conexiunea este $\Pi^1_{22} = \pm\,x$ sau $\Pi^1_{22} = y$.

În cazul conexiunii $\Pi^1_{22} = y^2 \pm 1$, sistemul (30) se scrie

$$\begin{aligned} & a^2_1 + a_1\,y = 0 \\ & \pm\,(2a^2_2 - a^1_1) + (2a^2 \pm 3a_2)\,y + (4a^2_2 - a^1_1)\,y^2 + 5a_2\,y^3 = 0 \end{aligned}$$

care ne dă

$$a_1 = a_2 = a^1_1 = a^2_1 = a^2_2 = a^2 = 0,$$

deci grupul are două transformări infinitezimale

$$X_1 f = y \frac{\partial f}{\partial x},\; X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\cdot$$

Ecuațiile grupului sînt

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x + a\,y + b, \\ y' &= y. \end{aligned}\right.$$

Dacă $\Pi^1_{22} = y^2$, sistemul (30) devine

$$\left\{\begin{aligned} & a^2_1 + a_1\,y = 0, \\ & 2a^2\,y + (4\,a^2_2 - a^1_1)\,y^2 + 5a_2\,y^3 = 0, \end{aligned}\right.$$

de unde

$$a^1 = a^1_1 = a^2_1 = a^2_2 = a_1 = a_2 = 0,\;\; a^1_1 = 4\,a^2_2.$$

Grupul de mișcări are deci trei parametrii, fiind definit de operatorii

$$X_1 f = 4x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \; X_2 f = y \frac{\partial f}{\partial x}, \; X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

și avînd ecuațiile finite

$$\begin{cases} x' = a^4 x + b y + c, \\ y' = a y. \end{cases}$$

În cazul $\Pi^1_{22} = y^2 \pm x$, sistemul (30) are forma

$$\begin{cases} a^2_1 + a_1 y = 0 \\ \pm a^1 \pm 2a^2_2 y + (2a^2 \pm a^1_2) y \pm 4a_2 xy + (4a^2_2 - a^1_1) y^2 + 5a_2 y^3 = 0, \end{cases}$$

deci

$$a^1 = a^1_1 = a^2_1 = a^2_2 = a_1 = a_2 = 0, \; a^1_2 = \pm 2a^2.$$

Grupul este definit de operatorul

$$Xf = \pm 2y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},$$

avînd ecuațiile finite

$$\begin{cases} x' = x \pm 2ay \pm a^2, \\ y' = y + a. \end{cases}$$

Pentru conexiunea $\Pi^1_{22} = xy + 1$, sistemul (30) se scrie

$$\begin{cases} a^2_1 + a_1 y = 0, \\ 2\, a^2_2 - a^1_1 + a^2 x + (a^1 + 3a_2) y + 3a^2_2 xy + a^1_2 y^2 + 5a_2 xy^2 = 0, \end{cases}$$

de unde deducem

$$a^i = a^i_j = a_j = 0.$$

Rezultă că în cazul în care $\Pi^1_{22} = xy + 1$, nu există nici o transformare în afară de cea identică, care să lase conexiunea Π^i_{jk} invariantă.

Dacă $\Pi^1_{22} = xy$, sistemul (30) este

$$\begin{cases} a^2_1 + a_1 y = 0, \\ a^2 x + a^1 y + 3a^2_2 xy + a^1_2 y^2 + 5\, a_2 xy^2 = 0. \end{cases}$$

De aici rezultă

$$a^1 = a^2 = a^1_2 = a^2_1 = a^2_2 = a_1 = a_2 = 0.$$

Grupul are un singur operator

$$Xf = x \frac{\partial f}{\partial x}$$

şi ecuaţiile finite

$$\begin{cases} x' = ax, \\ y' = y. \end{cases}$$

Deci :

Grupul care lasă invariantă conexiunea proiectivă pătratică de speţa a treia a unui spaţiu A_2 are trei parametrii dacă $\Pi^1_{22} = y^2$, doi parametrii dacă $\Pi^1_{22} = y^2 \pm 1$, un parametru dacă $\Pi^1_{22} = y^2 \pm x$ sau $\Pi^1_{22} = xy$ şi se reduce la transformarea identică dacă $\Pi^1_{22} = xy + 1$.

Primită la redacţie la 20 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Boruvka O., *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*. Publ. Fac. Sc. Brno, **85** (1926).
2. Forsyth A. R., Jacobstkal W., *Lehrbuch der Differentialgleichungen*. Brauschweig, 1912.
3. Kamke E., *Differentialgleichungen*. I, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.
4. Stoka M., *Sur les correspondances entre des espaces projectifs a connexion projective linéaire*. Czecoslovak Mat. Journal, *4* (1964).
5. Vrănceanu G., *Sul tensore associato ad una corrispondenza tra spazi proiettivi*. Bol. Un. Mat. Ital, **12**, *4* (1957).
6. Vrănceanu G., *Leçons de Géométrie différentielle*. III, Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1964.

ASUPRA CATEGORIILOR PREABELIENE 1)

DE

C. BĂNICĂ și N. POPESCU

Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, nr. 47, București

Categoriile preabeliene sînt destul de frecvente în algebra modernă și de aceea studiul lor se impune. În nota de față considerăm cîteva aspecte algebrice legate de aceste categorii și care sînt foarte asemănătoare cu cele cunoscute din cazul categoriilor abeliene. Se dovedește astfel că pentru aceste categorii funcționează anumite teoreme de izomorfism. Pentru demonstrație se folosește metoda trecerii în categoria mulțimilor cu punct fix.
În sfîrșit, se arată că oricărei categorii speciale i se poate asocia o categorie abeliană numită abelienizarea sa.

I. DEFINIȚII, NOTAȚII ȘI EXEMPLE

Prin $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, vom nota categorii, prin f, g, ..., α, β, ..., A, B, ... X, Y vom nota morfisme respectiv obiecte din categorii, iar prin S, T, ... functori.

DEFINIȚIA 1. *O categorie* $\mathcal{C}$ *se zice preabeliană, dacă este aditivă* 2) *și orice morfism* $\alpha : X \to Y$ *posedă nucleu și conucleu și în plus aplicația canonică* $\theta_\alpha : \mathrm{Coim}\ \alpha \to \mathrm{Im}\ \alpha$ *este bijecție.*

DEFINIȚIA 2. *Morfismul* $\alpha : X \to Y$ *se zice strict dacă aplicația canonică* θ_α *este izomorfism.*

DEFINIȚIA 3. *Șirul de obiecte și morfisme din* $\mathcal{C}$:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \tag{1}$$

---

1) Versiunea în l. franceză va apărea în Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **11**, 5 (1965).

2) Noțiunile de categorie aditivă, abeliană, de exactitate etc. sînt concepute după [1].

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 563–575, BUCUREȘTI, 1965.

se zice exact dacă Ker $f \approx$ Im g (*izomorfism canonic*). *Șirul* (1) *se zice exact strict dacă în plus f și g sînt morfisme stricte.*

În legătură cu morfismele stricte și șirurile exacte stricte vom folosi rezultate din [2].

Exemplu de categorie preabeliană îl constituie categoria obiectelor filtrate peste o categorie abeliană.

De asemenea categoria grupurilor topologice comutative, grupurilor abeliene ordonate sînt exemple de categorii preabeliene.

II. IMERSIUNEA UNEI CATEGORII PREABELIENE ÎN CATEGORIA MULȚIMILOR ÎN PUNCT FIX

Pentru cele ce urmează sînt necesare noțiunile de sumă fibrată (careu cocartezian) și produs fibrat (careu cartezian), existența cărora este pusă în evidență în categoriile preabeliene de următoarea :

PROPOZIȚIA 1. *Într-o categorie preabeliană există sumă fibrată și produs fibrat.*

Demonstrație. Considerăm diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr] & \\
A\Pi B \arrow[ur, "p_B"] \arrow[rr, dashed, "\gamma"] \arrow[dr, "p_A"'] & & C \\
 & A \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

unde $A\Pi B$ este produsul direct al obiectelor A și B, p_A și p_B proiecțiile canonice, iar $\gamma = \beta p_B - \alpha p_A$.

Notăm $A\Pi_C B = \text{Ker}\ \gamma$ și vom arăta că este produsul fibrat al aplicațiilor α și β. Fie $u : A\Pi_C B \to A\Pi B$ morfismul canonic. Notăm $\alpha' = p_B \circ u$; $\beta' = p_A \circ u$. Se demonstrează imediat că patrulaterul :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "\beta"] & \\
A\Pi_C B \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[dr, "\beta'"'] & & C \\
 & A \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

este cartezian. Dual se construiește suma fibrată.

Observație. În diagrama anterioară, dacă α este monomorfism, la fel este și α' ; dacă β este monomorfism, la fel este și β' — dual pentru suma fibrată.

Categoriile preabeliene de la punctul I au în plus proprietatea următoare : dacă α este epimorfism, la fel este și α' ; dacă β este epimorfism, la fel este şi β' şi dual pentru sumă fibrată. Vom numi o asemenea categorie preabeliană : categorie preabeliană specială [3]).

PROPOZIŢIA 2. *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie preabeliană specială, pentru diagrama :*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
& X \\
X_2 \arrow[ur, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

avem :

a) $\operatorname{Im} \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_2$ *dacă şi numai dacă* $\alpha_1\sigma_1 = \alpha_2\sigma_2$ *pentru nişte epimorfisme* σ_1, σ_2.

b) $\operatorname{Im} \alpha_1 \leqslant \operatorname{Im} \alpha_2$ *dacă şi numai dacă* $\alpha_1\sigma = \alpha_2\omega$ *pentru* σ *epimorfism şi* ω *morfism, convenabil alese.*

c) $\operatorname{Im} \alpha_1 = 0$ *dacă şi numai dacă* $\alpha_1 = 0$.

Demonstraţie. Demonstrăm, de exemplu, b).

Dacă $\operatorname{Im} \alpha_1 \leqslant \operatorname{Im} \alpha_2$, considerăm diagrama comutativă construită în mod canonic, din care construim patrulaterul cartezian :

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \arrow[ddr, "\alpha_1"] & \\
& \operatorname{Im} \alpha_1 \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr] & \\
Y \arrow[uur, "\sigma"] \arrow[ddr, "\omega"'] & & X \\
& \operatorname{Im} \alpha_2 \arrow[ur] & \\
& X_2 \arrow[u, "\gamma_2"] \arrow[uur, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Se vede uşor că σ este epimorfism (căci γ_2 este) şi că $\alpha_1\sigma = \alpha_2\omega$. Reciproc, o relaţie $\alpha_1\sigma = \alpha_2\omega$ cu σ epimorfism, implică :

$$\operatorname{Im} \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_1\sigma = \operatorname{Im} \alpha_2\omega \leqslant \operatorname{Im} \alpha_2 .$$

Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$ — categorie, unde $\mathcal{U}$ este un univers Grothendieck convenabil ales. Asociem fiecărui obiect X din $\mathcal{C}$, mulţimea X_S a imaginilor morfismelor de cosursă X, şi fiecărui morfism $\alpha : X \to Y$ aplicaţia $\alpha_S : X_S \to Y_S$ definită astfel : $\alpha_S (\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im} (\alpha \circ f)$, pentru un morfism f

---

[3]) Pentru cele ce urmează este necesar mai puţin :

Orice diagramă
$$\begin{tikzcd}
& B \\
A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "s"'] & \\
& C
\end{tikzcd}$$
cu s bijecţia poate fi completată pînă la diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "s'"] & \\
A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "s"'] & & D \\
& C \arrow[ur, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}$$

şi dual cu s bijecţie.

de cosursă X. Se dovedeşte imediat că asocierea $X \to X_S$; $\alpha \to \alpha_S$ este un functor – notat S, covariant definit pe $\mathcal{C}$ cu valori în categoria mulţimilor cu punct fix (punctul fix în mulţimea X_S este subobiectul nul al lui X-imaginea oricărui morfism nul de cosursă X, iar aplicaţia α_s în mod evident păstrează punctul fix).

Propoziţia 3. *Dacă* $\alpha : X \to Y$ *esie un morfism din* $\mathcal{C}$, *atunci*

a) $\operatorname{Ker} \alpha_S = \{x \mid x \in X_S \text{ cu } x \leqslant \operatorname{Ker} \alpha\}$

b) $\operatorname{Im} \alpha_S = \{y \mid y \in Y_S \text{ cu } y \leqslant \operatorname{Im} \alpha\}$

(*aici prin* x, y *notăm imagini de morfisme de* cosursă X *respectiv* y).

Demonstraţie. Să verificăm spre exemplu b). Dacă $y \in \operatorname{Im} \alpha_S$, atunci există un morfism f de cosursă X cu $y = \operatorname{Im}(\alpha f)$ deci $y \leqslant \operatorname{Im} \alpha$.

Invers, fie $y \leqslant \operatorname{Im} \alpha$, unde $y = \operatorname{Im} f$. Conform propoziţiei 2) există epimorfismul σ şi morfismul ω încît $\alpha\omega = f\sigma$ şi de aici: $y = \operatorname{Im}(f\sigma) = \operatorname{Im}(\alpha\omega) = \alpha_S(\operatorname{Im} \omega)$.

Propoziţia 4. *Şirul* $X \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\alpha} Z$ *este exact dacă şi numai dacă şirul* (*din categoria mulţimilor cu punct fix* [4]) *este exact*.

Demonstraţia rezultă din propoziţia anterioară.

Din propoziţia 4 rezultă următoarele:

a) Pentru orice $\alpha : X \to Y$, $\alpha = 0$ dacă şi numai dacă $\alpha_S = 0$.

b) α este epimorfism dacă şi numai dacă α_S este surjecţie.

c) α este monomorfism, dacă şi numai dacă α_S este injecţie.

În mod asemănător, relativ la obiecte cît şi la imagini inverse, se construiesc încă doi functori şi se stabilesc propoziţii asemănătoare.

III. PROBLEME DE EXACTITATE

Vom demonstra cu ajutorul consideraţiilor precedente cîteva teoreme de exactitate, valabile în categorii abeliene.

Lema celor 5 omomorfisme. *Considerăm diagrama comutativă*:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\eta"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "l'"] & E'
\end{tikzcd}$$

cu linii exacte. Atunci:

a) β, δ *monomorfisme şi* α *epimorfisme implică* γ *monomorfism*;

b) β, δ *epimorfisme şi* η *monomorfism implică* γ *epimorfism*.

---

[4] Dacă $f : X \to Y$ este un morfism în categoria mulţimilor cu punct fix, şi O_x şi O_y sînt respectiv punctele fixe din X şi Y, atunci $\operatorname{Ker} f_f = \{x \mid f(x) = Oy\}$ şi $\operatorname{Im} f = \{y \mid \exists \cdot x \in X \text{ cu} : f(x) = y\}$. Şirul $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ se zice exact, dacă $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

Demonstrație. Vom verifica a). Este suficient să demonstrăm că $\gamma_S : C_S \to C'_S$ este monomorfism; se raționează ca pentru diagramele de module în categoria mulțimilor cu punct fix. Fie deci $c \in C_S$ cu proprietatea $\gamma_S(c) = 0$. Din relația $h'\gamma = \delta h$ rezultă $h'_S\gamma_S = \delta_S h_S$ și deci $\delta_S h_S(c) = 0$ și deoarece δ_S este monomorfism (deoarece δ este) rezultă $h_S(c) = 0$. Din exactitatea șirului: $B_S \xrightarrow{g_S} C_S \xrightarrow{h_S} D_S$ rezultă că există un element $b \in B_S$ astfel încît $g_S(b) = c$. Rezultă din comutativitate că: $g'_S(\beta_S(b)) = 0$ și deci, din exactitatea șirului $A'_S \xrightarrow{f'_S} B'_S \xrightarrow{g'_S} C'_S$, rezultă existența unui element $a' \in A'_S$ astfel încît: $f'_S(a') = \beta_S(b)$, α fiind epimorfism, de asemenea și α_S, deci există un element $a \in A_S$ încît $\alpha_S(a) = a'$.

Din comutativitate rezultă $\beta_S(f_S(a)) = \beta_S(b)$ și deoarece β_S este monomorfism, $f_S(a) = b$, deci:

$c = g_S(b) = g_S f_S(a) = 0$, ceea ce termină demonstrația.

LEMA 3×3. *Din diagrama comutativă:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

cu coloane exacte și ultimele două linii exacte, rezultă exactitatea primei linii.

Demonstrație. Se aplică functorul S, se deduce ușor exactitatea șirului:

$$0 \to A'_S \to A_S \to A''_S \to 0$$

și de aici șirul exact $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

De asemenea se pot demonstra și celelalte variante ale lemei 3×3 precum și alte teoreme de exactitate.

Mai demonstrăm numai:

LEMA SERPENTINEI. *Dacă*

(1)
$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "g'"] & B \arrow[r, "f'"] & B'' &
\end{tikzcd}$$

este o diagramă comutativă cu linii exacte și g' morfism strict, există un morfism unic : $\theta : \operatorname{Ker} \gamma \to \operatorname{Coker} \alpha$, *încît* : *șirul* : (*aplicațiile sînt cele canonice*)

(2) $$\operatorname{Ker} \alpha \to \operatorname{Ker} \beta \to \operatorname{Ker} \gamma \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker} \alpha \to \operatorname{Coker} \beta \to \operatorname{Coker} \gamma$$

este exact și asocierea (1) $\to$ (2) *este functorială.*

Demonstrație. Considerăm diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[u] \arrow[r, "x"] & A'' \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{Coker} x \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\gamma f \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] \arrow[r] & \operatorname{Coker} x \arrow[u, equal] & \\
 & \operatorname{Ker} f \arrow[u] \arrow[r, equal] & \operatorname{Ker} f \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

cu linii și a doua coloană exactă.

Din lema 3×3 (se completează trivial diagrama) rezultă exactitatea primei coloane și deoarece $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$, avem șirul exact $0 \to \operatorname{Im} g \to \operatorname{Ker}\gamma f \to \operatorname{Ker}\gamma \to 0$.

De asemenea avem șirul exact :

$$0 \to \operatorname{Im}\alpha \to B' \to \operatorname{Coker}\alpha \to 0.$$

Dacă notăm cu z omomorfismul canonic $\operatorname{Ker} g \to A'$, avem : $g'\alpha z = \beta g z = 0$ și deoarece g' este monomorfism rezultă $\alpha z = 0$ și deci există un morfism $u : \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker}\alpha$ ce va induce un morfism

$$v : \operatorname{Im} g \to \operatorname{Im}\alpha.$$

Din diagrama comutativă : (s există deoarece $\gamma_x = 0$).

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\gamma f \arrow[r] \arrow[d, dashed, "t"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A'' \arrow[d] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "g'"] & B \arrow[r, "f'"] & B'' \arrow[r, "s"'] & \operatorname{Coker} x
\end{tikzcd}$$

rezultă existența unui morfism t care o închide comutativ.

(Aici a intervenit esențial faptul că g' este morfism strict căci în acest caz : $\operatorname{Ker} f' = \operatorname{Im} g' = \operatorname{Coker} g' = B'$).

Se verifică imediat comutativitatea diagramei :

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & \operatorname{Ker}\gamma f \arrow[r] \arrow[d, "t"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im}\alpha \arrow[r] & B' \arrow[r] & \operatorname{Coker}\alpha &
\end{tikzcd}$$

cu linii exacte. Există deci θ care face careul I comutativ. Aplicînd functorul S diagramei (1) se obține o diagramă în categoria mulțimilor cu punct fix.

Cu un procedeu ca la lema celor cinci omomorfisme se găsește o aplicație $\Theta : (\operatorname{Ker}\gamma)_S \to (\operatorname{Coker}\alpha)_S$, care datorită comutativității careului I este chiar θ_S. Se dovedește imediat exactitatea șirului :

$$(\operatorname{Ker}\alpha)_S \to (\operatorname{Ker}\beta)_S \to (\operatorname{Ker}\gamma)_S \xrightarrow{\theta_S} (\operatorname{Coker}\alpha)_S \to (\operatorname{Coker}\beta)_S \to (\operatorname{Coker}\gamma)_S$$

și de aici, conform proprietăților functorului S, rezultatul din enunț. Faptul că asocierea (1)→(2) este functorială se verifică imediat.

IV. TEOREMELE DE IZOMORFISM

DEFINIȚIE. *Un subobiect se zice strict dacă morfismul de incluziune este strict. Analog se definește noțiunea de obiect cît strict. Familia subobiectelor unui obiect se organizează în mod canonic ca o latice și se pot stabili o serie de proprietăți asemănătoare celor de la categorii abeliene.*

Vom stabili acum:

PROPOZIȚIA 5. *Dacă B este subobiect în A și în C și C este subobiect în A, atunci aplicația canonică:* ${}^{A/B}/_{C/B} \to A/C$ *este bijecție.*

Demonstrație. Considerăm diagrama comutativă cu coloane și prima linie exactă.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, equal] \arrow[d] & B \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & (*) \\
0 \arrow[r] & C/B \arrow[r] \arrow[d] & A/B \arrow[r] \arrow[d] & A/C \arrow[r] & 0 & \\
 & 0 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Completînd trivial diagrama, se poate aplica lema 3×3 și se deduce exactitatea șirului:

$$0 \to C/B \to A/B \to A/C \to 0,$$

și de aici rezultatul [5]. Demonstrăm de asemenea:

PROPOZIȚIA 6. *Dacă A și B sînt subobiectele stricte în C, atunci aplicația canonică $A + B/A \to B/A \cap B$ este o bijecție.*

Demonstrație. Considerăm diagrama comutativă cu coloane exacte.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \cap B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "-1_{A \cap B}"] & A \oplus B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & A + B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \cap B \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & A + B/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

---

[5] Dacă șirul $0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$ este exact, $\beta \circ \alpha = 0$ implică existența unui morfism γ : Coker $\alpha \to A''$ care se dovedește imediat a fi bijecție.

Vom demonstra exactitatea primei linii. Aplicaţia canonică β este epimorfism după definiţia lui $A+B$. Aplicaţia α o construim ca aplicaţie ce încheie comutativ diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
A \cap B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] \arrow[rr, dashed, "\alpha"] & & A \oplus B \arrow[ul, "p_A"'] \arrow[dl, "p_B"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

În această diagramă, i, j sînt morfismele canonice de incluziune, iar aplicaţiile p_A şi p_B definesc $A \oplus B$ ca produs direct al obiectelor A şi B.

Vom arăta că $A \cap B$ este nucleul aplicaţiei $A \oplus B \to C$ (şi deci şi a aplicaţiei β căci aplicaţia $A+B \to C$ este monomorfism).

Considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, shift left, "i_A"] \arrow[rrd, "f"] & & \\
A \cap B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "-i"'] \arrow[rr, "\alpha"] & & A \oplus B \arrow[ul, shift left, "p_A"] \arrow[dl, shift left, "p_B"] \arrow[r] & C \\
 & B \arrow[ur, shift left, "i_B"] \arrow[rru, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

unde f şi g sînt morfisme de incluziune, i_A şi i_B morfismele ce definesc obiectul $A \oplus B$ ca sumă directă a obiectelor A şi B iar γ morfismul definit prin egalităţile $\gamma i_A = f$ şi $\gamma i_B = g$. Din unicitatea aplicaţiilor ce au proprietăţile lui γ şi β, rezultă imediat că $\alpha = i_A i - i_B j$ şi $\gamma = f p_A + g p_B$, deci

$$\gamma\alpha = (f p_A + g p_B)(iA \circ i - i_B j) = fi - gj = 0.$$

Fie $h: D \to A \oplus B$ astfel încît $\gamma h = 0$. Considerăm aplicaţiile $f p_A h$ şi $-g p_B h$ şi diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
D \arrow[ur, "p_A h"] \arrow[dr, "-p_B h"'] & & C \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

Deoarece $0 = \gamma h = (f p_A + g p_B) h = f p_A h + g p_B h$, diagrama este comutativă.

Deoarece $A \cap B = \inf(A, B)$, rezultă deci un morfism $\theta: D \to A \cap B$ încît $i\theta = p_A h$ şi $j\theta = -p_B h$. Avem:

$$\alpha\theta = (i_A \circ i - i_B \circ j)\,\theta = i_A i\theta - i_B j\theta = i_A p_A h + i_B p_B h =$$

$$= (i_A p_A + i_B p_B)\, h = h$$

deci $\alpha\theta = h$; rezultă imediat că α este monomorfism, deci $(A \cap B, \alpha)$ este nucleul aplicaţiei β.

Putem deci aplica lema 3×3 și rezultă exactitatea ultimei linii a diagramei (*) și deci rezultatul din enunț.

A fost necesar ca A să fie subobiect strict în C (rezultă după [2] că este subobiect strict și în $A+B$) pentru exactitatea ultimei coloane din diagrama (*). De asemenea a fost necesar ca și B să fie subobiect strict pentru relația $A \cap B = \inf (A, B)$, care în general este dată de egalitatea $A \cap B = \inf (f(A), g(B))$.

V. IMERSIUNEA UNEI CATEGORII PREABELIENE ÎNTR-O CATEGORIE ABELIANĂ

Ca mai sus fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie preabeliană specială. Vom dovedi că există o $\mathcal{U}$-categorie abeliană $\overline{\mathcal{C}}$ numită abelianizarea lui $\mathcal{C}$ și un functor exact $T : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ astfel că pentru orice categorie abeliană $\mathcal{C}_1$ și orice functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ care duce bijecțiile în izomorfisme, există un functor unic $\overline{F} : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}_1$ cu $\overline{F} \circ T = F$. Această condiție de universalitate definește în mod unic, pînă la o echivalență, categoria $\overline{\mathcal{C}}$.

Existența categoriei $\overline{\mathcal{C}}$ o vom dovedi-o constructiv. Notăm cu Σ familia tuturor bijecțiilor lui $\mathcal{C}$.

PROPOZIȚIA 7. *Σ permite calculul fracțiilor la stînga și la dreapta* [5].

Demonstrație. Evident că orice morfism identic din $\mathcal{C}$ este o bijecție; de asemenea compunerea a două bijecții este o bijecție. Fie atunci diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\
Z \arrow[r, dashed, "\beta"] & A
\end{tikzcd}$$

cu $s \in \Sigma$, în care $A = Y \Sigma_X Z$ (f, s date și s bijecție).

Din faptul că $\mathcal{C}$ este specială, deducem că $\alpha \in \Sigma$. Analog situația duală.

PROPOZIȚIA 8. *Σ este o mulțime saturată.*

Demonstrație. Saturata mulțimii Σ este mulțimea de morfisme α pentru care există o diagramă comutativă :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "s'"] \arrow[dl, "g"] \\
Z \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

$s, s' \in \Sigma$. Din relația $g\alpha = s$ și din faptul că s este monomorfism rezultă că α este monomorfism; dual, deducem că α este și epimorfism, deci este bijecție și propoziția este demonstrată.

Morfismele saturate sînt acelea care prin T sînt transformate în izomorfisme, deci T care se va construi va avea proprietatea că va duce bijecții, și numai bijecții, în izomorfisme. Vom lua $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(\Sigma^{-1})$, categoria de fracții a lui $\mathcal{C}$ în raport cu sistemul Σ și drept functor T functorul canonic $P_\Sigma : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(\Sigma^{-1})$.

Obiectele categoriei $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ sînt obiectele lui $\mathcal{C}$, iar morfismele se definesc în felul următor: se consideră perechi de forma (f, s), unde f și s sînt morfisme ca în diagrama următoare,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "{(f,s)}"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

s fiind o bijecție, și o relație de echivalență : $(f, s) \sim (g, s')$ dacă există u și v morfisme din C încît diagrama (I) să fie comutativă și în plus $us' = vs$ să fie bijecție :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g" near start] & Y \arrow[dl, "s"' near start] \arrow[d, "s'"] \\ Z \arrow[dr, "v"'] & U \arrow[d, "u"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Un morfism în $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ de la X la Y va fi o clasă în raport cu această relație de echivalență. Se constată ușor că $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\Sigma^{-1})}(X, Y)$ este o limită inductivă de grupuri abeliene de tipul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ și deci în mod natural se poate introduce o structură de grup abelian; de asemenea se înmulțesc morfismele în $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ și înmulțirea este biliniară, încît $C(\Sigma^{-1})$ este o categorie aditivă.

PROPOZIȚIA 9. *$\overline{\mathcal{C}}$ este abeliană și T functor exact. Dacă $\mathcal{C}_1$ este o categorie abeliană și $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ este un functor cu proprietatea că $F(\alpha)$ este izomorfism dacă α este bijecție în $\mathcal{C}$, atunci există un functor unic $\overline{F}$: $\overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}_1$ cu $\overline{F} \circ T = F$.*

Demonstrație. Ultima parte rezultă din definiția categoriilor de fracții.

Obiectul 0 din categoria $\mathcal{C}$, privit ca obiect în categoria $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ încă este obiectul nul, căci perechile $(0, 1_0)$ și $(1_0, 1_0)$ ale căror clase sînt respectiv morfismul nul și identitatea sînt echivalente. Dacă A și B sînt două obiecte în $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ și i_A și i_B definesc $A \oplus B$ ca sumă directă a obiectelor A și B, atunci aplicațiile $T(i_A) = \mathrm{cl}\,(i_A, 1_{A\oplus B})$ și $T(i_B) = (i_B, 1_{A\oplus B})$ definesc $A \oplus B$ ca sumă directă a obiectelor A și B în categoria $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$. Într-adevăr, functorul T se dovedește a fi aditiv, deci comută cu suma directă finită. Fie $\bar{f} : X \to Y$ un morfism în $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$. Considerăm un reprezentant (f, s), ca în diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[rr, dashed, "\bar{f}"] \arrow[dl, "1X"'] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s'"] \\
& X & & Z &
\end{tikzcd}$$

Considerăm Ker f și g aplicația canonică Ker $f \to X$.
Atunci (Ker f, cl $(g, 1_{\times})$) este nucleul aplicației $\bar{f}$.
Există s' și h astfel că diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l_x"'] & Z \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "h"] & U
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă și s' să fie bijecție.

Atunci $\bar{f} \circ \mathrm{cl}\,(g, 1_{\times}) = \mathrm{cl}\,(hg, s's) = \mathrm{cl}\,(s' fg, s's) = 0$.

Fie $\bar{\alpha} : Y \to X$ morfism în $\mathcal{C}\,(\Sigma^{-1})$ încît $\bar{f}\,\bar{\alpha} = 0$. Considerăm diagrama :

$$\begin{tikzcd}
& & & Y \arrow[dr, "s"] & \\
\mathrm{Ker}\, f \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & & X \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[dd, "s'"] & & Z \arrow[dd, "s''"] \\
\mathrm{Ker}\, h \arrow[drr] & & & & \\
& Y \arrow[ul, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[uur, dashed, "\bar{\alpha}"] & W \arrow[rr, "h"] & & T
\end{tikzcd}$$

unde (α, s') este un reprezentant al morfismului $\bar{\alpha}$, iar s'' și h sînt morfisme astfel încît $s'' f = hs'$, s'' fiind bijecție, morfisme a căror existență rezultă din faptul că $\mathcal{C}$ este categorie preabeliană specială $O = \bar{f}\,\bar{\alpha} = \mathrm{cl}\,(h\alpha, s'' s)$ și rezultă imediat, din relația de echivalență de mai sus, că $s''' h\alpha = 0$ pentru o anumită bijecție, deci $h\alpha = 0$; rezultă deci un morfism $\beta : Y \to \mathrm{Ker}\, h$ care completează comutativ triunghiul :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & W \\
& \mathrm{Ker}\, h \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Din relația $bs' g = s'' fg = 0$, rezultă că : există $\gamma :$ Ker $f \to$ Ker h încît diagrama următoare :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & X \\
\mathrm{Ker}\, h \arrow[r] & W \arrow[u, "s'"']
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Din lema celor 5 omomorfisme, s' și s'' fiind bijecții atunci și γ este bijecție deci cl (β, γ) este un morfism $\bar{\beta} : Y \to \operatorname{Ker} f$. Se verifică imediat că $\bar{g}\,\bar{\beta} = \bar{\alpha}$ și că g este monomorfism, deci Ker f este într-adevăr nucleul aplicației $\bar{f}$.

În mod dual se demonstrează existența conucleului. Dacă :

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} \operatorname{Coim} f \xrightarrow{\gamma} \operatorname{Im} f \xrightarrow{\delta} Y \xrightarrow{\eta} \operatorname{Coker} f$$

este descompunerea canonică a morfismului f, conform cu cele spuse mai sus :

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\bar{\alpha}} X \xrightarrow{\bar{\beta}} \operatorname{Coim} f \xrightarrow{\bar{\gamma}} \operatorname{Im} f \xrightarrow{\bar{\delta}} Y \xrightarrow{\bar{\eta}} \operatorname{Coker} f$$

$(\bar{\alpha} = T(\alpha)$, $X = T(x)$, ș.a.m.d.) este de asemenea canonică a morfismului $\bar{f} = T(f)$ din categoria $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$.

Pentru a termina demonstrația faptului că $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ este abeliană, rămîne să demonstrăm că orice bijecție în $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$ este izomorfism. Fie deci $\bar{f} = \text{cl}\,(f, s)$ o bijecție în $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$.

Fie $g : U \to X$ un morfism astfel încît $fg = 0$. Rezultă că $\bar{f}\bar{g} = 0$ (unde $\bar{g} = T(g) = \text{cl}\,(g, 1)$) și deci $\bar{g} = 0$ și avînd în vedere un raționament anterior, $g = 0$:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "\bar{g}"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[rr, "\bar{f}"] \arrow[dl, "1_X"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\
& X & & Z &
\end{tikzcd}$$

deci f este monomorfism și în mod analog epimorfism, deci bijecție. Atunci morfismul clasă (s, f) este inversul lui $\bar{f}$, deci $\bar{f}$ este inversabilă.

A mai rămas de arătat că T este exact, dar aceasta rezultă imediat din modul cum se construiește nucleul și imaginea în $\mathcal{C}(\Sigma^{-1})$.

Menționăm de asemenea următoarea :

PROPOZIȚIA 10. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie preabeliană, $\mathcal{C}_1$ o categorie abeliană și $T' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ și $S : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ doi functori adjuncți (S adjunct la dreapta lui T'). Fie $\Phi : T'S \to 1\,\mathcal{C}_1$ un morfism de adjuncție și $\Psi : 1\mathcal{C} \to ST$ un cvasi-invers al său.*

Dacă T' are proprietatea că $T'(\alpha)$ este izomorfism dacă și numai dacă α este bijecție, atunci următoarele afirmații sînt echivalente :

a) *S este plin fidel*

b) *Φ este izomorfism .*

c) *Functorul $\overline{T}' : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}_1$ cu $\overline{T}' \circ T = T'$ stabilește o echivalență între $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}$.*

d) *Pentru orice $\mathcal{U}$-categorie abeliană X, functorul* Hom (T', X) *este plin fidel.*

Întrucît este vorba de o propoziție cunoscută, nu o demonstrăm ([5], propoziția 2).

Primită la redacție la 1 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Grothendieck, *Sur quelques pointes d'algebre homologique.* Tohoku Math. Jour. *3* (1957).
2. A. Lascu, M. Jurchescu, *Completation and normalization in preabelian categories.* Rev. Roum. de math. pures et appl. (sub tipar).
3. P. Gabriel, N. Popesco, *Caracterisation des catégories abèlienes avec générateurs et limites inducterées exactes.* C.R. Acad. Sc. Paris, **258**, 4 188—4 190 (1964).
4. P. Gabriel, *Des catégories abélienes.* Bull. de la Soc. Math. de France, *2* (1962).
5. P. Gabriel, *Catégories de fractions in „Séminaire homotopique.* Université de Strasbourg, 1963—1964.
6. H. Cartan, E. Eilemberg, *Homological algebra.* Princeton, 1956.
7. S. Maclane, *Homology.* Sprienger Verlag, 1963.

LINIE DE AŞTEPTARE CU STAŢII DE SERVIRE PRIORITARE ŞI NUMĂR LIMITAT DE SOLICITANŢI

DE

P. ISCOVICI şi G. GODINI

Centrul de statistică matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, nr. 47,
Bucureşti

În această lucrare se consideră o linie de aşteptare Poisson cu k staţii de servire $S_1, S_2, \ldots, S_k$ avînd ratele medii de servire $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, în cazul numărului limitat de solicitanţi. Definindu-se [1] prioritatea staţiilor de servire prin condiţia impusă solicitanţilor de a ocupa staţia cu indicele cel mai mic, se pot stabili în aceste condiţii probabilităţile P_n de a avea n solicitanţi în sistem.

Într-un articol anterior [1] a fost tratat cazul unei linii de aşteptare cu staţii de servire prioritare şi număr nelimitat de solicitanţi.

În cele ce urmează vom introduce ipoteza numărului limitat de solicitanţi.

Vom folosi aceleaşi notaţii ca în [1], menţinînd celelalte condiţii ale problemei.

★

Să presupunem că numărul solicitanţilor este limitat şi egal cu m. Aceasta înseamnă că numărul elementelor în sistem nu poate depăşi pe m.

Vom considera cazul a k staţii de servire prioritare $S_1, S_2, \ldots, S_k$ cu ratele $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, timpul de servire fiind exponenţial.

Considerăm, de asemenea, că *fiecare* solicitant soseşte în sistem conform distribuţiei Poisson cu rata medie λ. Aceasta înseamnă că probabilitatea ca un solicitant *anumit* să intre în sistem în intervalul Δt este $\lambda \Delta t$.

Să notăm că $\lambda^{(s)}$ numărul solicitanţilor care sosesc în unitatea de timp, în cazul cînd în sistem se găsesc s solicitanţi ($s \leqslant m$).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 577–581, BUCUREŞTI, 1965.

Valoarea lui $\lambda^{(s)}$ este:

$$\lambda^{(s)} = (m - s)\,\lambda \tag{1}$$

şi deci, în acest caz, probabilitatea ca un solicitant oarecare să intre în sistem în intervalul Δt este

$$\lambda^{(s)}\,\Delta t = (m - s)\,\lambda\,\Delta t. \tag{2}$$

CALCULUL PROBABILITĂŢILOR $X_{a_1 a_2 \ldots a_s}$ $(s \leqslant k)$.

Evenimentul $E^{0,\,t+\Delta t}$ se realizează într-una din situaţiile:

α) $E^{0,\,t}$ şi nici o sosire în Δt;

β) $E^{t}_{a_1}$ şi servirea lui în Δt $(a_1 = 1, 2, \ldots, k)$.

Rezultă:

$$P_0 = P_0\,(1 - \lambda^{(0)} \cdot \Delta t) + \sum_{a_1} X_{a_1}\,\mu_{a_1} \cdot \Delta t.$$

sau

$$P_0 = P_0\,(1 - m\,\lambda\,\Delta t) + \sum_{a_1} X_{a_1}\,\mu_{a_1}\,\Delta t,$$

de unde

$$\sum_{a_1} X_{a_1}\,\mu_{a_1} = m\,\lambda\,P_0. \tag{3}$$

Pentru evenimentul $E^{t+\Delta t}_{a_1 a_2 \ldots a_s}$ $(s \leqslant k - 1)$ distingem următoarele cazuri:

a) $E^{t+\Delta t}_{12\ldots s}$.

Acest eveniment se realizează cu una din situaţiile:

$E^{t}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{s-1}}$ şi o sosire în Δt, $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, s\}$;

$E^{t}_{12\ldots s}$ şi nici o sosire şi nici o servire în Δt;

$E^{t}_{12\ldots s a_{s+1}}$ şi servirea solicitantului din staţia $S_{a_{s+1}}$ în Δt.

Rezultă:

$$X_{12\ldots s} = \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,s\}} X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{s-1}}\,\lambda^{(s-1)}\,\Delta t + X_{12\ldots s}\,(1 - \lambda^{(s)}\,\Delta t)\left(1 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i\,\Delta t\right) + \sum_{a_{s+1}} X_{12\ldots s a_{s+1}}\,\mu_{a_{s+1}}\,\Delta t,$$

sau

$$X_{12\ldots s} = \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,s\}} X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{s-1}}\,(m - s + 1)\,\lambda\,\Delta t + X_{12\ldots s}\,[1 - (m - s)\,\lambda\,\Delta t]\left[1 - \sum_{i=1}^{s} \mu_i\,\Delta t\right] + \sum_{a_{s+1}} X_{12\ldots s a_{s+1}}\,\mu_{a_{s+1}}\,\Delta t$$

de unde

$$(m - s + 1)\,\lambda \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,s\}} X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{s-1}} - \left[(m - s)\,\lambda + \sum_{i=1}^{s} \mu_i\right] X_{12\ldots s} + \sum_{a_{s+1}} X_{12\ldots s a_{s+1}}\,\mu_{a_{s+1}} = 0 \tag{4}$$

b) $E^{t+\Delta t}_{12\ldots r a_{r+1} a_{r+2}\ldots a_s}$, unde $_{a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_s} > r+1$.

Acest eveniment se realizează cu una din situaţiile:

$E^t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{r-1} a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_s}$ şi o sosire în Δt, unde $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, r\}$;

$E^t_{12\ldots r a_{r+1} a_{r+2}\ldots a_s}$ şi nici o sosire şi nici o servire în Δt;

$E^t_{12\ldots r a_{r+1} a_{r+2}\ldots a_s a_{s+1}}$ şi servirea solicitantului din staţia $S_{a_{s+1}}$ în Δt.

Rezultă:

$$X_{12\ldots r a_{r+1} a_{r+2}\ldots a_s} = \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,r\}} X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{r-1} a_{r+1} \ldots a_s} \lambda^{(s-1)} \Delta t +$$

$$+ X_{12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s} (1 - \lambda^{(s)} \Delta t) \left[1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i + \sum_{j=1}^{s-r} \mu_{a_{r+j}} \right) \Delta t \right] +$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} X_{12\ldots r a_{r+1} a_s a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} \Delta t$$

sau

$$X_{12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s} = \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,r\}} X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{r-1} a_{r+1} \ldots a_s} (m - s + 1) \lambda \Delta t +$$

$$+ X_{12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s} [1 - (m - s) \lambda \Delta t] \left[1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i + \sum_{j=1}^{s-r} \mu_{a_{r+j}} \right) \Delta t + \right.$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} X_{12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} \Delta t$$

de unde

$$(m - s + 1) \lambda \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,r\}} X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{r-1} a_{r+1} \ldots a_s} -$$

$$- \left[(m - s) \lambda + \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i + \sum_{j=1}^{s-r} \mu_{a_{r+j}} \right) \right] X_{12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s} +$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} X_{12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} = 0. \tag{5}$$

c) $E^{t+\Delta t}_{a_1 a_2 \ldots a_s}$, unde $a_i \neq 1$.

Evenimentul se realizează cu una din situaţiile:

$E^t_{a_1 a_2 \ldots a_s}$ şi nici o sosire şi nici o servire în Δt;

$E^t_{a_1 a_2 \ldots a_{s+1}}$ şi servirea solicitantului din staţia $S_{a_{s+1}}$ în Δt.

Rezultă:

$$X_{a_1 a_2 \ldots a_s} = X_{a_1 a_2 \ldots a_s} (1 - \lambda^{(s)} \Delta t) \left(1 - \sum_{i=1}^{s} \mu_{a_i \ldots} \Delta t \right) +$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} X_{a_1 a_2 \ldots a_s a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} \Delta t$$

de unde

$$\left[(m - s) \lambda + \sum_{i=1}^{s} \mu_{a_i} \right] X_{a_1 a_2 \ldots a_s} - \sum_{a_{s+1}} X_{a_1 a_2 \ldots a_s a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} = 0 \tag{6}$$

Relaţiile (3), (4), (5), (6) reprezintă $2^k - 1$ ecuaţii pentru cele $2^k - 1$ necunoscute $X_{a_1 a_2 \ldots a_s}$ $(s \leqslant k)$.

Valorile $X_{a_1 a_2 \ldots a_s}$ o dată calculate putem afla probabilitățile $P_1, P_2, \ldots, P_k$ conform formulei

$$P_n = \sum_{\{a_1 a_2 \ldots a_n\}} X_{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, k \tag{7}$$

Pentru stabilirea probabilităților P_n în cazul $k < n \leqslant m$ să observăm că evenimentul $E^{n-1, t+\Delta t}$ se realizează cu una din următoarele trei situații :

$E^{n-1,t}$ și nici o sosire și nici o servire în Δt

$E^{n-2,t}$ și o sosire în Δt

$E^{n,t}$ și o servire în Δt.

Rezultă :

$$P_{n-1} = P_{n-1}\,(1 - \lambda^{(n-1)}\,\Delta t)\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \mu_i\,\Delta t\right) +$$

$$+\; P_{n-2}\,\lambda^{(n-2)}\,\Delta t + P_n \sum_{i=1}^{k} \mu_i\,\Delta t$$

relație care se reduce la :

$$P_n = \frac{(m-n+1)\,\lambda + \sum_{i=1}^{k} \mu_i}{\sum_{i=1}^{k} \mu_i} - \frac{(m-n+2)\,\lambda}{\sum_{i=1}^{k} \mu_i}\, P_{n-2} \tag{8}$$

pentru $n = k+1, k+2, \ldots, m$.

Valoarea lui P_0 se obține ținînd seama că

$$\sum_{n=0}^{m} P_n = 1. \tag{9}$$

Deoarece $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sînt funcții de P_0, formula (9) constituie o relație între λ, μ_i și P_0 din care obținem valoarea lui P_0.

Expresiile valorilor medii $M(l)$, $M(n)$, $M(w)$, $M(v)$ sînt :

$$M(l) = \sum_{n=k+1}^{m} (n-k)\,P_n \tag{10}$$

$$M(n) = \sum_{n=1}^{m} n\,P_n \tag{11}$$

$$M(w) = \frac{M(l)}{[m - M(n)]\,\lambda} \tag{12}$$

$$M(v) = \frac{M(n)}{[m - M(n)]\,\lambda}. \tag{13}$$

Primită la redacție la 17 noiembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. P. Iscovici, G. Godini, *Linie de aşteptare cu staţii de servire prioritare.* Comunicările Academiei R.P.R., *10* (1963).
2. A. Kaufmann, *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle.*
3. B. Krishnamoorthi, *On Poisson Queue with Two Heterogeneons Servers*'', Operations Research, **11** (1963).

PROGRAMAREA PSEUDOBOOLEEANĂ ȘI APLICAȚII ALE EI[1]

DE

PETRU L. IVĂNESCU

Institutul de matematică al Academiei R.P.R., str. M. Eminescu, nr. 47, București

În această lucrare se face o trecere în revistă a rezultatelor privind minimizarea funcțiilor pseudobooleene. Această tehnică permite rezolvarea unei serii de probleme din teoria grafurilor, teoria rețelelor, teoria algebrică a mecanismelor automate etc.

Scopul acestei lucrări este de a da o scurtă descriere a unor aplicații ale metodelor bazate pe algebra booleeană în cercetarea operațională.

Profesorul G. B. Dantzig a fost acela care a arătat pentru prima oară ([18], [19], Cap. 26 din [20] etc.) că o mare varietate de probleme din cercetarea operațională și din alte domenii înrudite, pot fi abordate în mod unitar, folosindu-se programarea matematică cu variabile bivalente.

Ideea inițială privind posibilitatea folosirii algebrelor booleene în probleme de economie aparține profesorului R. Fortet, care în [26] a scos în relief legătura strînsă dintre algebra booleeană și unele probleme de tip combinatoriu care apar în cercetarea operațională. În [27] el a arătat că probleme avînd o mare importanță economică pot fi tratate cu acest aparat matematic, iar în [28] el l-a folosit în legătură cu probleme de programare liniară în numere întregi. Importante rezultate în această direcție au fost obținute de Paul Camion [15] și Khaled Maghout [65].

Scopul acestei expuneri este însă doar acela de a prezenta rezultatele obținute de autor în colaborare cu Sergiu Rudeanu, Ivo Rosenberg și Aristide Deleanu.

Atenția noastră a fost atrasă spre subiectul în discuție de două fapte importante.

---

[1] Conferință ținută la Colocviul „Matematica și Cibernetica în Economie", Berlin, 1–3 octombrie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 583–598, BUCUREȘTI, 1965.

Primul constă în strînsa noastră afiliere la colectivul de cercetare condus de prof. Gr. C. Moisil, ale cărui contribuţii la aplicarea algebrelor booleene şi ale corpurilor lui Galois în teoria algebrică a mecanismelor automate (vezi de exemplu [66], [67], [68], [69], [70] etc.) sînt fundamentale. Era natural să căutăm o utilizare economică a unui aparat care s-a dovedit atît de eficace în tehnică.

În al doilea rînd, studiind diferite chestiuni legate de problema transporturilor din cercetarea operaţională ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] ^{2}), [9] ^{2}), [10] etc.) am observat că în metoda lui Egerváry [24] de rezolvare a problemei, un pas important rămîne nerezolvat, şi că acest pas poate fi uşor efectuat ([52], [53], [54]) folosindu-se tehnicile booleene ^{3}).

Lucrarea se compune din două părţi. În prima se dă o descriere a metodei programării pseudobooleene şi se expune aplicarea ei la rezolvarea problemelor de programare polinomială în numere întregi. În a doua parte a lucrării se prezintă o serie de aplicaţii ale programării pseudobooleene la probleme de tip combinatoriu care apar în cercetarea operaţională şi în unele domenii înrudite.

PARTEA A I-A

1. NOTAŢII ŞI TERMINOLOGIE

Să definim în mulţimea formată din elementele 0 şi 1, în afara operaţiilor aritmetice de adunare („+"), scădere („—") şi înmulţire („." sau simpla juxtapunere), operaţia binară de *reuniune* („$\cup$") dată prin

$$\begin{array}{c|cc} \cup & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

şi operaţia de negare („$\overline{}$") dată de

$$\begin{array}{c|cc} a & 0 & 1 \\ \hline \bar{a} & 1 & 0 \end{array}$$

Se verifică uşor că

$$a \cup b = a + b - ab \tag{1}$$

$$\bar{a} = 1 - a \tag{2}$$

şi că operaţia de reuniune este asociativă şi comutativă.

Dacă x şi a aparţin mulţimii $\{0, 1\}$, punem adesea

$$x^a = \begin{cases} x \text{ dacă } a = 1 \\ \bar{x} \text{ dacă } a = 0. \end{cases}$$

---

[2]) În legătură cu [8] şi [9] vezi şi lucrarea [17] a lui A. Charnes şi M. Kirby.

[3]) O altă soluţie a acestei probleme a fost dată de B. Krekó [62]; chestiunea a fost studiată şi de I. Kolumban [57].

Mulţimea $\{0, 1\}$ dotată cu operaţiile de reuniune, multiplicare şi negare, este o algebră booleeană şi va fi notată cu L_2.

O expresie finită formată din constante din L_2 şi variabile din L_2 cu ajutorul operaţiilor de reuniune, multiplicare şi negaţie, va fi numită o expresie booleeană. Echivalentul aritmetic al unei expresii booleene se obţine din aceasta, înlocuind cu ajutorul formulelor (1) şi (2) operaţiile de reuniune şi negaţia, prin operaţii aritmetice. O ecuaţie (inegalitate) avînd în ambii membri cîte o expresie booleeană se numeşte o ecuaţie (inegalitate) booleeană.

Produsul cartezian $\underbrace{L_2 \times \ldots \times L_2}_{n}$ se va nota cu L_2^n, adică

$$L_2^n = \{(c_1, \ldots, c_n) \mid c_i \in L_2,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

O aplicaţie F a lui L_2^n în inelul Z al întregilor

$$F : L_2^n \to Z$$

va fi numită o funcţie pseudobooleeană (FPB). Deci, argumentele unei FPB pot lua numai valorile 0 şi 1, iar valorile ei sînt numere întregi.

Ecuaţiile şi inegalităţile pseudobooleene se definesc analog cu cele booleene.

Are loc

TEOREMA 1. *Orice FPB poate fi scrisă ca un polinom cu coeficienţi întregi, liniar în oricare din variabilele sale.*

Funcţiile pseudobooleene apar în multe probleme de cercetare operaţională. Numeroase exemple pot fi găsite în Cap. 26 din [20], în [27], precum şi în capitolele următoare ale acestei lucrări. Ca o ilustrare imediată, amintim următoarea formă simplificată a problemei încărcării optime a unui vapor (vezi [12]) : Un vapor se încarcă cu mărfurile 1, 2, ..., ..., n ; notîndu-se cu v_i valoarea mărfii i, cu w_i greutatea ei şi cu z capacitatea maximă a vaporului, problema constă în determinarea celei mai valoroase încărcări a vaporului, adică în determinarea necunoscutelor $x_i \in L_2$ $(i = 1, \ldots, n)$, astfel ca

$$w_1x_1 + \ldots + w_n x_n \leqslant z,$$

şi FPB

$$v_1x_1 + \ldots + v_nx_n$$

să fie maximizată.

2. MINIMIZAREA FUNCŢIILOR PSEUDOBOOLEENE [4]

Să considerăm problema determinării acelor

(3) $$(x_1, \ldots, x_n) \in L_2^n$$

pentru care FPB

$$F_1(x_1, \ldots, x_n)$$

îşi atinge minimul.

---

[4] Pentru amănunte vezi [49], [51].

Conform teoremei 1, putem scrie

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 g_1(x_2, \ldots, x_n) + h_1(x_2, \ldots, x_n), \tag{4}$$

unde g_1 și h_1 sînt FPB de $x_2, \ldots, x_n$.

Să introducem notația

$$M_1 = \{(a_2, \ldots, a_n) \in L_2^{n-1} \mid g_1(a_2, \ldots, a_n) < 0\}$$

$$N_1 = \{(b_2, \ldots, b_n) \in L_2^{n-1} \mid g_2(b_2, \ldots, b_n) = 0\}$$

și să punem

$$x_1 = \bigcup_{(a_1, \ldots, a_n) \in M_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} \cup u_1 \left[\bigcup_{(b_2, \ldots, b_n) \in N_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} \right], \tag{5.1}$$

unde u_1 este un parametru arbitrar din L_2.

Fie x_1^+ echivalentul aritmetic al expresiei (5) în care am pus în prealabil $u_1 = 0$. Evident, x_1^+ este o funcție de $x_2, \ldots, x_n$. Fie, mai departe,

$$F_2(x_2, \ldots, x_n) = F_1[x_1^+(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]. \tag{6}$$

Repetînd procedeul de mai sus, ajungem pînă la urmă la

$$F_n(x_n) = x_n g_n + h_n, \tag{7}$$

unde g_n și h_n sînt constante. Punem acum

$$x_n = \begin{cases} 1 \text{ dacă } g_n < 0 \\ 0 \text{ dacă } g_n > 0 \\ u_n \text{ dacă } g_n = 0; \end{cases} \tag{5.n}$$

aici u_n este un parametru arbitrar din L_2.

Din (5. n), (5. n—1), ..., (5.2), (5.1) găsim

$$\begin{cases} x_n = X_n(u_n) \\ x_{n-1} = X_{n-1}(u_{n-1}, u_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i = X_i(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 = X_1(u_1, u_2, \ldots, u_n). \end{cases} \tag{8}$$

Are loc următoarea

TEOREMA 2. *Pentru orice sistem de valori* $(u_1^*, \ldots, u_n^*) \in L_2^n$ *ai parametrilor, sistemul* (8) *ne dă un sistem de valori* $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *care minimizează funcția* F_1*; invers, pentru orice sistem* $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in L_2^n$ *care minimizează funcția* F_1*, există un sistem* $(u_1^*, \ldots, u_n^*) \in L_2^n$*, astfel ca relațiile* (8) *să aibe loc.*

Cu alte cuvinte, algoritmul de mai sus ne dă toate punctele de minim ale lui F_1, și numai pe acestea.

Un procedeu de accelerare a calculelor este descris în [45].

3. SISTEME DE ECUAŢII ŞI INEGALITĂŢI PSEUDOBOOLEENE

În acest capitol se vor schiţa trei metode alternative pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii şi inegalităţi pseudobooleene, care au fost descrise în [35], [36], [39], [40], [43]. Ele extind metodele cunoscute ale lui W. E. Johnson [56], L. Löwenheim [64], S. Rudeanu [73], [74], [75] pentru rezolvarea ecuaţiilor booleene la cazul celor pseudobooleene.

1°. Se poate arăta uşor ([39]) că un sistem de ecuaţii şi inegalităţi pseudobooleene este întotdeauna echivalent cu o singură ecuaţie pseudobooleeană

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{9}$$

Un sistem de funcţii booleene

$$x_i = x_i\,(u_1, \ldots, u_m), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

se numeşte soluţia generală a ecuaţiei (9) dacă pentru orice $(u_1^*, \ldots, u_m^*) \in L_2^m$, sistemul

$$x_i^* = x_i\,(u_1^*, \ldots, u_m^*), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

este o soluţie a ecuaţiei (9) şi invers, pentru orice soluţie $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ a ecuaţiei (9), există valori $(u_1^*, \ldots, u_m^*) \in L_2^m$ astfel ca relaţiile (11) să aibă loc.

Pentru orice întreg z vom defini redusa sa z' prin

$$z' = \begin{cases} 1 \text{ dacă } z \neq 0 \\ 0 \text{ dacă } z = 0, \end{cases}$$

şi în mod analog definim redusa unei FPB $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ prin

$$f'\,(x_1, \ldots, x_n) = [f\,(x_1, \ldots, x_n)]' = \begin{cases} 1 \text{ dacă } f\,(x_1, \ldots, x_n) \neq 0, \\ 0 \text{ dacă } f\,(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

1°. 1. În [39] am dat o formulă pentru calculul redusei unei FPB; această formulă se bazează pe unele rezultate ale lui R. Fortet [28] şi P. Camion [15].

În aceeaşi lucrare am dat un algoritm pentru obţinerea unei soluţii particulare $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ a ecuaţiei (9). Folosind aceste două rezultate, se poate stabili ([39]) următoarea

TEOREMA 3. *Dacă* $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *este o soluţie particulară a ecuaţiei pseudobooleene* (9), *atunci soluţia generală a ei va fi*

$$x_i = x_i^* \cdot f'\,(p_1, \ldots, p_n) + p_i \cdot \overline{f'\,(p_1, \ldots, p_n)}, \; (i=1, \ldots, n), \tag{12}$$

unde $p_1, \ldots, p_n$ *sînt parametri arbitrari din* L_2.

1°. 2. Metoda eliminărilor succesive descrisă de S. Rudeanu în [73] pentru ecuaţiile booleene, poate fi extinsă la cazul ecuaţiilor pseudobooleene [40]. Punînd f_1 în locul lui f, transcriem ecuaţia (9) sub forma

$$f_1\,(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1\,(x_2, \ldots, x_n)\, x_1 + \psi_1\,(x_2, \ldots, x_n)\, \overline{x}_1 = 0,$$

unde φ_1 şi ψ_1 sînt FPB de $x_2, \ldots, x_n$.

Punem în continuare

$$f_2 = \varphi_1(x_2, \ldots, x_n) \cdot \psi_1(x_2, \ldots, x_n)$$

şi

$$f_2(x_2, \ldots, x_n) = \varphi_2(x_3, \ldots, x_n)\, x_2 + \psi_2(x_3, \ldots, x_n)\, \overline{x}_2 = 0.$$

În general punem

$$f_k = \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n) \cdot \psi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

şi

$$f_{k+1}(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \varphi_{k+1}(x_{k+2}, \ldots, x_n) \cdot x_{k+1} + \psi_{k+1}(x_{k+2}, \ldots, x_n)\, \overline{x}_{k+1} = 0.$$

În sfîrşit, punem

$$f_n = \varphi_n x_n + \psi_n \overline{x}_n = 0,$$

unde φ_n şi ψ_n sînt constante.

Definim pentru fiecare $(p_k, \ldots, p_n) \in L_2^{n-k+1}$

$$X_k(p_k, \ldots, p_n) = S_k(p_{k+1}, \ldots, p_n) \cdot p_k + T_k(p_{k+1}, \ldots, p_n) \cdot \overline{p}_k, \quad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{13. k}$$

unde

$$S_k(p_{k+1}, \ldots, p_n) = \overline{\varphi_k' [X_{k+1}(p_{k+1}, \ldots, p_n), \ldots, X_n(p_n)]}$$
$$T_k(p_{k+1}, \ldots, p_n) = \psi_k' [X_{k+1}(p_{k+1}, \ldots, p_n), \ldots, X_n(p_n)]$$

şi

$$X_n(p_n) = \overline{\varphi_n'}\, p_n + \psi_n' \overline{p}_n. \tag{13. n}$$

Se poate demonstra ([40]) că are loc

Teorema 4. *Dacă ecuaţia* (9) *este rezolvabilă, atunci sistemul*

$$x_i = X_i(p_1, \ldots, p_n) \tag{14}$$

definit de relaţiile (13. k), (13. n) *este soluţia generală a ei.*

2°. P. Camion a arătat în [15] că pentru orice sistem de ecuaţii şi inegalităţi pseudobooleene, există un sistem de congruenţe în corpul de imaginare ale lui Galois *GF* (2) avînd aceleaşi necunoscute şi astfel încît orice soluţie a primului sistem este soluţie a celui de-al doilea sistem, şi invers, orice soluţie a celui de-al doilea sistem este soluţie a primului sistem.

În [35], [36] am arătat cum se pot extinde rezultatele lui Johnson, Löwenheim, Rudeanu pentru găsirea soluţiei generale a unui sistem de congruenţe din *GF* (2). Au fost propuse două metode, analoage cu cele amintite la punctul 1.

3° Utilizînd rezultatele lui R. Fortet expuse în [28] putem să transformăm orice sistem de ecuaţii şi inegalităţi pseudobooleene într-un sistem de ecuaţii booleene. Dar un sistem de ecuaţii booleene este echivalent cu o singură ecuaţie booleeană, iar aceasta poate fi rezolvată cu ajutorul metodelor cunoscute citate mai sus. Acest procedeu de rezolvare a sistemelor de ecuaţii şi inecuaţii pseudobooleene a fost propus în [43].

4. PROGRAMAREA PSEUDOBOOLEEANĂ

Prin programare pseudobooleeană vom înţelege problema determinării acelor valori

$$(x_1, \ldots, x_n) \in L_2^n$$

care satisfac sistemul de ecuaţii şi inegalităţi pseudobooleene

$$(15) \qquad f_j(x_1, \ldots, x_n)\, R_j\, 0, \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

(unde R_j sînt relaţiile $=, \leqslant, \geqslant, <, >$) şi minimizează (sau maximizează) *FPB*.

$$(16) \qquad f_0(x_1, \ldots, x_n).$$

Pentru o prezentare detaliată a se vedea [35], [36], [41], [42], [43].

Procedeul general de rezolvare a problemelor de programare pseudobooleeană are două faze:

a) Se determină soluţia generală a sistemului (15) cu ajutorul uneia din metodele expuse în Cap. 3.

b) Soluţia generală astfel determinată se introduce în funcţia (16); după aceasta problema se reduce la minimizarea unei *FPB* — putem folosi deci metoda descrisă în Cap. 2.

Observaţie. În multe probleme de programare pseudobooleeană funcţiile f_j din (15) au proprietatea că

$$(17) \qquad f_j(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in L_2^n$. Să notăm în acest caz cu D suma coeficienţilor pozitivi ai unei expresii polinomiale a lui $f_0(x_1, \ldots, x_n)$. Avem ([44])

Teorema 5. *În cazul în care condiţia* (17) *are loc, soluţia problemei de programare pseudobooleeană se obţine minimizînd (cu metoda descrisă în Cap. 2) funcţia pseudobooleeană*

$$(18) \qquad f_0(x_1, \ldots, x_n) + (D + 1) \sum_{j=1}^{m} f_j(x_1, \ldots, x_n).$$

În lucrarea [44] au fost considerate şi alte cazuri speciale de programare pseudobooleeană.

5. PROGRAMAREA DISCRETĂ POLINOMIALĂ LOGICĂ

Importanţa rezolvării problemelor de programare matematică în numere întregi a fost subliniată în repetate rînduri de către G. B. Dantzig ([18], [19], [20]), iar metodele lui R. Gomory [32], [33], E. M. L. Beale [11],

A. Ben-Israel și A. Charnes [13], A. H. Land și A. G. Doig [63], rezolvă problema în cazul liniar. Procedeul lui H. P. Künzi și W. Oettli [61] rezolvă problema în cazul cînd funcția-obiectiv este pătratică și convexă, restricțiile fiind liniare. Pe de altă parte, L. Németi și F. Radó [71], [72] au studiat probleme de programare liniară cu condiții logice.

Se poate arăta că programarea pseudobooleeană poate rezolva o clasă largă de astfel de probleme. Mai exact, s-a demonstrat ([36], [41]) că toate problemele de tipul următor pot fi reduse la probleme de programare pseudobooleeană :

Să se determine elementele

$$y_1, \ldots, y_h \text{ din } Y$$
$$z_1, \ldots, z_k \text{ din } Z$$

care minimizează polinomul cu coeficienți întregi

$$p_0\,(y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_k)$$

și satisfac condițiile

$$\underline{M}_q \leqslant z_q \leqslant \overline{M}_q, \qquad (q = 1, \ldots, k)$$
$$p_j\,(y_1, \ldots, y_h;\ z_1 \ldots, z_k)\ R_j 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

„cel puțin una din relațiile

$$\text{(19. a)} \qquad p_{j_a}(y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_k)\ R_{j_a} 0$$
$$\text{(19. b)} \qquad p_{j_b}(y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_k)\ R_{j_b} 0$$

are loc"

„una și numai una din relațiile (19. a), (19. b) are loc"

„relația (19. a) implică relația (19. b)".

Aici, Y este o submulțime finită a inelului Z al numerelor întregi, p_j sînt polinoame cu coeficienți întregi, R_j sînt relațiile $=, \leqslant, \geqslant, <, >$, iar $\underline{M}_q$ și $\overline{M}_q$ sînt întregi dați.

PARTEA A II-A

6. APLICAȚII LA TEORIA GRAFURILOR

În acest capitol vom arăta că determinarea numerelor de bază (numărul cromatic, numărul de stabilitate internă, numărul de stabilitate externă) și a nucleelor unui graf finit pot fi rezolvate cu ajutorul programării pseudobooleene. Detalii și demonstrații în [48]. Terminologia este aceea din [14].

Fie $C_G = ((c_{ij}))$ matricea de incidență a unui graf G avînd ca mulțime a vîrfurilor $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Orice submulțime $X \subseteq V$ se poate caracteriza cu ajutorul unui element $(x_1, \ldots, x_n) \in L_2^n$, unde $x_i = 1$ dacă și numai dacă $v_i \in X$. Numărul elementelor mulțimii X se va nota cu $|X|$.

1°. 1. Determinarea numărului cromatic. O submulţime interior stabilă M a lui V se numeşte superioară dacă oricare ar fi submulţimea interior stabilă N a lui V, din $M \subseteq N$ rezultă $M = N$. Mulţimile interior stabile superioare M_u ale grafului pot fi determinate prin minimizarea FPB

$$W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

punîndu-se

$$M_u = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_{q_u}}\}$$

dacă şi numai dacă W are un minim în punctul

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j \in \{j_1, \dots, j_{q_u}\}, \\ 0 \text{ pentru } j \notin \{j_1, \dots, j_{q_u}\}. \end{cases}$$

Fie q numărul mulţimilor interior stabile superioare şi fie

$$d_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } v_i \in M_k \\ 0 \text{ dacă } v_i \notin M_k \end{cases}$$

Are loc

TEOREMA 6. *Numărul cromatic* $\gamma(G)$ *este egal cu minimul FPB*

$$(q + 1) \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{q} (1 - d_{ik} x_k) + \sum_{k=1}^{q} x_k ; \tag{20}$$

o descompunere cromatică $P_1, \dots, P_\gamma$ *se poate determina punîndu-se*

$$P_1 = N_1$$

$$P_2 = N_2 - N_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_\gamma = N_\gamma - \bigcup_{h=1}^{\gamma-1} N_h ,$$

unde $N_1, \dots, N_\gamma$ *sînt acele mulţimi interior stabile superioare pentru care* $x_{k_1} = \dots = x_{k_\gamma} = 1$ *într-un minim al FPB* (20).

1°. 2. Determinarea numărului de stabilitate internă $\alpha(G)$ se poate face cu ajutorul următoarei

TEOREMA 7. *Pentru orice* $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in L_2^n$ *care minimizează FPB*

$$E = (n + 1) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j - \sum_{k=1}^{n} x_k \tag{21}$$

şi pentru

$$R^* = \{v_i \mid v_i \in V, x_i^* = 1\},$$

avem

$$\alpha(G)=\sum_{i=1}^{n} x_i^* = |R^*|$$

și invers, orice mulțime interior stabilă maximală poate fi determinată astfel.

1°. 3. Determinarea numărului de stabilitate externă $\beta(G)$ se poate face cu ajutorul următoarei

TEOREMA 8. *Pentru orice* $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in L_2^n$ *care minimizează FPB*

$$H=(n+1)\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}[1-(c_{ij}+\delta_{ij})x_j]+\sum_{k=1}^{n}x_k \tag{22}$$

și pentru

$$S^*=\{v_i \mid v_i \in V, x_1^*=1\}$$

avem

$$\beta(G)=\sum_{i=1}^{n} x_i^* = |S^*|$$

și invers, orice mulțime exterior stabilă minimală poate fi obținută astfel (aici δ_{ij} este simbolul lui Kronecker).

1°. 4. Determinarea nucleelor se poate face cu ajutorul următoarei

TEOREMA 9. *Graful G are un nucleu dacă și numai dacă minimul FPB*

$$J=\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod_{j=1}^{n}(1-c_{ij}x_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_i x_j \tag{23}$$

este egal cu zero. În acest caz dacă $J_{\min}=J(x_1^*, \ldots, x_n^*)=0$, *atunci*

$$T^*=\{v_i \mid v_i \in V, x_i^*=1\}$$

este un nucleu, și orice nucleu poate fi determinat astfel.

7. APLICAȚII LA TEORIA FLUXULUI ÎN REȚELE

Scopul acestui capitol este de a aplica metoda programării pseudobooleene la determinarea tăieturilor minime și a valorii fluxului maxim într-o rețea (cu sau fără mărginiri inferioare ale fluxului din arce), precum și la rezolvarea unor probleme de compatibilitate în rețele. Terminologia este aceea din lucrarea [25] a lui L. R. Ford și D. R. Fulkerson. Demonstrații, detalii și exemple privind rezultatele acestui capitol se găsesc în [37].

Fie $w_0, w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}$ vîrfurile unei rețele (w_0 fiind sursa, iar w_{n+1} destinația), $((c_{ij}))$ matricea de incidență a rețelei, iar $((k_{ij}))$ matricea capacităților din arce. Are loc

TEOREMA 10. *Dacă* $(q_1^*, \ldots, q_n^*) \in L_2^n$ *este un punct de minim al FPB*

$$k_{0,\,n+1} + \sum_{j=1}^{n} k_{0j}\,\overline{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_i\, \overline{q}_j + \sum_{j=1}^{n} k_{j,\,n+1}\, q_j, \tag{24}$$

atunci

$$Q^* = \{w_j \mid q_j^* = 1\} \tag{25}$$

constituie o tăietură minimală care separă sursa de destinaţie, şi invers orice tăietură minimală care separă sursa de destinaţie se poate obţine astfel. Valoarea fluxului maxim este $k\,(Q^*,\, Q_1^*)$, *unde*

$$Q_1^* = \{w_j \mid q_j^* = 0\}. \tag{26}$$

Dacă se pune condiţia ca fluxurile f_{ij} din arcele reţelei să fie limitate inferior :

$$0 \leqslant h_{ij} \leqslant f_{ij} \leqslant k_{ij}, \tag{27}$$

atunci are loc

TEOREMA 11. *Valoarea fluxului maxim care satisface condiţia* (27) (*dacă un asemenea flux există*) *este egală cu minimul FPB*

$$\begin{aligned} k_{0,\,n+1} - h_{n+1,0} &+ \sum_{j=1}^{n} (k_{0j}\overline{q}_j - h_{n+1,j}\, q_j) + \sum_{j=1}^{n} (k_{j,\,n+1}\, q_j - h_{j0}\, \overline{q}_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (k_{ij}\, q_i \overline{q}_j - h_{ij} \overline{q}_i\, q_j). \end{aligned} \tag{28}$$

S-a arătat în [37] că

— teorema de producţie-consum a lui Gale [31],

— teorema de producţie-consum simetric a lui Fulkerson [30],

— teorema de circulaţie a lui Hoffman [34],

pot fi tratate toate cu ajutorul programării pseudobooleene. Condiţiile de compatibilitate din teoremele mai sus revin la nenegativitatea minimelor unor FPB.

8. APLICAŢII LA PROBLEMA TRANSPORTURILOR

Metoda lui Egerváry de rezolvare a problemei transporturilor [24], [59], [60] conţine un pas nerezolvat ⁵) ; acest pas poate fi efectuat sistematic cu ajutorul programării pseudobooleene [52], [53], [54].

Problema este următoarea : Se dă o matrice şi o mulţime de elemente marcate (de fapt zerourile) ale ei. Fiecărei linii i şi fiecărei coloane j îi corespunde cîte un număr real pozitiv a_i, respectiv b_j. Problema constă în determinarea unui sistem

$$S = \{i_1, \ldots, i_p\,;\; j_1, \ldots, j_q\}$$

---

⁵) O metodă de a rezolva acest pas este dată de B. Krekó în anexa volumului [62].

de linii şi coloane, care să acopere elementele marcate ale matricei (adică orice element marcat trebuie să aparţină unei linii sau (şi unei coloane din S) şi astfel încît suma

$$F(S) = \sum_{h=1}^{p} a_{i_h} + \sum_{k=1}^{q} b_{j_k}$$

să fie minimă. Are loc

TEOREMA 12. *Fie* $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in L_2^n$ *un punct de minim al FPB*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \prod_{i \in S_j} x_i \tag{29}$$

(unde $S_j = \{i / i \in \{i_1, \ldots, i_\nu\}, (i, j)$ este un element marcat$\}$) *şi fie*

$$y_j^* = \prod_{i \in S_j} x_i^*, \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Atunci o acoperire minimală S *se obţine punînd*

$$\begin{cases} i \in S \Leftrightarrow x_1^* = 1 \\ j \in S \Leftrightarrow y_j^* = 1 \end{cases}$$

şi orice acoperire minimală poate fi obţinută astfel. Minimul lui $F(S)$ *este egal cu minimul FPB* (29).

Timpul necesar pentru efectuarea calculelor folosind metoda de mai sus s-a dovedit a fi substanţial redus faţă de cel necesitat de alte metode.

9. APLICAŢII LA TEORIA ALGEBRICĂ A MECANISMELOR AUTOMATE

Scopul acestui capitol este de a schiţa o metodă de determinare a tuturor minimelor absolute ale funcţiilor booleene. Această problemă apare frecvent în teoria algebrică a mecanismelor automate. Detaliile metodei sînt expuse în [51]. În [55] metoda a fost extinsă pentru cazul funcţionării reale a unui automat, adică pentru cazul în care în afara poziţiilor de ,,funcţionare'' şi ,,nefuncţionare'' ale elementelor constitutive ale automatului mai apare şi o poziţie de tranziţie.

Problema matematică poate fi formulată astfel: L_2^n este partiţionat în trei submulţimi disjuncte: N_f, Z_f şi D_f. Problema este de a determina o funcţie booleeană $f(x_1, \ldots, x_n)$ astfel ca

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } (x_1, \ldots, x_n) \in N_f \\ 0 & \text{dacă } (x_1, \ldots, x_n) \in Z_f \\ \text{arbitrar (0 sau 1)} & \text{dacă } (x_1, \ldots, x_n) \in D_f \end{cases}$$

şi astfel ca numărul de litere (cu sau fără bară) care apar în expresia găsită a funcţiei să fie minim. S-a arătat în [51] că o serie de alte criterii de minimizare pot fi abordate în acelaşi fel.

Fie $F(x_1, \ldots, x_n)$ o funcţie booleeană egală cu 1 pe $N_f \cup D_f$ şi egală cu 0 pe Z_f. Determinăm implicanţii primi $p_1, \ldots, p_m$ ai lui F cu oricare din metodele cunoscute. Dacă notăm cu $X_1, \ldots, X_k$ elementele lui N_f, dacă punem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } X_i \text{ este implicant al lui } p_j \\ 0 \text{ dacă } X_i \text{ nu este implicant al lui } p_j \end{cases}$$

şi dacă notăm cu π_j numărul de litere conţinut în p_j, avem

Teorema 13. *Dacă* $(y_1^*, \ldots, y_m^*) \in L_2^m$ *este un punct de minim al FPB*

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j y_j + \left(\sum_{j=1}^{m} \pi_j + 1\right) \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} (1 - a_{ij} y_j)$$

atunci un minim absolut al lui f este

$$\bigcup_{j=1}^{m} y_j^* p_j (x_1, \ldots, x_u)$$

şi invers, orice minim absolut al lui f este de această formă.

10. DESCOMPUNERILE MINIMALE ALE MULŢIMILOR FINITE PARŢIAL ORDONATE

Scopul acestui capitol este de a arăta că determinarea numărului N de lanţuri dintr-o descompunere minimală a unei mulţimi finite parţial ordonate precum şi problema determinării acelor lanţuri, pot fi reduse la minimizarea unor FPB. Rezultatele lui Dilworth [23], Dantzig şi Hoffman [21] şi ale lui Fulkerson [29] oferă diferite căi de traducere a acestei probleme în limbajul pseudobooleean. Detalii se găsesc în [38].

Să considerăm o mulţime finită parţial ordonată $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ avînd „$<$" ca relaţie de ordine nereflexivă. Să formăm matricea $B = ((b_{ij}))$ punînd

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } s_i < s_j, \\ 0 \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Să formăm următoarele FPB

$$F = -\sum_{i=1}^{n} x_i + (n+1) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \tag{30}$$

$$G = \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{j=1}^{n} \prod_{b_{ij}=1} \overline{y}_i - n \tag{31}$$

$$H = -\sum_{n=1}^{n} z_h + (2n+1) \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} b_{ij} \overline{z}_i \overline{z}_j \tag{32}$$

Are loc următoarea

Teorema 14. *Numărul minim N de lanţuri în care se poate descompune mulţimea finită parţial ordonată S satisface relaţiile*

$$N = -F_{\min} = G_{\max} = -H_{\min} \tag{33}$$

S-a arătat în [38] că FPB (30) permite determinarea antilanţurilor maximale ale lui S, şi că FPB (32) permite determinarea tăieturilor minime ale grafului bipartit $G(S)$ care i se asociază lui S prin procedeul indicat de Fulkerson [29].

BIBLIOGRAFIE

1. Balaş, E., Ivănescu, P. L. (Hammer), *The Transportation Problem with Interchangeable Centers* (in Rumanian), St. cerc. mat., **11**, *2* (1960).
2. Balaş, E., Ivănescu, P. L. (Hammer), *A Method for Solving Transportation Problems* (in Rumanian), Comunicările Academiei R.P.R., **11**, *9* (1961).
3. Balaş, E., Ivănescu, P. L., *The Parametric Transportation Problem* (in Rumanian), St. cerc. mat., **12**, *2*, (1961).
4. Balaş, E., Ivănescu, P. L., *The Transportation Problem with Variable Centers* (in Rumanian), St. cerc. mat. **12**, *2* (1961).
5. Balaş, E., Ivănescu, P. L., *Transportation Problems with Variable Data,* Revue de math. pures et appl., **6**, *4* (1961).
6. Balaş, E., Ivănescu, P. L., *Transportation of Nonhomogeneous Products* (in Rumanian), St. cerc. mat., **13**, *1* (1962).
7. Balaş, E., Ivănescu, P. L., *Stability of Optimal Solutions of Transportation Problems with Changing Costs* (in Rumanian), Comunicările Academiei R.P.R., **13**, *3* (1963).
8. Balaş, E., Ivănescu, P. L., *On the Transportation Problem,* Part I, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, **4**, *2* (1962).
9. Balaş, E., Ivănescu, P. L., *On the Transportation Problem,* Part. II, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, **4**, *3* (1962).
10. Balaş, E., Ivănescu, P. L., *On the Generalized Transportation Problem,* Management Science, **11**, *1* (1964).
11. Beale, E. M. L., *A Method of Solving Linear Programming Problems when Some but Not All of the Variables Must Take Integral Values.* Statistical Techniques Research Group, Princeton University, Princeton, New Jersey, March, 1958.
12. Bellman, R. E., Dreyfus, S. E., *Applied Dynamic Programming.* Princeton University Press, 1962.
13. Ben-Israel, A., Charnes, A., *On some Problems of Dyophantine Programming.* Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, *4*, *4*, 215—280 (1962).
14. C. Berge, *Théorie des Graphes et ses Applications.* Paris, Dunod, 1958.
15. Camion, P., *Une méthode de résolution par l'algèbre de Boole des problèmes combinatoires où interviennent des entiers.* Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, **2**, *3* (1960).
16. Caldwell, S. H., *Switching Circuits and Logical Design.* Wiley, 1958.
17. Charnes, A., Kirby, M., *The Dual Method and the Method of Balaş and Ivănescu for the Transportation Problem.* Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, **6**, *1*, 5—18 (1964).
18. Dantzig, G. B., *Discrete Variable Extremum Problems.* Operations Research, **5**, *2* (1957).
19. Dantzig, G. B., *On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables.* Econometrica, **28**, *1* (1960).
20. Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, 1963, 621 pp.
21. Dantzig, G. B., Hoffman, A. J., *Dilworth's Theorem on Partially Ordered Sets.* Paper n. XI, in Linear Inequalities and Related Systems, edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Stud., **38**.

22. Deleanu, A., Ivănescu, P. L., *Optimal Assignment of Numbers to Vertices by Pseudo-Boolean Programming*. Comm. Coll. on Appl. of Math. in Econ., Jassy (Rumania), 1964, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.P.R., **8** (56) (1964).

23. Dilworth, R. P., *A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets*. Annals of Mathematics, **51**, 161–166 (1950).

24. Egerváry, J., *Matrixok kombinatorikus tulajdonsagairol*. Mat. Fiz. Lapok, 1931, p. 6.

25. Ford, L. R. Jr., Fulkerson, D. R., *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.

26. Fortet, R., *L'algèbre de Boole et ses applications en recherche opérationnelle*. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, **1**, 4 (1959).

27. Fortet, R., *Applications de l'algèbre de Boole en Recherche Opérationnelle*. Revue Française de Recherche Opérationnelle, *14* (1960).

28. Fortet, R., *Résolution Booléenne d'opérations arithmétiques sur les entiers non négatifs et applications aux programmes linéaires en nombres entiers*. SMA, Paris, Mars 1960 (Mimeographed).

29. Fulkerson, D. R., *Note on Dilworth's Theorem for Partially Ordered Sets*. Proc. Amer. Math. Soc., **7**, 4, 701–702 (1956).

30. Fulkerson, D. R., *A Network Flow Feasibility Theorem and Combinatorial Applications* Canad. J. Math., **11**, 440–451 (1959).

31. Gale, D., *A Theorem on Flows in Networks*. Pacific J. Math., **7**, 1 073–1 082 (1957).

32. Gomory, R., *Essentials for an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programming*. Bull. Amer. Math. Soc., **64**, *5* (1958).

33. Gomory, R., *Extension of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programming*. Amer. Math. Soc. Notices,*6* , *1* (1959), Issue, 36, Abstract 553–190.

34. Hoffman, A. J., *Some Recent Applications of the Theory of Linear Inequalities to Extremal Combinatorial Analysis*. Proc. of Symposia in Applied Math., **10**, 113–128 (1960).

35. Ivănescu, P. L., *Applications of Galois Fields to Discrete Mathematical Programming*. Comm. at the Coll. Approx. Funct. Appl. Num. Anal., Cluj, November, 15–19 (1963).

36. Ivănescu, P. L., *Programmation polynomiale en nombres entiers*. C.R. Acad. Sci., Paris, **258**, *2* (1964).

37. Ivănescu, P. L., *Some Network-Flow Problems Solved with Pseudo-Boolean Programming*. Operations Research, **13** (1965) (to appear).

38. Ivănescu, P. L., *On the Minimal Decomposition of Finite Partially Ordered Sets in Chains*. Rev. Roum. math. pures et appl., **9**, *10* (1964).

39. Ivănescu, P. L., *Systems of Pseudo-Boolean Equations and Inequalities*. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **12**, 11 (1964).

40. Ivănescu, P. L., *The Method of Succesive Eliminations for Pseudo-Boolean Equations*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **12**, 11 (1964).

41. Ivănescu, P. L., *Outline of the Pseudo-Boolean Method for Integer Polynomial Programming*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, *11*.

42. Ivănescu, P. L., *Integer Polynomial Programming*. Comm. at. the International Symposium on Mathematical Programming, London School of Economics, London, July 6–10, 1964. Mimeographed.

43. Ivănescu, P. L., *Sur la Résolution par l'algèbre de Boole des problèmes de programmation polynomiale en nombres entiers*. C.R. Acad. Sci. (to appear).

44. Ivănescu, P. L., *Pseudo-Boolean Programming with Special Restraints — Applications to Graph Theory*. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, *1*, *3* (1965) (to appear).

45. Ivănescu, P. L., *Accelerating the Minimization of Pseudo-Boolean Functions*. Manuscript.

46. Ivănescu, P. L., *Sur le couplage des graphes simples*. Communication at the International Conference on Mathematical Methods in the Economy, Smolenice, Czechoslovakia, 1965.

47. Ivănescu, P. L., *Systems of Distinct Representatives*. Manuscript.

48. Ivănescu, P. L. and Rosenberg, I., *Applications of Pseudo-Boolean Programming to the Theory of Graphs*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie, **3**, 2 (1964).

49. Ivănescu, P. L., Rosenberg, I. and Rudeanu, S., *On the Minimization of Pseudo-Boolean Functions* (in Rumanian), St. cerc. mat., **14**, *3* (1963).

50. Ivănescu, P. L., Rosenberg, I. and Rudeanu, S., *Pseudo-Boolean Programming*. Proc. Coll. Appl. Math. in Econ., Budapest, June 18–22, 1963 (to appear).

51. **Ivănescu**, P. L., **Rosenberg**, I. and **Rudeanu**, S., *Application of Discrete Linear Programming to Minimization of Boolean Functions* (in Russian), Rev. math. pures et appl., **8**, 3 (1963).

52. **Ivănescu**, P. L.(**Hammer**) and **Rudeanu**, S., *On the Egérvary Method for Solving Transportation Problems*, I (in Rumanian), Comunicările Academiei R.P.R., **11**, 7 (1961).

53. **Ivănescu**, P. L. and **Rudeanu**, S., *On the Egerváry Method for Solving Transportation Problems, II* (in Rumanian), St. cerc. mat., **14**, 1 (1963).

54. **Ivănescu**, P. L. and **Rudeanu**, S., *An Application of Boolean Algebra to the Transportation Problem*, Com. at Coll. Math. Logics and Appl., Tihany (Hungary), September 1962.

55. **Ivănescu**, P. L. and **Rudeanu**, S., *Minimization of Switching Circuits in Case of Hazard*. Circular Letter No. 14, IFAC Symposium on Race and Hazard Phenomena in Switching Circuits, Bucharest, 1965.

56. **Johnson**, W. E., *Sur la théorie des équations logiques*. Bibl. Congr. Internat. Phil., **III** (1901).

57. **Kolumban**, I., *On the Egerváry Method for Solving the Transportation Problem*. Comm. at the Coll. on Numer. Anal., Cluj, Rumania, December 1962.

58. **König**, D., *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936.

59. **Kuhn**, H. W., *The Hungarian Method for the Assignment Problem*. Naval Research Logistics Quarterly, 2, *2*, 83–97 (1955).

60. **Kuhn**, H. W., *Variants of the Hungarian Method for Assignment Problems*. Naval Research Logistics Quarterly, **3**, 253–258 (1956).

61. **Künzi**, H. P. and **Oettli**, W., *Integer Quadratic Programming*. in „Recent Advances in Mathematical Programming" (ed. R. L. Graves and Ph. Wolfe), Mc.Graw-Hill Book Company, 1963, pp. 303–308.

62. **Krekó**, B., *Linearis Programózas*. Budapest, 1962.

63. **Land**, A. H. and **Doig**, A. G., *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*. London School of Economics, 1957.

64. **Löwenheim**, L., *Über die Auflösung von Gleichungen im Logischen Gebietkalkul*. Math. Ann., **68** (1910).

65. **Maghout**, K., *Applications de l'Algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques*. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, **5**, 1–2 (1963).

66. **Moisil**, Gr. C., *Scheme cu comandă directă cu contacte și relee*. Editura Academiei R.P.R., București, 1960.

67. **Moisil**, Gr. C., *Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale*. Editura Academiei R.P.R., București, 1961.

68. **Moisil**, Gr. C., *Circuite cu tranzistori*, vol. I, II, Editura Academiei R.P.R., București, 1963.

69. **Moisil**, Gr. C., *Algebraic Theory of Switching Circuits* (in Rumanian : București, 1959 ; in Russian : Moscow, 1963 ; English translation in press).

70. **Moisil**, Gr. C., *An Algebraic Theory of the Actual Operation of Relay Switching Circuits*. IFAC Symp. on Hazard and Race Phenomena in Switching Circuits, Circular Letter 5, Bucharest, 1964.

71. **Nemeti**, L., **Radó**, F., *Ein Wartezeitproblem in der Programmierung der Production*. Mathematica (Cluj), (in press).

72. **Radó**, F., *Linear Programming with Logical Conditions* (in Rumanian), Comunicările Academiei R.P.R., **13**, 12, 1 039–1 042 (1963).

73. **Rudeanu**, S., *Boolean Equations and their Applications to the Study of Bridge-Circuits, I*. Bull. Math., **3** (51), *4* (1959).

74. **Rudeanu**, S., *Boolean Equations and their Applications to the Study of Bridge-Circuits, II* (in Rumanian), Comunicările Academiei R.P.R., **11**, 6 (1961).

75. **Rudeanu**, S., *On Solving Boolean Equations with the Method of Löwenheim* (in Rumanian), St. cerc. mat., **13**, 2 (1962).

UN SISTEM DE AXIOME PENTRU ALGEBRA EVENIMENTELOR[1]

DE

ION D. ION

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii din Bucureşti

Este introdusă o structură algebrică care admite ca model algebra evenimentelor într-un alfabet $\sum$. Se poate face astfel un studiu sistematic al algebrei evenimentelor. Este dată o teoremă de reprezentare a structurii definite în algebra evenimentelor.

1. În problemele de analiză şi sinteză din teoria abstractă a automatelor un loc central îl ocupă algebra evenimentelor.

Fie $\sum = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ un alfabet finit, $F(\sum)$ semigrupul liber generat de $\sum$, $\mathfrak{A}(\sum)$ mulţimea tuturor părţilor lui $F(\sum)$, Λ elementul de efect nul al lui $F(\sum)$. Elementele mulţimii $\mathfrak{A}(\Sigma)$ se numesc evenimente în alfabetul $\sum$. Disjuncţia evenimentelor S_1 şi S_2 este prin definiţie reuniunea lor $S_1 \cup S_2$ în sensul teoriei mulţimilor, produsul lor $S_1 \circ S_2$ este mulţimea elementelor $p \in F(\sum)$ de forma $x_1 \circ x_2$ cu $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$, iar iteratul unui eveniment S este evenimentul S^* format din Λ şi elementele $p = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_k$ cu $x_i \in S$, k întreg pozitiv oarecare. Mulţimea $\mathfrak{A}(\sum)$ luată împreună cu operaţiile introduse mai sus este numită algebra evenimentelor în alfabetul $\sum$. O expresie $f(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ se numeşte regulată dacă se obţine din $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, \Lambda$ aplicînd de un număr finit de ori operaţiile de disjuncţie, produs şi iteraţie. Un eveniment S se numeşte regulat dacă $S = f(\sigma_1, ..., \sigma_n)$, unde $f(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ este o expresie regulată. Un eveniment este regulat dacă şi numai dacă este reprezentabil într-un automat finit. Un interes deosebit îl prezintă transformările echivalente (operaţii efectuate asupra unei expresii regulate care conservă evenimentul pe care îl reprezintă).

---

[1] Lucrare comunicată la Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Universităţii Bucureşti, octombrie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 599–606, BUCUREŞTI, 1965.

În lucrare este definită o structură algebrică care admite ca model şi algebra evenimentelor.

Se poate astfel întreprinde un studiu sistematic al algebrei evenimentelor. Tabloul de axiome şi consecinţele imediate oferă o primă listă de transformări echivalente. Intenţia principală este de a stabili, în sens algebric, gradul de apropiere dintre structura nou introdusă şi algebra evenimentelor.

2. Postulatele structurii algebrice pe care o introducem acum sînt selecţionate dintre proprietăţile operaţiilor algebrei evenimentelor $\mathfrak{A}(\sum)$.

Fie $\mathfrak{A}$ o mulţime nevidă pe care sînt definite două operaţii binare „$\vee$", „$\cdot$" numite disjuncţie, respectiv produs, şi o aplicaţie $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ numită iteraţie. Pentru orice $a \in \mathfrak{A}$ notăm $a^* = \rho(a)$.

DEFINIŢIA 2.1. *Ansamblul* $\{\mathfrak{A}$, „$\vee$", „$\cdot$", „$*$"$\}$ *este numit algebră abstractă a evenimentelor dacă sînt satisfăcute următoarele postulate*

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{lll} 1. & a \vee b = b \vee a, & \forall\ a,\ b \in \mathfrak{A}, \\ 2. & (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), & \forall\ a,\ b,\ c \in \mathfrak{A}, \\ 3. & a \vee a = a, & \forall\ a \in \mathfrak{A}, \end{array} \right.$$

$$\text{(II)} \left\{ \begin{array}{ll} 1. & (ab)c = a(bc), \qquad \forall\ a,\ b,\ c \in \mathfrak{A}, \\ 2. & \exists\, e \in \mathfrak{A} \Rightarrow ea = ae = a, \quad \forall\ a \in \mathfrak{A}, \\ 3. & a\ (b \vee c) = ab \vee ac,\ (a \vee b)c = ac \vee bc, \quad \forall\ a, b, c \in \mathfrak{A}, \end{array} \right.$$

$$\text{(III)} \left\{ \begin{array}{lll} 1. & (a^*)^* = a^*, & \\ 2. & a^*a^* = a^*, & \\ 3. & a^* = e \vee aa^*, & \\ 4. & aa^* = a^*a, & \forall\ a \in \mathfrak{A}, \\ 5. & e^* = e. & \end{array} \right.$$

Se constată uşor că algebra evenimentelor $\mathfrak{A}(\sum)$ este un model pentru algebra abstractă a evenimentelor. Putem da şi un model aritmetic. Fie pentru aceasta N mulţimea numerelor naturale. Dacă $a,\ b \in N$, atunci $a \vee b$ şi ab sînt, prin definiţie, c.m.m.d.c. $\{a,\ b\}$, respectiv produsul obişnuit. Pentru orice $a \in N$ punem $a^* = 1$. Postulatele (I)—(III) sînt verificate. În cele ce urmează prin termenul *algebră* vom înţelege că este vorba de algebra abstractă a evenimentelor.

CONSECINŢA 2.1. *Pentru orice* $a \in \mathfrak{A}$ *avem* $e \vee a^* = a^*$.

Într-adevăr,

$$e \vee a^* = e \vee (e \vee aa^*) = (e \vee e) \vee aa^* = e \vee aa^* = a^*.$$

CONSECINŢA 2.2. *Pentru orice* $a \in \mathfrak{A}$ *avem* $a \vee a^* = a^*$.

Într-adevăr,

$$a \vee a^* = a \vee (e \vee aa^*) = e \vee (a \vee aa^*) = e \vee a(e \vee a^*) = e \vee aa^* = a^*.$$

CONSECINŢA 2.3. *Pentru orice* $a \in \mathfrak{A}$ *şi* $k \in N$ *avem* $a^* \vee a^k = a^*$.

Pentru $k = 0,1$ relaţia este deja demonstrată. Presupunînd-o adevărată pentru $k-1$, atunci

$$a^* \vee a^k = (e \vee aa^*) \vee a^k = e \vee a\ (a^* \vee a^{k-1}) = e \vee aa^* = a^*.$$

CONSECINŢA 2.4. *Pentru orice* $a \in \mathfrak{A}$ *şi orice* $k \in N$ *avem*

$$a^* = e \vee a \vee a^2 \vee \ldots \vee a^k \vee a^{k+1}a^*.$$

Într-adevăr,

$$a^* = e \vee aa^* = e \vee a\ (e \vee aa^*) = e \vee a \vee a^2a^* = e \vee a \vee a^2\ (e \vee aa^*) =$$

$$= e \vee a \vee a^2 \vee a^3a^* = \ldots = e \vee a \vee a^2 \vee \ldots \vee a^k \vee a^{k+1}\, a^*.$$

3. DEFINIŢIA 3.1. *Un element* $a \in \mathfrak{A}$, $a \neq e$ *îl numim ireductibil dacă nu se poate pune sub forma* $a = pq$; $p,\ q \in \mathfrak{A}$, $p \neq e$, $q \neq e$; *elementul* $a \in \mathfrak{A}$ *se numeşte indecompozabil dacă nu se poate pune sub forma* $a = p \vee q$; $p,\ q \in \mathfrak{A}$, $p \neq e$, $q \neq e$; *elementul* $a \in \mathfrak{A}$ *se numeşte primitiv dacă este simultan ireductibil şi indecompozabil.*

Fie $\sum = \{\sigma_i\}_{i \in I}$ familia elementelor primitive ale lui $\mathfrak{A}$. Să notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea formată din e şi produsele finite de elemente primitive. Fie $F\ (\sum)$ semigrupul liber generat de $\sum$ şi să notăm legea sa de compunere cu „o". Dacă $\alpha,\ \beta \in F\ (\sum)$, $\alpha = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_r}$, $\beta = \sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2} \circ \ldots \circ \sigma_{j_s}$, atunci punem

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \sigma_{i_1}\, \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_r} = \sigma_{j_1}\, \sigma_{j_2} \ldots \sigma_{j_s}.$$

Se constată cu uşurinţă că astfel pe $F(\sum)$ s-a definit o relaţie de congruenţă şi mulţimea factor $F\ (\sum)/\sim$ se poate organiza ca un semigrup izomorf cu $\mathcal{D}$.

POSTULATUL A. *Algebra* $\mathfrak{A}$ *admite numai un număr finit de elemente primitive* $\sum = \{\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots,\ \sigma_n\}$ *şi orice element din* $\mathcal{D}$ *se scrie în mod unic ca produs de elemente din* $\sum$.

Unicitatea trebuie înţeleasă astfel: dacă $a \in \mathfrak{A}$ se scrie

$$a = \sigma_{i_1}\, \sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_r} = \sigma_{j_1}\, \sigma_{j_2} \ldots \sigma_{j_s}$$

atunci $r = s$ şi $i_1 = j_1, \ldots,\ i_r = j_r$. Dacă postulatul A este îndeplinit, atunci $F\ (\sum) \cong \mathcal{D}$.

DEFINIŢIA 3.2. *O submulţime nevidă* $\mathcal{B}$ *a lui* $\mathfrak{A}$ *se numeşte subalgebră a lui* $\mathfrak{A}$ *dacă*

1. $a \vee b \in \mathcal{B}$, $ab \in \mathcal{B}$, $\quad \forall\ a,\ b \in \mathcal{B}$,
2. $a^* \in \mathcal{B}$, $\quad \forall\ a \in \mathcal{B}$,
3. $e \in \mathcal{B}$.

Dacă P este o parte nevidă a lui $\mathfrak{A}$, mulţimea $\mathcal{R}\ (P)$ a tuturor elementelor lui $\mathfrak{A}$ care se obţin din elementele mulţimii $P \cup \{e\}$ aplicînd de un număr finit de ori operaţiile „ $\vee$ ", „. ", „*" formează o subalgebră a lui $\mathfrak{A}$ şi este egală cu intersecţia tuturor subalgebrelor lui $\mathfrak{A}$ care cuprind pe P.

Algebra $\mathfrak{A}$ se numeşte *regulată* dacă $\mathfrak{A} = \mathcal{R}(\Sigma \cup \{e\})$, unde Σ este mulţimea elementelor sale primitive.

DEFINIŢIA 3.3. *Dacă $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sînt algebre, o aplicaţie univocă $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ se numeşte omomorfism (reprezentare) dacă*

1. $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\, \varphi(b), \quad \forall\, a, b \in \mathfrak{A}\mathfrak{A},$

2. $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*, \quad \forall\, a \in \mathfrak{A},$

3. $\varphi(e) = e'$.

Aplicaţia φ se numeşte izomorfism dacă este o bijecţie şi satisface (1)—(3).

Dacă φ este o surjecţie, atunci (3) poate fi demonstrat. Dacă $\mathcal{B}$ este o subalgebră a lui $\mathfrak{A}$, atunci $\varphi(\mathcal{B})$ este o subalgebră a lui $\mathfrak{A}'$, dacă $\mathcal{B}'$ este o subalgebră a lui $\mathfrak{A}'$, atunci $\varphi^{-1}(\mathcal{B}')$ este o subalgebră a lui $\mathfrak{A}$. Fie $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ un omomorfism al algebrei $\mathfrak{A}$ în algebra $\mathfrak{A}'$. Dacă $a, b \in \mathfrak{A}$, atunci punem

$$a \sim b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b).$$

Se constată uşor că „$\sim$" este o relaţie de echivalenţă. În plus, din $a \sim b$, $c \sim d$ rezultă $a \vee c \sim b \vee d$, $ac \sim bd$, $a^* \sim b^*$. Dacă $a \in \mathfrak{A}$, punem $\hat{a} = \{x \in \mathfrak{A} \mid x \sim a\}$. Mulţimea factor $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\sim$ se poate organiza ca o algebră definind

$$\hat{a} \vee \hat{b} = \widehat{a \vee b}$$

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{ab}$$

$$(\hat{a})^* = \widehat{a^*}.$$

TEOREMA 3.1. *Dacă $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ este epimorfism şi $\nu : \mathfrak{A} \to \hat{\mathfrak{A}}$ este omomorfismul canonic, atunci există un izomorfism $\psi : \hat{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}'$ astfel ca diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\nu"] & \mathfrak{A}' \\
\hat{\mathfrak{A}} \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Ca de obicei pentru orice $\hat{a} \in \hat{\mathfrak{A}}$ se defineşte $\psi(\hat{a}) = \varphi(a)$ şi demonstraţia nu prezintă nici o dificultate.

4. În cele ce urmează este presupus că algebra $\mathfrak{A}$ este regulată şi că postulatul A este satisfăcut. Noţiunea de expresie regulată $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ se defineşte analog ca în algebra evenimentelor $\mathfrak{A}(\Sigma)$. *Gradul de iteraţie* al unei expresii regulate este prin definiţie numărul suprapunerilor opera-

ției „*". Expresia $\sigma_1 \vee \sigma_2 \sigma_1$ are gradul de iterație zero, expresia $(\sigma_1 \vee (\sigma_2^* \sigma_3))^* \vee \sigma_4 \sigma_2$ are gradul de iterație 2. $\mathfrak{A}$ fiind o algebră regulată pentru orice $a \in \mathfrak{A}$, există o expresie regulată $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ astfel ca $a = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Dacă $a = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, expresiile f, g pot avea grade de iterație diferite. Exemplu : $a = (\sigma_1^*)^* \vee \sigma_3 = \sigma_1^* \vee \sigma_3$.

LEMA 4.1. *Dacă $\mathfrak{A}$ este o algebră regulată și satisface postulatul* A, *atunci oricare ar fi $a \in \mathfrak{A}$ există $d \in \mathcal{D}$ și $\omega \in \mathfrak{A}$ astfel ca $a = d \vee \omega$.*

Demonstrație. Algebra $\mathfrak{A}$ fiind regulată, este suficient să arătăm că expresiile regulate admit o asemenea reprezentare. Vom face un raționament prin recurență asupra gradului de iterație a expresiilor regulate. Fie $a = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ o expresie regulată de grad de iterație 0. Evident, $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ poate fi pusă sub forma

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \bigvee_{k=1}^{m} d_k, \quad d_k \in \mathcal{D}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Luăm $d = d_1$ și $\omega = \bigvee_{k=2}^{m} d_k$ și avem

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = d \vee \omega \quad d \in \mathcal{D}, \quad \omega \in \mathfrak{A}.$$

Presupunînd lema adevărată pentru expresii regulate de grad de iterație $\leqslant t$, să o dovedim pentru expresii cu gradul de iterație $t + 1$. Distingem trei cazuri :

(α) Ultima operație care se efectuează în expresia regulată $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ este „*".

În acest caz $f = (g)^*$, unde g este o expresie cu gradul de iterație t. Conform ipotezei inductive avem

$$g = d \vee \omega, \quad d \in \mathcal{D}, \quad \omega \in \mathfrak{A}$$

de unde

$$f = (g)^* = (d \vee \omega)^* = (d \vee \omega) \vee (d \vee \omega)^* = d \vee (\omega \vee (d \vee \omega)^*).$$

Notînd $\omega_1 = \omega \vee (d \vee \omega)^*$ avem

$$f = d \vee \omega_1 \quad d \in \mathcal{D}, \quad \omega_1 \in \mathfrak{A}.$$

(β) Ultima operație care se efectuează în $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ este „ $\vee$ ". În acest caz avem

$$f = \bigvee_{k=1}^{m} f_k \,; \; f_{k,} = g_{1,k}\, g_{2,k} \cdots g_{j(k),k}, \qquad k = 1, 2, .. m,$$

unde $g_{i,k}$ sînt expresii regulate cu gradul de iterație $\leqslant t$ sau cu gradul de iterație $t + 1$, cazul (α). Deci putem scrie

$$g_{i,k} = d_{i,k} \vee \omega_{i,k} \quad d_{i,k} \in \mathcal{D}, \quad \omega_{i,k} \in \mathfrak{A}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \; i = 1, 2, \ldots, j(k)$$

de unde

$$f = \bigvee_{k=1}^{m} \prod_{i=1}^{j(k)} (d_{i,k} \vee \omega_{i,k}).$$

Avem

$$\prod_{i=1}^{j(1)} (d_{i,1} \vee \omega_{i,1}) = d_{1,1} d_{2,1} \dots d_{j(1),1} \vee \omega_1, \quad \omega_1 \in \mathfrak{A}$$

şi deci

$$f = d \vee \omega, \quad d \in \mathcal{D}, \quad \omega \in \mathfrak{A}$$

unde am notat $d = d_{1,1} \dots, \; d_{j(1),1}, \; \omega = \omega_1 \vee \left(\bigvee_{k=2}^{m} \prod_{i=1}^{j(k)} (d_{i,k} \vee \omega_{i,k}) \right)$.

(γ) Ultima operaţie care se efectuează este „·". Demonstraţia se obţine luînd, în cazul (β), $m = 1$. Cu aceasta lema este complet demonstrată.

Descompunerile de forma $a = d \vee \omega$, $d \in \mathcal{D}$, $\omega \in \mathfrak{A}$ ale elementelor $a \in \mathfrak{A}$ le numim descompuneri standard.

Cu intenţia de a da o teoremă de reprezentare a unei algebre regulate $\mathfrak{A}$ în algebra $\mathfrak{A}(\Sigma)$ a evenimentelor, introducem următorul postulat:

POSTULATUL B. *Algebra regulată* $\mathfrak{A}$ *satisface*:

(i) *dacă* $a \vee b = d \vee \omega$ *este o descompunere standard a lui* $a \vee b$, *atunci* $a = d \vee \omega_1$, sau $b = d \vee \omega_2$;

(ii) *dacă* $ab = d \vee \omega$, *atunci* $a = d_1 \vee \omega_1$ *şi* $b = d_2 \vee \omega_2$ *cu* $d_1 d_2 = d$;

(iii) *dacă* $a^* = d \vee \omega$, *atunci există* $n \in N$ *şi* $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathcal{D}$ *astfel ca* $d = d_1 d_2 \dots d_n$ *şi* $a = d_i \vee \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, n$;

(i$\vee$) *singura descompunere standard pentru e este* $e = e \vee e$.

TEOREMA 4.1. *Dacă algebra regulată* $\mathfrak{A}$ *satisface postulatele A şi B, atunci există o reprezentare* $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(\Sigma)$.

Demonstraţie. Dacă $d = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_r} \in \mathcal{D}$ vom nota cu $\overline{d} = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_r} \in F(\Sigma)$. Evident, $\overline{e} = \wedge$. Pentru orice $a \in \mathfrak{A}$ definim $\Gamma_a = \{\overline{d} \in F(\Sigma) \mid a = d \vee \omega\}$. După lema (4.1), $\Gamma_a \neq \emptyset$, pentru orice $a \in \mathfrak{A}$. Definim o aplicaţie univocă $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(\Sigma)$ punînd

$$\varphi(a) = \bigcup_{\overline{d} \in \Gamma_a} \overline{d}, \qquad \forall a \in \mathfrak{A}.$$

Să dovedim că φ este o reprezentare, deci că satisface (1)—(3) din definiţia (3.3).

Dacă $\overline{d} \in \varphi(a) \cup \varphi(b)$, atunci $a = d \vee \omega_1$, sau $b = d \vee \omega_2$ cu $d \in \mathcal{D}$ şi $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{A}$. Dacă $a = d \vee \omega_1$, atunci $a \vee b = (d \vee \omega_1) \vee b = d \vee (\omega_1 \vee b) = d \vee \omega_1'$, unde $\omega_1' = \omega_1 \vee b$ şi deci $\overline{d} \in \varphi(a \vee b)$. Dacă $b = d \vee \omega_2$, din nou rezultă $\overline{d} \in \varphi(a \vee b)$.

Deci

$$\varphi(a) \cup \varphi(b) \subseteq \varphi(a \vee b), \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}.$$

Dacă $\overline{d} \in \varphi\,(a \vee b)$, atunci $a \vee b = d \vee \omega$ şi după (i) rezultă că avem o descompunere a lui a de forma $a = d \vee \omega_1$ sau o descompunere a lui b de forma $b = d \vee \omega_2$ şi deci $\overline{d} \in \varphi\,(a) \cup \varphi\,(b)$.

Aşa că

$$\varphi\,(a \vee b) \subseteq \varphi\,(a) \cup \varphi\,(b), \quad \forall\; a,\ b \in \mathfrak{A},$$

şi în definitiv

$$\varphi\,(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi\,(b), \quad \forall\; a,\ b \in \mathfrak{A}.$$

Dacă $\overline{d} \in \varphi\,(a) \circ \varphi\,(b)$, atunci $\overline{d} = \overline{d}_1 \circ \overline{d}_2$ cu $\overline{d}_1 \in \varphi\,(a)$, $\overline{d}_2 \in \varphi\,(b)$ şi deci există descompunerile $a = d_1 \vee \omega_1$ şi $b = d_2 \vee \omega_2$ de unde

$$ab = (d_1 \vee \omega_1)\,(d_2 \vee \omega_2) = d \vee \omega$$

cu $d = d_1 d_2$ şi $\omega = d_1 \omega_2 \vee \omega_1 d_2 \vee \omega_1 \omega_2$. Avem astfel $\overline{d} \in \varphi\,(ab)$ şi deci

$$\varphi\,(a) \circ \varphi\,(b) \subseteq \varphi\,(ab), \quad \forall\; a,\ b \in \mathfrak{A}.$$

Dacă $\overline{d} \in \varphi\,(ab)$, atunci $ab = d \vee \omega$ şi după (ii) există descompunerile $a = d_1 \vee \omega_1$ şi $b = d_2 \vee \omega_2$ cu $d = d_1 d_2$. Deci $\overline{d} = \overline{d}_1 \circ \overline{d}_2$ cu $\overline{d}_1 \in \varphi\,(a)$ şi $\overline{d}_2 \in \varphi\,(b)$. Aşa că

$$\varphi\,(a\,b) \subseteq \varphi\,(a) \circ \varphi\,(b), \quad \forall\; a,\ b \in \mathfrak{A}$$

şi deci

$$\varphi\,(ab) = \varphi(a) \circ \varphi\,(b), \quad \forall\; a,\ b \in \mathfrak{A}.$$

Dacă $\overline{d} \in (\varphi(a))^*$, atunci $\overline{d} = \overline{d}_1 \circ d_2 \circ \ldots \circ \overline{d}_k$, unde $\overline{d}_i \in \varphi\,(a)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Deci a admite descompunerile $a = d_i \vee \omega_i$, $d_i \in \mathcal{D}$, $\omega_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Folosind consecinţa $2 \cdot 3$ putem scrie

$$a^* = a^k \vee a^* = (d_1 \vee \omega_1) \ldots (d_k \vee \omega_k) \vee a^* = d_1 d_2 \ldots d_k \vee \omega',$$

unde semnificaţia lui ω' este evidentă. Deci $\overline{d} \in \varphi\,(a^*)$ şi astfel

$$\varphi\,(a))^* \subseteq \varphi\,(a^*), \quad \forall\; a \in \mathfrak{A}.$$

Dacă $\overline{d} \in \varphi\,(a^*)$, atunci $a^* = d \vee \omega$ şi după (iii) există $k \in N$ şi $d_1, \ldots\, d_k \in \mathcal{D}$ astfel ca $d = d_1 \ldots d_k$ şi $a = d_i \vee \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Deci $\overline{d}_i \in \varphi\,(a), i = 1, 2, \ldots, k$ şi astfel $\overline{d} = \overline{d}_1 \circ \overline{d}_2 \circ \ldots \circ \overline{d}_k \in (\varphi\,(a))^*$. Am demonstrat deci că

$$\varphi\,(a^*) \subseteq (\varphi\,(a))^*, \quad \forall\; a \in \mathfrak{A}$$

şi combinînd ultimele două rezultate obţinem

$$\varphi\,(a^*) = (\varphi\,(a))^*, \quad \forall\; a \in \mathfrak{A}.$$

Evident, $\varphi\,(e) = \wedge$ şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Din teorema 3.1 şi teorema 4.1 obţinem

TEOREMA 4.2. *Dacă $\mathfrak{A}$ este o algebră regulată care satisface postulatele A şi B, atunci există o algebră factor a lui $\mathfrak{A}$ izomorfă cu o subalgebră a lui $\mathfrak{A}(\Sigma)$.*

Primită la redacţie la 22 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. В. М. Глушков, *Абстрактная теория автоматов*. У М Н, **16**, *5* (1961).
2. — *Синтез цифровых автоматов*. Москва, 1962.
3. Ион Д. Ион, *О связи между теорией алгорифмов и абстрактной теорией автоматов*. Rev. math. pures et appl., **8**, *4* (1963).
4. А.Г. Курош, *Лекции по общей алгебре*. Москва, 1962.
5. S. Marcus, *Gramatici și automate finite*. Ed. Academiei R.P.R., București, 1964.

FAMILII COMPOZABILE DE DISTRIBUŢII ŞI TRANSFORMATA FOURIER

DE

MIHAI ŞABAC

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii din Bucuresti

Folosind rezultatele din lucrările [1] şi [2] se introduce transformata Fourier pentru familiile compozabile de distribuţii introduse în [1] şi se obţin următoarele rezultate.

Notînd cu $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ o familie compozabilă de distribuţii, cu F operatorul Fourier şi cu $\mathcal{G} = \{g_\sigma\}_{\sigma \in R}$ transformata Fourier a familiei $\mathcal{F}$, atunci pentru orice distribuţie f^1 are loc egalitatea :

$$F(\mathcal{F} \circ f^1) = \mathcal{G} \circ F(f^1)$$

unde $\circ$ reprezintă compunerea introdusă în [1].

Se arată că $\mathcal{G} \circ f(f^1)$ se reduce la un produs obişnuit între $F(f^1)$ şi o distribuţie de tip funcţie dacă şi numai dacă $\mathcal{F} = \{f_0(x) * \delta(x - s)\}_{s \in R}$, unde $f_0(x)$ este o distribuţie de tip funcţie iar $*$ reprezintă produsul de convoluţie.

În cadrul teoriei distribuţiilor se demonstrează că în anumite condiţii produsul de convoluţie a două distribuţii se transformă în produs obişnuit cu ajutorul transformatei Fourier [1]). În [1] se generalizează produsul de convoluţie a două distribuţii introducîndu-se familiile compozabile de distribuţii care depind de un parametru real. Aceste familii compozabile, compunerea lor cu o distribuţie oarecare (compunere care generalizează produsul de convoluţie) şi transformata Fourier a unei familii compozabile, pe care o vom introduce, îşi găsesc aplicaţii în studiul ecuaţiilor diferenţiale liniare considerate în cadrul teoriei distribuţiilor.

În cele ce urmează vom considera pentru unitatea expunerii distribuţii peste un spaţiu fundamental Φ, $\Phi \subset S$ [2]). Vom transpune definiţia

---

[1]) Vezi de exemplu în [2], Cap. III, § 3, punctul 7.

[2]) Am notat cu S spaţiul de funcţii notat tot aşa în [2], Cap. II, § 1, 2. Φ spaţiu fundamental în sensul din [2].

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 607–613 BUCUREŞTI, 1965.

dată în [1] pentru astfel de distribuţii şi vom arăta corespondenţa biunivocă care există între familiile compozabile de distribuţii peste Φ şi operatorii liniari şi continui care aplică Φ în Φ. Cîteva consideraţii preliminare pe care le facem asupra transformatei Fourier a produsului de convoluţie servesc introducerii transformatei Fourier a unei familii compozabile de distribuţii peste Φ. Pentru propoziţiile 4, 5 şi 6 şi teorema 1 vom presupune în plus că Φ este cu translaţie continuă.

O dată introdusă transformata Fourier a unei familii compozabile de distribuţii peste Φ, arătăm cum se transformă Fourier o distribuţie, rezultat al compunerii dintre o familie compozabilă şi o distribuţie oarecare. Vom arăta că transformata Fourier a unei astfel de distribuţii se poate scrie ca un produs obişnuit numai în cazul cînd compunerea se reduce la produsul de convoluţie.

I. Fie deci Φ un spaţiu fundamental conţinut în spaţiul complex S. Vom însemna prin F atît operatorul Fourier în Φ cît şi operatorul Fourier în Φ'. Fie $\Psi = F(\Phi)$. Evident, Ψ şi Φ sînt algebric izomorfe. Introducem în Ψ convergenţa către 0 astfel:

$\{\psi_n\}_{n \in N} = \{F(\varphi_n)\}_{n \in N}$ tinde către 0 în Ψ dacă şirul $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ tinde către 0 în Φ. Astfel Ψ devine un spaţiu fundamental iar F realizează de la Φ la Ψ o corespondenţă biunivocă liniară şi bicontinuă. Vom mai presupune încă şi faptul că o dată cu relaţia:

$$F(\Phi) = \Psi$$

are loc şi relaţia:

$$F^{-1}(\Phi) = \Psi.$$

În cele ce urmează, cînd nu se va specifica despre ce fel de distribuţii este vorba, se va subînţelege că este vorba despre distribuţii avînd ca spaţiu fundamental spaţiul Φ.

O distribuţie de tip funcţie $f(x)$, se va numi o distribuţie care admite o reprezentare de forma:

$$(f, \varphi) = \int_R \overline{f(x)}\ \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

de asemenea înmulţirea unei distribuţii cu o funcţie $\alpha(x)$ multiplicator în Φ[3]) se introduce prin formula:

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \bar{\alpha} \varphi).$$

Fie $\{f_s\}_{s \in R} = \mathcal{F}$ o familie de distribuţii depinzînd de parametrul real s.

DEFINIŢIA 1. *Se spune* [1] *că* $\mathcal{F}$ *este o familie compozabilă dacă următoarele condiţii sînt îndeplinite:*

(i) *Pentru fiecare* $\varphi \in \Phi$ *punînd*

$$\psi(s) = f_s, \varphi)$$

are loc $\psi \in \Phi$.

---

[3]) în sensul lui [2].

(ii) *Dacă* $\varphi_n \in \Phi$ *şi* $\varphi_n \to 0$ *în* Φ *punînd*

$$\psi_n(s) = (f_s, \varphi_n)$$

are loc $\psi_n \to 0$ *în* Φ.

Dacă $\mathcal{F}$ este compozabilă, se defineşte [1] pentru orice $f^1 \in \Phi'$ operaţia de compunere

$$\mathcal{F} \circ f^1$$

prin egalitatea :

$$\text{(iii)} \qquad (\mathcal{F} \circ f^1, \varphi) = (f^1, \psi),$$

unde ψ este funcţia definită de condiţia (i).

Fie acum $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ o familie oarecare de distribuţii. Familia $\mathcal{F}$ defineşte un operator liniar $U_{\mathcal{F}}$ care în general aplică Φ în C^R [4]) în felul următor :

$$U_{\mathcal{F}}(\varphi) = \psi \text{ înseamnă } \psi(s) = (f_s, \varphi).$$

Putem da următoarea definiţie echivalentă cu definiţia 1.

DEFINIŢIA 1′. $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ *este o familie compozabilă dacă*

$$\text{(i′)} \qquad U_{\mathcal{F}} : \Phi \to \Phi$$

(i′i′) $U_{\mathcal{F}}$ *este continuu pe* Φ.

Cu aceste notaţii, egalitatea (iii) se transcrie :

$$\text{(i′i′i′)} \qquad (\mathcal{F} \circ f^1, \varphi) = (f^1, U_{\mathcal{F}}(\varphi)).$$

PROPOZIŢIA 1. *Fie U un operator liniar şi continuu definit pe Φ cu valori în Φ. U generează o familie compozabilă.*

Demonstraţie. Într-adevăr, este suficient să punem :

$$(f_s, \varphi) = \psi(s),$$

unde $\psi = U(\varphi)$ şi condiţiile din definiţia 1′ sînt evident satisfăcute.

CONSECINŢĂ. *Există o corespondenţă biunivocă între mulţimea familiilor de distribuţii compozabile şi $L(\Phi, \Phi)$.*

PROPOZIŢIA 2. *Dacă $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ este o familie compozabilă de distribuţii care satisface la :*

(1) $F(f_0)$ *funcţională de tip funcţie multiplicator în* Ψ

$$\text{(2)} \qquad F[U_{\mathcal{F}}(\varphi)] = F[\psi] = \overline{F(f_0)} \cdot F(\varphi)$$

atunci :

(3) $F(\mathcal{F} \circ f^1) = F(f_0) \cdot F(f^1)$ [5]) *pentru orice* $f^1 \in \Phi'$.

---

[4]) Am însemnat prin C corpul numerelor complexe şi prin R corpul numerelor reale.

[5]) În sensul lui [2].

Demonstraţie. Conform definiţiei transformatei Fourier şi a compunerii $\mathcal{F}\circ f$ putem scrie:

$$(F(\mathcal{F}\circ f^1), F(\varphi)) = 2\pi(\mathcal{F}\circ f^1, \varphi) = 2\pi(f^1, U_{\mathcal{F}}(\varphi)) = (F(f^1), F(U_{\mathcal{F}}(\varphi))).$$

Ţinînd seama de (2):

$$(F(\mathcal{F}\circ f^1), F(\varphi)) = (F(f^1), \overline{F(f_0)}\cdot F(\varphi)) = (F(f_0)\, F(f^1), F(\varphi))$$

sau, ceea ce e tot una,

$$F(\mathcal{F}\circ f^1) = F(f_0)\cdot F(f^1)$$

şi propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 3. *Dacă o familie compozabilă F satisface* (1) *şi* (3), *atunci ea satisface şi* (2).

Demonstraţie. Din (1) şi (3) rezultă pentru orice $f^1 \in \Phi'$

$$(F(\mathcal{F}\circ f^1), F(\varphi)) = (F(f^1), \overline{F(f_0)}\, F(\varphi)). \tag{4}$$

Dar

$$(F(\mathcal{F}\circ f^1), F(\varphi)) = (F(f^1), F(U_{\mathcal{F}}(\varphi))).$$

Comparînd (4) şi (5) rezultă:

$$(F(f^1), \overline{F(f_0)}\, F(\varphi)) = (F(f^1), F(U_{\mathcal{F}}(\varphi))) \text{ pentru orice } f^1 \in \Phi'. \tag{5}$$

Deci

$$F(U_{\mathcal{F}}(\varphi)) = \overline{F(f_0)}\cdot F(\varphi)$$

şi propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 4. *Singurele familii compozabile F care satisfac la* (1) *şi* (2) *sînt de forma*

$$\mathcal{F} = \{f_0(x) * \delta(x-s)\}_{s\in R}, \tag{6}$$

unde $*$ este produsul de convoluţie.

Demonstraţie. Într-adevăr, conform cu (1) şi (2) avem:

$$F(U_{\mathcal{F}}(\varphi)) = \overline{F(f_0)}\cdot F(\varphi).$$

Conform teoremei 1, Cap. III, § 3, 7, [2] avem:

$$\overline{F(f_0)}\cdot F(\varphi) = F(f_0 * \varphi).$$

Dar

$$F(f_0 * \varphi) = F(f_0(x) * \delta(x-s), \varphi(x)).$$

Deci

$$(f_s(x), \varphi(x)) = (f_0(x) * \delta(x-s), \varphi(x))$$

de unde rezultă (6) şi propoziţia este demonstrată căci familiile compozabile $\mathcal{F}$ de forma (6) satisfac evident la (1) şi (2).

Conform propoziţiei 3 rezultă şi

PROPOZIŢIA 5. *Familiile compozabile* $\mathcal{F}$ *care satisfac la* (1) *şi* (3) *sînt de forma* (6).

Putem deci enunţa următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Necesar şi suficient ca o familie compozabilă* $\mathcal{F}=\{f_s\}_{s\in R}$, *unde* $F(f_0)$ *este o funcţională de tip funcţie* $F[f_0](x)$ *multiplicator în* Ψ, *să aibă proprietatea*

$$F(\mathcal{F}\circ f^1) = F(f_0)\cdot F(f^1) \text{ oricare ar fi } f^1\in\Phi'$$

este ca :

$$f_s(x) = f_0(x) * \delta(x-s).$$

Demonstraţie. Necesitatea rezultă din propoziţia 5, iar suficienţa din propoziţia 4 şi propoziţia 2.

II. Să considerăm $g(s)$ multiplicator în Ψ şi operatorul U liniar şi continuu definit pe Ψ cu valori în Ψ în felul următor :

$$U(\varphi) = \psi \text{ înseamnă } \psi(s) = \varphi(s)\cdot\overline{g(s)}.$$

Evident, U defineşte familia compozabilă $\{g_s\}_{s\in R} = \mathcal{G}$ astfel

$$(g_s, \varphi) = \overline{g(s)}\,\varphi(s) \tag{7}$$

g_s fiind distribuţii avînd ca spaţiu fundamental Ψ.

Fie acum $g^1\in\Psi'$; avem

$$(\mathcal{G}\circ g^1, \varphi) = (g^1, \bar{g}\cdot\varphi) = (gg^1, \varphi).$$

Deci

$$\mathcal{G}\circ g^1 = g\cdot g^1.$$

Cu această observaţie (3) se scrie

$$F(\mathcal{F}\circ f^1) = \mathcal{G}\circ F(f^1),$$

unde $\mathcal{G}$ este familia compozabilă definită conform cu (7) de $g = F(f_0)$. În cazul în care $\mathcal{F}$ verifică (1) şi (2), avem

$$F(U_{\mathcal{F}}(\varphi)) = \overline{F(f_0)}\cdot F(\varphi) = \bar{g}\cdot F(\varphi).$$

Dar după (7) :

$$(\bar{g}\cdot F(\varphi))(s) = (g_s, F(\varphi)).$$

Deci familia $\mathcal{G}$ se obţine din $\mathcal{F}$ astfel :

$$(g_\sigma, F(\varphi)) = (F(f_s, \varphi))(\sigma).$$

Această egalitate ne sugerează punerea următoarei definiţii :

DEFINIŢIA 2. *Se numeşte transformata Fourier a unei familii compozabile de distribuţii peste* Φ $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$, *familia de distribuţii peste* $\Psi = F(\Phi)$ $\mathcal{G} = \{g_\sigma\}_{\sigma \in R}$ *definită prin egalitatea* :

$$(g_\sigma, F(\varphi)) = (F(f_s, \varphi))(\sigma) \tag{8}$$

sau în notaţie operatorială :

$$U_{\mathcal{G}}(F(\varphi)) = F(U_{\mathcal{F}}(\varphi)). \tag{8'}$$

Evident, $\mathcal{G}$ este o familie compozabilă, aşa cum rezultă din (8′) ţinînd seama că $\mathcal{F}$ este compozabilă şi că F este un operator liniar şi continuu care aplică Φ pe Ψ.

Dacă $\Phi \supset \mathcal{D}$, orice $f \in \Phi'$ poate fi considerată ca elementul f_0 al unei familii $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ compozabile unde :

$$(f_s, \varphi) = (f, \varphi)\, \psi(s)$$

$$\text{iar } \psi \text{ satisface la } \begin{cases} \psi(0) = 1, \\ \int_R \psi(s)\, ds = 2\pi. \end{cases} \tag{9}$$

Să calculăm g_0 după (8), ţinînd seama că ψ verifică (9) :

$$(g_0, F(\varphi)) = \int_R (f_s, \varphi)\, ds = (f, \varphi) \int_R \psi(s)\, ds = 2\pi (f, \varphi) = 2\pi (f_0, \varphi)$$

şi observăm că am regăsit transformata Fourier a unei distribuţii.

TEOREMA 2. *Fie* $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ *o familie compozabilă oarecare. Dacă* $\mathcal{G} = \{g_\sigma\}_{\sigma \in R}$ *este transformata Fourier a acestei familii după* (8), *atunci*

$$F(\mathcal{F} \circ f^1) = \mathcal{G} \circ F(f^1) \tag{10}$$

pentru orice $f^1 \in \Phi'$.

Demonstraţie. Conform definiţiei transformatei Fourier a unei distribuţii avem :

$$(F(\mathcal{F} \circ f^1), F(\varphi)) = 2\pi (\mathcal{F} \circ f^1, \varphi) = 2\pi (f^1, (f_s, \varphi)) = (F(f^1), F(U_{\mathcal{F}}(\varphi))).$$

Ţinînd seama de (8′) putem scrie :

$$(F(\mathcal{F} \circ f^1), F(\varphi)) = (F(f^1), U_{\mathcal{G}}(F(\varphi))).$$

Deci

$$(F(\mathcal{F} \circ f^1), F(\varphi)) = (\mathcal{G} \circ F(f^1), F(\varphi))$$

şi prin urmare

$$F(\mathcal{F} \circ f^1) = \mathcal{G} \circ F(f')$$

ceea ce era de demonstrat.

În ceea ce priveşte reducerea membrului drept al egalităţii (10) la un produs obişnuit avem următorul rezultat:

PROPOZIŢIA 6. *Dacă* $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in R}$ *este o familie compozabilă de distribuţii iar* $\mathcal{G}$ *este transformata sa Fourier după* (8) *şi dacă există o funcţională de tip funcţie* $g(x)$ *multiplicator în* Ψ *astfel ca:*

$$F(\mathcal{F} \circ f^1) = g \cdot F(f^1)\ (\forall)\, f^1 \in \Phi',$$

atunci $\mathcal{F}$ *are forma* $\mathcal{F} = \{f(x) * \delta\ (x - s)\}_{s \in R}$, *unde* $f(x) = (F^{-1}(g))(x)$.

Demonstraţie. Într-adevăr, conform teoremei 2 va trebui să avem:

$$\mathcal{G} \circ F(f^1) = g \cdot F(f^1) \text{ oricare ar fi } f^1 \in \Phi'$$

sau

$$(g_s,\ F(\varphi)) = \overline{g(s)}\ F(\varphi)(s).$$

Ţinînd seama de (8) rezultă:

$$(f_s,\ \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_R \overline{g(\sigma)}\,(F(\varphi))(\sigma)\, \mathrm{e}^{-is\sigma}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_R \left(\int_R \mathrm{e}^{-i(s-x)}\ \varphi(x)\, \mathrm{d}x\right) \overline{g(\sigma)}\, \mathrm{d}\sigma.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $x = s + w$ obţinem

$$\begin{aligned}(f_s,\ \varphi) &= \int_R \left(\frac{1}{2\pi}\int_R \mathrm{e}^{iw\sigma}\, \varphi(s + w)\, \mathrm{d}w\right) \overline{g(\sigma)}\, \mathrm{d}\sigma = \\ &= \int_R \overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_R \mathrm{e}^{-iw\sigma}\, g(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\right)}\, \varphi(s + w)\, \mathrm{d}w = \\ &= \int_R \overline{(F^{-1}(g))(w)}\ \varphi(s + w)\, \mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Deci

$f_s(x) = (F^{-1}(g))(x) * \delta\ (x - s)$ şi propoziţia este demonstrată.

Primită la redacţie la 23 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. ROMULUS CRISTESCU, *Familles composables de Distributions et Systèmes Physiques Linéaires*, Rev. Roum. de math. pures et appl., **IX**, *8* (1964).
2. И. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции*, том 2, Москва, 1958.

În această privință realizarea membrului stîng al egalității (10) [illegible] putea fi obținută avem următorul rezultat:

PROPOZIȚIA 6. *Dacă* $\mathcal{T}$ [illegible] *funcția* [illegible] *transformata sa Fourier după (5) și dacă există o funcție* [illegible] *funcție* $g(x)$ *multiplicatoare în* [illegible] *atunci:*

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}(f)) = g \cdot \mathcal{F}(f), \quad \forall f \in \mathcal{S}',$$

[illegible] formula [illegible] $F^{-1}(g)(x)$.

Demonstrație. Într-adevăr, conform lemei 2 va trebui să arătăm:

$$g \circ \mathcal{F}(f) = g \cdot \mathcal{F}(f) \text{ pentru } [illegible] \in \mathcal{S}'$$

sau

$$[illegible] = g(\omega)\,\mathcal{F}(\varphi)(\omega).$$

Dar, ținînd seama de (5) rezultă:

$$[illegible] = \frac{1}{2\pi}\int g(\omega) [illegible] \, d\omega = \frac{1}{\pi}\int\left[\int e^{[illegible]}\varphi(t)\,dt\right] g(\omega)\,d\omega$$

Făcînd schimbarea de variabilă $t = s + x$ obținem

$$[illegible] = \int\left[\int e^{[illegible]}\varphi(s+x)\,ds\right] g(\omega)\,d\omega =$$

$$= \int\left[\frac{1}{2\pi}\int e^{[illegible]} g(\omega)\,d\omega\right]\varphi(s+x)\,ds =$$

$$\int (F^{-1}(g))(x)\,\varphi(s+x)\,dx$$

Deci

$\mathcal{T}(f) = (F^{-1}(g)) * f$ și propoziția este demonstrată.

Primită la redacție la [illegible]

BIBLIOGRAFIE

1. [illegible]
2. [illegible] Moscova, 1958.

ASUPRA SPAȚIILOR LOCAL CONVEXE SEPARATE

DE

HENRI MOSCOVICI

Rezultatul principal pe care-l obținem în această notă îl constituie teorema de reprezentare a unui spațiu local convex separat ca subspațiu peste tot dens al unei limite proiective (în sensul teoriei categoriilor) de spații normate canonice. Din această reprezentare decurg imediat cîteva proprietăți ale spațiilor local convexe (unele cunoscute : [1], [2]). În ultima parte se dă, în limbajul teoriei categoriilor, o interpretare a rezultatelor anterioare.

1. Vom considera pentru început categoria (EVT) în cadrul căreia obiectele sînt spații vectoriale topologice, reale sau complexe, iar morfismele sînt aplicații liniare și continue. Precizăm că noțiunea de limită proiectivă este utilizată în sensul teoriei categoriilor ([3], [4]) și nu în sensul de limită proiectivă topologică ([1], [2]). Observăm, de asemenea, că limita proiectivă a oricărei familii proiective din categoria (EVT) există ca obiect în aceeași categorie, cu alte cuvinte (EVT) este închisă față de limita proiectivă.

Este util să redăm în acest limbaj rezultatul cunoscut în termenii limitei proiective topologice ([1], [2]) :

TEOREMA 1. *Orice spațiu local convex E este limita proiectivă a unei familii proiective canonice de spații seminormate.*

Demonstrația va fi numai schițată. Dacă A este familia de seminorme, filtrantă la dreapta, care definește topologia local convexă a spațiului vectorial E, atunci notăm cu E_α spațiul vectorial E înzestrat cu topologia indusă de seminorma $\alpha \in A$. Pentru $\alpha \geqslant \beta$, aplicația identică $i_\alpha^\beta : E_\alpha \to E_\beta$ este liniară și continuă, pentru că topologia indusă de α este mai fină decît topologia indusă de β. Dacă mai notăm cu $i_\alpha : E \to E_\alpha$ aplicația identică (liniară și continuă), obținem în definitiv că

$$(E, i_\alpha)_A = \lim \operatorname{pro} (E_\alpha, i_\alpha^\beta)_A$$

ceea ce demonstrează teorema.

În cazul spațiilor local convexe separate sîntem în măsură să formulăm o teoremă mai puternică :

ST. ȘI CERCET. MAT., TOM. 17, NR. 4, p. 615–18, BUCUREȘTI, 1965.

TEOREMA 2. *Orice spațiu local convex separat E este subspațiu peste tot dens al unei limite proiective a unei familii canonice de spații vectoriale normate.*

Demonstrație. Fie, ca mai înainte, A familia de seminorme, filtrantă la dreapta, și de data aceasta suficientă, care definește topologia separată a lui E. Fie $X_{\alpha} = E_{\alpha}/\text{Ker } \alpha$ normat prin relația : $\|\hat{x}\|_{\alpha} = \alpha(x)$, unde $\hat{x}$ desemnează clasa lui x în spațiul cît $E_{\alpha}/\text{Ker } \alpha$.

Aplicațiile liniare și continue $i^{\beta}_{\alpha} : E_{\alpha} \to E_{\beta}$ induc în mod canonic aplicații liniare și continue $\pi^{\beta}_{\alpha} : X_{\alpha} \to X_{\beta}$, deoarece

$$i^{\beta}_{\alpha}(\text{Ker } \alpha) = \text{Ker } \alpha \sqsubseteq \text{Ker } \beta$$

pentru $\alpha \geqslant \beta$. Așadar diagramele :

$$\begin{tikzcd}
E_{\alpha} \arrow[r, "j_{\alpha}"] \arrow[d, "i^{\beta}_{\alpha}"'] & X_{\alpha} \arrow[d, "\pi^{\beta}_{\alpha}"] \\
E_{\beta} \arrow[r, "j_{\beta}"'] & X_{\beta}
\end{tikzcd}$$

unde j_{α} sînt aplicațiile canonice $E_{\alpha} \to E_{\alpha}/\text{Ker } \alpha = X_{\alpha}$, sînt comutative.

Dar $(E, i_{\alpha})_A = \lim \text{pro } (E_{\alpha}, i^{\beta}_{\alpha})_A$, ceea ce ne permite ca prin intermediul diagramelor

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i_{\alpha}"] \arrow[dr, "i_{\beta}"'] & E_{\alpha} \arrow[r, "j_{\alpha}"] \arrow[d, "i^{\beta}_{\alpha}"'] & X_{\alpha} \arrow[d, "\pi^{\beta}_{\alpha}"] \\
 & E_{\beta} \arrow[r, "j_{\beta}"'] & X_{\beta}
\end{tikzcd}$$

să construim diagramele comutative

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "p_{\alpha}"] \arrow[dr, "p_{\beta}"'] & X_{\alpha} \arrow[d, "\pi^{\beta}_{\alpha}"] \\
 & X_{\beta}
\end{tikzcd}$$

cu $p_{\alpha} = j_{\alpha} \circ i_{\alpha}$.

Acestea din urmă determină existența unei aplicații liniare și continue unice $\pi : E \to X$, unde $(X, \pi_{\alpha})_A = \lim \text{pro } (X_{\alpha}, \pi^{\beta}_{\alpha})_A$, care face comutative diagramele

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "p_{\alpha}"'] & X \arrow[d, "\pi_{\alpha}"] \\
 & X_{\alpha}
\end{tikzcd}$$

Vom arăta că π este injectivă. Într-adevăr, dacă $\pi(x) = 0$, atunci $(\pi_\alpha \circ \pi)(x) = 0$, adică $(j_\alpha \circ i_\alpha)(x) = 0$, deci $j_\alpha(x) = 0$. Atunci $x \in \operatorname{Ker} \alpha$ pentru fiecare $\alpha \in A$. În baza suficienței familiei de seminorme A, rezultă că $x = 0$.

În sfîrșit, observăm că E se identifică cu un subspațiu peste tot dens al lui X.

2. Se pot pune în evidență cîteva proprietăți ale limitei proiective în categoria (EVT).

Propoziția 1. *Fie* $(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_A$ *o familie proiectivă din categoria* (*EVT*). *Dacă* X_α *sînt spații complete, atunci limita proiectivă a familiei este spațiu complet.*

Demonstrație. Dacă X_α sînt complete, atunci $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ este spațiu complet și cum lim pro X_α este subspațiu închis în $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, rezultă că este de asemenea spațiu complet.

Menționăm că limita proiectivă topologică nu se bucură de aceeași proprietate.

Fie $(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_A$ o familie proiectivă de spații vectoriale topologice separate. Dacă $\hat{X}_\alpha$ este completatul spațiului X_α, atunci aplicațiile liniare și continue $\pi_\alpha^\beta : X_\alpha \to X_\beta$ pot fi extinse în mod unic la aplicații $\hat{\pi}_\alpha^\beta : \hat{X}_\alpha \to \hat{X}_\beta$, liniare și continue, care satisfac de asemenea relațiile : $\hat{\pi}_\beta^\gamma \circ \hat{\pi}_\alpha^\beta = \hat{\pi}_\alpha^\gamma$ pentru $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Fie $(X, \pi_\alpha)_A = \lim \operatorname{pro} (X_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_A$ și $(Y, \hat{\pi}_\alpha)_A = \lim \operatorname{pro} (\hat{X}_\alpha, \hat{\pi}_\alpha^\beta)_A$.

În virtutea propoziției 1, Y este spațiu complet. Se verifică cu ușurință că X este subspațiu peste tot dens în Y. Am demonstrat astfel :

Propoziția 2. *Dacă* $(X, \pi_\alpha)_A = \lim \operatorname{pro} (X_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_A$, *atunci* $(\hat{X}, \hat{\pi}_\alpha)_A = \lim \operatorname{pro} (\hat{X}_\alpha, \hat{\pi}_\alpha^\beta)_A$.

3. Vom da în cele ce urmează cîteva aplicații ale rezultatelor anterioare.

Teorema 3. *Completatul unui spațiu local convex separat este limita proiectivă a spațiilor Banach asociate.*

Demonstrație. Fie E spațiul local convex separat considerat și $\hat{X}_\alpha$ completatele spațiilor normate asociate X_α. Atunci $E \subset \lim \operatorname{pro} X_\alpha \subset \lim \operatorname{pro} \hat{X}_\alpha$ ultimul fiind spațiu complet, conform propoziției 1. Observînd că $\overline{E} = \overline{\lim \operatorname{pro} X_\alpha} = \lim \operatorname{pro} \hat{X}_\alpha$ teorema este demonstrată.

Corolar 1. *Orice spațiu local convex separat și complet este limită proiectivă de spații Banach.*

Într-adevăr, în acest caz $E = \hat{E} = \lim \operatorname{pro} \hat{X}_\alpha$.

Corolar 2. *Orice spațiu local convex separat este izomorf cu un subspațiu al unui produs direct de spații Banach* ([1], Cap. II, § 5, propoziția 7).

Rezultă imediat din teorema 3, observînd că limita proiectivă este subspațiu al produsului direct.

4. Fie (ELC) categoria spațiilor local convexe în care morfismele sînt aplicații liniare și continue și următoarele subcategorii: (ELCC) categoria spațiilor local convexe separate și complete, (ESN) categoria spațiilor seminormate, (EB) categoria spațiilor Banach.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $(X_i, f_i^j)_I$ *este o familie proiectivă de obiecte și morfisme din categoria* (ELC), *atunci* lim pro $(X_i, f_i^j)_I$ *este obiect în aceeași categorie.*

Demonstrație. Notăm cu $X_{i\alpha}$ spațiul X_i cu topologia indusă de seminorma $\alpha \in A(X_i)$. Fiecare morfism $f_i^j : X_i \to X_j$ induce un morfism $f_{i\beta}^{j\alpha} : X_{i\beta} \to X_{j\alpha}$, unde $\beta \in A(X_i)$ și depinde de $\alpha \in A(X_j)$. Putem organiza familia $(X_{i\beta}, f_{i\beta}^{j\alpha})$ ca o familie proiectivă și obținem

$$\text{lim pro } (X_i, f_i^j) = \text{lim pro } (X_{i\beta}, f_{i\beta}^{j\alpha})$$

ceea ce demonstrează propoziția.

Fie C o categorie concretă; vom desemna prin Lim pro C categoria închisă față de limita proiectivă, care conține ca subcategorie pe C și este minimală cu aceste proprietăți.

Din rezultatele anterioare se obține:

$$(\text{ELC}) = \text{Lim pro (ESN)}$$

și

$$(\text{ELCC}) = \text{Lim pro (EB)}.$$

Primită la redacție la 31 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, livre V, Espaces vectoriels topologiques, Paris.
2. A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*. Sao Paolo, 1955.
3. A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algebre homologique*. Tôhoku Mathematical Journal, second series, **9**, *2*, *3* (1957).
4. N. STEENROD, S. EILENBERG, *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton, New-Jersey, 1952.

ASUPRA DEFORMĂRII PLANE A CORPULUI PERFECT-PLASTIC (UTILIZAREA VARIABILELOR COMPLEXE) 1)

DE

G. DINCĂ

Facultatea de matematică și mecanică a Universității din București

În lucrare se stabilesc formulele (9) și (10) pentru deformarea plană a corpului plastic perfect, care sînt analoage formulelor lui Kolosov-Mushelișvili din problema plană a elasticității. Ele permit integrarea sistemului în viteze de deformare și folosirea metodei reprezentării conforme.

1. O încercare de utilizare a variabilelor complexe pentru studiul deformării plastice plane este făcută în [1], unde este dată forma potențialului tensiunilor $F\left(\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)$ în variabilele $\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}\ (\mathfrak{z} = x + iy,\ \bar{\mathfrak{z}} = x - iy,\ i = \sqrt{-1})$.

În această lucrare, problema este abordată într-un mod diferit care permite o strînsă analogie cu elasticitatea plană și, în plus, integrarea sistemului în viteze de deformare. În încheiere este dat un exemplu de utilizare a metodei reprezentării conforme.

2. Fie sistemul format din ecuațiile de echilibru

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

și condiția de plasticitate

$$(\sigma_y - \partial_x)^2 + 4\, \tau_{xy}^2 = 4\, k^2 \tag{2}$$

---

1) Versiunea în l. franceză va apărea în Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **11**, 5 (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 4, P. 619–625, BUCUREȘTI, 1965.

10 – c. 1024

cu condiţiile pe frontieră

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y)|_\gamma = X_n(s),\\
&\tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y)|_\gamma = Y_n(s),
\end{aligned} \tag{3}
$$

unde cu γ s-a notat frontiera zonei plastice iar cu s — arcul conturului γ.

Introducînd funcţiile [4], [2]

$$S_0(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \sigma_x + \sigma_y$$

$$S(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \sigma_y - \sigma_x + 2i\, \tau_{xy}$$

cele trei componente ale tensiunii se exprimă astfel:

$$\sigma_x = \frac{S_0}{2} - \frac{S + \bar{S}}{4}, \quad \sigma_y = \frac{S_0}{2} + \frac{S + \bar{S}}{4}, \quad \tau_{xy} = -i\,\frac{\bar{S} - S}{4}$$

de unde

$$\sigma_x + i\,\tau_{xy} = \frac{S_0 - \bar{S}}{2}; \quad \tau_{xy} + i\,\sigma_y = i\,\frac{S_0 + \bar{S}}{2}. \tag{4}$$

În cele ce urmează vor fi utilizate formulele [2]

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{6}$$

Aplicînd operatorul $\dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}$ expresiilor complexe definite de (4), obţinem primii termeni ai ecuaţiilor de echilibru [2]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 2\,\mathcal{R}e\,\frac{\partial(\sigma_x + i\tau_{xy})}{\partial \mathfrak{z}} = \mathcal{R}e\,\frac{\partial(S_0 - \bar{S})}{\partial \mathfrak{z}}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 2\,\mathcal{R}e\,\frac{\partial(\tau_{xy} + i\,\sigma_y)}{\partial \mathfrak{z}} = -\mathcal{I}m\,\frac{\partial(S_0 + \bar{S})}{\partial \mathfrak{z}}$$

şi ecuaţiile (1) devin

$$\frac{\partial S_0}{\partial \mathfrak{z}} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial \mathfrak{z}} + \frac{\partial \bar{S}_0}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} - \frac{\partial S}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} = 0$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial \mathfrak{z}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \mathfrak{z}} - \frac{\partial \bar{S}_0}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} - \frac{\partial S}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} = 0$$

---

[2] Din (5) şi (6) rezultă uşor că $\mathfrak{z}$ şi $\bar{\mathfrak{z}}$ trebuie privite ca variabile independente.

de unde, adunînd termen cu termen, se obține

$$\frac{\partial S_0}{\partial \mathfrak{z}} = \frac{\partial S}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} \tag{7}$$

iar prin scădere, relația conjugată lui (7).

Condiția de plasticitate se scrie

$$S \bar{S} = 4 k^2. \tag{8}$$

Așadar, sistemul format din (1) și (2) se înlocuiește cu sistemul de ecuații (7) și (8).

Din (8) se obține

$$S = 2 k \exp (2 i \psi), \tag{9}$$

$\psi(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ fiind o funcție reală arbitrară și introducînd (9) în (7) [3])

$$S_0 = 2 k \int \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} (\exp (2 i \psi)) \right] d\mathfrak{z} + \overline{\varphi (\mathfrak{z})}. \tag{10}$$

Formulele (9) și (10) reprezintă analogele formulelor lui Kolosov-Mushelișvili din problema plană a elasticității (v. de ex. [2]). Deoarece

$$\sigma_{nx} + i \sigma_{ny} = - \frac{i}{2} \left[S_0 \frac{d\mathfrak{z}}{ds} + S \frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{ds} \right]$$

cele două condiții (3) se pot scrie într-o singură formulă

$$\left[2 k \int \left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} (\exp \ (2 i \ \psi)) \right] d\mathfrak{z} + \overline{\varphi (\mathfrak{z})} \right] \frac{d\mathfrak{z}}{ds} + 2 k \ \exp \ (- 2 i \psi) \frac{d\mathfrak{z}}{ds} \bigg|_{\gamma} = 2 f (s), \tag{11}$$

unde

$$f (s) = i \left[X_n (s) + i Y_n (s) \right].$$

Din condiția ca S_0 să fie real se mai obține :

$$2 k \ \mathcal{I}m \int \left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} (\exp \ (2 i \ \psi)) \right] d\mathfrak{z} = \mathcal{I}m \ \varphi (\mathfrak{z}). \tag{12}$$

3. Pentru o stare de deformare plană, în teoria deformațiilor elastoplastice (cazul materialului incompresibil), ecuațiile care dau relațiile dintre componentele tensiunii și cele ale deformației sînt :

$$\frac{2 \dfrac{\partial u_x}{\partial x}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \dfrac{\partial u_y}{\partial y}}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}}{2 \tau_{xy}}.$$

---

[3]) Aici și în tot ceea ce urmează $\int f(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) \, d\mathfrak{z}$ are următoarea semnificație : este o funcție $F (\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ a cărei derivată parțială în raport cu $\mathfrak{z}$ este f.

O semnificație analogă va avea $\int f (\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) \, d\bar{\mathfrak{z}}$.

În teoria curgerii plastice, pentru starea de deformare plană, relațiile dintre componentele tensiunii și cele ale vitezei de deformare sînt:

$$\text{(13)} \qquad \frac{2\,\dfrac{\partial v_x}{\partial x}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}}{2\,\tau_{xy}}$$

analoge cu cele de mai sus [3].

Din (13) se obțin ușor egalitățile:

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\text{(15)} \qquad \frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial y} - \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + i\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)}{\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy}} = -\,\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + i\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)}{\sigma_y - \sigma_x - 2\,i\,\tau_{xy}}.$$

Dacă se pune

$$V = v_x + i\,v_y$$

și se ține seama de (5) și (6), ecuațiile (14) și (15) se scriu sub forma:

$$\text{(16)} \qquad \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{z}} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} = 0,$$

$$\text{(17)} \qquad \frac{\dfrac{\partial \overline{V}}{\partial \mathfrak{z}}}{S} = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}}{\bar{S}}.$$

Notînd cu $-\,\Phi_1(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ valoarea comună a rapoartelor din (17) (Φ_1 fiind o funcție reală arbitrară), din (16) și (17) se obține

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathfrak{z}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}(\Phi_1 S).$$

De aici

$$\text{(18)} \qquad V = \int\left[\int\left[\frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}(\Phi_1 S)\right]\mathrm{d}\mathfrak{z}\right]\mathrm{d}\mathfrak{z} + \mathfrak{z}\,\overline{\Phi_2(\mathfrak{z})} + \overline{\Phi_3(\mathfrak{z})}.$$

Din (16) rezultă condiția

$$\text{(19)} \qquad \mathcal{Re}\int\left[\frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}(\Phi_1 S)\right]\mathrm{d}\mathfrak{z} = -\,\mathcal{Re}\,\Phi_2(\mathfrak{z}).$$

Se poate demonstra următoarea

TEOREMĂ. *O condiție necesară ca să aibă loc* (19) *este*

$$\text{(20)} \qquad \frac{\partial^2(\Phi_1 S)}{\partial \bar{\mathfrak{z}}^2} = -\,\frac{\partial^2(\Phi_1 \bar{S})}{\partial \mathfrak{z}^2}.$$

În adevăr, admițînd (16) și aplicînd operatorul $\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{z}\, \partial \bar{\mathfrak{z}}}$ se obține

$$\frac{\partial^3 V}{\partial \mathfrak{z}^2\, \partial \bar{\mathfrak{z}}} = - \frac{\partial^3 \overline{V}}{\partial \bar{\mathfrak{z}}^2\, \partial \mathfrak{z}}.$$

Ținînd seama de expresia lui V și de faptul că Φ_1 este reală, se obține condiția din enunț.

Condiția (20) nu este în general suficientă căci, presupunînd-o satisfăcută, se obține

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{z}\, \partial \bar{\mathfrak{z}}} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{z}} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{\mathfrak{z}}} \right) = 0$$

din care se poate trage doar concluzia că expresia $\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{z}} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}$ este armonică. Condiția (20) micșorează oarecum gradul de arbitraritate în alegerea funcției Φ_1. Ea este pînă la un punct analogă condiției

$$\frac{\partial^2 e^{i\psi}}{\partial \bar{\mathfrak{z}}^2} = \frac{\partial^2 e^{-i\psi}}{\partial \mathfrak{z}^2}$$

dată în [4] pentru ca potențialul tensiunilor F să fie real.

4. Cu ajutorul funcțiilor S_0, S, V, găsirea stării de tensiune și a vitezelor de deformare se reduce la găsirea funcțiilor ψ, φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3 din condiția la limită (11) și condițiile (12), (19). Abordarea problemei pe cale directă este deosebit de dificilă, ψ și Φ_1 nefiind în general olomorfe.

Se poate utiliza metoda inversă. Dacă pentru anumite expresii particulare ale funcțiilor ce intervin în S_0 și S se obține o distribuție de tensiuni pentru o problemă cunoscută, referitoare la un domeniu D complet plastificat de anumite condiții pe frontieră și $\zeta = \omega(\mathfrak{z})$ reprezintă conform domeniul D pe $D^{(1)}$, atunci $S_0\,(\omega^{-1}(\zeta), \overline{\omega^{-1}(\zeta)}$, $S\,(\omega^{-1}(\zeta), \overline{\omega^{-1}(\zeta)})$ reprezintă soluția pentru domeniul $D^{(1)}$ cu condițiile la limită transformate corespunzător.

Exemplu. Pentru potențialul tensiunilor în [1] se găsește:

$$F^*(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}}) = \frac{k}{2} \left[\int_{\mathfrak{z}_0}^{\mathfrak{z}} d\eta \int_{\eta_0}^{\eta} \exp\,(2\, i\, \psi\,(\zeta,\ \bar{\mathfrak{z}}))\, d\zeta + \mathfrak{z}\, \overline{\varphi'(\mathfrak{z})} + \overline{\chi(\mathfrak{z})} \right.$$

arătîndu-se că pentru un ψ dat, F^* poate fi determinat afară de un termen aditiv de forma $\alpha\, \mathfrak{z}\, \bar{\mathfrak{z}}$, α fiind o constantă reală. Dacă F este potențialul unei alte stări de tensiune astfel ca

$$F^* - F = \gamma\, \mathfrak{z}\, \bar{\mathfrak{z}} - \frac{ka^2}{2} \quad (\gamma,\ k,\ a \text{ — constante reale})$$

evident că

$$\sigma_r^* = \sigma_r + 2\gamma,$$
$$\sigma_\theta^* = \sigma_\theta + 2\gamma,$$
$$\tau_{r\theta}^* = \tau_{r\theta}.$$

Dacă se ia $\gamma = -\frac{p}{2}$ şi

$$\sigma_r = 2k \lg \frac{r}{a},$$

$$\sigma_\theta = 2k\left(1 + \lg \frac{r}{a}\right),$$

$$\tau_{r\theta} = 0,$$

atunci σ_r^*, σ_θ^*, $\tau_{r\theta}^*$ reprezintă repartiţia tensiunilor în zona plastificată din jurul unui orificiu mărginit de un contur circular $r = a$, de-a lungul căruia este dată o presiune normală uniform distribuită $\sigma_r = -p \leqslant 0$, adică

$$\sigma_{nx} + i\,\sigma_{ny}\Big|_{r=a} = -\frac{p}{a}\mathfrak{z}.$$

Un potenţial pentru tensiunile σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ este [3]:

$$F = \frac{k}{2}\left(a^2 - r^2 + 2r^2 \lg \frac{r}{a}\right).$$

Dar, [1], pentru $\psi = -\theta$ ($\mathfrak{z} = re^{i\theta}$),

$$F^* = \frac{k}{2} r^2 (2 \lg r + \alpha - 2).$$

Condiţia

$$F^* - F = -\frac{p}{2} r^2 - k\frac{a^2}{2}$$

determină pe α, astfel că

$$F^* = \frac{k}{2}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}\,[\lg \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} - c_1]$$

unde $c_1 = 1 + 2 \lg a + \frac{p}{k}$.

Fie $\zeta = \omega(\mathfrak{z})$ funcţia ce reprezintă exteriorul cercului $r = a$, pe exteriorul unui contur oarecare γ_1. Atunci, potenţialul tensiunilor pentru domeniul $D^{(1)}$ (exteriorul lui γ_1) cu condiţia pe contur

$$\sigma_{nx}^{(1)} + i\,\sigma_{ny}^{(1)} = -\frac{p}{a}\,\omega^{-1}(\zeta)$$

este

$$F^{*(1)} = \frac{k}{2}\,\omega^{-1}(\zeta)\,\overline{\omega^{-1}(\zeta)}\,[\lg \omega^{-1}(\zeta)\,\overline{\omega^{-1}(\zeta)} - c_1].$$

În particular, pentru

$$\zeta = \frac{c}{2}\left(\mathfrak{z} + \frac{1}{\mathfrak{z}}\right),$$

$$F^{*(1)} = \frac{k}{2c^2}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - c^2})(\bar{\zeta} + \sqrt{\bar{\zeta}^2 - c^2})\,[\lg(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - c^2})(\bar{\zeta} + \sqrt{\bar{\zeta}^2 - c^2}) - c_1']$$

unde $c_1' = 1 + \lg\ a^2 c^2 + \frac{p}{k}\gamma$, reprezintă potențialul tensiunilor pentru zona din jurul elipsei cu focarele în $-c$, $+c$, plastificată de condiția pe contur

$$\sigma_{nx}^{(1)} + i\,\sigma_{ny}^{(1)}\Big|_{\gamma_1} = -\,\frac{p}{ac}\,(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - c^2}.$$

Pentru $a = 1$, se obține soluția pentru planul plastificat în jurul unei fante dispusă de-a lungul segmentului $[-c,\ +c]$ cu condiția pe contur corespunzătoare.

Primită la redacție la 5 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. В. Л. Добровольский, *Задача о плоской деформации идеального пластического тела в комплексных переменных*, П М М., **XXIV**, *2*, 367—369 (1960).
2. L. Solomon, *Despre stabilirea formulelor lui Kolosov-Mushelișvili*, Anal. Univ. București, Seria. Șt. Nat., fasc. mat. fiz., **40**, 33—41 (1963).
3. V. V. Socolovschi, *Teoria plasticității*. Ed. tehnică, București, 1960, p. 143, 190.
4. В.Л. Добровольский, *О применении комплексных переменных к плоской пластической деформации*, П М М, **XXIV**, *5*, 955—958 (1960).
5. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității. I*, Ed. Acad. R.P.R., București, 1961.

C. TELEMAN, *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964, 290 pag.

Cartea *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile* a lui C. Teleman constituie o înmănunchiere originală şi unitară a noţiunilor fundamentale şi a principalelor metode folosite azi în topologie şi în geometria algebrică şi în geometria varietăţilor diferenţiabile, a spaţiilor fibrate sau a altor spaţii topologice cum sînt poliedrele simpliciale sau complexele celulare.

Autorul reuşeşte, surprinzător de simplu, să prezinte, mai întîi, cu claritatea şi precizia care sînt caracteristice lucrărilor sale, elementele de topologie generală şi de teoria grupurilor, necesare şi suficiente pentru urmărirea fără nici o altă pregătire prealabilă a expunerilor din capitolele ce urmează.

Teoria grupurilor de omologie şi omotopie, a sistemelor inductive şi proiective de grupuri abeliene ca şi aceea a spaţiilor fibrate care dau coloritul geometric necesar realizării programului cărţii, conduc la obiectivul ei principal care este varietatea diferenţiabilă, aşa cum este ea caracterizată de teorema lui de Rham asupra izomorfismului grupului de omologie şi grupul cîmpurilor tensoriale alternate închise de aceiaşi dimensiune, modulo subgrupul cîmpurilor exacte.

Dacă acestei teoreme foarte bogată în conţinut geometric, adăugăm, după ce asociem varietăţii şi un complex simplicial o teoremă a lui Poincaré şi formula lui Stokes, care îşi capătă în acest cadru plina ei semnificaţie, se obţin cele mai depline caracteristici ale unei varietăţi diferenţiabile.

Autorul a avut fericita ideie de a separa cît mai mult cu putinţă elementele algebrice de cele topologice, diferenţiindu-se şi prin aceasta expunerea sa de mai toate lucrările de sistematizare ale altor autori, asigurînd astfel cititorului calea cea mai simplă de acces către proprietăţile cele mai importante ale varietăţilor studiate, aşa cum se vede în studiul omologiei lui Čech şi, pînă la urmă, în prezentarea teoremelor lui de Rham şi Poincaré.

Cartea este opera unui gînditor care îşi orientează cititorul, în mijlocul unui vast material ce cuprinde o parte din Matematica actuală, cu paşi siguri, pe căi bine alese către cunoaşterea principalelor obiecte ale acestor domenii în plină elaborare.

Ultimul capitol, care tratează despre complexe celulare şi în care aduce contribuţii valoroase mai mulţi tineri romîni, este şi el o demonstraţie a siguranţei de orientare şi a actualităţii problemelor care au călăuzit scrierea acestei originale şi valoroase lucrări de sinteză care va juca un rol important în formarea matematicienilor noştri.

Octav Onicescu

P. E. CONNER & E. E. FLOYD, *Differentiable periodic maps.* (*Aplicații diferențiabile periodice*). Springer, 1964, 148 pag.

Abordarea teoriei grupurilor finite de difeomorfisme ale unei varietăți din punctul de vedere al teoriei cobordismului a condus pe autorii acestei cărți la rezultate deosebit de profunde privind topologia spațiilor pe care acționează astfel de grupuri. Expunerea lor în detaliu a făcut ca prezenta lucrare să reprezinte totodată și prima carte în domeniul teoriei cobordismului.

Pentru o pereche de spații (X, A), $X \supset A$, autorii definesc noțiunea de *varietate singulară orientată n — dimensională în* (X, A) ca o pereche (V^n, f), unde V^n este o varietate diferențiabilă n-dimensională orientată cu frontiera $\dot{V}^n$ și unde $f: (V^n, \dot{V}^n) \rightarrow (X, A)$ este o aplicație. Introducînd o relație de *bordism* pentru astfel de perechi, autorii obțin un grup abelian $\Omega_n(X, A)$ pentru care aplicațiile de perechi $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induc omomorfisme $\varphi_*: \Omega_n(X, A) \rightarrow \Omega_n(Y, B)$.

Definind un omomorfism de frontieră ∂, ei arată că sistemul $\{\Omega_n(X, A), \varphi_*, \partial\}$ formează o teorie generalizată de omologie în care grupurile de omologie ale punctului $\Omega_n(p)$ sînt grupurile Ω_n de bordism orientat ale lui René Thom.

Renunțînd la orientare, se obțin în mod analog grupuri de bordism neorientat $\mathfrak{N}_n(X, A)$. În primul capitol se dă o interpretare omotopică a grupurilor $\Omega_n(X, A)$ stabilind izomorfismul lor cu grupurile de omotopie $\pi_{n+k}((X/A) \wedge MSO(k))$, $k \geqslant n + 2$, unde $MSO(k)$ reprezintă varietatea lui Thom pentru fibrări cu grup structural ortogonal $o(k)$, semnul $\wedge$ indică produsul cartezian cu generatoarele peste punctele bază identificate și X/A este spațiul obținut din X prin identificarea subspațiului A cu punctul bază. Calculul grupurilor $\Omega_n(X, A)$ se face în capitolul II care se bazează pe un rezultat al lui C. T. C. Wall asupra structurii modulului $H(MSO; Z_2)$. Introducînd numere Whitney asociate unei perechi (f, h^m), unde f este o aplicație $f: M^n \rightarrow X$ și $h^m \in H^m(X, Z_2)$, se generalizează teorema lui Pontreaghin-Thom care afirmă anularea numerelor Stiefel-Whitney ale varietăților bord.

Aplicarea teoriei la studiul G-varietăților, adică al varietăților compacte orientabile în care operează un grup finit G prin difeomorfisme ce păstrează orientarea, se face adăugînd la relația de bordism condiția de G-echivarianță. Astfel, o G-varietate compactă (G, M^n) în care G operează efectiv se zice că bordează echivariant dacă și numai dacă există o G-varietate compactă (G, B^{n+1}) pe care G acționează efectiv și

$$(G, \dot{B}^{n+1}) = (G, M^n)$$

(G, M_1^n) și (G, M_2^n) sînt *echivariant bordante* dacă și numai dacă reuniunea disjunctă $(G, M_1^n \bigcup -M_2^n)$ bordează echivariant. Pornind de la această definiție, autorii construiesc grupurile $\Omega_n(G)$ și $\Omega_*(G) = \sum_0^\infty \Omega_n(G)$ care este Ω-modulul orientat de bordism $(\Omega = \sum_0^\infty \Omega_n)$.

Dacă G are ordinul r, clasele de bordism care admit reprezentanți în care G operează efectiv sînt cele divizibile cu r.

Mulțimea punctelor staționare prin operațiile grupului G dă indicații prețioase în studiul G-varietăților. Se arată că dacă două G-varietăți M_1, M_2 închise admit varietăți staționare F_1, F_2 cu vecinătățile tubulare echivariant difeomorfe, există o G varietate V^n închisă orientabilă fără puncte staționare a cărei clasă de bordism este diferența claselor celor două varietăți.

Studiul aplicațiilor de perioadă un număr prim p se împarte în două cazuri : $p = 2$ și p impar.

Capitolul IV este dedicat involuţiilor diferenţiabile. Se dă structura completă a modulului de bordism neorientat $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ de involuţii fără puncte fixe şi se studiază punctele fixe F ale involuţiilor (T, M^n). F împreună cu fibratul normal determină în mod explicit clasa de bordism mod 2 a varietăţilor M^n. Rezultatul se aplică în demonstrarea pe o cale geometrică a teoremei lui C. T. C. Wall care afirmă că produsul $M^n \times M^n$ al unei varietăţi închise cu ea însăşi este bordant mod. 2 cu o varietate orientabilă şi în studiul punctelor fixe ale conjugărilor unei varietăţi aproape complexe. O teoremă deosebit de frumoasă leagă dimensiunea mulţimii punctelor staţionare F într-o involuţie (T, M^n) de dimensiunea varietăţii şi anume, pentru întregul nenegativ k dat există un întreg $\varphi(k)$ astfel că dacă M^n nu este bordantă şi $n > \varphi(k)$ atunci $\dim F > k$.

Capitolul V priveşte studiul acţiunii grupului $(Z_2)^k$ pe o varietate care este echivalent cu studiul acţiunii unui număr de k involuţii permutabile între ele. Se dă de asemenea structura modulului de bordism $\mathfrak{N}_*((Z_2)^k)$ al operaţiilor efective $((Z_2)^k, M^n)$. Se studiază apoi punctele fixe ale acestor grupuri.

Următoarea generalizare a teoremelor antipodale ale lui Borsuk este expusă în capitolul VI. Dacă $f: S^n \to M^k$ este o aplicaţie a sferei n dimensionale $n > k$, atunci dimensiunea mulţimii de puncte x pentru care $f(x) = f(-x)$ este $\geqslant n - k$. Dacă $f: S^n \to M^n$ are $f^*: H^n(M^n, Z_2) \to H^n(S^n; Z_2)$ trivial, atunci există x în S^n cu $f(x) = f(-x)$.

Determinarea structurii aditive a grupului $\Omega_*(Z_p)$, p număr prim impar, se face în capitolul VI, unde se studiază de asemenea şi grupul $\Omega_*(Z_p k)$.

Ultimele două capitole sînt dedicate studiului punctelor fixe ale difeomorfismelor periodice ale unei varietăţi avînd perioada un număr prim impar şi studiului operaţiilor grupurilor finite abeliene cu ordinul o putere a unui număr prim impar.

O bibliografie bogată se adaugă acestui material interesant care face din această lucrare o carte de bază în studiul cobordismului şi al aplicaţiilor periodice ale varietăţilor.

T. Hangan

* * * *Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups* Akademiai Kiado, Budapest, 1964, 162 pag.

În anul 1963, între 3 şi 8 septembrie a avut loc la Tihany (R. P. Ungară) un colocviu de teoria grupurilor abeliene. Teoria grupurilor abeliene constituie un domeniu extrem de vast al matematicii moderne. În aceste condiţii, se înţelege că organizatorii şi-au fixat atenţia numai asupra cîtorva aspecte ale acestei teorii. Au fost desbătute în special problemele de structură şi aplicabilitatea metodelor omologice şi functoriale în teoria grupurilor abeliene. Dintre comunicările prezentate la acest colocviu, au fost incluse în volumul de faţă numai cele care n-au apărut în alte reviste de specialitate. Acestea sînt: *Quasi-isomorphism of p-groups* R. A. Beaumont şi R. S. Pierce; *Méthodes topologiques en théorie des groupes abéliens*, B. Charles; *On a conjecture of Pierce concerning direct decompositions of Abelian groups*, A.L. S. Corner; *A generalization of dependence relations*, V. Dlab; *On the 'subgroups of an Abelain group that are ideals in every ring*, E. Fried; *Some generalizations of the exact sequences concerninc Hom and Ext* L., Fuchs; *Additive groups of integer-valued functions over topological spaces*, J. de Groot; *On the structure of Abelian p-groups*, Kin-ya Honda; *On generating subgroups of Abelian groups*, J. M. Irwin and S. A. Khabbaz; *Einige Bemerkungen über die Automorphismen Abelscher, p-Gruppen*, H. Leptin; *A-ordering of the group Ext (B, A)*, F. Loonstra; *On the structure of Tor*, R. J. Nunke; *Endomorphism rings of primary Abelian groups*, R. S. Pierce; *Factorization of cyclic groups*, A. D. Sands; *Quotient categories and quasi. isomorphisms of Abelian groups*, E. A. Walker.

I. Bucur

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

1965 AUG 28

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU și M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcțiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici și automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă. Teoria corespondenței**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systémes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

N. RANCU și L. TŐVISSI, **Statistica matematică cu aplicații în producție**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 39 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 4, P. 475–630, BUCUREȘTI, 1965

I. P. „Informația" – c. 1024

43831

Lei 12

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

5

TOMUL 17

1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil ;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct ;
ACAD. GH. MIHOC ;
ACAD. G. VRĂNCEANU ;
ACAD. CAIUS IACOB ;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU ;
ACAD. M. HAIMOVICI ;
G. MARINESCU — membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.
Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție pe adresa : str. Mihail Eminescu nr. 47, București
Revista apare de 10 ori pe an.

TOM. 17, Nr. 5
1965

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

G. CĂLUGĂREANU, Asupra transformărilor univalente între spații euclidiene 633
D. MANGERON și SOULE YMANE NIANG, Principiu variațional corespunzător unor noi forme lagrangiene de mecanică analitică 637
RADU ROȘCA, Asupra unei clase de rețele Darboux-Țițeica . . 641
RADU ROȘCA, Asupra unui tip de congruență (ω) 647
OLEG ARAMĂ, Asupra unor evaluări ale funcțiilor derivabile, cu aplicații la studiul problemei polilocale (I) 653
MARIANA COROI-NEDELCU, Nesimultaneități în funcționarea în mai mulți timpi a schemelor fără contacte 679
DAN PASCALI, Vectori analitici generalizați 707
IULIAN POPOVICI și CEZAR GHEORGHE, Interpretarea geometrică a grupurilor spinoriale 737
P. ISCOVICI și G. GODINI, Linie de așteptare cu număr limitat de solicitanți și servire în faze 747
HARRY COHN, Asupra unui proces staționar întîlnit în teoria lanțurilor de ordin infinit 753
HARRY COHN, Teoreme limită pentru sistemele cu legături complete 757
G. GODINI, O problemă de teoria așteptării cu servire eterogenă 765
G. GODINI, O problemă de așteptare cu o singură stație de servire 777
HORIA I. ENE, Mișcări plane rotaționale ale unui fluid perfect în prezența unor obstacole 781
C. TUDOR, Probleme la limită bilocale pentru ecuații diferențiale liniare 793
ANDREI DUMA, Asupra categoriilor de diagrame 803
RODICA CHIRILĂ, Determinarea mișcărilor cu vîrtej constant în jurul unei clase particulare de profile 809
G. DINCĂ, Deformări rapide ale membranelor extensibile . . 817
RECENZIE 827

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 631–828, BUCUREȘTI, 1965

ASUPRA TRANSFORMĂRILOR UNIVALENTE ÎNTRE SPAŢII EUCLIDIENE[1]

DE

G. CĂLUGĂREANU

(Cluj)

În prezenta lucrare se stabilesc condiţii necesare şi suficiente pentru ca o transformare a unui domeniu n-dimensional în alt domeniu n-dimensional să fie un omeomorfism.

În două lucrări anterioare am stabilit un sistem de condiţii necesare şi suficiente pentru univalenţa unei transformări a unui domeniu plan în alt domeniu plan [1], sau a unui domeniu tridimensional în alt domeniu tridimensional [2]. Metoda utilizată se extinde fără modificări esenţiale în cazul unei transformări univalente a unui domeniu din E_n în alt domeniu din E_n (transformarea fiind continuă şi univalentă, deci omeomorfă, cele două domenii au în mod necesar aceeaşi dimensiune, conform teoremei lui Brouwer). În afară de această extindere, indicăm mai jos o nouă formă a condiţiilor necesare şi suficiente de univalenţă, valabilă oricare ar fi dimensiunea n.

Fie $\bar{D}$ o regiune din E_n pe care transformarea (T) este definită şi continuă. Aceasta aplică $\bar{D}$ pe o regiune $R \subset E_n$, unde R este o regiune pe care o presupunem mărginită, univalentă sau multivalentă. Să formăm funcţia

$$f(\lambda, M_1) = \frac{1}{\sigma_n} \int_R \lambda e^{-\lambda r_{12}^n} \, d\omega_2,$$

unde λ este un parametru real, M_1 un punct oarecare din E_n, M_2 un punct curent al regiunii R, $d\omega_2$ elementul de volum n-dimensional care conţine M_2 în interior, r_{12} distanţa M_1M_2, σ_n volumul sferei n-dimen-

---

[1] Lucrare prezentată la Sesiunea ştiinţifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 11–12 decembrie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 633–635, BUCUREŞTI, 1965

sionale de rază 1, iar integrala este luată în sens Lebesgue pe regiunea R. Obţinem, ca şi în cazurile $n = 1,2$,

$$f(\lambda, M_1) \to q(M_1), \quad \lambda \to +\infty,$$

unde $q(M_1)$ este valenţa regiunii R în punctul M_1, adică numărul întreg care arată de cîte ori punctul M_1 este acoperit de regiunea R.

Formînd acum funcţia

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sigma_n} \int_R f(\lambda, M_1)\, d\omega_1$$

obţinem condiţia necesară şi suficientă pentru univalenţa regiunii R, deci şi a transformării (T), sub forma

$$g(\lambda) < \frac{V}{\sigma_n}, \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

unde V reprezintă volumul n-dimensional al regiunii R.

Această condiţie se mai scrie

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \int_R \int_R \lambda e^{-\lambda r_{12}^n}\, d\omega_1\, d\omega_2 < \frac{V}{\sigma_n}$$

sau, notînd $\lambda = \frac{u\sigma_n}{V}$,

$$\Phi(u) = \int_R \int_R \left(1 - u e^{-u \frac{\sigma_n r_{12}^n}{V}}\right) d\omega_1\, d\omega_2 > 0, \quad -\infty < u < +\infty.$$

Această funcţie $\Phi(u)$ este întreagă, de gen 1, şi ea rămîne pozitivă de-a lungul axei reale atunci şi numai atunci cînd regiunea R este univalentă. Putem da altă formă, mai precisă, acestei condiţii.

Condiţia $\Phi(u) > 0$, $u > 0$ se mai exprimă sub forma echivalentă

$$\int_0^\infty e^{-u}[P(u)]^2\, \Phi(u)\, du > 0,$$

unde $P(u)$ este un polinom oarecare, $P(u) = a_0 + a_1 u + \ldots + a_m u^m$, cu coeficienţi reali. Găsim

$$\int_0^\infty e^{-u}[P(u)]^2\, \Phi(u)\, du = \sum \mu_{i+j} a_i a_j, \quad \mu_k = \int_0^\infty e^{-u} u^k\, \Phi(u)\, du.$$

Convergenţa uniformă a integralei cu limita infinită ne permite să scriem

$$\mu_k = \int_R \int_R \left(k! - \int_0^\infty e^{-u} u^{k+1} e^{-u \frac{\sigma_n r_{12}^n}{V}}\, du\right) d\omega_1\, d\omega_2 =$$

$$= k! \int_R \int_R \left(1 - \frac{(k+1)\, V^{K+2}}{(V + \sigma_n r_{12}^n)^{K+2}}\right) d\omega_1\, d\omega_2$$

aplicînd formula

$$\int_0^\infty e^{-au} u^k \, du = \frac{k\,!}{a^{k+1}}.$$

Condiţiile necesare şi suficiente pentru pozitivitatea formei pătratice $\sum \mu_{i+j} a_i a_j$ se exprimă sub forma

$$\mu_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

Ţinînd seama de expresia dată mai sus constantelor μ_k, găsim

$$\int_R \int_R \left[1 - \left(\frac{V}{V + \sigma_n r_{12}^n}\right)^2\right] d\omega_1 \, d\omega_2 > 0,$$

$$\int_R \int_R \int_R \int_R \begin{vmatrix} 1 - \left(\dfrac{V}{V + \sigma_n r_{12}^n}\right)^2, & 1 - 2\left(\dfrac{V}{V + \sigma_n r_{12}^n}\right)^3 \\ 1 - 2\left(\dfrac{V}{V + \sigma_n r_{34}^n}\right)^2, & 2\left[1 - 3\left(\dfrac{V}{V + \sigma_n r_{34}^n}\right)^4\right] \end{vmatrix} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 > 0$$

Prima condiţie este verificată în mod banal, însă următoarele constituie condiţii necesare şi suficiente de univalenţă, sub formă finită, numărul acestor condiţii fiind însă infinit.

Primită la redacţie la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul al Academiei R.P.R.,
Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. G. CĂLUGĂREANU, *Sur la représentation analytique des régions du plan*. Revue de math. pures et appl., **II**, 281–288 (1957).
2. G. CĂLUGĂREANU, *Despre domeniile univalente*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VII**, 853–860 (1955).

PRINCIPIU VARIAȚIONAL CORESPUNZĂTOR UNOR NOI FORME LAGRANGIENE DE MECANICĂ ANALITICĂ[1])

DE

D. MANGERON și SOULEYMANE NIANG
(Iași) (Dakar)

V. V. Dobronravov [1] în referatul, inserat în Referativnyi Jurnal Mehanica, consacrat lucrării primului dintre autori [2] relativă la stabilirea unei infinități de ecuații de mecanică analitică pentru sisteme olonome și neolonome, a scos pregnant în evidență importanța rezultatelor obținute de D. Mangeron, spunînd între altele : ,,Apariția ecuațiilor de dinamică care conțin derivate totale în raport cu timpul ale energiei cinetice este un fapt demn de toată atenția. El permite, pe de o parte să se scoată în evidență noi proprietăți ale formelor pătratice ; ecuațiile stabilite pot fi convenabil aplicate în unele studii de dinamica sistemelor mecanice. El oferă, în fine, posibilitatea unei prezentări sistematice noi a întregii mecanici analitice''.

În prezenta lucrare, autorii reproducînd unele din ecuațiile generalizate de mecanica analitică a sistemelor olonome și neolonome, stabilite în [2], [5], prezintă luînd ca punct de plecare lucrarea celui de-al doilea autor [3], consacrată unor consecințe care decurg din ecuațiile lui Mangeron-Țenov [5], [6], stabilesc un principiu variațional exprimat sub forma (12) — relativ la sisteme mecanice neolonome.

DIN NOILE FORME DE ECUAȚII DE DINAMICĂ ANALITICĂ

În corespondență cu sisteme mecanice olonome conservative sau nu, s-au stabilit următoarele forme de noi ecuații de dinamică analitică

$$\frac{1}{m}\frac{\partial \mathcal{L}^{(m)}}{\partial q_j^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0\,; \tag{1}$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_j^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j\,, \tag{2}$$

---

[1]) Versiunea în l. franceză va apărea în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, 5 (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 637–640, BUCUREȘTI, 1965

în care, păstrîndu-se notaţiile lagrangiene clasice, s-a pus

$$T = T([q_i], [\dot{q}_i]; t), \left(\cdot \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right), [\dot{q}_i] \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n); [\dot{q}_i] \equiv$$

$$\equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n),$$

$$\mathcal{L} = T - \Pi = T + U, U = U(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

$$\mathcal{L}^{(m)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{L}^{(m-1)}, T^{(m)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T^{(m-1)}, q_j^{(m)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_j^{(m-1)},$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots).$$

În ipoteza sistemelor neolonome cu legături neintegrabile liniare de forma

$$\dot{q}_r = a_{r\alpha} \dot{q}_\alpha + a_r, (\alpha = 1, 2, \dots, k; \quad r = k + 1, k + 2, \dots, k + p = n), \tag{3}$$

ecuaţiile noi de dinamică analitică se prezintă sub forma

$$\frac{\partial R_m}{\partial q_\alpha^{(m)}} + \frac{\partial R_m}{\partial q_r^{(m)}} \frac{\partial q_r^{(m)}}{\partial q_\alpha^{(m)}} = P_\alpha, (\alpha = 1, 2, \dots, r), \tag{4}$$

în care s-a pus

$$R_m = \frac{1}{m} [T^{(m)} - (m + 1) T_0^{(m)}],$$

$$P_\alpha = Q_\alpha + Q_r a_{r\alpha},$$

$$[q_\alpha] \equiv (q_1, q_2, \dots, q_k; \quad [q_r] \equiv (q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_{k+p}).$$

$$\frac{\partial T_0^{(m)}}{\partial q_j^{(m)}} = \frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad [2].$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots).$$

PRINCIPIUL VARIAŢIONAL CORESPUNZĂTOR UNOR FORME PARTICULARIZATE DIN (4) DE ECUAŢII DE DINAMICĂ ANALITICĂ NEOLONOMĂ

Considerăm un sistem constant (S) constituit din puncte materiale M_i şi depinzînd de n parametri q_ν $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ şi de timp t. Fie $P(q_\nu, t)$ punctul figurativ al sistemului (S) într-un spaţiu E_{n+1} cu $n + 1$ dimensiuni. La fiecare poziţie a sistemului (S) corespunde un punct $P(q_\nu, t)$ de viteză $\vec{V}^*$, definită prin

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}P}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}^* \Rightarrow \vec{V}^{2*} = \sum_i m_i \vec{V}_i^2 = 2\,T, \tag{5}$$

în care prin $\vec{V}_i$ s-a notat viteza unei particule M_i de masă constantă m_i şi T este energia cinetică a sistemului la momentul considerat.

Fie în aceste condiţii $P_1(q_{1\nu}, t_1)$ şi $P_2(q_{2\nu}, t_2)$ poziţiile sistemului (S) la momentele t_1 şi t_2. Sub acţiunea forţelor $\sum \vec{f}_i$ aplicate la momentul t sistemului (S), q_ν sînt funcţii de t satisfăcînd la ecuaţiile de legătură în orice mişcare naturală a sistemului considerat din P_1 în P_2. Considerînd deplasările virtuale $\overrightarrow{\delta M_i}$ ale punctelor M_i compatibile cu legăturile existente în momentul t, δq_ν rezultă a fi funcţii infinit mici de t, supuse doar la condiţia de a se anula la momentele t_1 şi t_2 (aceasta întrucît $q_\nu + \delta q_\nu$ satisfac la ecuaţiile de legătură şi iau aceleaşi valori ca şi q_ν la momentele indicate), de unde avem :

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\delta M}_i(t_1) = \overrightarrow{\delta M}_i(t_2) = 0 \\ \text{sau} \\ \delta q_{1\nu} = \delta q_{2\nu} = 0 \;\; [\delta q_{j\nu} = \delta q_\nu(t_j)\,;\, j = (1, 2)]. \end{array} \right.$$

Presupunînd că poziţia oricărui punct M_i este exprimată înainte de a se ţine seamă de vreo consideraţie de natură dinamică — prin funcţii de q_ν şi de t sub forma

$$(7)\qquad M_i = M_i(q_\nu, t),$$

principiul lui Hamilton ²) se traduce prin faptul că integrala

$$(8)\qquad \delta \mathcal{J}_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta \tau)\, \mathrm{d}t$$

este nulă în orice mişcare vecină cu mişcarea naturală a sistemului (S), avînd aceleaşi poziţii P_1 şi P_2 ale lui P la momentele t_1 şi t_2. În cazul cînd parametrii q_ν sînt independenţi, avem

$$(9)\qquad \delta \tau = \sum_i \vec{f}_i\, \overrightarrow{\delta M}_i = Q_\nu\, \delta q_\nu, \quad \text{(sumare)}$$

în care prin $\vec{f}_i$ s-a notat suma tuturor forţelor aplicate la momentul t particulei M_i.

În cazul cînd q_ν sînt legaţi prin r relaţii de legătură

$$(10)\qquad q_{\nu\alpha}\, \dot{q}_\nu + l_\alpha = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r)$$

---

²) C. M. A. Raitzin [4] introducînd variabile definite prin $r_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ şi funcţia $R(r_i\,;\, s_i\,;\, t) = \mathcal{L} - \sum\limits_i q_i r_i$, în care $\mathcal{L}$ este funcţia lagrangiană a sistemului mecanic pe care l-a considerat, a tradus principiul variaţional clasic sub forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} (R + {\sum_i}' q_i \cdot r_i)\, \mathrm{d}t = 0$$

şi a dedus în consecinţă o formă a ecuaţiilor de dinamică analitică care poate fi inclusă în ecuaţiile de dinamică ale lui Mangeron-Ţenov, însă din care mai pot fi deduse alte generalizări interesante.

în care $g_{\nu\alpha}$ și l_α sînt funcții de q_ν și t, principiul lui Hamilton poate să mai fie scris sub forma (8), în care s-a notat

$$\delta\tau = \sum_i \vec{f}_i\, \overrightarrow{\delta M}_i + \lambda_\alpha g_{\alpha\nu}\, \delta q_\nu = (Q_\nu + \lambda_\alpha q_{\nu\alpha})\, \delta q_\nu, \tag{11}$$

și λ_α sînt necunoscute auxiliare (multiplicatorii lui Lagrange) [3]).

În [3] am demonstrat că în cazul cînd există legături în sistem de forma (10) [4]), se poate obține un principiu variațional, în care nu figurează multiplicatorii λ_α. Rezultatul obținut se poate cristaliza în următoarea teoremă.

TEOREMA 1. *Fie $P_1\,(q_{1\beta}, t_1)$ și $P_2\,(q_{2\beta}, t_2)$ pozițiile punctului figurativ $P\,(q_\beta, t)$ dintr-un spațiu cu $n + 1 - r$ dimensiuni la momentele t_1 și t_2 reprezentînd mișcarea unui sistem mecanic* (S), *atunci cînd parametrii q_ν sînt legați între ei prin relațiile* (10′). *În orice mișcare naturală vecină cu mișcarea naturală a sistemului* (S') *și avînd aceleași poziții P_1 și P_2 ale lui P la momentele t_1 și t_2 integrala*

$$\delta \mathcal{I}_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} \left| \delta \overline{T} + \delta\overline{\tau} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_h}\, a_{\beta h} - \dot{a}_{\beta\alpha}\, \delta q_\beta \right] \mathrm{d}t, \tag{12}$$

în care s-a notat prin $\overline{T}$ energia cinetică a sistemului exprimată în funcție de $\dot{q}_\beta, q_\beta, q_\alpha, t$ și

$$\delta\overline{\tau} = \sum_i \vec{f}_i\, \delta \vec{M}_i = \sum_i \vec{f}_i \left(\frac{\partial \vec{M}_i}{\partial q_\alpha}\, a_{\beta\alpha} + \frac{\partial \vec{M}_i}{\partial q_\beta} \right) \delta q_\beta = \overline{Q}_\beta\, \delta q_\beta, \tag{13}$$

este nulă.

Într-o notă ulterioară vom expune forme de ecuații ale lui Mangeron-Țenov relative la sisteme mecanice închise.

Primită la redacție la 3 octombrie 1964

Institutul politehnic Iași,
Facultatea de științe din Dakar

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. DOBRONRAVOV, Ref. K. Meh., **9A**, 74 (1963).
2. Д. МАНЖЕРОН, Известия Акад. наук СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, **2**, 128 (1962).
3. S. NIANG, Bul. Inst. politehn. Iași s. n., **10**, (14), *1*–*2* (1964).
4. C. M. A. RAITZIN, Anales de la Sociedad Cientifica Argentina, E. III y IV, **CLXXI** 50–65 (1961).
5. D. MANGERON, S. DELEANU. C. R. Acad. Bulgare Sci., **15**, *1*, 9–12 (1962).
6. I. TZÉNOFF, Bul. Inst. politehn. Iași, s.n. **5** (9), *1*–*2*, 119–124 (1959).
7. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle.* 2-e éd, Tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

---

[3]) Presupunem că relațiile (10) — independente — nu sînt toate integrabile ; dacă nu, vom presupune că legăturile olonome suplimentare schematizate prin aceste relații nu sînt rezolubile, astfel încît în (7), q_ν nu pot fi toți independenți.

(10′) [4]) $\dot{q}_\alpha = a_{\beta\alpha}\dot{q}_\beta + b_\alpha$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, r;\ \ \beta = r + 1,\ r + 2, \ldots, n)$.

ASUPRA UNEI CLASE DE REȚELE DARBOUX-ȚIȚEICA[1]

DE

RADU ROȘCA

Se studiază rețelele (**M**) (rețele Darboux-Țițeica), care să admită rețele derivate de aceeași definiție.
Această clasă este caracterizată analitic de a avea invariantul h de forma $h = h(av - bu)$ ($a,b =$ const. ; $u,v =$ parametri rețelei) și geometric de a se transforma printr-o similitudine într-o rețea (R) proiectivă cu transformata sa Laplace secundă. Cu ajutorul a doi operatori permutabili, se deduc rețelele (**M**) derivate de diferite ordine ale rețelei (**M**) inițiale și care coincid cu transformatele Laplace de diferite ordine ale rețelei (R).

Definiția *rețelelor* (**M**) (rețele Darboux-Țițeica) și transformarea lor în rețele de aceeași definiție prin transformarea lui Koenigs-Moutard, a fost făcută respectiv de Darboux și Țițeica.

Definiția lui Darboux este metrică, deoarece aceste rețele apar în generalizarea suprafețelor minima $\sum$ dintr-un spațiu eliptic real tridimensional $\mathcal{E}_3$ (curbele rețelei (**M**) fiind liniile izotrope ale lui $\sum$), dar numeroasele proprietăți proiective ale acestor rețele, face ca ele să fie regăsite în diferite probleme de natură proiectivă.

Astfel, T. Mihăilescu a remarcat că rețelele (**M**) sînt și *rețele Ionas*, și noi înșine, într-o lucrare mai veche [16], am pus în evidență o clasă de rețele (**M**), pe care am denumit-o K, astfel ca *congruența conjugată la două rețele* (**M**) *în corespondență Koenigs-Moutard să fie o congruență Goursat.*

Presupunînd (afară de o mențiune expresă) că pătratul scalar al punctului $\mathbf{M}_0$ care descrie rețeaua (**M**) nu mai este constant, sau ceea ce ar reveni la același lucru a efectua asupra coordonatelor normalizate ale lui Weierstrass, ale punctului care descrie pe $\sum$ *o transformare omografică care să nu mai fie izometrică*, ne-am propus în lucrarea actuală să căutăm dacă există reţele $(\mathbf{M})$ care să admită reţele derivate de aceeaşi definiţie.

---

[1] Versiunea în l. franceză a apărut în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, 5 (1965).

Alegînd drept reper mobil, tetraedrul $\{T\}$ format de cele patru vîrfuri $\mathbf{M}_i\,(i = 0,1,2,3)$ ale şirului periodic L de perioadă patru, determinat de $\mathbf{M}_0$, se deduce din cele două ecuaţii de definiţie ale unei reţele $(\mathbf{M})$ că ecuaţiile deplasării infinitezimale ale lui $\{T\}$ sînt

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathbf{M}_{0u} &= h\,\mathbf{M}_{3v} \\ \mathbf{M}_{1u} &= \frac{h_u}{h}\,\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_{2u} &= h\,\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_{3u} &= \frac{\mathbf{M}_{0v}}{h} \end{aligned} \qquad\qquad (2)\qquad \begin{aligned} \mathbf{M}_{0v} &= h\,\mathbf{M}_{3u} \\ \mathbf{M}_{1v} &= h\,\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_{2v} &= \frac{h_v}{h}\,\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_{3v} &= \frac{\mathbf{M}_{0u}}{h} \end{aligned}$$

unde am pus

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_{0u}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_{0v}$$

şi invariantul h satisfăcînd condiţia de integrabilitate

$$(3)\qquad (\lg h)_{uv} = h - \frac{1}{h}\cdot$$

Acestea fiind condiţiile analitice care exprimă că punctul $\overline{\mathbf{M}}$ descrie o reţea derivată (de primul ordin) a lui $(\mathbf{M}_0)$ şi de aceeaşi definiţie, sînt

$$(4)\qquad \overline{\mathbf{M}} = p^i\,\mathbf{M}_i, \qquad (i = 0,1,2)$$

$$(5)\qquad \overline{\mathbf{M}}_{uv} = \bar{h}\,\overline{\mathbf{M}}$$

$$(6)\qquad \overline{\mathbf{M}}_{uu} - \overline{\mathbf{M}}_{vv} = \frac{\bar{h}_u}{\bar{h}}\,\overline{\mathbf{M}}_u - \frac{\bar{h}_v}{\bar{h}}\,\overline{\mathbf{M}}_v$$

$\bar{h}$ satisfăcînd aceeaşi ecuaţie (3) ca şi h, iar cei trei coeficienţi p^i fiind funcţii de u şi v care urmează să fie determinate.

Dacă introducem în (5) şi (6) expresia (4) a lui $\overline{\mathbf{M}}$ şi ţinem seama de ecuaţiile (1) şi (2), se găseşte că $\mathbf{M}_0$ trebuie să verifice două ecuaţii de forma

$$(7)\qquad a_1\mathbf{M}_{0uu} + b_1\mathbf{M}_{0vv} + c_1\mathbf{M}_{0u} + d_1\mathbf{M}_{0v} + e_1\mathbf{M}_0 = 0$$

$$(8)\qquad a_2\mathbf{M}_{0uu} + b_2\mathbf{M}_{0vv} + c_2\mathbf{M}_{0u} + d_2\mathbf{M}_{0v} + e_2\mathbf{M}_0 = 0$$

care dezvoltate dau două tipuri de soluţii. Pentru fiecare din aceste soluţii se găseşte $h = h\,(av - bu)$ $(a, b = \text{const.})$.

Or, această formă a lui h este tocmai forma caracteristică a reţelelor $(\mathbf{M})$ *din clasa K pe care am semnalat-o, şi ecuaţia* (3) *devine astfel o ecuaţie diferenţială de tip de Painlevé. Desemnînd cu* $(\mathbf{m})$ *o astfel de reţea, dintr-o reţea* $(\mathbf{m}_0)$ *dată, se deduc două tipuri de reţele derivate de primul ordin,* *fie* $(\overline{\mathbf{m}}_0)$ *și* $(\hat{\mathbf{m}}_0)$ *care se obțin aplicînd lui* $(\mathbf{m}_0)$ *respectiv operatori permutabili*

$$\overline{\Gamma}_0 = a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}, \quad \hat{\Gamma}_0 = -ab\frac{h'}{h} - a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}, \; h' = \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,(av-bu)} \cdot$$

Reţeaua $(\mathbf{m}_3)$ opusă lui $(\mathbf{m}_0)$ în tetraedul lui Lapalace L, fiind cum se ştie o rețea de aceeași definiție ca $(\mathbf{m}_0)$, dă loc la considerații analoge, operatorul $\hat{\Gamma}_0$ schimbîndu-se cu $\hat{\Gamma}_3 = ab\frac{h'}{h} - a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}$ și prin *iterația lui* $\overline{\Gamma}_0$ *de aceeași putere aplicată lui* $\mathbf{m}_0$ *și* $\mathbf{m}_3$ *se obțin rețele* $(\mathbf{m})$ *care sînt în aceeași poziție reciprocă ca* $(\mathbf{m}_0)$ *și* $(\mathbf{m}_3)$, *adică* $\mathbf{m}_3^{(p)}$ *este transformatul Laplace de ordinul doi al lui* $\mathbf{m}_0^{(p)}$.

Utilizînd proprietățile de permutabilitate ale transformărilor $\overline{\Gamma}_0$ și $\hat{\Gamma}_0$, care reies din anularea *parantezelor lui Poisson corespunzătoare*, demonstrăm în primul rînd că congruențele $[\mathbf{m}_0\,\hat{\mathbf{m}}_0]$ și $[\mathbf{m}_0\,\overline{\mathbf{m}}_3]$ sînt W, și apoi că cele două curbe $C_{\overline{u}}$ și $C_{\overline{v}}$ de pe suprafața suport $S_{\mathbf{m}_0}$ a lui $(\mathbf{m}_0)$ ce sînt tangente razelor acestor congruențe, formează o rețea conjugată.

Rezultă de *aici că rețeaua* $(\overline{u}, \overline{v})$ *este o rețea* (R), și forma coeficienților celor două ecuații care o determină (care se deduc din ecuațiile rețelei (u,v) printr-o similitudine de coeficienți a, b) *arată că este antoproiectivă cu transformata sa Laplace de ordinul doi.*

Acest tip de ecuații apare și într-o lucrare a lui F. Marcus asupra șirurilor Fubini și acest fenomen nu trebuie să ne mire deoarece, după cum arătăm, suprafețele $S_{\mathbf{m}}$ suport ale rețelelor $(\mathbf{m})$ *sînt izoterm-asimptotice* și se știe că două asemenea suprafețe pot fi mereu puse în corespondență, astfel ca *liniile lui Darboux* să se corespundă.

Pe de altă parte, am demonstrat, în [17] că dacă o rețea (R) este proiectivă cu transformata sa Laplace de ordinul doi, atunci transformatele lui Laplace de indice par și impar sînt respectiv situate pe două drepte d și d' care sînt în poziția teoremei de permutabilitate a lui Bianchi.

Ne propunem să stabilim acum relația care există între transformatele lui Laplace de diferite ordine ale rețelei $(\overline{u}, v)$ și transformatele $\overline{\Gamma}_0$, $\hat{\Gamma}_0$, și $\hat{\Gamma}_3$ de diferite ordine ale rețelei (u, v) avînd aceeași suprafață suport ca $(\overline{u}, \overline{v})$ fie, $S_{\mathbf{m}_0}$.

Dacă notăm cu $\mathbf{r}$ punctul descriind rețeaua $(\overline{u}, \overline{v})$ în chestiune, găsim cu ajutorul ecuațiilor deplasări infinitezimale al lui $\{T\}$ și folosind proprietățile transformărilor $\overline{\Gamma}_0$, $\hat{\Gamma}_0$, și $\hat{\Gamma}_3$, următoarele relații:

$$\mathbf{r}_{-2p} = \hat{\Gamma}_3^{(p)}\,\hat{\Gamma}_0^{(p)}\,\mathbf{m}_0$$

$$\mathbf{r}_{-2p-1} = -\,\hat{\Gamma}_0^{(p+1)}\,\hat{\Gamma}_0^{(p)}\,\mathbf{m}_0$$

și

$$\mathbf{r}_p = \overline{\Gamma}_0^{(p)}\,\mathbf{m}_0$$

sau

$$\mathbf{r}_p = h\,\overline{\Gamma}_0^{(p)}\,\mathbf{m}_3$$

după cum p *este par sau impar.*

Se poate deci enunţa următorul rezultat :

Fiind *dată o reţea* ($\mathbf{m}_0$) (reţeaua ($\mathbf{M}$) făcînd parte din clasa K) *se poate printr-o similitudine transforma într-o reţea* (R)

Reciproc, pentru ca o omografie (cu coeficienţi constanţi) să transforme o reţea ($\mathbf{M}$) *oarecare într-o reţea* (R), *trebuie ca această omografie să fie o similitudine şi în acest caz reţeaua* ($\mathbf{M}$) *face parte din clasa* K.

Reţeaua ($\mathbf{m}_3$) *descrisă de opusul lui* $\mathbf{m}_0$ *în tetraedrul lui Laplace determinat de aceasta din urmă dă loc la consideraţii analoage, şi reţelele* (R) *astfel obţinute sînt autoproiective cu transformatele lor Laplace de ordinul doi.*

În fine, cele trei tipuri de reţele derivate care se obţin cu ajutorul transformărilor $\overline{\Gamma}_0$, $\hat{\Gamma}_0$, *şi* $\hat{\Gamma}_3$ *aplicate lui* $\mathbf{m}_0$ *şi opusului său* $\mathbf{m}_3$ *sînt situate pe axele transversale şi tangenţiale ale celor două reţele* (R), *care au aceleaşi suprafeţe suport ca* ($\mathbf{m}_0$) *şi* ($\mathbf{m}_3$).

Dacă se anulează constanta de integrare care apare dintr-o primă cuadratură a ecuaţiei lui Painlevé

$$ab\left(\frac{h'}{h}\right)' = \frac{1}{h} - h.$$

Reţeaua ($\overline{u}, v$) *devine periodică de perioadă patru*, şi *suprafaţa suport* S_m *posedă două reţele dînd naştere unui şir periodic de perioadă patru.*

Această proprietate este susceptibilă de dezvoltări metrice remarcabile în spaţiul eliptic $\mathcal{E}_3$ conţinut în E_3 şi va face obiectul unei alte lucrări.

Din teorema generală asupra şirurilor autoproiective rezultă că *congruenţele transversale* şi *tangenţiale* ale reţelei (R) de parametri ($\overline{u}$, $\overline{v}$) considerate precedent, *sînt liniare*, directoarele fiind descrise de punctele duble ale proiectivităţii Π care lasă dreapta $d \equiv \mathbf{r}\,\mathbf{r}_2$ invariantă.

În cazul particular $a = \pm b$, aceste puncte sînt chiar $\mathbf{r}_{+1}$ şi $\mathbf{r}_{-1}$, şi pe de altă parte *invarianţii lui Weingarten* W^u şi W^v corespunzători lui ($\overline{u}$, $\overline{v}$) fiind nuli, *reiese că reţeaua este şi o reţea Koenigs.* (Curbele reţelei sînt conice şi plane.)

Revenind acum la definiţia metrică a reţelelor ($\mathbf{M}$), dată de Darboux, şi utilizînd de data aceasta *tetraedrul autodual al lui Demoulin-Bianchi*, precum noţiunile mai recente de produse interioare şi exterioare de puncte normate din spaţiul eliptic $\mathcal{E}_3$ considerat găsim următorul rezultat :

Dacă invariantul h al unei reţele ($\mathbf{M}$) *trasată pe o suprafaţă minima* Σ *din* $\mathcal{E}_3$ *ia forma armonică* $h = h\,(u \pm v)$, *reţeaua* (R) *de parametri* $\overline{u} = u + v$, $\overline{v} = u - v$ *este reţeaua liniilor principale pe* Σ *care sînt în plus plane şi conice.*

Suprafaţa Σ *devine, în acest caz, cea mai generală suprafaţă minima de revoluţie* Σ_r *din* $\mathcal{E}_3$, *avînd ca paralele eliptice curbele* $\overline{v}$.

Cum Σ_r este şi o *suprafaţă Petterson* (8), *suprafaţa suplimentară a lui* Σ_r *este de asemenea de revoluţie.*

Primită la redacţie la 1 septembrie 1964

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* t. III, Paris.
2. T. Ţiţeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux,* Gauthier-Villars, 1930.
3. T. Ţiţeica, *Sur les réseaux R à suite de Laplace périodique* Bull. Sc. de l'Ac. Roumaine, 1914.
4. T. Ţiţeica, *Sur une généralisation des surfaces minima* Bull. Sc. de l'Ac. Roumaine, 1913.
5. T. Ţiţeica, *Sur les réseaux dérivés.* Bull. Sc. l'Ac. Roum., 1913.
6. L. Bianchi, *Sopra alcune classi di congruenze rettilinee regli spazi di curvatura constante.* Annali di Matem., 1904.
7. L. Bianchi, *Congruenze di sfere di Ribaucour e superficie di Peterson.* Bologna, 1928.
8. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finite di transformazioni.* Zanichelli, 1928.
9. E. P. Lane, *Projective differential Geometry of Curves and surfaces.* Chicago Press, 1932.
10. R. Garnier, *Géométrie et cinématique Cayleyennes.* Gauthier-Villars, 1951.
11. T. Mihăilescu, *Sur les réseaux conjugués à surfaces associées coïncidantes.* Bull. Math. de la Soc. Roum. de Sc., 1944.
12. T. Mihăilescu, *Geometrie diferenţială proiectivă.* (*Teoria corespondenţei*). Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1963.
13. Demoulin, C. R., Acad. Sci. Paris **139**, 393 (1904).
14. F. Marcus, *Asupra ciclurilor lui Laplace de perioadă 4.* Studii şi cercetări ştiinţifice Filiala Iaşi, fasc. I, 1963.
15. F. Marcus, *Asupra şirurilor F.* Bull. Inst. Polit. Iaşi, 1955.
16. R. Roşca, *Sur une classe de congruences de Goursat.* A. S. R., 1946.
17. R. Roşca, *Asupra unei clase de reţele autoproiective.* St. cerc. mat., **I**, *1* (1951).

ASUPRA UNUI TIP DE CONGRUENȚĂ (ω)

DE

RADU ROȘCA

Se studiază congruențele $[C_M]$ de normale la o suprafață minima (**M**) care să fie și de tip (ω). În acest caz, congruențele $[C_M]$ sînt și congruențe Goursat și suprafața (**M**) este elicoidul drept, sau suprafața lui Ribaucour după cum unghiul ω al congruenței (ω) este variabil sau constant.

Într-un memoriu asupra rețelelor și congruențelor (ω) [1], P. Vincensini consideră și cazul congruențelor Ribaucour, pentru care unghiul curbelor celor două rețele focale (în două puncte omoloage) sînt egale *fără să fie constant*.

Pe de altă parte, rețelele de curbură ale unei suprafețe minima (**M**) admite ∞^2 cupluri de congruențe Ribaucour avînd razele omoloage ortogonale [2].

În această notă ne propunem să considerăm cazul cînd congruența $[C_M]$ a normalelor la o suprafața (**M**) se bucură și de proprietatea egalității unghiurilor focale.

Fie (u^1, u^2) rețeaua liniilor de curbură trasate pe o suprafață minima (**M**). Ele formează, cum se știe, un sistem izoterm, și tensorul fundamental prin $g_{\alpha\beta}$ al lui (**M**) este definit de

$$g_{11} = g_{22} = e^{2\theta}, \quad g_{12} = 0 \tag{1}$$

funcția $\theta(u^1, u^2)$ satisfăcînd ecuația lui Liouville :

$$\nabla^2 \theta = e^{-2\theta}. \tag{2}$$

Suprafața considerată fiind minima, tensorul $g'_{\alpha\beta}$ al celei de-a treia formă pătratică [3] a lui (**M**) (a reprezentării sferice) este inversul lui $g_{\alpha\beta}$.

Tot datorită caracterului minima al suprafeței (**M**) (a cărei curbură Gaussiană este $K = e^{-4\theta}$) aceasta este chiar suprafața mijlocie a congruenței $[C_M]$, semidistanță focală fiind $\rho = e^{-2\theta}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 647–652, BUCUREȘTI, 1965

Notînd cu $\{\ \}'$ simbolurile lui Christoffel corespunzători celei de-a treia formă a lui (**M**), se găseşte

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' = -\frac{\partial\theta}{\partial u^2}, \quad \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' = -\frac{\partial\theta}{\partial u^1}, \tag{3}$$

ceea ce confirmă caracterul Ribaucour al lui $[C_M]$

Fie acum $(\mathbf{M}_\mu)$, $(\mu = 1{,}2)$ cele două pînze focale ale lui $[C_M]$ şi $g_{\mu/\alpha\beta}$ primi tensori fundamentali corespunzători.

Utilizînd formulele generale [3]

$$\begin{aligned}
g_{1/11} &= 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^1} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' \rho\right)^2,\\
g_{1/12} &= -4\rho\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^1} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' \rho\right),\\
g_{1/22} &= 4\rho^2\left(g'_{22} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'^2\right),\\
g_{2/11} &= 4\rho^2\left(g'_{11} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'^2\right),\\
g_{2/12} &= -4\rho\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^2} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' \rho\right),\\
g_{2/22} &= 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^2} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' \rho\right)^2,
\end{aligned} \tag{4}$$

se obţin următoarele valori

$$\begin{aligned}
g_{1/11} &= 4e^{4\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2,\\
g_{1/12} &= 4e^{4\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\frac{\partial\theta}{\partial u^2},\\
g_{1/22} &= 4e^{2\theta} + 4e^{4\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
g_{2/11} &= 4e^{2\theta} + 4e^{4\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2,\\
g_{2/12} &= 4e^{4\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\frac{\partial\theta}{\partial u^2},\\
g_{2/22} &= 4e^{4\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Printr-un calcul simplu, condiţia

$$\frac{g_{1/12}}{\sqrt{g_{1/11}\,g_{1/22}}} = \frac{g_{2/12}}{\sqrt{g_{2/11}\,g_{2/22}}} \tag{7}$$

devine, cu ajutorul formulelor (5) şi (6),

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2.$$

Să considerăm soluţia $\theta = \theta\,(u^1 + u^2)$. (Este uşor de văzut că soluţia $\theta = \theta\,(u^1 - u^2)$ duce la acelaşi rezultat.)

Cum tensorul fundamental secund $b_{\alpha\beta}$ al lui (**M**) poate fi definit cu actuala parametrizare prin [3]

$$b_{11} = -1, \quad b_{22} = 1, \quad b_{12} = 0$$

$\alpha^1 = u^1 + u^2$ și $\alpha^2 = u^1 - u^2$ sînt tocmai parametrii liniilor asimptotice.

Acestea formează și ele, după cum se știe, în cazul unei suprafețe minima, un sistem izoterm. Prima formă a lui (**M**) exprimată în coordonate asimptotice, devine, așadar, în cazul considerat:

$$(8) \qquad ds^2 = \frac{e^{\theta(\alpha^1)}}{2} [(d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2].$$

Din (8) deducem în virtutea unei teoreme cunoscute [3] asupra liniilor parametrice ortogonale, că liniile $\alpha^2 = \text{const.}$ sînt *geodezice*. Rezultă de aici și din faptul că sînt asimptotice [3] că suprafața (**M**) care satisface condiția (7) este *elicoidul drept* (elicoidul de arie minima).

Se știe că în acest caz [4] suprafețele ($\mathbf{M}_\mu$) *sînt și ele elicoidale, și de același pas și axă ca* (**M**)[1].

Observăm că suprafața generatoare ($\mathbf{M}_0$) a congruenței [C_M] care este definită de formulele

$$\frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial u^1} = -c \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial u^2} = c \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1}$$

(c fiind o constantă neesențială se poate lua $c = -1$) este *adjunctă* lui (**M**) și (8) reprezintă elementul liniar al lui ($\mathbf{M}_0$) raportat la *liniile de curbură.*

Verificăm astfel, în virtutea aceleiași proprietăți a geodezicelor la care ne-am referit mai sus, că adjuncta elicoidului drept este catenoidul.

Este important de relevat faptul că acest caracter (ω) al congruenței normalelor la elicoidul *drept se menține și în domeniul imaginar.*

Reamintim că soluția completă a determinării riglatelor de arie minima, se datorește lui Ribaucour, care a arătat că ea comportă pe lîngă elicoidul drept real (definit de Catalan) și o riglată de arie minima imaginară, denumită și *suprafața minima Ribaucour.* Această ultimă suprafață se distinge de conoidul drept real, prin proprietatea de a avea liniile de curbură plane [7].

Pentru a exprima așadar că (**M**) este o asemenea suprafață, este suficient ca planele osculatoare la curbele $u^2 = \text{const.}$ de ex.[2]) să facă un unghi constant cu planele tangente la (**M**) în punctele respective.

---

[1] În cazul elicoidului drept, evoluat este un elicoid generat de o curbă de ordinul patru, avînd un punct dublu la infinit pe axă [4].

[2] Se știe că dacă o suprafață minima posedă un sistem de linii de curbură plane atunci și al doilea sistem este compus din curbe plane.

Dacă $\mathbf{E}_3$ este vectorul unitar al normalei în $\mathbf{M}$ şi $\tau \equiv \{\mathbf{E}_1\, \mathbf{E}_2\, \mathbf{E}_3\}$, triedrul lui Darboux ataşat lui $\mathbf{M}$, formulele lui Bianchi [5] condensate sub formă vectorială şi ţinînd seama că $\theta = \theta\,(u^1 + u^2)$ se scriu

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} = e^{\theta}\, \mathbf{E}_1, &&\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^2} = e^{\theta}\, \mathbf{E}_2,\\
&\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial u^1} = -\, \theta'\, \mathbf{E}_2 - e^{-\theta}\, \mathbf{E}_3, &&\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial u^2} = \theta'\, \mathbf{E}_2,\\
&\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial u^1} = \theta'\, \mathbf{E}_1, &&\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial u^2} = -\, \theta'\, \mathbf{E}_1 + e^{-\theta}\, \mathbf{E}_3,\\
&\frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial u^1} = e^{-\theta}\, \mathbf{E}_1, &&\frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial u^2} = -\, e^{-\theta}\, \mathbf{E}_2 .
\end{aligned}
$$

Acestea fiind, condiţia geometrică impusă mai sus, care se scrie

$$
\frac{\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} \times \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{(\partial u^1)^2}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} \times \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{(\partial u^1)^2}\right|} \,.\, \mathbf{E}_3 = \text{const.}
$$

devine cu ajutorul ecuaţiilor (9)

$$
(10)\qquad \frac{\theta'\, e^{\theta}}{\sqrt{1 + \theta'^2\, e^{2\theta}}} = \text{const.} \quad \left(\theta' = \frac{d\theta}{d\,(u^1 + u^2)}\right).
$$

Dar, pe de altă parte, ţinînd seama de (5) şi (6), se obsevă că scalarul $\dfrac{\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} \times \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{(\partial u^1)^2}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} \times \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{(\partial u^1)^2}\right|} \,.\, \mathbf{E}_3$ este egal cu cosinusul unghiului reţelelor focale ale lui $[C_M]$, adică

$$
\frac{\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} \times \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{(\partial u^1)^2}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} \times \dfrac{\partial^2 \mathbf{M}}{(\partial u^1)^2}\right|} \,.\, \mathbf{E}_3 = \frac{g_{j/12}}{\sqrt{g_{j/11}\, g_{j/22}}}, \quad (j = 1, 2).
$$

Dacă notăm cu ω acest unghi, se deduce în primul rînd din (10)

$$
(11)\qquad \theta'\, e^{\theta} = \pm\ \operatorname{cotg}\, \omega
$$

şi apoi, eliminînd pe ω între (11) şi ecuaţia (2), se obţine

$$
\operatorname{cotg}^2 \omega + \frac{1}{2} = 0.
$$

Aşadar, în cazul suprafeţelor minima Ribaucour, unghiul reţelelor focale ale lui $[C_M]$ care este în mod necesar constant, *este şi imaginar*, ceea ce concordă cu caracterul acestor suprafeţe. Din cele ce precedă rezultă deci că putem da această nouă definiţie suprafeţelor minima Ribaucour. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o suprafaţă minima să fie o suprafaţă minima Ribaucour, este ca congruenţa normalelor corespunzătoare să fie o congruenţă* (ω) *de unghi constant.*

Vom arăta acum că egalitatea unghiurilor focale ale congruenţei $[C_M]$ este echivalentă cu condiţia ca această congruenţă *să fie o congruenţă Goursat.*

Dacă notăm cu $\{\ \}_\mu$ $(\mu = 1,2)$ simbolurile lui Christoffel corespunzătoare suprafeţelor $(\mathbf{M}_\mu)$, deducem din formula generală

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}_\mu}{\partial u^1 \partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}_\mu \frac{\partial \mathbf{M}_\mu}{\partial u^1} + \begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}_\mu \frac{\partial \mathbf{M}_\mu}{\partial u^2}$$

şi din (5) şi (6):

$$(9') \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{M}_1}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\theta + \lg \frac{\partial \theta}{\partial u^1}\right) \frac{\partial \mathbf{M}_\mu}{\partial u^1} + \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial u^2},$$

$$(10') \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{M}_2}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \theta}{\partial u^2} \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\theta + \lg \frac{\partial \theta}{\partial u^2}\right) \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial u^2}.$$

Invarianţa ecuaţiilor (9′) şi (10′) fiind respectiv

$$h_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \frac{\partial \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \lg \dfrac{\partial \theta}{\partial u^1}}{\partial u^1 \partial u^2}, \quad k_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \frac{\partial \theta}{\partial u^2}$$

$$h_2 = \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \frac{\partial \theta}{\partial u^2}, \quad k_2 = \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \frac{\partial \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \lg \dfrac{\partial \theta}{\partial u^2}}{\partial u^1 \partial u^2}$$

condiţia ca congruenţa $[C_M]$ să fie o congruenţă Goursat este

$$\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} \lg \frac{\dfrac{\partial \theta}{\partial u^1}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial u^2}} = 0$$

sau, printr-o schimbare de parametri şi ţinînd seama de (2),

$$\frac{\partial \theta}{\partial u^1} = \frac{\partial \theta}{\partial u^2}.$$

Putem în final enunţa următorul rezultat:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca congruenţa $[C_M]$ *a normalelor la o suprafaţă minima* (**M**) *să prezinte caracterul* (ω) *este ca* $[C_M]$ *să fie o congruenţă Goursat, şi suprafaţa* (**M**) *pentru care această proprietate are loc elicoidul drept, sau suprafaţa lui Ribaucour după cum unghiul* ω *al congruenţei* (ω) *este variabil sau constant.*

Primită la redacţie la 3 ianuarie 1965

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. P. Vincensini, *Sur les réseaux et les congruences* (ω). Colloque de Geom. Diff. Louvin, 1951.
2. P. Vincensini, *Sur quelques types spéciaux de réseaux et de congruences.* Ann. de l'Ecole Normale Sup. **LXII**, fasc. 3 118–185.
3. L. P. Eisenhart, *A treatise on the diff. geometry of curves and surfaces.* New York, 1960.
4. L. Bianchi, *Ricerche sulle superficie a curvatura constante e sulle elicoidi.* Annali Scuola Sup. Piss, Opere **1**, 2 (1879).
5. L. Bianchi, *Sulla teoria delle transformazioni delle superf. d'area minima.* Rend. Acc. Naz. Lincei (5), **8** (1899).
6. E. Kreyszig, *Differential geometry.* Toronto Press, 1959.
7. A. Demoulin, *Sur les surfaces minima réglées.* Acad. Royale de Belgique, **LVIII** (1899.)

ASUPRA UNOR EVALUĂRI ALE FUNCȚIILOR DERIVABILE, CU APLICAȚII LA STUDIUL PROBLEMEI POLILOCALE (I) [1]

DE

OLEG ARAMĂ
(Cluj)

1. În studiul problemei polilocale relative la ecuații diferențiale prezintă interes cunoașterea unor cît mai bune delimitări ale funcțiilor f ($f \in C^{(n)}[a, b]$), care se anulează de un anumit număr dat n ori într-un interval dat $[a, b]$, cu ajutorul maximului derivatei lor de ordinul n pe acel interval. Studiul unor astfel de delimitări se află în strînsă legătură cu studiul restului unor formule de interpolare și de derivare numerică.

Fie $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ n noduri dintr-un interval $[a, b]$, astfel încît $x_1 = a$ și $x_n = b$. Fie f o funcție oarecare din clasa $C^{(n)}[a, b]$ iar $L(x_1, x_2, \ldots, x; f|x)$ polinomul lui Lagrange, care interpolează funcția f pe nodurile considerate. Dacă se consideră nodurile x_i ($i = 1, \ldots, n$) fixate și dacă x reprezintă de asemenea o valoare fixată din intervalul $[a, b]$, atunci oricare ar fi numărul întreg fixat $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, diferența

$$R^{(\nu)}(f; x) = \frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu} f(x) - \frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu} L(x_1, \ldots, x_n; f|x) \tag{1}$$

reprezintă o funcțională liniară, definită pe spațiul $C^{(n)}[a, b]$, și mărginită în raport cu norma

$$\|f\| = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a,b]} |f^{(i)}(x)|. \tag{2}$$

Oricare ar fi valoarea fixată x din intervalul $[a,b]$, funcționala $R^{(\nu)}(f; x)$ se anulează pentru funcțiile $1, x, \ldots, x^{n-1}$, iar pentru funcția x^n ea este diferită de zero pentru orice valoare a lui x, care diferă de rădăcinile ecua-

---

[1] Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 11 — 12 decembrie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 653–678, BUCUREȘTI, 1965

ției $R^{(\nu)}(x^n; x) = 0$. Conform teoriei generale a restului formulelor de aproximare ale analizei, elaborate de acad. T. Popoviciu în lucrarea [8], funcționala (1) va admite o reprezentare de forma

$$R^{(\nu)}(f; x) = \frac{1}{n!}\,[A_\nu f^{(n)}(\xi) - B_\nu f^{(n)}(\eta)], \quad \xi, \eta \in [a, b], \tag{3}$$

unde A_ν și B_ν sînt constante (în raport cu f) nenegative.

Un caz particular important este acela în care unul dintre coeficienții A_ν și B_ν care intervin în (3) este nul. În acest caz, conform terminologiei utilizate în lucrarea [8], se spune că funcționala $R^{(\nu)}(f; x)$ corespunzătoare este de *formă simplă*. În lucrarea [9], T. Popoviciu făcînd un studiu sistematic al restului formulelor de derivare numerică, arată că restul $R^{(\nu)}(f; x)$ din (1) nu este în general de formă simplă pentru orice x din $[a, b]$ decît în cazul particular $\nu = 0$, cînd avem

$$R^{(0)}(f; x) = \frac{1}{n!}\,K(x) f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \tag{4}$$

Aici $K(x)$ reprezintă un coeficient care nu depinde de funcția f, el depinzînd numai de valoarea x și de nodurile $x_1, \ldots, x_n$. Considerînd în formula (4) $f(x) = \pi(x)$, unde $\pi(x)$ reprezintă polinomul normat de gradul n, care se anulează pe nodurile $x_1, \ldots, x_n$, adică

$$\pi(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n),$$

se obține

$$K(x) = R^{(0)}(\pi; x) = \pi(x). \tag{5}$$

Înlocuind în (4), se obține pentru orice $x \in [a, b]$ formula

$$R^{(0)}(f; x) = \frac{1}{n!}\,\pi(x) f^{(n)}(\xi). \tag{6}$$

De aici se obține pentru orice $x \in [a, b]$ delimitarea

$$|R^{(0)}(f; x)| \leqslant \frac{\mu}{n!} \max_{x \in [a, b]} |\pi(x)|, \tag{7}$$

unde s-a notat

$$\mu = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|. \tag{8}$$

Pentru a obține însă o delimitare a restului $R^{(0)}(f; x)$, independentă de poziția nodurilor de interpolare $x_1 \ldots, x_n$ în intervalul $[a, b]$, care de altfel au fost presupuse arbitrare, cu singura condiție ca $x_1 = a$ și $x_n = b$, vom scrie

$$|R^{(0)}(f; x)| \leqslant \frac{\mu}{n!} \max_{\substack{x_2, x_3, \ldots, x_{n-1} \in [a, b] \\ (x_1 = a,\, x_n = b)}} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |\pi(x)| \right\}. \tag{9}$$

Se arată că marginea superioară dublă care figurează în membrul al doilea al inegalității (9) este atinsă pentru cazul cînd $n-1$ din nodurile $x_1, \ldots, x_n$ coincid cu extremitatea a a intervalului $[a, b]$ (sau cu extremitatea b), iar nodul rămas coincide cu extremitatea b (respectiv cu extremitatea a). Vom putea deci scrie inegalitatea

$$(9') \qquad |R^{(0)}(f\,;x)| \leqslant \frac{\mu}{n\,!} \max_{x\in[a,b]} |(x-a)^{n-1}(x-b)|,$$

de unde, în baza unui calcul simplu, se obține următoarea delimitare, dată, sub o formă puțin diferită, de G. A. Bessmertnîh și A. Iu. Levin în lucrarea [3] :

$$(10) \qquad |R^{(0)}(f\,;x)| \leqslant \frac{(n-1)^{n-1}(b-a)^n}{n\,!\;n^n}\cdot \mu, \quad x\in[a, b].$$

Această delimitare este valabilă pentru orice $x\in[a, b]$ și oricare ar fi poziția nodurilor $x_1, \ldots, x_n$ în intervalul $[a, b]$, cu respectarea condiției $x_1 = a$ și $x_n = b$.

În cele de mai sus s-a considerat $\nu = 0$. Dacă însă $\nu \neq 0$, atunci așa cum a arătat T. Popoviciu în lucrarea [9], există valori ale lui x în intervalul $[a, b]$, pentru care restul (1) nu este de formă simplă, adică nu este de forma (4). În acest caz restul (1) admite o reprezentare de forma (3), în care constantele A_ν și B_ν sînt amîndouă diferite de zero (pozitive). Perechea de constante A_ν și B_ν, care poate fi considerată în formula (3), nu este unică. Tot în lucrarea [8] se dau formulele care permit obținerea perechii *minimale* de constante A_ν și B_ν. În cazul de față, aceste formule se scriu

$$(11) \qquad A_\nu(x) = \frac{n}{2}\int_a^b [R^{(\nu)}(\varphi_{n,\lambda}\,;x) + |R^{(\nu)}(\varphi_{n,\lambda}\,;x)|]\,d\lambda,$$

$$B_\nu(x) = A_\nu(x) - R^{(\nu)}(x^n\,;x),$$

unde

$$(12) \qquad \varphi_{n,\lambda}(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\,(x-\lambda+|x-\lambda|)^{n-1}.$$

Pentru a obține în acest caz delimitări ale restului (1), se poate utiliza formula (3). Se obține

$$(13) \qquad |R^{(\nu)}(f\,;x)| \leqslant \frac{1}{n\,!}\,(A_\nu + B_\nu).\ \mu,$$

unde μ are semnificația din (8). Totuși calculul cu precizie al coeficienților A_ν și B_ν este în general dificil pentru valori mari ale lui n și de aceea este util de ținut seamă de următoarea proprietate pusă în evidență de către G. A. Bessmertnîh și A. Iu. Levin în lucrarea [3] :

Cu toate că restul $R^{(\nu)}(f;x)$ $(1 \leqslant \nu \leqslant n-1)$ *din* (1) *nu este în general de formă simplă pe intervalul* $[a, b]$, *el admite totuși următoarea delimitare, care prezintă o mare analogie cu delimitarea* (9) :

$$|R^{(\nu)}(f;x)| \leqslant \frac{\mu}{n!} \cdot \max_{\substack{x_1,\ldots,x_n \in [a,b] \\ (x_1 = a,\, x_n = b)}} \left\{ \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \pi(x) \right| \right\}. \tag{14}$$

Întocmai ca și în cazul $\nu = 0$, se demonstrează în lucrarea citată [3], că marginea superioară dublă care figurează în membrul al doilea al inegalității (14) este atinsă pentru cazul cînd $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = a$, iar $x_n = b$ (și de asemenea pentru cazul cînd $x_1 = a$, iar $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = b$). Se poate deci scrie

$$|R^{(\nu)}(f;x)| \leqslant \frac{\mu}{n!} \cdot \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} [(x-a)^{n-1}(x-b)] \right|. \tag{14'}$$

de unde, în baza unui calcul simplu, se obține formula

$$|R^{(\nu)}(f;x)| \leqslant \frac{k(b-a)^{n-k}}{(n-k)!\,n} \cdot \mu, \quad x \in [a, b]. \tag{15}$$

În lucrarea de față se dau unele extinderi ale formulelor (9) și (14) pentru cazul cînd funcția f se interpolează cu ajutorul soluțiilor unor ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul n. Scopul prezentei cercetări îl constituie în primul rînd aplicațiile pe care le au astfel de formule în studiul unor probleme polilocale relative la ecuații diferențiale. Rezultatele pe care le obținem se bazează pe utilizarea unor formule de medie stabilite de G. Pólya [7] și D. V. Widder [10], referitoare la interpolarea funcțiilor cu ajutorul soluțiilor unor ecuații diferențiale liniare și omogene. Aceste formule au fost aprofundate și generalizate de T. Popoviciu în lucrarea deja citată [8], pentru sisteme interpolatoare liniare oarecare, elaborîndu-se tot o dată o teorie generală a restului formulelor liniare de aproximare ale analizei. Pentru cazul sistemelor interpolatoare neliniare, formulele de medie amintite au fost extinse de E. Moldovan în lucrarea [5].

2. Fie L_n un operator diferențial liniar și omogen, de ordinul $n \geqslant 2$, definit pentru orice funcție $y \in C^{(n)}[a, b]$ și avînd expresia

$$L_n[y] = a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y, \tag{16}$$

unde $a_i(x)$ $(i = 0, \ldots, n)$ reprezintă funcții continue pe intervalul $[a, b]$, iar $a_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Vom mai presupune că acest operator are proprietatea $I_n^*[a, b]$; prin aceasta înțelegem că *oricum s-ar alege din intervalul* $[a, b]$ n *noduri* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ *și oricum s-ar alege* n *numere reale* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *ecuația diferențială* $L_n[y] = 0$ *admite o soluție* $y(x)$ *și una singură pentru alegerea făcută, satisfăcînd condițiile* $y(x_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Fie, în continuare, f o funcție oarecare din clasa $C^{(n)}[a, b]$ și fie $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ un sistem de noduri din intervalul $[a, b]$, astfel încît

$x_1 = a$ şi $x_n = b$. Să notăm cu $H_f(x) = H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ soluţia ecuaţiei omogene $L_n[H_f(x)] = 0$, satisfăcînd condiţiile

$$(17) \qquad H_f(x_i) = f(x_i), \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Să notăm cu $N(x) = N(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ soluţia ecuaţiei neomogene $L_n[N(x)] = 1$, soluţie care satisface condiţiile

$$(18) \qquad N(x_i) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Existenţa şi unicitatea soluţiilor $H_f(x)$ şi $N(x)$ este asigurată de proprietatea I_n^* $[a, b]$ a operatorului L_n.

În lucrarea [7], G. Pólya a demonstrat că, în ipotezele adoptate mai sus, are loc următoarea formulă de medie, care generalizează formula de interpolare a lui Lagrange:

$$(19) \qquad f(x) = H_f(x) + N(x)\, L_n[f(\xi)], \quad \xi \in (a, b).$$

De aici se obţine următoarea delimitare valabilă pentru orice $x \in [a, b]$:

$$(20) \qquad |f(x) - H_f(x) \leqslant N(x)|\, \mu_f,$$

unde

$$(21) \qquad \mu_f = \max_{x \in [a, b]} |L_n[f(x)]|.$$

Pentru a obţine o delimitare independentă de poziţia nodurilor de interpolare $x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(x_1 = a,\ x_n = b)$, vom scrie următoarea inegalitate, care rezultă din (20):

$$(22) \qquad |f(x) - H_f(x)| \leqslant \mu_f . \max_{\substack{x_2, x_3, \ldots, x_{n-1} \in [a, b] \\ (x_1 = a,\ x_n = b)}} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |N(x)| \right\}.$$

În lucrarea [1] am arătat că marginea superioară dublă care figurează în membrul al doilea al inegalităţii (22) este atinsă pentru cazul cînd nodurile de interpolare $x_1, \ldots, x_n$ coincid cu extremităţile intervalului $[a, b]$. Pentru o mai mare claritate, vom utiliza următoarea notaţie:

Fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ $(m \leqslant n)$ noduri *distincte* din intervalul $[a, b]$, avînd respectiv multiplicităţile $p_1, p_2, \ldots, p_m$, astfel încît $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$. Vom nota cu

$$N\left(x; L_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_m \end{matrix}\right)$$

soluţia $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale neomogene $L_n[y] = 1$, soluţie care verifică condiţiile

$$(23) \qquad y(x_i) = y'(x_i) = \ldots = y^{(p_i - 1)}(x_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Considerăm numerele

$$(24)\quad M_p(L_n\,;\,a, b) = \max_{x\in[a,\,b]} \left| N\left(x\,;\,L_n\,;\,\begin{matrix} a,\ b \\ p,\ n-p\end{matrix}\right)\right|, \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$(25)\quad M(L_n\,;\,a, b) = \max_{p=1,2,\ldots,n-1} \{M_p(L_n\,;\,a, b)\}.$$

Cu aceste notații are loc următoarea teoremă, pe care am stabilit-o în lucrarea[1] :

Teorema 1. *În ipoteza că operatorul* L_n *are proprietatea* $I_n^*\,[a, b]$, *are loc următoarea delimitare*

$$(26)\quad \left|N\left(x\,;\,L_n\,;\,\begin{matrix} x_1, \ldots, x_m \\ p_1, \ldots, p_m\end{matrix}\right)\right| \leqslant M(L_n\,;\,a, b), \quad x \in [x_1, x_m],$$

valabilă oricare ar fi sistemul de noduri $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ $(2 \leqslant m \leqslant n)$ din $[a, b]$ *și oricare ar fi sistemul de numere naturale* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *astfel încît* $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$.

Din această teoremă și din inegalitatea (22), rezultă următoarea

Teorema 2. *În ipotezele adoptate mai sus, relativ la operatorul* L_n *și relativ la funcția* f, *are loc următoarea delimitare*

$$(27)\quad |f(x) - H_f(x)| \leqslant \mu_f \cdot M(L_n\,;\,a, b), \quad x \in [a, b],$$

valabilă oricare ar fi nodurile $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ $(x_1 = a,\ x_n = b)$, *care intervin în condițiile* (17).

Observație. Inegalitatea (27) se transformă în egalitate, dacă se consideră $f(x) = N\left(x\,;\,L_n\,;\,\begin{matrix} a,\ b \\ p^*,\ n-p^*\end{matrix}\right)$, unde p^* reprezintă valoarea lui p pentru care se realizează maximul din (25), considerîndu-se ca noduri de interpolare $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p^*} = a$, $x_{p^*+1} = \ldots = x_n = b$, iar pentru x, valoarea care realizează maximul funcției $\left|N\left(x\,;\,L_n\,;\,\begin{matrix} a,\ b \\ p^*,\ n-p^*\end{matrix}\right)\right|$ pe intervalul $[a, b]$. Într-adevăr, în acest caz funcția $H_f(x)$ corespunzătoare va fi nulă în baza proprietății $I_n^*[a, b]$ a operatorului L_n. Rezultă, în definitiv, că relativ la operatorul L_n considerat și relativ la clasa $C^{(n)}[a, b]$, constanta $M(L_n\,;\,a, b)$ reprezintă *cea mai mică* constantă (pozitivă), care verifică inegalitatea (27), oricare ar fi $f \in C^{(n)}[a, b]$ și oricare ar fi poziția nodurilor $x_2, \ldots, x_{n-1}$ în intervalul $[a, b]$ $(x_1 = a,\ x_n = b)$.

Exemplu. Dacă $L_n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$, atunci $N\left(x\,;\,\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,;\,\begin{matrix} a,\ b \\ p,\ n-p\end{matrix}\right) \dfrac{1}{n!}(x-a)^p \times$ $\times (x-b)^{n-p}$ și un calcul simplu ne dă

$$(28)\quad M_p\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,;\,a, b\right) = \frac{1}{n!}\,\frac{p^p\,(n-p)^{n-p}}{n^n}\,(b-a)^n,$$

$$(29)\quad M\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,;\,a, b\right) = \max_{p=1,\ldots,n-1}\left\{M_p\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,;\,a, b\right)\right\} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!\,n^n}\,(b-a)^n.$$

Înlocuind în formula (27), se regăsește inegalitatea (10).

3. Presupunem că operatorul L_n din (16) admite o descompunere de forma

$$L_n[y] = B_\tau A_\sigma[y] = B_\tau\{A_\sigma[y]\}, \quad x \in [a, b], \tag{30}$$

unde A_σ și B_τ reprezintă operatori diferențiali liniari și omogeni de ordinele σ, respectiv $\tau(\sigma + \tau = n)$:

$$A_\sigma[y] = a_{\sigma,0}(x)\,y^{(\sigma)} + a_{\sigma,1}(x)\,y^{(\sigma-1)} + \ldots + a_{\sigma,\sigma}(x)\,y$$

$$B_\tau[Y] = b_{\tau,0}(x)\,Y^{(\tau)} + b_{\tau,1}(x)\,Y^{(\tau-1)} + \ldots + b_{\tau,\tau}(x)\,Y.$$

Presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiții

1°. Coeficienții operatorului B_τ sînt continui pe $[a, b]$ și $b_{\tau,0}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$.

2°. Coeficienții operatorului A_σ sînt funcții din clasa $C^{(\tau)}[a, b]$, iar $a_{\sigma,0}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$.

3°. Operatorii A_σ și B_τ au respectiv proprietățile $I_\sigma^*[a, b]$ și $I_\tau^*[a, b]$.

Se arată (a se consulta de exemplu lucrarea [2]) că în aceste ipoteze operatorul-produs $L_n = B_\tau A_\sigma$ are proprietatea $I_{\sigma+\tau}^*[a, b]$, adică proprietatea $I_n^*[a, b]$.

Cu aceste precizări, fie f o funcție din clasa $C^{(n)}[a, b]$ și fie $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ un sistem de noduri astfel încît $x_1 = a$, $x_n = b$. Vom nota ca și în paragraful precedent cu $H_f(x) = H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ soluția ecuației diferențiale omogene $L_n[H_f(x)] = 0$, care verifică condițiile (17) și cu $N(x) = N(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ soluția ecuației diferențiale neomogene $L_n[N(x)] = 1$, soluție care verifică condițiile (18). Considerăm diferența

$$\begin{aligned} \delta(x) &= A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)] = \\ &= A_\sigma[f(x) - H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]. \end{aligned} \tag{31}$$

În paragraful următor (§4), vom stabili o delimitare pentru $\delta(x)$, analogă cu delimitarea (14) obținută pentru restul $R^{(\nu)}(f; x)$ din (1). În acest scop ne vom folosi de următoarea teoremă, a cărei demonstrație am dat-o în lucrarea [1]:

TEOREMA 3. *În ipoteza că operatorul* L_n *admite o descompunere de forma* (30), *în care operatorii* A_σ *și* B_τ *au proprietățile* 1° — 3°, *iar* $\tau \geqslant 2$, *fie* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ *un sistem de noduri, astfel încît* $x_1 = a$ *și* $x_n = b$ *și fie* $N(x) = N(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ *soluția ecuației diferențiale neomogene* $L_n[N(x)] = 1$, *soluție care verifică condițiile* (18). *Să notăm cu* $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi$ *rădăcinile din* $[a, b]$ *ale funcției* $A_\sigma[N(x)]$. (Se arată ușor că în ipotezele adoptate referitor la operatorii diferențiali A_σ și B_τ, funcția $A_\sigma[N(x)]$ se anulează în $[a, b]$ de τ ori și nu mai mult). *Atunci au loc delimitările*:

α) *Pentru* $x \in [a, \xi_1]$,

$$|A_\sigma[N(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant |A_\sigma[N(x; L_n; a, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n-1})]|.$$

β) *Pentru* $x \in [\xi_\tau, b]$,

$$|A_\sigma[N(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant |A_\sigma[N(x; L_n; | a, \underbrace{a, \ldots, a}_{n-1}. b)]$$

γ) *Pentru* $x \in (\xi_1, \xi_\tau)$,

$$|A_\sigma[N(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| < \max_{p=1, \ldots, \tau-1} |N(x; B_\tau; \underbrace{a, a, \ldots, a}_{p}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{\tau-p})|.$$

În cazul cînd $\tau = 1$, *intervalul* (ξ_1, ξ_τ) *se reduce la un singur punct* ξ_1, *care reprezintă unica rădăcină din* $[a, b]$ *a funcției* $A_\sigma [N (x)]$. *În acest caz, în enunțul teoremei 3, propoziția* γ) *se suprimă.*

În enunțul acestei teoreme s-a notat prin

$$N(x; B_\tau; \underbrace{a, a, \ldots, a}_{p}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{\tau-p})$$

soluția $z(x)$ a ecuației diferențiale $B_\tau [z(x)] = 1$, soluție care se anulează pentru $x = a$ și $x = b$ cu ordinele de multiplicitate p, respectiv $\tau - p$.

În cele ce urmează, vom presupune că în afară de condițiile 1°—3°, mai este îndeplinită și următoarea :

4°. Ecuația $B_\tau [y] = 0$ admite ca soluții funcțiile constante pe $[a, b]$, ceea ce înseamnă că $a_{\tau,\tau}(x) \equiv 0$.

Această condiție nu constituie o restricție esențială, întrucît dacă operatorul L_n are proprietatea $I_n^* [a, b]$, atunci în baza unui rezultat stabilit de G. G. Pólya [7] și G. Mammana [4], operatorul L_n va admite o descompunere de forma

$$(32) \qquad L_n[y] = p_n(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_{n-1}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdots p_2(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_0(x) y,$$

unde $p_i(x)$ $(i = 0, \ldots, n)$ sînt funcții continue, care nu se anulează în nici un punct din intervalul $[a, b]$. În aceste condiții, fiind date : numerele naturale σ și τ, astfel încît $\sigma + \tau = n$, vom putea considera ca operatori A_σ și B_τ următorii operatori :

$$A_\sigma(y) = p_\sigma(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_{\sigma-1}(x) \cdots p_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_0(x) y$$

$$B_\tau [Y] = p_n(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_{n-1}(x) \cdots p_{\sigma+1}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Y,$$

care satisfac condițiile 1°—4°.

4. Vom nota respectiv cu $C_{(+)}^{(n)} [a, b]$, $\mathrm{C}_{(+)}^{(n)} [a, b]$, $C_{(-)}^{(n)} [a, b]$, $\mathrm{C}_{(-)}^{(n)} [a, b]$ subclasele formate din toate funcțiile $f \in C^{(n)} [a, b]$, care verifică pe intervalul $[a, b]$ respectiv inegalitățile $L_n [f(x)] > 0$, $L_n [f(x)] \geqslant 0$, $L_n [f(x)] < 0$, $L_n[f(x)] \leqslant 0$. În acest paragraf ne vom ocupa cu delimitarea diferenței $\delta(x)$ din (31), în cazurile particulare cînd funcția f aparține uneia din clasele definite mai sus.

Cazul 1: $f \in C^{(n)}_{(+)}[a, b]$ şi $\sigma \leqslant n-2$ (adică $\tau \geqslant 2$). În acest caz va avea deci loc inegalitatea

$$(33) \qquad L_n[f(x)] > 0, \quad x \in [a, b].$$

Întrucît operatorii A_σ şi B_τ au proprietăţile $I^*_\sigma[a, b]$, respectiv $I^*_\tau[a, b]$, rezultă în baza unor rezultate a lui G. Pólya [7] şi G. Mammana [4], că aceşti operatori admit descompuneri de forma

$$(34) \qquad A_\sigma[y(x)] = \alpha_\sigma(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha_{\sigma-1}(x)\ldots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha_0(x)\,y(x),$$

$$(35) \qquad B_\tau[Y(x)] = \beta_\tau(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\beta_{\tau-1}(x)\ldots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\beta_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\beta_0(x)\,Y(x),$$

unde coeficienţii $\alpha_i(x)$ şi $\beta_j(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, \sigma;\ j = 0, 1, \ldots, \tau)$ sînt continui pe $[a, b]$ şi nu se anulează în nici un punct din acest interval. Din (17) rezultă însă că funcţia $f(x) - H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ se anulează de n ori în intervalul $[a, b]$. De aici, ţinînd seamă de expresia (34) a operatorului A_σ, se deduce prin aplicarea de σ ori a teoremei lui Rolle, că funcţia $\delta(x)$ din (31) are în intervalul $[a, b]$ cel puţin $n - \sigma$ rădăcini (considerate împreună cu ordinele lor de multiplicitate). Pe de altă parte, numărul acestor rădăcini nu poate fi mai mare ca $n - \sigma$, căci în caz afirmativ, înlocuind în (35) pe $Y(x)$ cu $\delta(x)$, s-ar obţine prin aplicarea de mai multe ori succesiv a teoremei lui Rolle, că funcţia $B_\tau A_\sigma[\delta(x)] \equiv \equiv L_n[f(x)]$ ar avea în intervalul $[a, b]$ cel puţin o rădăcină, ceea ce ar contrazice ipoteza (33). Rezultă deci că numărul rădăcinilor (considerate cu ordinele lor de multiplicitate) ale funcţiei $\delta(x)$ este egal cu $n - \sigma$. Vom nota aceste rădăcini cu $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_\tau$. Evident că $a \leqslant r_1$ şi $r_\tau \leqslant b$. De asemenea se constată că întrucît, prin ipoteză, cel puţin două din rădăcinile funcţiei $f - H_f$ din intervalul $[a, b]$ sînt distincte, şi întrucît, tot prin ipoteză, ordinul σ al operatorului A_σ satisface inegalitatea $\sigma \leqslant n - 2$, rezultă că printre rădăcinile $r_1, \ldots, r_\tau$ ale funcţiei $A_\sigma[f(x) - H_f(x)]$ sînt cel puţin distincte. Astfel, va avea loc inegalitatea strictă $r_1 < r_\tau$.

Fie acum x o valoare oarecare din $[a, b]$. Distingem următoarele 3 subcazuri, după cum $x \in [r_1, r_\tau]$, $x > r_\tau$, sau $x < r_1$.

Subcazul 1.1: $x \in [r_1, r_\tau]$.

Operatorul B_τ avînd prin ipoteză proprietatea $I^*_\tau[a, b]$, în baza formulei de medie (19) vom putea scrie pentru orice funcţie $\varphi \in \in C^{(\tau)}[a, b]$ şi pentru orice sistem de noduri $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_\tau$, din $[a, b]$, următoarea egalitate

$$\varphi(x) = H_\varphi(x; B_\tau; \xi_1, \ldots, \xi_\tau) + N(x; B_\tau; \xi_1, \ldots, \xi_\tau)\cdot B_\tau[\varphi(\xi)],$$

$$(36) \qquad x \in [a, b], \quad \xi \in (a, b),$$

unde prin $H_\varphi(x; B_\tau; \xi_1, \ldots, \xi_\tau)$ am notat soluţia $y(x)$ a ecuaţiei omogene $B_\tau[y] = 0$, soluţie care verifică condiţiile

$$(37) \qquad y(\xi_i) = \varphi(\xi_i) \qquad (i = 1, \ldots, \tau),$$

iar prin $N(x; B_\tau; \xi_1, \ldots, \xi_\tau)$ am notat soluţia $z(x)$ a ecuaţiei diferenţiale neomogene $B_\tau[z] = 1$, verificînd condiţiile

$$z(\xi_i) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, \tau). \tag{38}$$

Să considerăm în (36) $\varphi(x) = \delta(x)$, unde $\delta(x)$ este funcţia definită în (31) şi de asemenea să considerăm $\xi_i = r_i$ $(i = 1, \ldots, \tau)$. Prin definiţie, funcţia $H_\delta(x; B_\tau; r_1, \ldots, r_\tau)$ corespunzătoare, constituie o soluţie (în raport cu variabila x) a ecuaţiei diferenţiale $B_\tau[y] = 0$, soluţie care verifică condiţiile polilocale $y(r_i) = \delta(r_i)$ $(i = 1, \ldots, \tau)$. Întrucît numerele r_i reprezintă rădăcinile funcţiei $\delta(x)$, aceste condiţii polilocale devin condiţii de anulare pentru $y(x)$: $y(r_i) = 0$ $(i = 1, \ldots \tau)$. De aici rezultă că funcţia $H_\delta(x; B_\tau; r_1, \ldots, r_\tau)$ este identic nulă în raport cu variabila x în intervalul $[a, b]$, întrucît în baza proprietăţii $I_\tau^*[a, b]$, orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale $B_\tau[y] = 0$, care se anulează de τ ori în intervalul $[a, b]$, este identic nulă. Totodată se observă că $B_\tau[\delta(x)] \equiv \equiv L_n[f(x)]$, întrucît $L_n[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)] \equiv 0$. Cu aceste observaţii, înlocuind în formula (36) pe $\varphi(x)$ cu $\delta(x)$, obţinem egalitatea

$$\delta(x) = N(x; B_\tau; r_1, \ldots, r_\tau) \cdot L_n[f(\xi)]. \tag{39}$$

Pentru a delimita expresia care figurează în membrul al doilea al egalităţii (39), ne putem folosi de teorema 1, în baza căreia are loc inegalitatea

$$|N(x; B_\tau; r_1, \ldots, r_\tau)| \leqslant M(B_\tau; a, b), \quad x \in [r_1, r_\tau]. \tag{39'}$$

Aici, numărul $M(B_\tau; a, b)$ se defineşte cu ajutorul relaţiilor (24) şi (25), considerînd în locul operatorului L_n, operatorul B_τ. Din (39) şi (39′), ţinînd totodată seama de expresia (31) a funcţiei δ, obţinem delimitarea

$$|A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant \mu_f \cdot M(B_\tau; a, b), \quad x \in [r_1, r_\tau] \tag{40}$$

unde μ_f este dat de (21).

Subcazul 1.2 : $r_\tau < b$ şi $x > r_\tau$.

Ţinînd seamă de formulele (30) şi (35) se obţine, pentru orice funcţie $\psi \in C^{(n)}[a, b]$, identitatea

$$L_n[\psi(x)] \equiv \beta_\tau(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \beta_{\tau-1}(x) \ldots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \beta_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \beta_0(x) \cdot A_\sigma[\psi(x)].$$

Considerînd în această identitate $\psi(x) = f(x) - H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ şi ţinînd seamă de faptul că pentru această alegere a lui ψ avem $L_n[\psi(x)] \equiv \equiv L_n[f(x)]$, obţinem formula

$$L_n[f(x)] \equiv \beta_\tau(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \beta_{\tau-1}(x) \ldots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \beta_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \beta_0(x)\, \delta(x), \quad x \in [a, b], \tag{41}$$

unde funcţia $\delta(x)$ este dată în (31). După cum s-a văzut anterior, în ipoteza că $f \in C^{(n)}_{(+)}[a, b]$, numărul rădăcinilor (considerate cu ordinele lor de multiplicitate) ale funcției δ este egal cu τ. Atunci, conform teoremei lui Rolle, funcția $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\beta_0(x)\,\delta(x)]$ va avea în intervalul $[r_1, r_\tau]$ cel puțin $\tau - 1$ rădăcini. Această funcție nu se poate anula în intervalul $(r_\tau, b]$, întrucît în caz afirmativ, ea ar avea în intervalul $[a, b]$ cel puțin τ rădăcini și din (41), prin aplicarea de $\tau - 1$ ori succesiv a teoremei lui Rolle, s-ar obține că funcția $L_n[f(x)]$, se anulează în cel puțin un punct din $[a, b]$. Aceasta ar contrazice însă ipoteza adoptată (33). Rezultă deci că funcția $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\beta_0(x)\,\delta(x)]$ păstrează un semn constant (diferit de zero) pe intervalul $(r_\tau, b]$. Dar, în virtutea ipotezei 4° de la § 3, operatorul B_τ este astfel încît ecuația $B_\tau[y] = 0$ admite ca soluții, funcțiile constante pe intervalul $[a, b]$. De aici rezultă că $\beta_0(x)$ este o constantă diferită de zero. Cu această observație, ținînd seamă de cele stabilite anterior, se ajunge la concluzia că funcția $\delta(x)$ este monotonă (în sens strict) pe intervalul $[r_\tau, b]$ și întrucît $\delta(r_\tau) = 0$, va avea loc inegalitatea strictă

$$|\delta(x)| < |\delta(b)|, \quad x \in [r_\tau, b]. \tag{42}$$

În cele ce urmează, vom da o delimitare a numărului $|\delta(b)|$. În acest scop, considerăm funcția auxiliară

$$\Phi_\lambda(x) = f(x) - H_f(x;\, L_n;\, x_1, \ldots, x_n) - \lambda N(x;\, L_n;\, x_1, \ldots, x_n), \tag{43}$$

unde λ este o constantă, pe care o vom determina astfel încît $A_\sigma[\Phi_\lambda(b)] = 0$. Vom arăta întîi că această determinare este posibilă.

Pentru o mai mare claritate a expunerii, vom nota cu $t_1, \ldots, t_m (t_1 \leqslant \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m)$ nodurile distincte dintre nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și vom nota cu $p_1, p_2, \ldots, p_m$, ordinele de multiplicitate cu care intervin aceste noduri în relațiile (17) și (18). Evident că $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$. Întrucît prin ipoteză $x_1 = a$, iar $x_n = b$, rezultă că $t_1 = a$, iar $t_m = b$.

De asemenea, pentru motive de claritate, vom utiliza notațiile

$$H_f(x) = H_f(x;\, L_n;\, x_1, \ldots, x_n) = H_f\left(x;\, L_n;\, \begin{matrix} t_1, t_2, \ldots, t_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_m \end{matrix}\right),$$

$$N(x) = N(x;\, L_n;\, x_1, \ldots, x_n) = N\left(x;\, L_n;\, \begin{matrix} t_1, t_2, \ldots, t_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_m \end{matrix}\right).$$

Vom arăta în cele ce urmează că $A_\sigma[N(b)] \neq 0$. Într-adevăr, în subcazul considerat, după cum rezultă din (42), avem $\delta(b) \neq 0$. De aici rezultă că ordinul p_m cu care figurează nodul $t_m = b$ în relațiile (17), trebuie să verifice inegalitatea

$$p_m \leqslant \sigma. \tag{44}$$

Apoi, conform egalităţilor (18), ţinînd seamă că $b = t_m$, vom avea

$$N(b) = N'(b) = \ldots = N^{(p_m - 1)}(b) = 0. \tag{45}$$

În mod necesar, trebuie să aibă loc relaţia

$$N^{(p_m)}(b) \neq 0, \tag{46}$$

întrucît, în caz contrar, ar rezulta în baza egalităţilor (18) că funcţia N se anulează de $n + 1$ ori în intervalul $[a, b]$ şi de aici, în baza formulelor (30), (34), (35), s-ar deduce că funcţia $L_n[N(x)]$ se anulează cel puţin într-un punct ξ din $[a, b]$. Acest rezultat ar contrazice faptul că : $N(x)$ reprezintă o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $L_n[y] = 1$. Pe de altă parte, în baza aceloraşi egalităţi (18) şi (34), se deduce prin aplicarea de σ ori succesiv a teoremei lui Rolle că funcţia $A_\sigma[N(x)]$ are în intervalul $[a,b]$ cel puţin $n - \sigma = \tau$ rădăcini. Numărul rădăcinilor din $[a, b]$ ale funcţiei $A_\sigma[N(x)]$ nu poate fi mai mare decît $n - \sigma$, întrucît în caz contrar, ţinînd seamă de (30) şi (35), s-ar deduce că funcţia $L_n[N(x)]$ se anulează cel puţin pentru o valoare $\xi \in [a, b]$, ceea ce ar contrazice identitatea $L_n[N(x)] \equiv 1$, valabilă pentru orice x din $[a, b]$. Aceste rădăcini se vor afla în subintervalul (închis), avînd ca extremităţi rădăcinile extreme din $[a, b]$ ale funcţiei

$$\eta_k(x) = \alpha_k(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \alpha_{k-1}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ldots \alpha_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \alpha_0(x) \cdot N(x),$$

unde k este un număr natural oarecare, dat, satisfăcînd inegalitatea $k \leqslant \sigma$. Ţinînd seamă de (44), vom putea să considerăm numărul k astfel încît $k = p_m$ şi atunci în baza afirmaţiei de mai sus, va rezulta că rădăcinile din intervalul $[a, b]$ ale funcţiei $A_\sigma[N(x)]$ vor fi situate între rădăcinile extreme din acelaşi interval $[a, b]$ ale funcţiei

$$\eta_{p_m}(x) = \alpha_{p_m}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \alpha_{p_m - 1}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ldots \alpha_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \alpha_0(x) \cdot N(x).$$

Însă în baza relaţiilor (45), se obţine că

$$\eta_{p_m}(b) = \alpha_{p_m}(b) \cdot \alpha_{p_m - 1}(b) \ldots \alpha_1(b) \cdot \alpha_0(b) \cdot N^{p_m}(b)$$

şi întrucît funcţiile $\alpha_i(x)$ $(i = 0, \ldots, \sigma)$ nu se anulează pentru nici o valoare din $[a, b]$, va rezulta în baza relaţiei (46) că $\eta_{p_m}(b) \neq 0$.

De aici, în baza unei afirmaţii de mai sus, rezultă că $A_\sigma[N(b)] \neq 0$, ceea ce era de demonstrat.

În continuare, să observăm că întrucît $A_\sigma[N(b)] \neq 0$, vom putea să determinăm parametrul λ astfel încît funcţia $L_\sigma[\Phi_\lambda(x)]$, obţinută din (43), să se anuleze pentru $x = b$. Vom obţine pentru λ valoarea

$$\lambda_0 = \frac{A_\sigma[f(b) - H_f(b)]}{A_\sigma[N(b)]}. \tag{47}$$

Pe de altă parte, se observă că oricare ar fi valoarea reală pe care o ia parametrul λ, funcția Φ_λ din (43) se anulează în intervalul $[a, b]$ pentru valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sau mai precis spus, pentru valorile $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ($t_m = b$), respectiv cu ordinele de multiplicitate $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ($p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$). În particular, pentru valoarea $t_m = b$, funcția Φ_{λ_0} va îndeplini condițiile

$$\Phi_{\lambda_0}(b) = \Phi'_{\lambda_0}(b) = \ldots = \Phi_{\lambda_0}^{(pm-1)}(b) = 0.$$

Distingem următoarele două subcazuri, după cum $\Phi_{\lambda_0}^{(pm)}(b) = 0$, sau $\Phi_{\lambda_0}^{(pm)}(b) \neq 0$.

Dacă $\Phi_{\lambda_0}^{(pm)}(b) = 0$, atunci, după cum rezultă din egalitățile scrise mai sus, valoarea $t_m = b$ constituie pentru funcția Φ_{λ_0} o rădăcină multiplă de ordin mai mare sau cel puțin egal cu $p_m + 1$. De aici, ținînd seamă de faptul că $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$, rezultă că funcția Φ_{λ_0} se anulează în $[a, b]$ de cel puțin $n + 1$ ori, și ținînd seamă de formulele (30), (34) și (35), se ajunge la concluzia că funcția $L_n[\Phi_{\lambda_0}(x)]$ se anulează pentru cel puțin o valoare $\xi \in (a, b)$. Scriind aceasta și observînd pe de o parte că $L_n[H_f(x)] \equiv 0$, iar pe de altă parte că $L_n\,[N(x)] \equiv 1$, se obține egalitatea $L_n[f(\xi)] - \lambda_0 = 0$, de unde, ținînd seamă de (47), se obține formula de medie

$$A_\sigma[f(b) - H_f(b)] = A_\sigma[N(b)] \cdot L_n[f(\xi)], \quad \xi \in [a, b]. \tag{48}$$

Dacă însă $\Phi_{\lambda_0}^{(pm)}(b) \neq 0$, atunci ținînd seamă de faptul că funcția Φ_{λ_0} se anulează pentru valorile $t_1, t_2, \ldots, t_m$ din $[a, b]$, respectiv cu ordinele de multiplicitate mai mari sau cel puțin egale respectiv cu p_1, $p_2, \ldots, p_m$ ($p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$), rezultă, în baza teoremei lui Rolle, că funcția

$$\zeta_{p_m}(x) = \alpha_{p_m}(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\alpha_{p_m-1}(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\ldots\,\alpha_1(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\alpha_0(x).\ \Phi_{\lambda_0}(x)$$

se anulează în intervalul *semideschis* $[a, b)$, cel puțin de $n - p_m$ ori, iar $\varphi_{p_m}(b) \neq 0$; întrucît

$$\zeta_{p_m}(b) = \alpha_{p_m}(b).\ \alpha_{p_m-1}(b) \ldots \alpha_1(b).\ \alpha_0(b).\ \Phi_{\lambda_0}^{(pm)}(b) \neq 0.$$

De aici, ținînd seamă de inegalitatea (44) și de expresia (34) a operatorului A_σ, se constată tot în baza teoremei lui Rolle că funcția $A_\sigma[\Phi_{\lambda_0}(x)]$ se anulează în intervalul *semideschis* $[a, b)$ de $n - \sigma = \tau$ ori cel puțin. Dar prin modul cum a fost ales numărul λ_0, această funcție se anulează și pentru valoarea $x = b$. Rezultă, în definitiv, că funcția $A_\sigma[\Phi_{\lambda_0}(x)]$ se anulează în $[a, b]$ de cel puțin $\tau + 1$ ori. Ținînd seamă de expresia (35) a operatorului B_τ, rezultă de aici prin aplicarea de τ ori succesiv a teoremei lui Rolle că funcția $B_\tau\{A_\sigma[\Phi_{\lambda_0}(x)]\} = L_n[\Phi_{\lambda_0}(x)]$ se anulează pentru cel puțin o valoare ξ din $[a, b]$. De aici, procedînd întocmai ca și în cazul tratat anterior, se obține formula (48).

Revenind la inegalitatea (42) şi ţinînd seamă de formula (31), care defineşte funcţia $\delta(x)$, se obţine din (42) şi (48) delimitarea

$$(49)\quad A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| < \mu_f |A_\sigma[N(b; L_n; x_1, \ldots, x_n)]|,$$

valabilă pentru $x > r_\tau$. De aici se obţine a fortiori

$$(50)\quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| < \\ < \mu_f \cdot \max_{\substack{x_2, x_3, \ldots, x_{n-1} \in [a,b] \\ (x_1 = a,\ x_n = b)}} |A_\sigma[N(b; L_n; x_1, \ldots, x_n)]|, \ (x > r_\tau).$$

În baza teoremei 3, marginea superioară care figurează în membrul al doilea al inegalităţii (50) este atinsă pentru cazul cînd $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = a$ şi $x_n = b$. Cu notaţiile utilizate anterior, inegalitatea (50) se transcrie

$$(51)\quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| < \mu_f \left| A_\sigma\left[N\left(b; L_n; \begin{matrix} a, & b \\ n-1, & 1 \end{matrix}\right)\right]\right| (x > r_\tau).$$

În sfîrşit, avem de considerat

Subcazul 1.3 : $x < r_1$ (evident, numai dacă $a < r_1$).

Procedînd în acest subcaz întocmai ca în subcazul 1.2, se ajunge la inegalitatea

$$(52)\quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| < \mu_f \left| A_\sigma\left[N\left(a; L_n; \begin{matrix} a, & b \\ 1, & n-1 \end{matrix}\right)\right]\right|, (x < r_1).$$

Pentru a sintetiza rezultatele obţinute cu ocazia studierii celor trei subcazuri, definim numărul $M(L_n; A_\sigma; a, b)$ precum urmează :

$$(53)\quad M(L_n, A_\sigma; a, b) = \max\left\{\left| A_\sigma\left[N\left(b; L_n; \begin{matrix} a, & b \\ n-1, & 1 \end{matrix}\right)\right]\right|, \left| A_\sigma\left[N\left(a; L_n; \begin{matrix} a, & b \\ 1, & n-1 \end{matrix}\right)\right]\right|, \right. \\ \left. M(B_\tau; a, b)\right\} \ (\sigma \leqslant n-2).$$

Are loc deci următoarea lemă :

LEMA 1. *În ipoteza că operatorul L_n admite o descompunere de forma* (30), *în care operatorii A_σ şi B_τ* ($\tau \geqslant 2$) *verifică condiţiile* 1° — 4° *din* § 3, *are loc pentru orice funcţie $f \in C_{(+)}^{(n)}$* $[a, b]$ *delimitarea*

$$(54)\quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant \mu_f M(L_n, A_\sigma; a, b), \ x \in [a, b],$$

unde μ_f este dat în (21), *iar constanta $M(L_n, A_\sigma; a, b)$ este dată în* (53).

Vom considera în continuare

Cazul 2 : $f \in C_{(+)}^{(n)}$ $[a, b]$ şi $\sigma \leqslant n-2$ (adică $\tau \geqslant 2$).

În acest caz va avea loc, prin ipoteză, inegalitatea

$$(55)\quad L_n[f(x)] \geqslant 0, \ x \in [a, b].$$

Fie ε un număr pozitiv oarecare. Vom nota cu $f_\varepsilon(x)$ soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale

$$L_n[y] = L_n[f(x)] + \varepsilon, \tag{56}$$

soluție care verifică condițiile

$$y(x_i) = f(x_i), \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{57}$$

Întrucît funcția $f_\varepsilon(x)$ satisface condițiile lemei 1, vom putea scrie pentru această funcție inegalitatea (54). Vom obține :

$$|A_\sigma[f_\varepsilon(x) - A_\sigma[H_{f_\varepsilon}(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant \mu_{f_\varepsilon} M(L_n, A_\sigma; a, b), x \in [a, b], \tag{58}$$

unde am notat prin $H_{f_\varepsilon}(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ soluția $z(x)$ a ecuației diferențiale $L_n[Z] = 0$, soluție care verifică condițiile

$$z(x_i] = f_\varepsilon(x_i), \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag*{59)}$$

iar

$$\mu_{f_\varepsilon} = \max_{x \in [a,b]} \left| L_n\left[f_\varepsilon(x)\right] \right| = \max_{x \in [a,b]} \left| L_n\left[f(x)\right] + \varepsilon \right|. \tag{60}$$

Ținînd seamă de faptul că ecuația (56) depinde în mod continuu de parametrul ε, precum și de faptul că condițiile (57) pe care le verifică funcția $f_\varepsilon(x)$ nu depind de ε, rezultă egalitatea

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon^{(i)}(x) = f^{(i)}(x), \ (i = 0, 1, \ldots, n), \ x \in [a, b]. \tag{61}$$

Apoi, ținînd seamă din nou de condițiile (57), vom putea să transcriem egalitățile (59) care intervin în definiția funcției $H_{f_\varepsilon}(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ astfel :

$$z(x_i) = f(x_i), \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{59'}$$

De aici rezultă identitatea

$$H_{f_\varepsilon}(x; L_n; x_1, \ldots, x_n) \equiv H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n), \ x \in [a, b], \tag{62}$$

unde prin $H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)$ s-a notat, ca și anterior, soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $L_n[y] = 0$, soluție care verifică condițiile (57). În sfîrșit, din (60) rezultă

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{f_\varepsilon} = \mu_f. \tag{63}$$

Cu aceste observații, făcînd în (58) ca $\varepsilon \to 0^+$ și ținînd seamă de (61) — (63), obținem delimitarea (54), ceea ce demonstrează valabilitatea lemei 1 și în cazul 2. În sfîrșit, mai rămîne de considerat

Cazul 3: $f \in C^{(n)}_{(-)}[a, b]$ și $\sigma \leqslant n - 2$ (adică $\tau \geqslant 2$).

În acest caz se consideră, în locul funcției f, funcția $f_1 = -f$, reducîndu-se astfel studiul acestui caz la studiul cazului anterior.

★

În cele anterioare, am considerat $\sigma \leqslant n - 2$, adică $\tau \geqslant 2$. Dacă $\sigma = n - 1$, adică $\tau = 1$, atunci procedînd analog ca pentru $\sigma \leqslant n-2$, vom distinge de asemenea 3 cazuri după cum f aparține uneia din clasele $C^{(n)}_{(+)}[a, b]$, $C^{(n)}_{(+)}[a, b]$, sau $C^{(n)}_{(-)}[a, b]$. În cazul 1, adică în cazul cînd $f \in C^{(n)}_{(+)}[a, b]$, se constată că funcția $\delta(x)$ din (31) va avea în $[a, b]$ o rădăcină și numai una singură r_1. Astfel, în vederea delimitării funcției $\delta(x)$ din (39), vom avea de considerat doar două subcazuri, după cum $x > r_1$, sau $x < r_1$. (Pentru $x = r_1$ avem $\delta(r_1) = 0$). Vom ajunge astfel la o afirmație analoagă cu aceea a lemei 1, cu deosebirea că în cazul $\sigma = n-1$, numărul $M(L_n, A_\sigma; a, b)$ trebuie definit astfel:

$$M(L_n, A_\sigma; a, b) = \max\left\{\left|A_\sigma\left[N\left(b; L_n; \begin{matrix} a, & b \\ n-1, & 1\end{matrix}\right)\right]\right|,\right.$$

$$\left.\left|A_\sigma\left[N\left(a; L_n; \begin{matrix} a, & b \\ 1, & n-1\end{matrix}\right)\right]\right|\right\} \quad (\sigma = n - 1). \tag{64}$$

Cazul $f \in C^{(n)}_{(+)}[a, b]$ și cazul $f \in C^{(n)}_{(-)}[a, b]$ se studiază la fel ca și pentru $\sigma \leqslant n - 2$. Ajungem în definitiv la următoarea teoremă:

TEOREMA 4. *Dacă operatorul* L_n *admite o descompunere de forma* (30) *în care* A_σ *și* B_τ *verifică condițiile* 1° — 4° *de la* § 3, *și dacă* f *este o funcție oarecare din* $C^{(n)}[a, b]$, *astfel încît* $L_n[f(x)]$ *nu schimbă de semn în* $[a, b]$, *atunci oricare ar fi sistemul de noduri* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, *astfel încît* $x_1 = a$ *și* $x_n = b$, *are loc delimitarea* (54), *în care numărul* $M(L_n, A_\sigma; a, b)$ *se definește conform formulelor* (53) *sau* (64), *după cum* $\sigma \leqslant n - 2$, *sau* $\sigma = n - 1$.

5. Pentru a exemplifica cele expuse în §§ 3 și 4, să considerăm

$$L_n = \frac{d^n}{dx^n}, A_\sigma = \frac{d^\sigma}{dx^\sigma}, B_\tau = \frac{d^\tau}{dx^\tau}, \quad (\sigma + \tau = n).$$

Atunci

$$N\left(x\,;L_n\,;\begin{matrix} a, & b\\ n-1, & 1\end{matrix}\right)=\frac{1}{n\,!}(x-a)^{n-1}\,(x-b)\,;\ N\left(x\,;L_n\,;\begin{matrix} a, & b\\ 1, & n-1\end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{n\,!}(x-a)\,(x-b)^{n-1},$$

$$A_\sigma\left[N\left(x\,;L_n\,;\begin{matrix} a, & b\\ n-1, & 1\end{matrix}\right)\right]=\frac{1}{(n-\sigma)\,!\,n}(x-a)^{n-\sigma-1}\,[n\,(x-b)+\sigma(b-a)],$$

$$A_\sigma\left[N\left(x\,;L_n\,;\begin{matrix} a, & b\\ 1, & n-1\end{matrix}\right)\right]=\frac{1}{(n-\sigma)\,!n}(x-b)^{n-\sigma-1}\,[n\,(x-a)+\sigma\,(a-b)].$$

Dacă $\tau\geqslant 2$, atunci

$$N\left(x\,;\,B_\tau\,;\begin{matrix} a, & b\\ p, & \tau-p\end{matrix}\right)=\frac{1}{\tau\,!}(x-a)^p\,(x-b)^{\tau-p},\ (p=1,\ldots,\tau-1).$$

De aici, obţinem îndată

$$\left|A_\sigma\left[N\left(b\,;\,L_n\,;\begin{matrix} a, & b\\ n-1, & 1\end{matrix}\right)\right]\right|=\left|A_\sigma\left[N\left(a\,;L_n\,;\begin{matrix} a, & b\\ 1, & n-1\end{matrix}\right)\right]\right|=$$

$$=\frac{\sigma}{(n-\sigma)\,!\,n}\,h^{n-\sigma}\ (h=b-a).$$

Utilizînd egalitatea (29) în care înlocuim pe n cu τ, obţinem

$$M\,(B_\tau\,;a,b)=\max_{p=1,2,\ldots,\tau-1}\left\{\max_{x\in[a,b]}\left|N\left(x\,;B_\tau\,;\begin{matrix} a, & b\\ p, & \tau-p\end{matrix}\right)\right|\right\}=\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau\,!\,\tau^\tau}\,h^\tau.$$

Se observă însă că în cazul acestui exemplu are loc pentru $\tau\geqslant 2$ inegalitatea

$$M\,(B_\tau\,;\,a,b)<\left|A_\sigma\left[N\left(b\,;\,L_n\,;\begin{matrix} a, & b\\ n-1, & 1\end{matrix}\right)\right]\right|\cdot$$

În conformitate cu formula (53), vom avea deci

$$M\,(L_n,A_\sigma\,;\,a,b)=\frac{\sigma}{(n-\sigma)\,!\,n}\,h^{n-\sigma},\ (\sigma=1,\ldots,n-1).$$

Teorema 4 revine în acest caz la următoarea afirmaţie:

Dacă f este o funcţie oarecare din clasa $C^{(n)}\,[a,b]$, astfel încît $f^{(n)}\,(x)\geqslant 0$ pentru orice $x\in[a,b]$, sau $f^{(n)}\,(x)\leqslant 0$ pentru orice $x\in[a,b]$, atunci oricare ar fi nodurile $x_1\leqslant\ldots\leqslant x_n$ din $[a,b]$, astfel încît $x_1=a$, iar $x_n=b$, şi oricare ar fi $\sigma=1,\ldots,n-1$, are loc delimitarea

$$f^{(\sigma)}\,(x)-\frac{\mathrm{d}^\sigma}{\mathrm{d}x^\sigma}L\,[x_1,\ldots,x_n\,;f\,|\,x]\leqslant\frac{\sigma}{(n-\sigma)\,!\,n}\,h^{n-\sigma}\mu_f,$$

valabilă pentru orice $x\in[a,b]$.

Aici s-a notat, ca de obicei, cu $L\ [x_1,\ldots,x_n;\ f \mid x]$ polinomul de interpolare al lui Lagrange, de gradul $n-1$, care coincide cu f pe nodurile $x_i\ (i=1,\ldots,n)$. Astfel, se regăseşte (în cazul particular cînd $f^n\ (x)$ nu schimbă de semn în $[a, b]$) inegalitatea (15), dată (sub o formă puţin diferită) de G. A. Bessmertnîh şi A. Iu. Levin în lucrarea citată anterior [3].

6. În acest paragraf vom studia cazul mai general cînd $f \in C^{(n)}\ [a, b]$. Fie dată funcţia $f\ (f \in C^{(n)}\ [a, b])$ şi n noduri $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ astfel încît $x_1=a$, iar $x_n = b$. Considerăm funcţiile φ şi ψ definite precum urmează :

$$\varphi\ (x) = \begin{cases} L_n\ [f(x)]\ , & \text{dacă } L_n\ [f\ (x)] > 0, \\ 0\ , & \text{dacă } L_n[f\ (x)] \leqslant 0, \end{cases} \tag{65}$$

$$\psi\ (x) = \begin{cases} 0\ , & \text{dacă } L_n\ [f\ (x)] \geqslant 0, \\ L_n\ [f\ (x)]\ , & \text{dacă } L_n[f\ (x)] < 0, \end{cases} \tag{66}$$

Fie $f_{(+)}\ (x)$ soluţia $y\ (x)$ a ecuaţiei diferenţiale $L_n\ [y] = \varphi\ (x)$, soluţie care satisface condiţiile

$$y\ (x_i) = f\ (x_i), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{67}$$

şi fie $f_{(-)}\ (x)$ soluţia $z\ (x)$ a ecuaţiei diferenţiale $L_n\ [z] = \psi\ (x)$, soluţie care verifică condiţiile

$$z\ (x_i) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{68}$$

Întrucît, prin definiţie, funcţiile f şi $f_{(+)} + f_{(-)}$ verifică o aceeaşi ecuaţie diferenţială $L_n\ [Y] = L_n\ [f\ (x)]$ şi întrucît aceste funcţii coincid pentru valorile $x_1, \ldots, x_n$ ale variabilei independente, va rezulta în baza proprietăţii $I_n^*\ [a, b]$ a operatorului L_n, următoarea identitate

$$f\ (x) \equiv f_{(+)}\ (x) + f_{(-)}\ (x), \qquad x \in [a, b]. \tag{69}$$

Evident că au loc de asemenea inegalităţile

$$L_n\ [f_{(+)}\ (x)] \geqslant 0, \quad L_n\ [f_{(-)}\ (x)] \leqslant 0, \quad x \in [a, b].$$

Atunci, în baza teoremei 4, vom putea să scriem pentru fiecare din funcţiile $f_{(+)}$ şi $f_{(-)}$ inegalităţile (54). Vom obţine :

$$\begin{aligned} &|A_\sigma\ [f_{(+)}\ (x) - H_{f_{(+)}}(x;\ L_n;\ x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant \mu_{f_{(+)}} M\ (L_n, A_\sigma;\ a, b), \\ &|A_\sigma\ [f_{(-)}\ (x) - H_{f_{(-)}}(x;\ L_n;\ x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant \mu_{f_{(-)}} M\ (L_n, A_\sigma;\ a, b). \end{aligned} \tag{70}$$

Pe de altă parte, ţinînd seamă de condiţiile (67), respectiv (68), pe care le verifică $f_{(+)}$, respectiv $f_{(-)}$, se constată că pentru $x \in [a, b]$ au loc identităţile

$$H_{f_{(+)}}(x;\ L_n;\ x_1, \ldots, x_n) \equiv H_f\ (x;\ L_n;\ x_1, \ldots, x_n)$$
$$H_{f_{(-)}}(x;\ L_n;\ x_1, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

astfel că vom putea scrie :

$$A_\sigma [f(x) - H_f(x)] \equiv A_\sigma [f_{(+)}(x) + f_{(-)}(x)] - A_\sigma [H_{f_{(+)}}(x) + H_{f_{(-)}}(x)] \equiv$$

$$\equiv A_\sigma [f_{(+)}(x) - H_{f(+)}(x)] + A_\sigma [f_{(-)}(x) - H_{f(-)}(x)].$$

De aici, ținînd seamă de (70), obținem delimitarea

$$(71)\quad |A_\sigma [f(x)] - A_\sigma [H_f(x)]| \leqslant (\mu f_{(+)} + \mu f_{(-)}).\ M(L_n, A_\sigma; a, b),\ x \in [a, b].$$

Dar

$$0 \leqslant \mu_{f_{(+)}} \leqslant \mu_f;\quad 0 \leqslant \mu_{f_{(+)}} \leqslant \mu_f,$$

de unde rezultă $\mu_{f_{(+)}} + \mu_{f(-)} \leqslant 2\mu_f$, și înlocuind în (71), obținem delimitarea

$$(72)\quad |A_\sigma [f(x)] - A_\sigma [H_f(x)]| \leqslant 2\mu_f M(L_n, A_\sigma; a, b), x \in [a, b].$$

Putem astfel enunța următoarea teoremă :

TEOREMA 5. *Dacă operatorul* L_n *admite o descompunere de forma* (30) *în care operatorii* A_σ *și* B_τ *verifică condițiile* 1°—4° (de la § 3), *și dacă* $f \in C^{(n)}[a, b]$, *atunci oricare ar fi nodurile* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, *astfel încît* $x_1 = a$ *și* $x_n = b$, *va avea loc pentru orice* $x \in [a, b]$ *delimitarea* (72).

7. În cele anterioare am presupus că nodurile $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ sînt astfel încît $x_1 = a$ și $x_n = b$. Vom considera în acest paragraf cazul mai general cînd $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant b$. De asemenea vom presupune că operatorul L_n admite o descompunere de forma (30), în care A_σ și B_τ verifică condițiile 1°—3° (de la § 3), fără ca să fie îndeplinită neapărat și condiția 4°. Se constată întocmai ca și în studiul cazului 1 de la § 4, că dacă funcția $f \in C^{(n)}[a, b]$, atunci funcția $\delta(x)$ din (31) are în intervalul $[a, b]$ cel puțin $n - \sigma = \tau$ rădăcini (considerate împreună cu ordinele lor de multiplicitate). Să considerăm τ dintre aceste rădăcini și să le notăm cu $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_\tau$. Evident că $a \leqslant r_1$ și $r_\tau \leqslant b$. Întocmai ca în studiul subcazului 1.1 de la § 4, se stabilește formula de medie (39), din care se obține delimitarea

$$(73)\quad |\delta(x)| \leqslant \mu_f \max_{r_1, r_2, \ldots, r_\tau \in [a, b]} \left\{ \max_{x \in [a,b]} |N(x; B_\tau; r_1, \ldots, r_\tau)| \right\},$$

valabilă pentru orice $x \in [a, b]$. Aici, spre deosebire de subcazul 1.1 studiat la § 4, valoarea x care intervine în expresia $N(x; B_\tau; r_1, \ldots, r_\tau)$ poate fi și exterioară intervalului $[r_1, r_\tau]$, și pentru astfel de valori, inegalitatea (39′) nu este în general verificată. Pentru a obține totuși o delimitare a expresiei care figurează în membrul al doilea al inegalității (73), vom utiliza următoarea teoremă, analoagă teoremei 1, a cărei demonstrație este dată în lucrarea [1] :

TEOREMA 1*. *În ipotezele teoremei* 1 (de la § 2), *oricare ar fi nodurile* $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n$ și $a \leqslant x_1, x_n \leqslant b)$, *avînd respectiv ordi-*

nele de multiplicitate $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *astfel încît* $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$, *are loc pentru orice* $x \in [a, b]$ *inegalitatea*

$$\left|N\left(x; L_n; \begin{matrix} x_1, \ldots, x_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{matrix}\right)\right| \leqslant M^*(L_n; a, b), \quad x \in [a, b], \tag{74}$$

unde

$$M^*(L_n; a, b) = \max_{p=0,1,\ldots,n} \left\{ M_p(L_n; a, b) \right\}, \tag{75}$$

numerele $M_p(L_n; a, b)$ *fiind definite întocmai ca în* (24). (Spre deosebire de formula (25) care definește numărul $M(L_n; a, b)$, în formula (75) maximumul care figurează în membrul al doilea al acestei formule se consideră atît relativ la valorile $p = 1, \ldots, n-1$, cît și relativ la valorile $p = 0$ și $p = n$).

În baza teoremei 1*, se obține din (73) următoarea teoremă :

TEOREMA 6. *Dacă operatorul* L_n *admite o descompunere de forma* (30), *în care* A_σ *și* B_τ *verifică condițiile* 1° — 3° (de la § 3) *și dacă* $f \in C^{(n)}[a, b]$, *atunci oricare ar fi sistemul de noduri* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ *astfel încît* $a \leqslant x_1$ *și* $x_n \leqslant b$, *va avea loc delimitarea*

$$|A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant \mu_f M^*(B_\tau; a, b), x \in [a, b]. \tag{76}$$

Din compararea inegalităților (72) și (76), se obține în definitiv următoarea teoremă :

TEOREMA 7. *În ipoteza că operatorul* L_n *admite o descompunere de forma* (30), *în care* A_σ *și* B_τ *verifică condițiile* 1°—4° (de la § 3), *atunci oricare ar fi funcția* $f \in C^{(n)}[a, b]$ *și oricare ar fi nodurile* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, *astfel încît* $x_1 = a$ *și* $x_n = b$, *are loc pentru orice* $x \in [a, b]$ *inegalitatea*

$$\begin{aligned} &|A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant \\ &\leqslant \mu_f \min\{M^*(B_\tau; a, b), 2M(L_n, A_\sigma; a, b)\} \end{aligned} \tag{77}$$

În cazul exemplului considerat la § 5, vom avea :

$$M^*(B_\tau; a, b) = \frac{1}{\tau!} h^\tau \ (h = b - a); \ M(L_n, A_\sigma; a, b) = \frac{\sigma}{\tau! n} h^\tau,$$

$$\min\{M^*(B_\tau; a, b), 2M(L_n, A_\sigma; a, b)\} = \frac{h^\tau}{\tau!} \cdot \min\left\{1, \frac{2\sigma}{n}\right\}.$$

Observații. 1. Bănuim că în delimitarea (72), prezența în membrul al doilea a factorului 2 nu este necesară, acest factor provenind din metoda de demonstrație utilizată. În paragraful următor vom arăta justețea acestei afirmații, pentru cazul particular $n = 2$.

2. În ipoteza că operatorul L_n admite o descompunere de forma (30), în care operatorii (dați) A_σ și B_τ verifică condițiile 1°—3° (de la § 3), atunci

marginea inferioară γ_0 a constantelor γ pentru care este verificată inegalitatea (analogă inegalității (77))

$$(77') \qquad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \ldots, x_n)]| \leqslant \gamma \cdot \mu_f ,$$

oricare ar fi $f \in C^{(n)}[a, b]$, oricare ar fi nodurile $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ satisfăcînd condiția $x_1 = a$ și $x_n = b$ și oricare ar fi $x \in [a, b]$, este dată de formula

$$\gamma_0 = \sup_{f \in C_0^{(n)}[a,b]} \left\{ \left(\max_{x \in [a,b]} |A_\sigma[f(x)]| \right) \left(\max_{x \in [a,b]} |L_n[f(x)]| \right)^{-1} \right\}$$

unde $C_0^{(n)}[a, b]$ reprezintă subclasa funcțiilor neidentic nule, f, din $C^{(n)}[a, b]$, care se anulează de cel puțin n ori în $[a, b]$, astfel încît $f(a) = f(b) = 0$.

Demonstrația acestei afirmații este imediată. După cum rezultă din (76) va avea loc întotdeauna inegalitatea $\gamma_0 \leqslant M^*(B_\tau; a, b)$.

8. Să considerăm cazul particular cînd $n = 2$ și să presupunem că operatorul diferențial L_2 admite o descompunere de forma

$$L_2[y] = B_1 A_1[y] = B_1\{A_1[y]\}, \qquad y \in C^{(2)}[a, b],$$

unde

$$A_1[y(x)] = a_0(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_1(x)\, y; \; B_1[Y(x)] = b_0(x)\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} + b_1(x)\, Y,$$

coeficienții $b_0(x)$ și $b_1(x)$ fiind continui în $[a, b]$, iar $a_0(x)$ și $a_1(x)$ aparținînd clasei $C^{(1)}[a, b]$. Mai presupunem că $a_0(x) \neq 0$ și $b_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. În aceste ipoteze, operatorul L_2 va admite proprietatea $I_2^{\cdot}[a,b]$. Fie $K_0^{(2)}[a, b]$ clasa funcțiilor f care se anulează simultan pentru valorile $x = a$ și $x = b$, și care admit o derivată de ordinul 1, continuă pe $[a, b]$, precum și o derivată de ordinul al doilea, continuă în orice punct din $[a, b]$, cu excepția eventual a cel mult 3 puncte (depinzînd de f), în care derivata respectivă prezintă salturi. Pentru funcțiile din clasa $K_0^{(2)}[a, b]$, care nu se anulează identic pe intervalul $[a, b]$, definim următoarea funcțională

$$\mathfrak{F}[f] = \left(\max_{x \in [a,b]} |A_1[f(x)]| \right) \cdot \left(\sup_{x \in [a,b]} |L_2[f(x)]| \right)^{-1} . \qquad (78)$$

Dacă f aparține clasei $K_0^{(2)}[a, b]$ și dacă f nu este identic nulă pe $[a, b]$, atunci funcția $L_2[f(x)]$ nu poate fi identic nulă, întrucît, în caz contrar, f ar constitui o soluție a ecuației $L_2[y] = 0$, verificînd condițiile $y(a) = y(b) = 0$ și în baza proprietății $I_2^{\cdot}[a, b]$ a operatorului L_2, ar rezulta că $f(x) \equiv 0$ pe $[a,b]$, ceea ce contrazice ipoteza adoptată conform căreia $f(x) \not\equiv 0$ pe $[a, b]$. Rezultă deci că pentru o astfel de funcție f, numitorul care figurează în (78) nu se anulează.

În cele ce urmează, ne propunem să determinăm numărul

$$\gamma(a, b) = \sup_{\substack{f \in K_0^{(2)}[a, b] \\ (f \not\equiv 0)}} \mathcal{F}[f]. \tag{79}$$

Vom arăta întîi că această margine superioară este atinsă în clasa $K_0^{(2)}[a, b]$ pentru cel puțin o funcție. În acest scop, considerăm funcția lui Green $G(x, s)$, corespunzătoare operatorului L_2 și condițiilor bilocale $y(a) = y(b) = 0$. Atunci, oricare ar fi $f \in K_0^{(2)}[a, b]$, vom avea

$$f(x) \equiv \int_a^b G(x, s)\, L_2[f(s)]\, ds, \quad x \in [a, b],$$

$$A_1[f(x)] \equiv \int_a^b A_1[G(x, s)]\, L_2[f(s)]\, ds, \quad x \in [a, b]. \tag{80}$$

De aici rezultă următoarea delimitare, valabilă pentru orice $x \in [a, b]$:

$$|A_1[f(x)]| \leqslant \left(\max_{x \in [a, b]} \int_a^b |A_1[G(x, s)]|\, ds \right) \left(\sup_{x \in [a, b]} |L_2[f(x)]| \right). \tag{81}$$

Deoarece funcția f este arbitrară în $K_0^{(2)}[a, b]$, rezultă din (81)

$$\gamma(a, b) \leqslant \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |A_1[G(x, s)]|\, ds. \tag{82}$$

Pe de altă parte, din modul în care se construiește funcția lui Green (a se consulta în această direcție de exemplu lucrarea [6]), se constată cu ușurință că funcția $\int_a^b |A_1[G(x, s)]|\, ds$ este continuă în raport cu variabila x pe intervalul $[a, b]$. Fie x_0 o valoare din $[a, b]$ a variabilei x, pentru care este atins maximumul acestei funcții cînd x variază în $[a, b]$:

$$\max_{x \in [a, b]} \int_a^b |A_1[G(x, s)]|\, ds = \int_a^b |A_1[G(x_0; s)]|\, ds. \tag{83}$$

Fie în continuare funcția $\varphi_0(x)$ definită precum urmează:

$$\varphi_0(s) = \operatorname{sgn} A_1[G(x_0; s)], \quad s \in [a, b]. \tag{84}$$

Tot din construcția funcției $G(x, s)$, se constată că $\varphi_0(x)$ nu poate avea pe intervalul $[a, b]$ mai mult de 3 puncte de discontinuitate (de speța 1 —a), întrucît, în cazul de față, oricare ar fi x fixat din $[a, b]$, funcția de variabilă s, $A_1[G(x, s)]$, nu poate schimba semnul mai mult de 3 ori, cînd s variază în intervalul $[a, b]$.

Fie $f_0(x)$ soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $L_2[y] = \varphi_0(x)$, soluție care verifică condițiile $y(a) = y(b)$. Existența și unicitatea unei astfel de soluții sînt asigurate de proprietatea $I_2^*[a, b]$ a operatorului L_2. Dintr-o observație anterioară rezultă că $f_0 \in K_0^{(2)}[a, b]$. Înlocuind în (80) pe f

cu f_0 și ținînd seamă de faptul că $L_2[f_0(x)] \equiv \varphi_0(x)$, unde φ_0 este definită conform formulei (84), obținem identitatea :

$$A_1[f_0(x)] = \int_a^b A_1[G(x, s)] L_2[f_0(s)] \mathrm{d}s = \int_a^b A_1[G(x, s)]. \ \operatorname{sgn} \ A_1[G(x_0, s)] \mathrm{d}s$$

Înlocuind aici pe x cu x_0, obținem

$$A_1[f_0(x_0)] = \int_a^b |A_1[G(x_0, s)]| \mathrm{d}s \tag{85}$$

și întrucît $\sup\limits_{x \in [a, b]} L_2[f_0(x)] = 1$, vom obține din (85) și (78) egalitatea

$$\mathfrak{F}[f_0] = \int_a^b |A_1[G(x_0, s)]| \mathrm{d}s. \tag{86}$$

Dar întrucît $f_0 \in K_0^{(2)}[a, b]$, ținînd seamă de definiția (79) a numărului $\gamma(a, b)$, rezultă că

$$\mathfrak{F}[f_0] \leqslant \gamma(a, b). \tag{87}$$

Din compararea relațiilor (82), (83), (86) și (87) rezultă că

$$\gamma(a, b) = \mathfrak{F}[f_0] = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |A_1[G(x, s)]| \mathrm{d}s, \tag{88}$$

ceea ce era de demonstrat.

Să considerăm în continuare funcția f_0 definită anterior, funcție pentru care este atinsă marginea superioară (79). Din (85), (88) și (83) rezultă egalitatea

$$\gamma(a, b) = A_1[f_0(x_0)]. \tag{89}$$

Vom da în cele ce urmează o delimitare a numărului $A_1[f_0(x_0)]$. Vom distinge două cazuri.

Cazul 1: $x_0 = a$, sau $x_0 = b$.

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $x_0 = b$. Fie t_1, t_2, t_3 eventualele puncte de discontinuitate din $[a, b]$ ale funcției $\varphi_0 = L_2[f_0]$ definită în (84). Vom izola aceste puncte cu ajutorul unor intervale suficient de mici, de lungime ε și vom modifica în aceste intervale funcția $\varphi_0(x)$, astfel încît noua funcție $\varphi(x, \varepsilon)$ să fie continuă pe întreg intervalul $[a, b]$ și astfel încît $\max\limits_{x \in [a, b]} |\varphi_0(x, \varepsilon)| \leqslant 1$. Să notăm cu $f_0(x, \varepsilon)$ soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $L_2[y] = \varphi_0(x, \varepsilon)$, soluție care verifică condițiile $y(a) = y(b) = 0$. Utilizînd un raționament întrucîtva analog cu acela folosit la stabilirea formulei (48) (de la § 4), se obține următoarea formulă de medie

$$A_1[f_0(b, \varepsilon)] = A_1[N(b)] \cdot L_2[f_0(\xi, \varepsilon)] \quad \xi \in [a, b],$$

unde $N(x)$ reprezintă soluţia ecuaţiei $L_2[y] = 1$, soluţie care verifică condiţiile $y(a) = y(b) = 0$. De aici, ţinînd seamă de faptul că $\max\limits_{x \in [a, b]} |L_2[f(x, \varepsilon)]| \leqslant 1$, se obţine delimitarea $|A_1[f_0(b, \varepsilon)]| \leqslant |A_1[N(b)]|$, valabilă pentru orice ε suficient de mic. Făcînd pe ε să tindă către zero, obţinem la limită $|A_1[f_0(b)]| \leqslant |A_1[N(b)]|$ şi ţinînd seamă de faptul că $x_0 = b$, obţinem

$$|A_1[f_0(x_0)]| \leqslant |A_1[N(b)]|. \tag{90}$$

Dacă $x_0 = a$, s-ar fi obţinut în mod analog inegalitatea

$$|A_1[f_0(x_0)]| \leqslant |A_1[N(a)]|. \tag{91}$$

Cazul 2: $a < x_0 < b$.

Vom distinge două subcazuri, după cum $f_0(x_0) = 0$, sau $f_0(x_0) = 0$.

Subcazul 1 : $f_0(x_0) = 0$. În acest subcaz, notînd cu $a_1 = a$ şi $b_1 = x_0$ şi procedînd ca şi în cazul 1 studiat anterior, vom obţine următoarea delimitare, analogă cu (90) :

$$|A_1[f_0(b_1)]| \leqslant |A_1[N(b_1; a_1, b_1)]|. \tag{92}$$

Dar în baza unei teoreme analoge teoremei 3 de la § 3, vom avea în cazul de faţă

$$|A_1[N(b_1; a_1, b_1)]| \leqslant |A_1[N(b_1; a, b)]| \leqslant \max_{x \in [a, b]} A_1[N(x; a, b)].$$

Astfel, ţinînd seamă de faptul că $b_1 = x_0$, din (92) se obţine a fortiori

$$|A_1[f_0(x_0)]| \leqslant \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|. \tag{93}$$

Subcazul 2 : $f_0(x_0) \neq 0$. Pentru fixarea ideilor vom presupune că $f_0(x_0) > 0$. Atunci fie $y(x)$ o soluţie pozitivă pe intervalul $[a, b]$ a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întîi $A_1[y] = 0$. Considerăm funcţia $g(x, \lambda) = f_0(x) - \lambda y(x)$ şi determinăm parametrul λ astfel încît $g(x_0, \lambda) = 0$. Obţinem $\lambda_0 \dfrac{f_0(x_0)}{y(x_0)}$. Dar $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x, \lambda_0)$ nu se poate anula pentru $x = x_0$, întrucît, în caz contrar, ţinînd seamă şi de faptul că $g(x_0, \lambda_0) = 0$, ar rezulta că $A_1[g(x_0, \lambda_0)] = 0$. Dar, întrucît $A_1[y(x)] \equiv 0$, am obţine de aici că $A_1[f_0(x_0)] = 0$ şi ţinînd seamă de (89), ar rezulta că $\gamma(a, b) = 0$. De aici şi din (88) ar rezulta că $A_1[G(x, s)] \equiv 0$, ceea ce împreună cu (80) ne conduce la contradicţie. Rezultă în definitiv că funcţia $g'_x(x, \lambda_0)$ nu se anulează pentru $x = x_0$. Să presupunem de exemplu că $g'_x(x_0, \lambda_0) > 0$, adică că funcţia $g(x, \lambda_0)$ este crescătoare în punctul $x = x_0$. Atunci, întrucît $g(x_0, \lambda_0) = 0$, ar rezulta existenţa unui număr $\varepsilon > 0$ suficient de mic, astfel încît

$$g(x_0 - \varepsilon, \lambda_0) < 0, \qquad g(x_0 + \varepsilon, \lambda_0) > 0. \tag{94}$$

Întrucît însă $f_0(a) = f_0(b) = 0$, vom avea

$$g(a, \lambda_0) = -\lambda_0 \, y(a), \qquad g(b, \lambda_0) = -\lambda_0 \, y(b). \tag{95}$$

Să presupunem de exemplu că $\lambda_0 > 0$. Atunci, întrucît $y(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, vom obține din (94) și (95) relațiile :

$$\begin{gathered} g(a, \lambda_0) < 0, \quad g(x_0 - \varepsilon, \lambda_0) < 0, \quad g(x_0, \lambda_0) = 0, \quad g(x_0 + \varepsilon, \lambda_0) > 0, \\ g(b, \lambda_0) < 0. \end{gathered} \tag{96}$$

Deoarece funcția $g(x, \lambda_0)$ este continuă în $[a, b]$, va rezulta din (96) că ea se anulează, în afară de valoarea $x = x_0$, și pentru o valoare x_1 cuprinsă în intervalul $(x_0 + \varepsilon, b)$. Dacă s-ar fi presupus că $\lambda_0 < 0$, atunci în mod analog s-ar putea arăta existența unei rădăcini x_1 în intervalul $(a, x_0 - \varepsilon)$. Notînd $x_0 = a_1$, $x_1 = b_1$ și procedînd ca și în subcazul 1, obținem următoarea delimitare, analogă cu (93) :

$$|A_1[g(x_0, \lambda_0)]| \leqslant \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|.$$

Întrucît însă $A_1[y(x)] \equiv 0$, vom avea $A_1[g(x, \lambda_0)] \equiv A_1[f_0(x)]$, astfel că inegalitatea precedentă se va transcrie

$$|A_1[f_0(x_0)]| \leqslant \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|. \tag{97}$$

În concluzie, ținînd seamă de (90), (91), (93), (97), precum și de egalitatea (89), obținem

$$\gamma(a, b) \leqslant \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|. \tag{98}$$

Pe de altă parte, ținînd seamă de faptul că funcția $N(x) = N(x; a, b)$ aparține clasei $K_0^{(2)}[a, b]$ și ținînd seamă de definiția (78) a funcționalei $\mathfrak{F}$, precum și de definiția (79) a numărului $\gamma(a,b)$, vom avea :

$$\mathfrak{F}[N(x; a, b)] = \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]| \leqslant \gamma(a, b). \tag{99}$$

Comparînd (98) cu (99), obținem egalitatea

$$\gamma(a, b) = \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|. \tag{100}$$

În sfîrșit, din compararea relațiilor (78), (79) și (100), rezultă următoarea teoremă

TEOREMA 8. *În ipotezele adoptate* (la începutul § 8) *relativ la operatorul* L_2, *dacă* f *este o funcție oarecare din clasa* $C^{(2)}[a, b]$, *astfel încît* $f(a) = f(b) = 0$ (mai general, dacă $f \in K_0^{(2)}[a, b]$), *atunci are loc delimitarea*

$$|A_1[f(x)]| \leqslant \mu_f \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; L_2; a, b)]|, \tag{101}$$

unde $\mu_f = \sup\limits_{x \in [a, b]} |L_2[f(x)]|$.

Această teoremă constituie o completare și în același timp o precizare a enunțului teoremei 7, în cazul particular cînd $n = 2$. Este de relevat faptul că în enunțul teoremei 8 nu s-a presupus îndeplinirea condiției 4° de la § 3.

Primită la redacție la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul al Academiei R.P.R.,
Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă O., *Contribuții la studiul problemei polilocale relative la ecuații diferențiale*. Teză Cluj, 1965.
2. — *Sur un theoreme de W. A. Markov*. Mathematica (Cluj), 3 (26), 197–216 (1961). Idem în limba română în revista St. cerc. mat. (Cluj), **XIII**, 7–25 (1962).
3. БЕССМЕРТНЫХ Г. А. и ЛЕВИН А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной*. Доклады Акад. наук СССР, 144, № 3, 471—474 (1962).
4. Mammana G., *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*. Math. Zeitschr., **33**, 186–231 (1931).
5. Moldovan E., *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime de funcții interpolatoare*. St. cerc. mat. (Cluj,) **IX**, 161–224 (1958). Idem în limba franceză în revista Mathematica (Cluj,), **1 (24)**, 49–80, 281–286 (1959).
6. НАЙМАРК М. А., *Линейные дифференциальные операторы*. Гос. изд. технико-теоретической лит., Москва, 1954.
7. Pólya G., *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation*. Amer. Math. S. Bull., **24**, 312–324 (1922).
8. Popoviciu T., *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei*. St. cerc. mat. (Cluj), **X**, 337–389 (1959). Idem în limba franceză în revista Mathematica (Cluj), **1 (24)**, 95–142 (1959).
9. — *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. St. cerc. mat. **III**, 53–122 (1952).
10. Widder D. V., *A general mean-value theorem*. Amer. Math. S. Trans., **26**, 385–394 (1924).

NESIMULTANEITĂȚI ÎN FUNCȚIONAREA ÎN MAI MULȚI TIMPI A SCHEMELOR FĂRĂ CONTACTE

DE

MARIANA COROI-NEDELCU

Se studiază schemele fără contacte în cazul fenomenului de ,,hazard'' printr-o metodă algebrică.

Pentru analiză se scriu ecuațiile caracteristice ale tuturor elementelor schemei, introducînd întîrzieri arbitrare pentru fiecare element, apoi se urmărește programul de funcționare pe ecuațiile caracteristice. Se stabilește corectitudinea sau incorectitudinea schemei față de programul cerut. În ultimul caz se indică corectarea schemei prin introducerea de întîrzieri suplimentare la anumite ramuri, iar dacă acest lucru nu este posibil, modificarea schemei. Metoda dată poate fi programată la o mașină digitală.

Pentru sinteză se realizează schema după metodele cunoscute la schemele cu contacte și relee, determinîndu-se numărul de elemente intermediare necesare. Relațiile de tipul $x_{N+1} = \xi_N$ se interpretează ca întîrzieri între ξ și x. După desenarea schemei cu tuburi electronice sau tranzistoare etc. se efectuează analiza pentru definitivarea schemei și evitarea,, hazardului''.

În schemele cu funcționare în mai mulți timpi, cu tuburi electronice, tranzistori etc., întîrzierile care se produc între mărimile de intrare și de ieșire ale acestor elemente sînt mici, însă trebuie luate în considerație în descrierea corectă a funcționării. În caz contrar, nu înțelegem anumite fenomene care pot apărea în funcționarea reală a schemei, cum este de exemplu fenomenul numit ,,hazard'' în literatura americană.

Acest fenomen, în cazul schemelor fără contacte, a fost studiat în special de Unger, Caldwell [1], Huffman [3] și Mc Claskey [2]. El constă în următoarele : Schimbarea unei variabile de intrare produce schimbarea unei variabile secundare, a cărui schimbare se propagă în celelalte circuite mai repede decît propagarea variabilei inițiale în ele. Aceasta produce

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 679–706, BUCUREȘTI, 1965

adesea nefuncţionarea schemei conform programului dorit. Ca o soluţie tehnică cunoscută în literatură pentru evitarea fenomenului, acolo unde este posibil, să se introducă linii de întîrziere în anumite ramuri ale circuitului. Ele au rolul să întîrzie schimbarea variabilei secundare suficient de mult şi să permită ca schimbarea variabilei primare iniţiale să atingă toate circuitele afectate de ea.

O altă soluţie tehnică cunoscută în literatură este de a evita în construcţia schemelor a anumitelor circuite tip numite ,,drop set'' şi ,,lift set''. În primul apar situaţii de ,,hazard'' cînd, la schimbarea unei variabile de intrare, ieşirea trebuie să rămînă la potenţial scăzut, iar în al doilea circuit, cînd ieşirea trebuie să rămînă la potenţial ridicat.

Se presupune că schema îndeplineşte condiţia tehnică de bună funcţionare şi anume aceea de a nu se schimba două variabile simultan în schemă.

Se presupune de asemenea că schimbarea variabilelor de intrare nu se face în timpul regimului tranzitoriu de funcţionare al schemei, ci numai după ce funcţionarea s-a stabilizat.

Dacă la sinteza unei scheme nu ţinem seama de întîrzierile produse de elementele care intervin în construcţia ei, fenomenul de ,,hazard'' nu este astfel prevăzut prin calcul şi deci nu poate fi evitat.

În cazul schemelor cu contacte şi relee problema a fost soluţionată de Gr. C. Moisil prin introducerea logicii trivalente în analiza şi sinteza acestor scheme [4], [7] şi [15].

În cele ce urmează, vom da o metodă algebrică care sistematizează analiza şi sinteza schemelor fără contacte, prevede prin calcul apariţia fenomenului de ,,hazard'' descris mai sus şi indică soluţia pentru evitarea lui, adică acolo unde este posibil introducerea de linii de întîrziere (durata lor şi locul unde trebuie introduse) sau cînd acest lucru nu este posibil, schimbarea schemei într-una echivalentă algebric cu ea, însă în care sînt evitate anumite circuite tip ,,drop set'' sau ,,lift set'' pentru a se evita ,,hazardul'' şi a se asigura siguranţa în funcţionare.

Pentru analiză : Se scriu ecuaţiile caracteristice ale diferitelor elemente din schemă introducînd întîrzieri arbitrare pentru fiecare element care apare în schemă şi apoi se dau valori variabilelor de intrare conform programului indicat şi se urmăreşte funcţionarea schemei prin valorile care decurg din ecuaţiile caracteristice ale diferitelor elemente.

Pentru o evaluare mai rapidă şi mai sistematică, se consideră pentru un moment egale cu zero toate întîrzierile corespunzătoare operaţiilor logice care sînt comune tuturor ramurilor şi rămîn diferite de zero numai cele necomune. Se consideră pe rînd cazurile cînd întîrzierile sînt mai mari sau mai mici între ele pe diferite ramuri, sau cazul cînd sînt egale între ele. De fiecare dată se verifică funcţionarea schemei şi în felul acesta se stabileşte că, în cazul cînd schema nu funcţionează conform programului, dacă funcţionarea ei poate fi corectată prin introducerea de linii de întîrziere în anumite ramuri şi de ce mărime, sau dacă acest lucru nu corectează funcţionarea schemei, cum trebuie ea modificată.

O astfel de verificare poate fi uşor programată la o maşină de calcul.

Pentru sinteză : Se realizează sinteza după metoda schemelor cu contacte şi relee, determinînd numărul de elemente intermediare necesare, de exemplu prin metoda algebrică dată de Gr C. Moisil şi Gh. Ioanin [4] Se va ajunge la un sistem de relaţii de recurenţă, unde relaţiile de tipul

$$x_{N+1} = \xi_N \tag{1}$$

corespunzătoare relaţiilor caracteristice ale releelor, se vor considera ca relaţii care impun introducerea de linii de întîrziere între mărimile ξ şi x.

Se desemnează apoi schema prin metodele cunoscute (de exemplu cele date de Gr. C. Moisil în [5], [6]), ţinînd seama de observaţia făcută în legătură cu relaţia (1).

Schemei astfel obţinute i se aplică analiza prin metoda dată mai sus, verificîndu-se dacă, în forma în care a fost desemnată, corespunde programului cerut sau, în caz contrar, trebuie schimbată reprezentarea grafică a schemei.

Prin întîrzierile atribuite diferitelor elemente din schemă, se înţeleg întîrzierile proprii produse de elemente împreună cu conductorii de legătură. În cazul cînd una dintre intrările unui element nu conţine nici un alt element în care să înglobăm întîrzierea proprie conductorului, în timp ce la celelalte intrări lucrul acesta apare, va trebui să atribuim o întîrziere arbitrară conductorului însuşi, fiindcă ea de fapt există şi trebuie să o luăm în consideraţie.

De fapt aceste întîrzieri sînt considerate figurînd între oricare două noduri legate între ele din schemă.

În cele expuse mai sus s-a presupus că forma tensiunilor de intrare e (pe grilă) şi de ieşire u (pe placă) ale unui tub electronic au formele din figura 1 şi relaţia algebrică între ele este

$$u_{N+\alpha} = \bar{e}_N. \tag{2}$$

În realitate, aspectul formelor de undă ale lui e şi u, cînd se ţine seama de fenomenul tranzitoriu, este cel din figura 2.

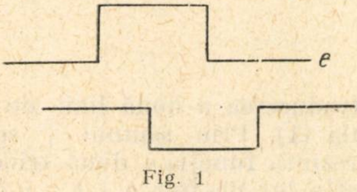


Fig. 1

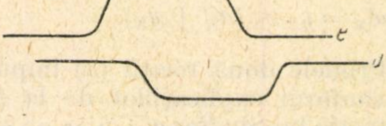


Fig. 2

În afară de întîrzierea α dintre u şi e, care se consideră la valorile lor de regim, apare şi lungimea frontului de undă. Acest fenomen poate avea importanţă cînd există mai multe tuburi electronice în schemă, care sînt excitate de tensiunea u, iar pentru unele dintre ele este nevoie de o tensiune mai mică decît pentru altele. În acest caz, o parte dintre ele vor fi excitate înainte ca u să ajungă la valoarea de regim, încă din timpul regimului tranzitoriu. În acest caz se poate aplica o metodă asemănătoare celei date la studiul releelor de intensitate [10], sau în anumite cazuri se poate utiliza logica trivalentă întrebuințată de Gr. C. Moisil [4] pentru cazul schemelor cu contacte și relee în funcționarea lor reală, adică dacă se ține seama de poziția intermediară a contactelor. (Contactul normal închis s-a deschis iar cel normal deschis nu s-a închis încă.)

În cazul de față, se poate nota cu a 3-a valoare, adică cu 1/2, situația de regim transitoriu a tensiunilor, aspectul relației (2) rămînînd valabil, însă cu u și e luînd valori în logica trivalentă.

În cele ce urmează vom da un exemplu de sinteza unei scheme în care vom face calculele în algebra bivalentă, adică vom presupune că sînt valabile formele de undă din figura 1. Vom mai presupune că schimbările intrărilor se fac succesiv și la intervale suficient de lungi ca fenomenele secundare din regimul tranzitoriu să dispară.

Se cere să se efectueze sinteza unei scheme cu tuburi electronice, cu funcționare în mai mulți timpi, care să aibă două intrări a și b și o ieșire w, reprezentate prin tensiunile corespunzătoare. Tensiunea de ieșire trebuie să fie ridicată, $w = 1$, dacă la intrarea a avem tensiune scăzută, $a = 0$, și la intrarea b avem tensiune ridicată, $b = 1$, și numai dacă această stare urmează imediat stării : $a = 1$, $b = 1$ și w se menține 1 dacă în această situație intrarea a primește o tensiune ridicată, $a = 1$.

În toate celelalte cazuri, $w = 0$ 1).

Problema este dată în cartea lui S. Caldwell [1] și din relațiile date de S. Caldwell în [1] rezultă că ecuațiile de recurență ale schemei sînt

$$x_{N+1} = \xi_N,$$

$$y_{N+1} = \eta_N,$$

$$\xi_N = b_N (a_N \cup x_N) = \bar{\bar{b}}_N (\bar{a}_N \perp \bar{x}_N), \tag{3}$$

$$\eta_N = (a_N \cup b_N)(a_N \cup \bar{x}_N)(\bar{b}_N \cup y_N \cup \bar{x}_N) = (\bar{a}_N \perp \bar{b}_N)(\bar{a}_N \perp$$

$$\perp x_N)\, \overline{\bar{b}_N \top y_N \top \bar{x}_N},$$

$$w_N = \bar{\bar{b}}_N \bar{\bar{x}}_N (a_N \perp y_N).$$

Primele două relații (3) impun introducerea a două linii de întîrziere conform explicațiilor de la formula (1). Prin semnul $\top$ se înțelege funcția lui Sheffer $a \top b = \overline{ab}$ și reprezintă funcția a doua triode, în paralel prin semnul $\perp$ se înțelege funcția lui Sheffer $a \perp b = \bar{a} \cup \bar{b}$ și reprezintă funcția unei pentode.

Relațiile (3) dau schema din figura 3, în care notăm prin Δ liniile de întîrziere introduse.

Trecem acum la analiza schemei. Introducem întîrzieri arbitrare pentru fiecare element din schemă, așa cum este indicat în figura 3.

---

1). A se vedea sinteza la sfîrșitul lucrării.

Între punctele A și B ne avînd nici un element în schemă, introducem o întîrziere δ atașată conductorului de legătură. Relațiile de recurență (3) devin :

$$x_N = \xi_{N-\alpha_5}$$

$$y_N = \eta_{N-\alpha_{13}}$$

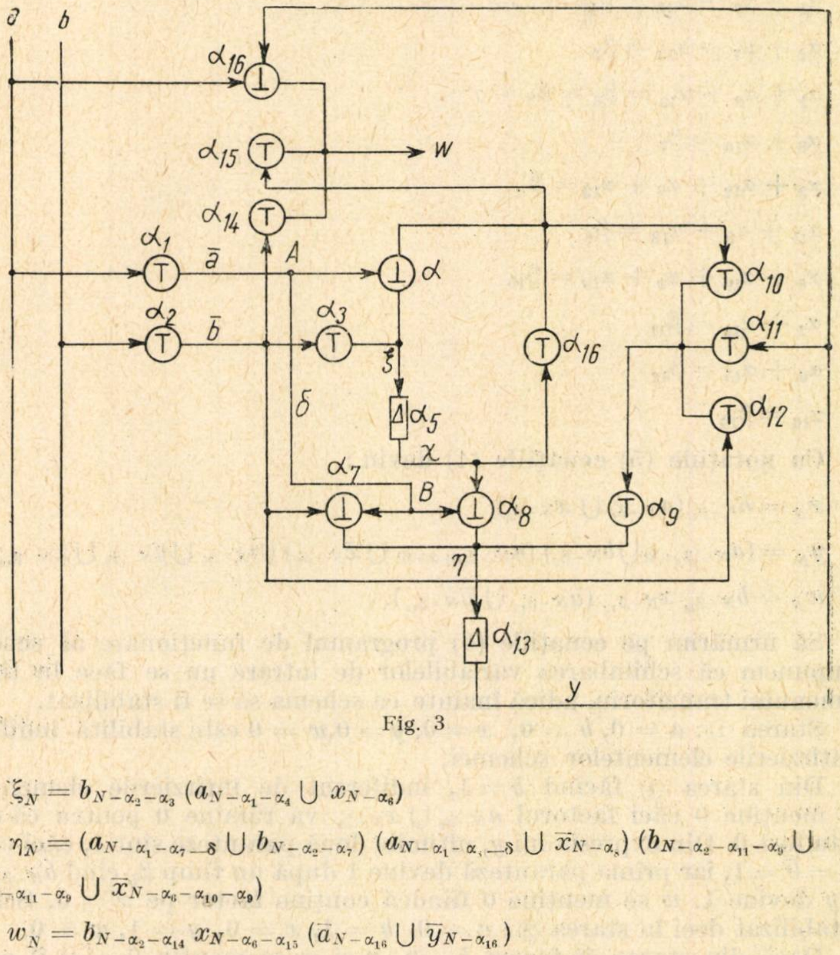


Fig. 3

$$\xi_N = b_{N-\alpha_2-\alpha_3}\,(a_{N-\alpha_1-\alpha_4} \cup x_{N-\alpha_8})$$

$$\eta_N = (a_{N-\alpha_1-\alpha_7-\delta} \cup b_{N-\alpha_2-\alpha_7})\,(a_{N-\alpha_1-\alpha_8-\delta} \cup \overline{x}_{N-\alpha_8})\,(b_{N-\alpha_2-\alpha_{11}-\alpha_9} \cup$$

$$\cup\, y_{N-\alpha_{11}-\alpha_9} \cup \overline{x}_{N-\alpha_6-\alpha_{10}-\alpha_9})$$

$$w_N = b_{N-\alpha_2-\alpha_{14}}\,x_{N-\alpha_6-\alpha_{15}}\,(\overline{a}_{N-\alpha_{16}} \cup \overline{y}_{N-\alpha_{16}})$$

sau

$$x_N = b_{N-(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5)}\,(a_{N-(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_5)} \cup x_{N-(\alpha_6+\alpha_5)}), \tag{4}$$

$$y_N = (a_{N-(\alpha_1+\alpha_7+\alpha_{13}+\delta)} \cup b_{N-(\alpha_2+\alpha_7+\alpha_{13})})\,(a_{N-(\alpha_1+\alpha_8+\alpha_{13}+\delta)} \cup$$

$$\cup\, \overline{x}_{N-(\alpha_8+\alpha_{13})}\,(\overline{b}_{N-(\alpha_2+\alpha_{11}+\alpha_9+\alpha_{13})} \cup y_{N-(\alpha_{11}+\alpha_9+\alpha_{13})} \cup \overline{x}_{N-(\alpha_6+\alpha_{10}+\alpha_9+\alpha_{13})})$$

$$w_N = b_{N-(\alpha_2+\alpha_{14})}\,x_{N-(\alpha_6+\alpha_{15})}\,(\overline{a}_{N-\alpha_{16}} \cup \overline{y}_{N-\alpha_{16}}).$$

Notăm :

$$
\begin{aligned}
&\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = \beta_1\\
&\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 = \beta_2\\
&\alpha_6 + \alpha_5 = \beta_3\\
&\alpha_1 + \alpha_7 + \alpha_{13} = \beta_4\\
&\alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_{13} = \beta_5\\
(5)\quad &\alpha_1 + \alpha_8 + \alpha_{13} = \beta_6 = \beta_7 + \alpha\\
&\alpha_8 + \alpha_{13} = \beta_7\\
&\alpha_2 + \alpha_{12} + \alpha_9 + \alpha_{13} = \beta_8\\
&\alpha_{11} + \alpha_9 + \alpha_{13} = \beta_9\\
&\alpha_6 + \alpha_{10} + \alpha_9 + \alpha_{13} = \beta_{10}\\
&\alpha_2 + \alpha_{14} = \beta_{11}\\
&\alpha_6 + \alpha_{15} = \beta_{12}\\
&\alpha_{16} = \beta_{13}
\end{aligned}
$$

Cu notațiile (5) ecuațiile (4) devin :

$$
\begin{aligned}
&x_N = b_{N-\beta_1}(a_{N-\beta_2} \cup x_{N-\beta_3}),\\
(6)\quad &y_N = (a_{N-(\beta_4+\delta)} \cup b_{N-\beta_5})(a_{N-(\beta_7+\alpha+\delta)} \cup \overline{x}_{N-\beta_7})(\overline{b}_{N-\beta_8} \cup y_{N-\beta_9} \cup \overline{x}_{N-\beta_{10}},\\
&w_N = b_{N-\beta_{11}}\, x_{N-\beta_{12}}(\overline{a}_{N-\beta_{13}} \cup \overline{y}_{N-\beta_{13}}).
\end{aligned}
$$

Să urmărim pe ecuațiile (6) programul de funcționare al schemei. Presupunem că schimbarea variabilelor de intrare nu se face în timpul fenomenului tranzitoriu, adică înainte ca schema să se fi stabilizat.

Starea ① : $a = 0$, $b = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $w = 0$ este stabilită indiferent de întîrzierile elementelor schemei.

Din starea ① făcînd $b = 1$, indiferent de întîrzierile elementelor, x se menține 0 căci factorul $a_{N-\beta_2} \cup x_{N-\beta_3}$ va rămîne 0 pentru că $a = 0$ și x au fost 0. Din expresia lui y, ultimile două paranteze sînt 1, căci conțin pe $\overline{x} = \overline{0} = 1$, iar prima paranteză devine 1 după un timp β_5 cînd $b_{N-\beta_5} = 1$, deci y devine 1. w se menține 0 fiindcă conține factor pe $x = 0$. Schema s-a stabilizat deci în starea ② : $a = 0$, $b = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $w = 0$.

Dacă din starea ② facem $b = 0$, x și w se mențin 0 căci îl conțin pe b factor, iar y devine 0 după un timp β_5 cînd se anulează prima paranteză căci $b_{N-\beta_5}$ după un timp β_5 devine 0 și a era 0. Deci schema trece înapoi în starea ① care este stabilă.

Din starea ① facem $a = 1$. x și w se mențin 0 căci conțin pe $b = 0$ factor iar y are ultimele două paranteze 1, căci conțin pe $\overline{x} = \overline{0} = 1$ și prima paranteză devine 1 după un timp $\beta_4 + \delta$ cînd $a_{N-(\beta_4+\delta)} = 1$. Schema trece deci în starea stabilă ③ : $a = 1$, $b = 0$, $x = 0$, $y = 1$, $w = 0$.

Dacă din starea ③ revenim la $a = 0$, x şi w se menţin 0 căci conţin $b = 0$ factor, după un timp $\beta_4 + \delta$ prima paranteză a lui y se anulează, căci b era 0 iar $a_{N-(\beta_4+\delta)}$ devine 0 şi deci y devine 0. Schema a revenit în starea ① care este stabilă.

Dăm lui b valoarea $b = 1$ în starea ③. După un timp β_1, x devine 1, căci a era 1 şi $b_{N-\beta_1}$ devine 1. y se menţine 1 indiferent de valoarea lui b, căci primele două paranteze conţin pe $a = 1$ şi a treia conţine pe $y_{N-\beta_9}$ care produce automenţinerea valorii sale. w se menţine 0 fiindcă factorul $\bar{a}_{N-\beta_{13}} \cup \bar{y}_{N-\beta_{13}} = 0$, căci $\bar{a} = \bar{y} = \bar{1} = 0$. Schema a trecut în starea stabilă ④ : $a = 1$, $b = 1$, $x = 1$, $y = 1$, $w = 0$.

Din starea ④, dînd lui b valoarea $b = 0$, după un timp β_1, x devine 0, căci conţine pe $b_{N-\beta_1}$ factor, y se menţine 1, căci primele două paranteze conţin pe $a = 1$ şi a treia pe $y_{N-\beta_9}$ care era 1 şi produce automenţinerea stării precedente, iar w se menţine 0 căci paranteza este nulă. Schema a revenit la starea stabilă ③.

Tot din starea ④ dăm acum lui a valoarea $a = 0$, Fiindcă $b = 1$ şi x a fost 1, se produce automenţinerea lui $x = 1$, indiferent de valoarea lui a, căci ambii factori sînt 1. În expresia lui y, a doua paranteză devine 0 după un timp $\beta_7 + \alpha + \delta$, căci $\bar{x} = \bar{1}$ şi $a_{N-(\beta_7+\alpha+\delta)}$ devine 0 după un timp $\beta_7 + \alpha + \delta$, şi deci y devine 0. w devine 1 după un timp β_{13}, căci primii doi factori sînt 1, $b = x = 1$ şi în paranteză $\bar{a}_{N-\beta_{13}}$ devine 1 după un timp β_{13}. Schema a ajuns în starea stabilă ⑤ : $a = 0$, $b = 1$, $x = 1$, $y = 0$, $w = 1$.

Din starea ⑤ dăm lui b valoarea $b = 0$. După un timp β_1, $b_{N-\beta_1} = 0$ şi fiind factor în expresia lui x, acesta devine 0. Dacă

$$\beta_5 > \beta_1 + \beta_7 \text{ şi } \beta_5 > \beta_8$$

sau

$$\beta_5 > \beta_1 + \beta_7 \text{ şi } \beta_5 > \beta_1 + \beta_{10},$$

atunci în expresia lui y prima paranteză se menţine 1 pînă ce ultimele două paranteze devin 1 (în a doua $\bar{x}_{N-\beta_7}$ devine 1, iar în a treia unul dintre $\bar{b}_{N-\beta_8}$ sau $\bar{x}_{N-\beta_{10}}$ devine 1). Deci y devine 1 pînă ce după un timp β_5, $b_{N-\beta_5}$ se anulează şi fiindcă $a = 0$, se anulează primul factor din y şi deci y revine la valoarea 0. Ca această oscilaţie a lui y din $0 \to 1 \to 0$ să nu se producă, trebuie să aranjăm întîrzierile astfel ca

$$\beta_5 < \beta_1 + \beta_7$$

sau

$$\beta_5 < \beta_8 \text{ şi } \beta_5 < \beta_1 + \beta_{10} \tag{7}$$

adică din (5)

$$\alpha_7 < \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_8$$

sau

$$\alpha_7 < \alpha_{12} + \alpha_9 \text{ şi } \alpha_7 < \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_{10} + \alpha_9 .$$

În condiţiile (7), y se va menţine 0.

Indiferent de inegalitățile (7), w devine 0 după un timp min $[\beta_{11}, \beta_{12} + \beta_1]$ după cum unul din cei doi factori $x_{N-\beta_{12}}$ sau $b_{N-\beta_{11}}$ devin mai înainte 0.

Schema s-a stabilizat deci în starea ①.

Se vede că condiția (7) nu este esențială, căci nu afectează cu nimic ieșirea w.

Din starea ⑤ dăm acum lui a valoarea $a = 1$. x se menține 1 căci $b = 1$ și x era 1. y se va menține și el 0, căci ultima paranteză se anulează, fiindcă $\overline{b} = \overline{x} = \overline{1} = 0$ iar $y_{N-\beta_9}$ era 0 și produce automenținerea acestei stări. w se menține 1, căci toți factorii săi sînt 1, $b = x = \overline{y} = 1$. Schema a trecut în starea stabilă ⑥ : $a = 1$, $b = 1$, $x = 1$, $y = 0$, $w = 1$.

Din starea ⑥ dăm lui a valoarea $a = 0$. x rămîne 1, căci ambii săi factori sînt 1 : $b = 1$ și x era 1 și produce automenținerea stării indiferent de a. y se menține 0, căci ultima paranteză se menține 0 : $\overline{b} = \overline{x} = \overline{1} = 0$ și $y_{N-\beta_9}$ era 0. Valoarea lui w rămîne 1, căci toți trei factorii săi sînt 1 : $b = x = 1$ și $\overline{y} = \overline{0} = 1$, indiferent de valoarea lui a. Schema a revenit deci în starea stabilă ⑤.

Din starea ⑥ dăm acum lui b valoarea $b = 0$. După un timp β_1 x devine 0, căci factorul $b_{N-\beta_1}$ devine 0. În expresia lui y primele două paranteze sînt 1, căci conțin $a = 1$, iar ultima devine și ea 1 după un timp min $[\beta_8, \beta_{10} + \beta_1]$ după cum $\overline{b}_{N-\beta_8} = \overline{0} = 1$ înainte de $\overline{x}_{N-\beta_{10}} = \overline{0} = 1$ sau invers. Deci și y devin 1. w devine 0 după un timp min $[\beta_{11}, \beta_{12} + \beta_1, \beta_{13} + \min(\beta_8, \beta_{10} + \beta_1)]$ cînd unul din cei trei factori ai săi se anulează primul : $b_{N-\beta_{11}}$, $x_{N-\beta_{12}}$, $\overline{y}_{N-\beta_{13}}$. Deci schema a trecut în starea ③ care este stabilă. Este evident că x și y nu se vor schimba simultan, se va schimba mai înainte x sau y, adică xy trec din $10 \to 01$ sau prin 00 sau prin 11 după cum $\beta_1 < \beta_8$ sau $\beta_8 < \beta_1$. Această nesimultaneitate apare în mod inevitabil în schemă pentru că la alegerea stărilor lui X și Y nu s-a respectat regula de a nu programa schimbarea concomitentă a două variabile în funcționarea schemei.

Să considerăm acum schema în starea ② : $a = 0$, $b = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $w = 0$ și să dăm lui a valoarea $a = 1$. În expresia lui x, $b = 1$ și după un timp β_2, $a_{N-\beta_2} = 1$ și deci $x = 1$.

Dacă

$$\beta_7 + \alpha + \delta < \beta_7 + \beta_2 \tag{8}$$

adică din relațiile (5)

$$\alpha_4 + \alpha_5 > \delta$$

atunci în a doua paranteză a lui y, $a_{N-(\beta_7+\alpha+\delta)}$ devine 1 înainte ca $\overline{x}_{N-\beta_7}$ să devină 0 și deci în a treia paranteză $y_{N-\beta_9}$ se menține 1 și deci y se menține 1. În acest caz, dacă

$$\beta_{13} < \beta_{12} + \beta_2 \tag{9}$$

adică din relațiile (5)

$$\alpha_{16} < \alpha_6 + \alpha_{15} + \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5,$$

atunci w se menţine 0, căci $\bar{a}_{N-\beta_{13}}$ devine $\bar{1} = 0$ înainte ca $x_{N-\beta_{12}}$ să devină 1 şi astfel se menţine 0 cel puţin unul din factorii lui w. În cazul contrar lui (9), în timpul $\beta_{13} - (\beta_{12} + \beta_2)$, w devine 1, contrar programului.

Deci în condiţia (8), schema a trecut în starea ④ care este stabilă.

Să presupunem acum că (8) nu este îndeplinită, deci $\beta_2 < \alpha + \delta$ sau $\alpha_4 + \alpha_5 < \delta$. În timpul $\delta - (\alpha_4 + \alpha_5)$ avem $y = 0$. (Se vede că luarea în consideraţie a întîrzierii proprii produse de conductorul AB este esenţială în funcţionare.) Dacă

$$\beta_{10} + \beta_2 > \beta_7 + \alpha + \delta$$

adică din relaţiile (5)

$$\alpha_6 + \alpha_{10} + \alpha_9 + \alpha_4 + \alpha_5 > \alpha_8 + \delta$$

există un moment cînd a doua paranteză a lui y (prima este mereu 1 căci $b = 1$) devine din nou 1 şi ultima nu a devenit 0, căci $\bar{x}_{N-\beta_{10}}$ nu a devenit încă 0. Deci y redevine 1. Dacă

$$\beta_9 < \beta_{10} + \beta_2 - (\beta_7 + \alpha + \delta),$$

adică din relaţiile (5)

$$\alpha_{11} + \alpha_{13} < \alpha_6 + \alpha_{10} + \alpha_4 + \alpha_5 - (\alpha_8 + \delta),$$

atunci y se menţine 1, căci $y_{N-\beta_9}$ redevine 1 înainte ca $\bar{x}_{N-\beta_{10}}$ să devină 0 şi pe viitor y se menţine 1. Dacă

$$\beta_9 > \beta_{10} + \beta_2 - (\beta_7 + \alpha + \delta),$$

atunci după timpul $\beta_{10} + \beta_2$ ultima paranteză redevine 0 pentru un timp, apoi din nou 1 şi iar 0 şi aşa mai departe, din cauza valorilor lui $y_{N-\beta_9}$. Deci y va oscila între 0 şi 1.

Dacă

$$\beta_{10} + \beta_2 < \beta_7 + \alpha + \delta$$

termenul $\bar{x}_{N-\beta_{10}}$ din ultima paranteză a lui y devine 0 înainte ca a doua paranteză să redevină 1. Dacă

$$\beta_9 > \delta - (\alpha_4 + \alpha_5),$$

adică din relaţiile (5),

$$\alpha_{11} + \alpha_9 + \alpha_{13} < \delta - (\alpha_4 + \alpha_5),$$

ultima paranteză a lui y se menţine 1 pînă a doua devine 1 şi y va redeveni 1, după care devine 0 căci înainte fusese 0 şi termenul $y_{N-\beta_9}$ reproduce stările anterioare, şi vom avea pentru y oscilaţii între 0 şi 1.

Dacă

$$\beta_9 < \delta - (\alpha_4 + \alpha_5),$$

ultima paranteză a lui y devine 0 înainte ca a doua să redevină 1 şi vom avea $y = 0$ tot timpul.

Din expresia lui w observăm că acesta va urmări oscilațiile lui y, căci ultima paranteză conține pe $\overline{y}_{N-\beta_{13}}$ și cînd $y=1$ devine $w=0$ iar $y=0$, ne dă $w=1$. Deci schema oscilează între pozițiile ⑥ și ④. Cînd y se menține 0, se menține și $w=1$ și schema se fixează în poziția ⑥ contrar programului.

În cazul în care

$$\beta_7+\alpha+\delta>\beta_7+\beta_2;\ \beta_{10}+\beta_2>\beta_7+\alpha+\delta \text{ și } \beta_9<\beta_{10}+ \tag{8'}$$
$$+\beta_2-(\beta_7+\alpha+\delta)$$

cînd y trece prin 0 și redevine 1, dacă

$$\beta_{12}>-\beta_{13}+\beta_7+\alpha+\delta \tag{9'}$$

adică din relațiile (5)

$$\alpha_{15}>\alpha_{16}+\alpha_{10}+\alpha_9+\alpha_{13}+\alpha_1+\alpha_4+\alpha_5,$$

atunci w nu are timp să sesizeze oscilațiile lui y și va trece direct în $w=0$, adică în poziția ④ fără a mai trece prin ⑥ cum face y. În caz contrar, adică dacă

$$\beta_{12}<-\beta_{13}+\beta_7+\alpha+\delta,$$

w va urmări pe y și va trece prin $w=1$ și apoi $w=0$ care se menține, deci va trece prin poziția ⑥ și apoi se va menține în ④.

Toate aceste situații care deviază schema de la programul fixat sînt situații de ,,hazard'' nedorit. Deci ca schema să funcționeze conform programului, va trebui ca să fie îndeplinite condițiile (8) și (9), sau (8') și (9') condiția (7) nefiind esențială, ca fiind de tipul (8') și (9'), afectînd funcționarea lui y dar nu și a ieșirii w.

Să ilustrăm pe exemple diferitele situații posibile, dînd întîrzierilor valori convenționale, astfel încît să ne încadrăm în diferite situații de funcționare a schemei. Vom considera numai anumite părți din programul de funcționare, care sînt mai caracteristice :

I. Fie :

$$\alpha_4=\alpha_5=\alpha_{13}=\alpha_{14}=\alpha_{15}=\alpha_{16}=\delta=1$$

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_6=\alpha_7=\alpha_8=\alpha_9=\alpha_{10}=\alpha_{11}=\alpha_{12}=0.$$

Din (5) obținem

$$\beta_1=\beta_3=\beta_4=\beta_5=\beta_7=\beta_8=\beta_9=\beta_{10}=\beta_{11}=\beta_{12}=\beta_{13}=\delta=1,$$
$$\alpha=0,\ \beta_2=2.$$

Ecuațiile (6) devin

$$x_N=b_{N-1}(a_{N-2}\cup x_{N-1})$$
$$y_N=(a_{N-2}\cup b_{N-1})(a_{N-2}\cup \overline{x}_{N-1})(\overline{b}_{N-1}\cup y_{N-1}\cup \overline{x}_{N-1})$$
$$w_N=b_{N-1}x_{N-1}(\overline{a}_{N-1}\cup \overline{y}_{N-1})$$

Se verifică toate condiţiile (7), (8) şi (9) de bună funcţionare ale schemei adică

$$\alpha + \delta < \beta_2, \; \beta_{13} < \beta_{12} + \beta_2, \; \beta_5 < \beta_1 + \beta_7 .$$

Să urmărim o parte din programul de funcţionare pe formulele de mai sus. Obţinem :

	a	b	x	y	w	
Starea ②	0	1	0	1	0	stabilă
acţionăm pe *a*	1	1	0	1	0	
	1	1	0	1	0	
Starea ④	1	1	1	1	0	
	1	1	1	1	0	stabilă
Starea ⑤	0	1	1	0	1	stabilă
dezacţionăm pe *b*	0	0	1	0	1	
Starea ①	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	stabilă

Şi funcţionarea este conform programului cerut.

II. Considerăm aceleaşi întîrzieri ca cele de la punctul I afară de

$$\alpha_{16} = 4$$

şi deci

$$\beta_{13} = 4.$$

x_N şi y_N rămîn aceiaşi ca la punctul I, iar w_N devine

$$w_N = b_{N-1}\, x_{N-1}\, (\bar{a}_{N-4} \cup \bar{y}_{N-4}).$$

Se verifică relaţiile (7) şi (8), însă (9) nu mai este verificată. Avem

$$\alpha + \delta < \beta_2, \; \beta_5 < \beta_1 + \beta_7, \; \beta_{13} > \beta_{12} + \beta_2 .$$

Să urmărim funcţionarea schemei pe ecuaţii :

	a	b	x	y	w	
Starea ②	0	1	0	1	0	stabilă
Acţionăm pe *a*	1	1	0	1	0	
	1	1	0	1	0	
	1	1	1	1	0	
	1	1	1	1	1	w a devenit 1
starea ④	1	1	1	1	0	
	1	1	1	1	0	stabilă

Există un moment nedorit în schemă cînd $w = 1$. Aceasta este o abatere de la programul cerut.

III. Fie

$$\alpha_2 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_{13} = \alpha_{16} = \delta = 1, \; \alpha_4 = 2,$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10} + \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = 0.$$

Din (5) rezultă

$$\alpha = 0,\ \beta_5 = 3,\ \beta_2 = \beta_4 = \beta_8 = \beta_{10} = 2,$$

$$\beta_1 = \beta_3 = \beta_7 = \beta_9 = \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \delta = 1$$

condițiile verificate sînt

$$\beta_5 > \beta_1 + \beta_7,\ \beta_5 > \beta_8,\ \beta_5 > \beta_{10} + \beta_1,$$

$$\alpha + \delta < \beta_2,\ \beta_{13} < \beta_2 + \beta_{12}.$$

deci (7) nu sînt satisfăcute, numai (8) și (9) sînt verificate. Ecuațiile (6) devin :

$$x_N = b_{N-1}\,(a_{N-2} \cup x_{N-1}),$$

$$y_N = [a_{N-3} \cup b_{N-3})\,(a_{N-2} \cup \overline{x}_{N-1})\,(\overline{b}_{N-2} \cup y_{N-1} \cup \overline{x}_{N-2}),$$

$$w_N = b_{N-1}\,x_{N-1}\,(\overline{a}_{N-1} \cup \overline{y}_{N-1}).$$

Ecuațiile ne dau următoarea funcționare a schemei

	a	b	x	y	w	
starea ②	0	1	0	1	0	stabilă
acționăm pe a	1	1	0	1	0	
	1	1	0	1	0	
starea ④	1	1	1	1	0	
	1	1	1	1	0	stabilă
starea ⑤	0	1	1	0	1	stabilă
dezacționăm pe b	0	0	1	0	1	
	0	0	0	0	0	
	0	0	0	1	0	y a trecut prin 1
starea ①	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	stabilă

Deci y a trecut prin 0 → 1 → 0, poziția 1 fiind nedorită, schema nu funcționează conform programului.

IV. Fie

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{16} = 1,\ \alpha_{10} = 2,$$

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{15} = 0.$$

Din (5) rezultă :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_5 = \beta_7 = \beta_8 = \beta_9 = \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \alpha = \delta = 1,$$

$$\beta_4 = 2,\ \beta_{10} = 4.$$

Condițiile pe care le verifică sînt

$$\beta_2 < \alpha + \delta,\ \beta_{10} + \beta_2 > \beta_7 + \alpha + \delta,\ \beta_9 < \beta_{10} + \beta_2 - (\beta_7 + \alpha + \delta),$$

$$\beta_{12} < \beta_7 + \alpha + \delta - \beta_{13}$$

deci nu sînt satisfăcute condițiile de bună funcționare ale schemei căci (8′) este satisfăcută însă nu și (9′).

Ecuațiile (6) devin:

$$x_N = b_{N-1}(a_{N-1} \cup x_{N-1}),$$

$$y_N = (a_{N-3} \cup b_{N-1})(a_{N-3} \cup \overline{x}_{N-1})(\overline{b}_{N-1} \cup y_{N-1} \cup \overline{x}_{N-4}),$$

$$w_N = b_{N-1}\, x_{N-1}(\overline{a}_{N-1} \cup \overline{y}_{N-1}).$$

Să urmărim funcționarea:

	a	b	x	y	w	
starea ②	0	1	0	1	0	stabilă
acționăm pe a	1	1	0	1	0	
	1	1	1	1	0	
	1	1	1	0	0	y și w au oscilat între 0 și 1 pînă s-au
	1	1	1	1	1	stabilizat la starea ④
starea ④	1	1	1	1	0	
	1	1	1	1	0	stabilă

Schema nu funcționează conform programului, căci y nu se menține tot timpul 1, el trece prin o iar w are un moment valoarea 1.

V. Considerăm aceleași valori pentru întîrzieri ca în cazul IV, afară de

$$\alpha_{15} = 2$$

și deci

$$\beta_{12} = 3.$$

Condițiile din cazul IV sînt satisfăcute, afară de ultima care devine:

$$\beta_{12} > \beta_7 + \alpha + \delta - \beta_{13}.$$

x_N și y_N din exemplul precedent rămîn valabili iar w_N devine:

$$w_N = b_{N-1}\, x_{N-3}(\overline{a}_{N-1} \cup \overline{y}_{N-1}).$$

Să urmărim funcționarea în aceste condiții. Ecuațiile ne dau:

	a	b	x	y	w	
starea ②	0	1	0	1	0	stabilă
acționăm pe a	1	1	0	1	0	
	1	1	1	1	0	
	1	1	1	0	0	y oscilează 1 → 0 → 1
starea ④	1	1	1	1	0	
	1	1	1	1	0	stabilă

În acest caz numai y trece prin 0 ca să se stabilizeze la 1, iar w se menține 0. Schema funcționează de această dată conform programului, căci sînt satisfăcute condițiile (8′) și (9′).

VI. Fie

$$\alpha_{11} = 2,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_{16} = \delta = 1,$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = \alpha_{10} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = 0.$$

Din (5) rezultă

$$\beta_9 = 2,\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_7 = \beta_8 = \beta_{10} = \beta_{11} =$$

$$= \beta_{12} = \beta_{13} = \delta = \alpha = 1.$$

Sînt verificate următoarele condiții :

$$\beta_2 < \alpha + \delta,\ \beta_{10} + \beta_2 < \beta_7 + \alpha + \delta,\ \beta_9 > \delta + \alpha - \beta_2$$

și ecuațiile (6) devin :

$$x_N = b_{N-1}(a_{N-1} \cup x_{N-1}),$$

$$y_N = (a_{N-2} \cup b_{N-1})(a_{N-3} \cup \bar{x}_{N-1})(\bar{b}_{N-1} \cup y_{N-2} \cup \bar{x}_{N-1}),$$

$$w_N = b_{N-1}\, x_{N-1}(\bar{a}_{N-1} \cup \bar{y}_{N-1}).$$

Urmărind pe aceste ecuații funcționarea schemei, obținem :

	a	b	x	y	w	
starea ②	0	1	0	1	0	stabilă
acționăm pe a	1	1	0	1	0	
	1	1	0	1	0	
	1	1	1	1	0	
	1	1	1	0	0	
	1	1	1	1	1	
	1	1	1	0	0	
	1	1	1	1	1	oscilații între 0 și 1 pentru y și w
	1	1	1	0	0	
	. . .	. . .	. . .			

Schema nu se stabilizează, ea oscilînd între 0 și 1 pentru y și w.

Condițiile de bună funcționare nu sînt satisfăcute.

VII. Fie

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_{11} = \alpha_{16} = 1,\ \delta = 2,$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = \alpha_{10} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = 0.$$

Din (5) obținem :

$$\delta = 2,\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_7 = \beta_8 = \beta_9 =$$

$$= \beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \alpha = 1.$$

Sînt satisfăcute următoarele condiții :

$$\beta_2 < \alpha + \delta, \ \beta_{10} + \beta_2 < \beta_7 + \alpha + \delta, \ \beta_9 < \delta + \alpha - \beta_2$$

Ecuații (6) devin :

$$x_N = b_{N-1}(a_{N-1} \cup x_{N-1}),$$

$$y_N = (a_{N-3} \cup b_{N-1})(a_{N-4} \cup \bar{x}_{N-1})(\bar{b}_{N-1} \cup y_{N-1} \cup \bar{x}_{N-1}),$$

$$w_N = b_{N-1}\, x_{N-1}\, \bar{a}_{N-1} \cup \bar{y}_{N-1}).$$

Să urmărim pe aceste ecuații funcționarea schemei în condițiile de mai sus :

	a	*b*	*x*	*y*	*w*	
starea ②	0	1	0	1	0	stabilă
acționăm pe *a*	1	1	0	1	0	
starea ④	1	1	1	1	0	
	1	1	1	0	0	
starea ⑥	1	1	1	0	1	
	1	1	1	0	1	stabilă

Schema se stabilizează în starea ⑥ în loc de ④.

Metoda aplicată ne-a dat care sînt condițiile ca schema să funcționeze conform programului : Schema luată ca exemplu prezintă fenomenul de „hazard" cînd condițiile (8) și (9) sau (8′) și (9′) nu sînt satisfăcute și acest fenomen poate fi evitat în condițiile arătate. Dacă nu existau condiții care se puteau satisface, trebuie schimbată schema într-una echivalentă algebric cu ea, care să nu mai prezinte acest fenomen.

Determinarea relațiilor (*3*). Pentru determinarea relațiilor (3) vom aplica două metode date de Gr. C. Moisil în [8] pentru schemele cu contacte și relee.

Fie z o variabilă atașată elementelor intermediare pe care le poate avea schema.

Ecuațiile de recurență ale schemei sînt de forma

$$z_{N+1} = F(a_N, b_N, z_N),$$

$$w_N = \Phi(a_N, b_N, z_N), \tag{10}$$

unde funcțiile F și Φ, precum și numărul de stări minime ale elementelor intermediare trebuie determinate în condițiile problemei.

Vom transcrie programul de funcționare al schemei dat schematic în graficul din figura 4, cu ajutorul relațiilor (10).

Se pornește din starea de repaus z_0 pentru care $a = 0$, $b = 0$, $w = 0$. Se notează prin z cu un indice starea intermediară care se obține prin schimbări asupra elementelor de comandă conform programului dat în enunț. Toate stările intermediare care se obțin se presupun distincte și sînt notate diferit prin indici diferiți. Alegerea indicilor s-a făcut în așa fel încît programul să fie mai ușor de urmărit și să se poată distinge părțile de program care se repetă.

Vom obține :

$$F(0, 0, z_0) = z_0, \qquad \Phi(0, 0, z_0) = 0,$$

$$F(0, 1, z_0) = z_1, \qquad \Phi(0, 1, z_0) = 0,$$

$$F(0, 1, z_1) = z_1, \qquad \Phi(0, 1, z_1) = 0,$$

$$F(0, 0, z_1) = z_{1'}, \qquad \Phi(0, 0, z_1) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{1'}) = z_{1'}, \qquad \Phi(0, 0, z_{1'}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{1'}) = z_{1'+1}, \qquad \Phi(0, 1, z_{1'}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{1'+1}) = z_{1'+1}, \qquad \Phi(0, 1, z_{1'+1}) = 0,$$

. . . .

$$F(0, 0, z_{1'k}) = z_{1'k}, \qquad \Phi(0, 0, z_{1'k}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{1'k}) = z_{1'k+1}, \qquad \Phi(0, 1, z_{1'k}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{1'k+1}) = z_{1'k+1}, \qquad \Phi(0, 1, z_{1'k+1}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{1'k+1}) = z_{1'(k+1)}, \qquad \Phi(0, 0, z_{1'k+1}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{1'(k+1)}) = z_{1'(k+1)}, \qquad \Phi(0, 0, z_{1'(k+1)}) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

. . . .

$$F(1, 1, z_{1'k+1}) = z_{3'k+3}, \qquad \Phi(1, 1, z_{1'k+1}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{3'k+3}) = z_{3'k+3}, \qquad \Phi(1, 1, z_{3'k+3}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{3'k+3}) = z_{6'k+6}, \qquad \Phi(1, 0, 2_{3'k+3}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{6'k+6}) = z_{6'k+6}, \qquad \Phi(1, 0, z_{6'k+6}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{3'k+3}) = z_{4'k+4}, \qquad \Phi(0, 1, z_{3'k+3}) = 1,$$

$$F(0,1, z_{4'k+4}) = z_{4'k+4}, \qquad \Phi(0,1, z_{4'k+4}) = 1,$$

$$F(0, 0, z_{4'k+4}) = z_{8'k+8}, \qquad \Phi(0; 0, z_{4'k+4}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{8'k+8}) = z_{8'k+8}, \qquad \Phi(0, 0, z_{8'k+8}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{4'k+4}) = z_{5'k+5}, \qquad \Phi(1, 1, z_{4'k+4}) = 1,$$

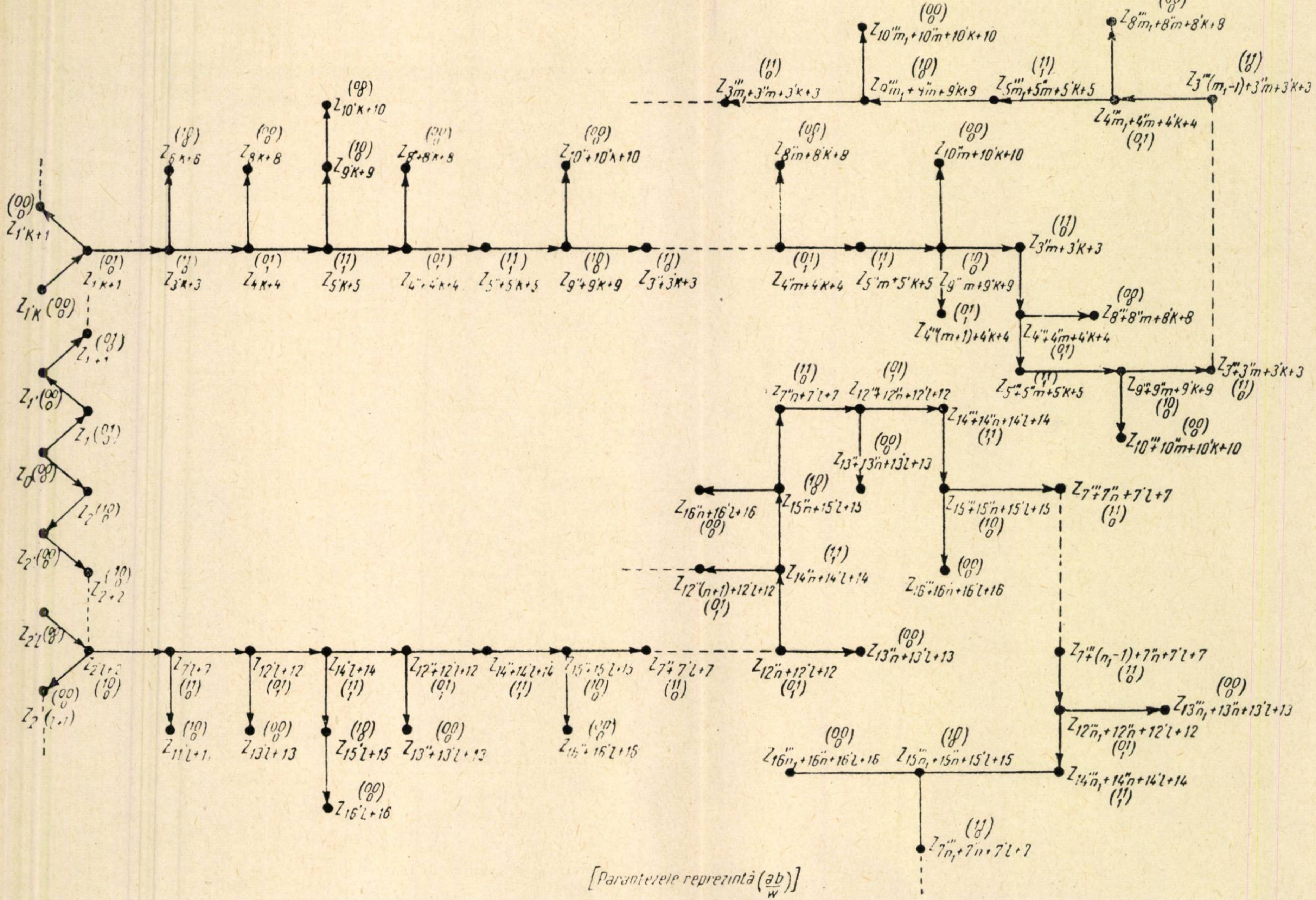
$$F(1, 1, z_{5'k+5}) = z_{5'k+5}, \qquad \Phi(1, 1, z_{5'k+5}) = 1,$$

$$F(1, 0, z_{5'k+5}) = z_{9'k+9}, \qquad \Phi(1, 0, z_{5'k+5}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{9'k+9}) = z_{9'k+9}, \qquad \Phi(1, 0, z_{9'k+9}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{9'k+9}) = z_{10'k+10}, \qquad \Phi(0, 0, z_{9'k+9}) = 0,$$

$$F(0,0, z_{10'k+10}) = z_{10'k+10}, \qquad \Phi(0,0; z_{10'k+10}) = 0,$$


$Z_{10'''m_1+10''m+10'K+10}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{8'''m_1+8''m+8'K+8}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{3'''m_1+3''m+3'K+3}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{9'''m_1+9''m+9'K+9}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{5'''m_1+5''m+5'K+5}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{3'''(m_1-1)+3''m+3'K+3}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{4'''m_1+4''m+4'K+4}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{10'K+10}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{9'K+9}$ $\binom{10}{0}$
Z_{6K+6} $\binom{10}{0}$
Z_{8K+8} $\binom{00}{0}$
$Z_{8''+8'K+8}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{10''+10'K+10}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{8''m+8'K+8}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{10''m+10'K+10}$ $\binom{00}{0}$
$\binom{00}{0}$ $Z_{1'K+1}$
Z_{1K+1} $\binom{01}{1}$
$Z_{3'K+3}$ $\binom{11}{0}$
Z_{4K+4} $\binom{01}{1}$
$Z_{5'K+5}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{4''+4'K+4}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{5''+5'K+5}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{9''+9'K+9}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{3''+3'K+3}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{4''m+4'K+4}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{5''m+5'K+5}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{9''m+9'K+9}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{3''m+3'K+3}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{4'''(m+1)+4'K+4}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{8'''+8''m+8'K+8}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{4'''+4''m+4'K+4}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{3'''+3''m+3'K+3}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{5'''+5''m+5'K+5}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{9'''+9''m+9'K+9}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{10'''+10''m+10'K+10}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{1'K}$ $\binom{00}{0}$
Z_{1+1} $\binom{01}{1}$
$Z_{1'}$ $\binom{00}{0}$
Z_1 $\binom{01}{1}$
Z_0 $\binom{00}{0}$
Z_2 $\binom{10}{0}$
$Z_{2'}$ $\binom{00}{0}$
Z_{2+2} $\binom{10}{0}$
$Z_{2'l}$ $\binom{00}{0}$
Z_{2l+2} $\binom{10}{0}$
$Z_{2'(l+1)}$ $\binom{00}{0}$
Z_{7l+7} $\binom{11}{0}$
Z_{12l+12} $\binom{01}{1}$
$Z_{14'l+14}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{12''+12'l+12}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{14''+14'l+14}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{15''+15'l+15}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{7''+7'l+7}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{11'l+11}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{13'l+13}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{15'l+15}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{13''+13'l+13}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{16''+16'l+16}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{16'l+16}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{7''n+7'l+7}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{12'''+12''n+12'l+12}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{14'''+14''n+14'l+14}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{13'''+13''n+13'l+13}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{16''n+16'l+16}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{15''n+15'l+15}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{15'''+15''n+15'l+15}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{7'''+7''n+7'l+7}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{12''(n+1)+12'l+12}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{14''n+14'l+14}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{16'''+16''n+16'l+16}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{12''n+12'l+12}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{13''n+13'l+13}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{7'''(n_1-1)+7''n+7'l+7}$ $\binom{11}{0}$
$Z_{13'''n_1+13''n+13'l+13}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{12'''n_1+12''n+12'l+12}$ $\binom{01}{1}$
$Z_{16'''n_1+16''n+16'l+16}$ $\binom{00}{0}$
$Z_{15'''n_1+15''n+15'l+15}$ $\binom{10}{0}$
$Z_{14'''n_1+14''n+14'l+14}$ $\binom{11}{1}$
$Z_{7'''n_1+7''n+7'l+7}$ $\binom{11}{0}$

[Parantezele reprezintă $\left(\frac{ab}{w}\right)$]

Fig. 4

$$F(0, 1, z_{5'k+5}) = z_{1''+4'k+4}, \qquad \Phi(0, 1, z_{5'k+5}) = 1,$$

$$F(0, 1, z_{4''+4'k+4}) = z_{4''+4'k+4}, \qquad \Phi(0, 1, z_{4''+4'k+4}) = 1,$$

$$F(0, 0, z_{4''+4'k+4}) = z_{8''+8'k+8}, \qquad \Phi(0, 0, z_{4''+4'k+4}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{8''+8'k+8}) = z_{8''+8'k+8}, \qquad \Phi(0, 0, z_{8''+8'k+8}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{4''+4'k+4}) = z_{5''+5'k+5}, \qquad \Phi(1, 1, z_{4''+4'k+4}) = 1,$$

$$F(1, 1, z_{5''+5'k+5}) = z_{5''+5'k+5}, \qquad \Phi(1, 1, z_{5''+5'k+5}) = 1,$$

$$F(1, 0, z_{5''+5'k+5}) = z_{9''+9'k+9}, \qquad \Phi(1, 0, z_{5''+5'k+5}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{9''+9'k+9}) = z_{9''+9'k+9}, \qquad \Phi(1, 0, z_{9''+9'k+9}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{9''+9'k+9}) = z_{10''+10'k+10}, \qquad \Phi(0, 0\ z_{9''+9'k+9}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{10''+10'k+10}) = z_{10''+10'k+10}, \qquad \Phi(0, 0, z_{10''+10'k+10}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{9''+9'k+9}) = z_{3''+3'k+3}, \qquad \Phi(1, 1, z_{9''+9'k+9}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{3''+3'k+3}) = z_{3''+3'k+3}, \qquad \Phi(1, 1, z_{3''+3'k+3}) = 0,$$

k dat

. . . .

$$F(0, 1, z_{4''m+4'k+4}) = z_{4''m+4'k+4}, \qquad \Phi(0, 1, z_{4''m+4'k+4}) = 1,$$

$$F(0, 0, z_{4''m+4'k+4}) = z_{8''m+8'k+8}, \qquad \Phi(0, 0, z_{4''m+4'k+4}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{8''m+8'k+8}) = z_{8''m+8'k+8}, \qquad \Phi(0, 0, z_{8''m+8'k+8}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{4''m+4'k+4}) = z_{5''m+5'k+5}, \qquad \Phi(1, 1, z_{4''m+4'k+4}) = 1,$$

$$F(1, 1, z_{5''m+5'k+5}) = z_{5''m+5'k+5}, \qquad \Phi(1, 1, z_{5''m+5'k+5}) = 1,$$

$$F(1, 0, z_{5''m+5'k+5}) = z_{9''m+9'k+9}, \qquad \Phi(1, 0, z_{5''m+5'k+5}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{9''m+9'k+9}) = z_{9''m+9'k+9}, \qquad \Phi(1, 0, z_{9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{9''m+9'k+9}) = z_{10''m+10'k+10}, \qquad \Phi(0, 0, z_{9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{10''m+10'k+10}) = z_{10''m+10'k+10}, \qquad \Phi(0, 0, z_{10''m+10'k+10}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{5''m+5'k+5}) = z_{4''(m+1)+4'k+4}, \qquad \Phi(0, 1, z_{5''m+5'k+5}) = 1,$$

$$F(0, 1, z_{4''(m+1)+4'k+4}) = z_{4''(m+1)+4'k+4}, \qquad \Phi(0, 1, z_{4''(m+1)+4'k+4}) = 1,$$

$$F(1, 1, z_{9''m+9'k+9}) = z_{3''m+3'k+3}, \qquad \Phi(1, 1, z_{9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{3''m+3'k+3}) = z_{3''m+3'k+3}, \qquad \Phi(1, 1, z_{3''m+3'k+3}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{3''m+3'k+3}) = z_{4'''+4''m+4'k+4}, \qquad \Phi(0, 1, z_{3''m+3'k+3}) = 1,$$

$$F(0, 1, z_{4'''+4''m+4'k+4}) = z_{4'''+4''m+4'k+4}, \qquad \Phi(0, 1, z_{4'''+4''m+4'k+4}) = 1,$$

$$F(0, 0, z_{4'''+4''m+4'k+4}) = z_{8'''+8''m+8'k+8}, \qquad \Phi(0, 0, z_{4'''+4''m+4'k+4}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{8'''+8''m+8'k+8}) = z_{8'''+8''m+8'k+8}, \quad \Phi(0, 0, z_{8'''+8''m+8'k+8}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{4'''+4''m+4'k+4}) = z_{5'''+5''m+5'k+5}, \quad \Phi(1, 1, z_{4'''+4''m+4'k+4}) = 1,$$

$$F(1, 1, z_{5'''+5''m+5'k+5}) = z_{5'''+5''m+5'k+5}, \quad \Phi(1, 1, z_{5'''+5''m+5'k+5}) = 1,$$

$$F(1, 0, z_{5'''+5''m+5'k+5}) = z_{9'''+9''m+9'k+9}, \quad \Phi(1, 0, z_{5'''+5''m+5'k+5}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{9'''+9''m+9'k+9}) = z_{9'''+9''m+9'k+9}, \quad \Phi(1, 0, z_{9'''+9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{9'''+9''m+9'k+9}) = z_{10'''+10''m+10'k+10}, \quad \Phi(0, 0, z_{9'''+9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{10'''+10''m+10'k+10}) = z_{10'''+10''m+10'k+10},$$

$$\Phi(0, 0, z_{10'''+10''m+10''k+10}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{9'''+9''m+9'k+9}) = z_{3'''+3''m+3'k+3}, \quad \Phi(1, 1, z_{9'''+9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{3'''+3''m+3'k+3}) = z_{3'''+3''m+3'k+3}, \quad \Phi(1, 1, z_{3'''+3''m+3'k+3}) = 0,$$

$$m = 0,\ 1,\ 2, \ldots, k \text{ dat}$$

. . . .

$$F(1, 1, z_{3'''(m_1-1)+3''m+3'k+3}) = z_{3'''(m_1-1)+3''m+3'k+3},$$

$$\Phi(1, 1, z_{3'''(m_1-1)+3''m+3'k+3}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{3'''(m_1-1)+3''m+3'k+3}) = z_{4'''m_1+4''m+4'k+4},$$

$$\Phi(0, 1, z_{3'''(m_1-1)+3''m+3'k+3}) = 1.$$

$$F(0, 1, z_{4'''m_1+4''m+4'k+4}) = z_{4'''m_1+4''m+4'k+4},$$

$$\Phi(0, 1, z_{4'''m_1+4''m+4'k+4}) = 1,$$

$$F(0, 0, z_{4'''m_1+4''m+4'k+4}) = z_{8'''m_1+8''m+8'k+8},$$

$$\Phi(0, 0, z_{4'''m_1+4''m+4'k+4}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{8'''m_1+8''m+8'k+8}) = z_{8'''m_1+8''m+8'k+8},$$

$$\Phi(0, 0, z_{8'''m_1+8''m+8'k+8}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{4'''m_1+4''m+4'k+4}) = z_{5'''m_1+5''m+5'k+5},$$

$$\Phi(1, 1, z_{4'''m_1+4''m+4'k+4}) = 1,$$

$$F(1, 1, z_{5'''m_1+5''m+5'k+5}) = z_{5'''m_1+5''m+5'k+5},$$

$$\Phi(1, 1, z_{5'''m_1+5''m+5'k+5}) = 1,$$

$$F(1, 0, z_{5'''m_1+5''m+5'k+5}) = z_{9'''m_1+9''m+9'k+9},$$

$$\Phi(1, 0, z_{5'''m_1+5''m+5'k+5}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{9'''m_1+9''m+9'k+9}) = z_{9'''m_1+9''m+9'k+9},$$

$$\Phi(1, 0, z_{9'''m_1+9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F\,(0,\,0,\,z_{9'''m_1+9''m+9'k+9}) = z_{10'''m_1+10''m+10'k+10},$$

$$\Phi\,(0,\,0,\,z_{9'''m_1+9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F\,(0,\,0,\,z_{10'''m_1+10''m+10'k+10}) = z_{10'''m_1+10''m+10'k+10},$$

$$\Phi\,(0,\,0,\,z_{10'''m_1+10''m+10'k+10}) = 0,$$

$$F\,(1,\,1,\,z_{9'''m_1+9''m+9'k+9}) = z_{3'''m_1+3''m+3'k+3},$$

$$\Phi\,(1,\,1,\,z_{9'''m_1+9''m+9'k+9}) = 0,$$

$$F\,(1,\,1,\,z_{3'''m_1+3''m+3'k+3}) = z_{3'''m_1+3''m+3'k+3},$$

$$\Phi\,(1,\,1,\,z_{3'''m_1+3''m+3'k+3}) = 0,$$

$$\mathrm{m} = 1,\,2,\,\ldots,\,\mathrm{k}\ \text{și}\ m\ \text{dați}$$

. . . .

$$F\,(1,0,z_0) = z_2, \qquad \Phi\,(1,0,z_0) = 0,$$

$$F\,(1,0,z_2) = z_2, \qquad \Phi\,(1,0,z_2) = 0,$$

$$F\,(0,0,z_2) = z_{2'}, \qquad \Phi\,(0,0,z_2) = 0,$$

$$F\,(0,0,z_{2'}) = z_{2'}, \qquad \Phi\,(0,0,z_{2'}) = 0,$$

$$F\,(1,0,z_{2'}) = z_{2'+2}, \qquad \Phi\,(1,0,z_{2'+2}) = 0,$$

$$F\,(1,0,z_{2'+2}) = z_{2'+2}, \qquad \Phi\,(1,0,z_{2'+2}) = 0,$$

$$F\,(0,0,z_{2'l}) = z_{2'l}, \qquad \Phi\,(0,0,z_{2'l}) = 0,$$

$$F\,(1,0,z_{2'l}) = z_{2'l+2}, \qquad \Phi\,(1,0,z_{2'l}) = 0,$$

$$F\,(1,0,z_{2'l+2}) = z_{2'l+2}, \qquad \Phi\,(1,0,z_{2'l+2}) = 0,$$

$$F\,(0,0,z_{2'l+2}) = z_{2'(l+1)}, \qquad \Phi\,(0,0,z_{2'l+2}) = 0,$$

$$F\,(0,0,z_{2'(l+1)}) = z_{2'(l+1)} \qquad \Phi\,(0,0,z_{2'(l+1)}) = 0, \quad l = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

. . . .

$$F\,(1,1,z_{2'l+2}) = z_{7'l+7}, \qquad \Phi\,(1,1,z_{2'l+2}) = 0,$$

$$F\,(1,1,z_{7'l+7}) = z_{7'l+7}, \qquad \Phi\,(1,1,z_{7'l+7}) = 0,$$

$$F\,(1,0,z_{7'l+7}) = z_{11'l+11}, \qquad \Phi\,(1,0,z_{7'l+7}) = 0,$$

$$F\,(1,0,z_{11'l+11}) = z_{11'l+11}, \qquad \Phi\,(1,0,z_{11'l+11}) = 0,$$

$$F\,(0,1,z_{7'l+7}) = z_{12'l+12}, \qquad \Phi\,(0,1,z_{7'l+7}) = 1,$$

$$F\,(0,1,z_{12'l+12}) = z_{12'l+12}, \qquad \Phi\,(0,1,z_{12'l+12}) = 1,$$

$$F\,(0,0,z_{12'l+12}) = z_{13'l+13}, \qquad \Phi\,(0,0,z_{12'l+12}) = 0,$$

$$F(0,0,z_{13'l+13}) = z_{13'l+13}, \qquad \Phi(0,0,z_{13'l+13}) = 0,$$
$$F(1,1,z_{12'l+12}) = z_{14'l+14}, \qquad \Phi(1,1,z_{12'l+12}) = 1,$$
$$F(1,1,z_{14'l+14}) = z_{14'l+14}, \qquad \Phi(1,1,z_{14'l+14}) = 1,$$
$$F(1,0,z_{14'l+14}) = z_{15'l+15}, \qquad \Phi(1,0,z_{14'l+14}) = 0,$$
$$F(1,0,z_{15'l+15}) = z_{15'l+15}, \qquad \Phi(1,0,z_{15'l+15}) = 0,$$
$$F(0,0,z_{15'l+15}) = z_{16'l+16}, \qquad \Phi(0,0,z_{15'l+15}) = 0,$$
$$F(0,0,z_{16'l+16}) = z_{16'l+16}, \qquad \Phi(0,0,z_{16'l+16}) = 0,$$
$$F(0,1,z_{14'l+14}) = z_{12''+12'l+12}, \qquad \Phi(0,1,z_{14'l+14}) = 1,$$
$$F(0,1,z_{12''+12'l+12}) = z_{12''+12'l+12}, \qquad \Phi(0,1,z_{12''+12'l+12}) = 1,$$
$$F(0,0,z_{12''+12'l+12}) = z_{13''+13'l+13}, \qquad \Phi(0,0,z_{12''+12'l+12}) = 0,$$
$$F(0,0,z_{13''+13'l+13}) = z_{13''+13'l+13}, \qquad \Phi(0,0,z_{13''+13'l+13}) = 0,$$
$$F(1,1,z_{12''+12'l+12}) = z_{14''+14'l+14}, \qquad \Phi(1,1,z_{12''+12'l+12}) = 1,$$
$$F(1,1,z_{14''+14'l+14}) = z_{14''+14'l+14}, \qquad \Phi(1,1,z_{14''+14'l+14}) = 1,$$
$$F(1,0,z_{14''+14'l+14}) = z_{15''+15'l+15}, \qquad \Phi(1,0,z_{14''+14'l+14}) = 0,$$
$$F(1,0,z_{15''+15'l+15}) = z_{15''+15'l+15}, \qquad \Phi(1,0,z_{15''+15'l+15}) = 0,$$
$$F(0,0,z_{15''+15'l+15}) = z_{16''+16'l+16}, \qquad \Phi(0,0,z_{15''+15'l+15}) = 0,$$
$$F(0,0,z_{16''+16'l+16}) = z_{16''+16'l+16}, \qquad \Phi(0,0,z_{16''+16'l+16}) = 0,$$
$$F(1,1,z_{15''+15'l+15}) = z_{7''+7'l+7} \qquad \Phi(1,1,z_{15''+15'l+15}) = 0,$$
$$F(1,1,z_{7''+7'l+7}) = z_{7''+7'l+7}, \qquad \Phi(1,1,z_{7''+7'l+7}) = 0,$$

. . . . *l* dat

$$F(0,1,z_{12''n+12'l+12}) = z_{12''n+12'l+12}, \qquad \Phi(0,1,z_{12''n+12'l+12}) = 1,$$
$$F(0,0,z_{12''m+12'l+12}) = z_{13''n+13'l+13}, \qquad \Phi(0,0,z_{12''n+12'l+12}) = 0,$$
$$F(0,0,z_{13''n+13'l+13}) = z_{13''n+13'l+13}, \qquad \Phi(0,0,z_{13''n+13'l+13}) = 0,$$
$$F(1,1,z_{12''n+12'l+12}) = z_{14''n+14'l+14}, \qquad \Phi(1,1,z_{12''n+12'l+12}) = 1,$$
$$F(1,1,z_{14''n+14'l+14}) = z_{14''n+14'l+14}, \qquad \Phi(1,1,z_{14''n+14'l+14}) = 1,$$
$$F(1,0,z_{14''n+14'l+14}) = z_{15''n+15'l+15}, \qquad \Phi(1,0,z_{14''n+14'l+14}) = 0,$$
$$F(1,0,z_{15''n+15'l+15}) = z_{15''n+15'l+15}, \qquad \Phi(1,0,z_{15''n+15'l+15}) = 0,$$
$$F(0,0,z_{15''n+15'l+15}) = z_{16''n+16'l+16}, \qquad \Phi(0,0,z_{15''n+15'l+15}) = 0,$$
$$F(0,0,z_{16''n+16'l+16}) = z_{16''n+16'l+16}, \qquad \Phi(0,0,z_{16''n+16'l+16}) = 0,$$
$$F(0,1,z_{14''n+14'l+14}) = z_{12''(n+1)+12'l+12}, \qquad \Phi(1,0,z_{14''n+14'l+14}) = 1,$$

$$F(0, 1, z_{12''(n+1)+12'l+12}) = z_{12''(n+1)+12'l+12}; \qquad \Phi(0, 1, z_{12''(n+1)+12'l+12}) = 1,$$

$$F(1, 1, z_{15''n+15'l+15}) = z_{7''n+7'l+7}, \qquad \Phi(1, 1, z_{15''n+15'l+15}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{7''n+7'l+7}) = z_{7''n+7'l+7}, \qquad \Phi(1, 1, z_{7''n+7'l+7}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{7''n+7'l+7}) = z_{12'''+12''n+12'l+12}, \qquad \Phi(0, 1, z_{7''n+7'l+7}) = 1,$$

$$F(0, 1, z_{12'''+12''n+12'l+12}) = z_{12'''+12''n+12'l+12}, \qquad \Phi(0, 1, z_{12'''+12n+12'l+12}) = 1,$$

$$F(0, 0, z_{12'''+12''n+12'l+12}) = z_{13'''+13''n+13'l+13},$$

$$\Phi(0, 0, z_{12'''+12''n+12'l+12}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{13'''+13''n+13'l+13}) = z_{13'''+13''n+13'l+13}, \qquad \Phi(0, 0, z_{13'''+13''n+13'l13}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{12'''+12''n+12'l+12}) = z_{14'''+14''n+14'l+14},$$

$$\Phi(1, 1, z_{12'''+12''n+12'l+12}) = 1,$$

$$F(1, 1, z_{14'''+14''n+14'l+14}) = z_{14'''+14''n+14'l+14},$$

$$\Phi(1, 1, z_{14'''+14''n+14'l+14}) = 1,$$

$$F(1, 0, z_{14'''+14''n+14'l+14}) = z_{15'''+15''n+15'l+15},$$

$$\Phi(1, 0, z_{14'''+14''n+14'l+14}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{15'''+15''n+15'l+15}) = z_{15'''+15''n+15'l+15}, \qquad \Phi(1, 0, z_{15'''+15''n+15'l+15}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{15'''+15''n+15'l+15}) = z_{16'''+16''n+16'l+16},$$

$$\Phi(0, 0, z_{15'''+15''n+15'l+15}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{16'''+16''n+16'l+16}) = z_{16'''+16''n+16'l+16},$$

$$\Phi(0, 0, z_{16'''+16''n+16'l+16}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{15'''+15''n+15'l+15}) = z_{7'''+7''n+7'l+7},$$

$$\Phi(1, 1, z_{15'''+15''n+15'l+15}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{7'''+7''n+7'l+7}) = z_{7'''+7''n+7'l+7}, \qquad \Phi(1, 1, z_{7'''+7''n+7'l+7}) = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, l \text{ dat.}$$

. . . .

$$F(1, 1, z_{7'''(n_1-1)7''n+7'l+7}) = z_{7'''(n_1-1)+7''n+7'l+7}$$

$$\Phi(1, 1, z_{7'''(n_1-1)+7''n+7'l+7}) = 0,$$

$$F(0, 1, z_{7'''(n_1-1)+7''n+7'l+7}) = z_{12'''n_1+12''n+12'l+12},$$

$$\Phi(0, 1, z_{7'''(n_1-1)+7''n+7'l+7}) = 1,$$

$$F(0, 1, z_{12'''n_1+12''n+12'l+12}) = z_{12'''n_1+12''n+12'l+12},$$

$$\Phi(0, 1, z_{12'''n_1+12''n+12'l+12}) = 1,$$

$$F(0, 0, z_{12'''n_1+12''n+12'l+12}) = z_{13'''n_1+13''n+13'l+13},$$

$$\Phi(0, 0, z_{12'''n_1+12''n+12'l+12}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{13'''n_1+13''n+13'l+13}) = z_{13'''n_1+13''n+13'l+3},$$

$$\Phi(0, 0, z_{13'''n_1+13''n+13'l+13}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{12'''n_1+12''n+12'l+12}) = z_{14'''n_1+14''n+14'l+14},$$

$$\Phi(1, 1, z_{12'''n_1+12''n+12'l+12}) = 1,$$

$$F(1, 1, z_{14'''n_1+14''n+14'l+14}) = z_{14'''n_1+14''n+14'l+14},$$

$$\Phi(1, 1, z_{14'''n_1+14''n+14'l+14}) = 1,$$

$$F(1, 0, z_{14'''n_1+14''n+14'l+14}) = z_{15'''n_1+15''n+15'l+15},$$

$$\Phi(1, 0, z_{14'''n_1+14''n+14'l+14}) = 0,$$

$$F(1, 0, z_{15'''n_1+15''n+15'l+15}) = z_{15'''n_1+15''n+15'l+15},$$

$$\Phi(1, 0, z_{15'''n_1+15''n+15'l+15}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{15'''n_1+15''n+15'l+15}) = z_{16'''n_1+16''n+16'l+16},$$

$$\Phi(0, 0, z_{15'''n_1+15''n+15'l+15}) = 0,$$

$$F(0, 0, z_{16'''n_1+16''n+16'l+16}) = z_{16'''n_1+16''n+16'l+16},$$

$$\Phi(0, 0, z_{16'''n_1+16''n+11'l+16}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{15'''n_1+15''n+15'l+15}) = z_{7'''n_1+7''n+7'l+7},$$

$$\Phi(1, 1, z_{15'''n_1+15''n+15'l+15}) = 0,$$

$$F(1, 1, z_{7'''n_1+7''n+7'l+7}) = z_{7'''n_1+7''n+7'l+7},$$

$$\Phi(1, 1, z_{7'''n_1+7''n+7'l+7}) = 0,$$

$n_1 = 1, 2, \ldots, l$ și n dați

. . . .

Observăm că putem lua:

$$z_0 = z_{1'k} = z_{8'k+8} = z_{10'k+10} = z_{8''m+8'k+8} = z_{10''m+10'k+10} =$$
$$= z_{8'''m_1+8''m+8'k+8} = z_{10'''m_1+10''m+10'k+10} = z_{2'l} = z_{13'l+13} =$$
$$= z_{16'l+16} = z_{13''n+13'l+13} = z_{16''n+16'l+16} =$$
$$= z_{13'''n_1+13''n+13'l+13} = z_{16'''n_1+16''n+16'l+16}$$

$$z_1 = z_{1'k+1}$$

$$z_2 = z_{6'k+6} = z_{9'k+9} = z_{9''m+9'k+9} = z_{9'''m_1+9''m+9'k+9} = z_{2'l+2} =$$
$$= z_{11'l+11} = z_{15'l+15} = z_{15''n+15'l+15} = z_{15'''n_1+15''n+15'l+15}$$

$$z_3 = z_{3'k+3} = z_{3''m+3'k+3} = z_{3'''m_1+3''m+3'k+3} = z_{7'l+7} =$$

$$= z_{7''n+7'l+7} = z_{7'''n_1+7''n+7'l+7}$$

$$z_4 = z_{4'k+4} = z_{4''m+4'k+4} = z_{4'''m_1+4''m+4'k+4} = z_{12'l+12} =$$

$$= {}_{12''n+12'l+12} = z_{12''n_1+12''n+12'l+12}$$

$$z_5 = z_{5k'+5} = z_{5''m+5'k+5} = z_{5'''m_1+5''m+5'k+5} = z_{14'l+14} =$$

$$= z_{14''n+14'l+14} = z_{14'''n_1+14''n+14'l+14}$$

pentru toate valorile lui k, l, m, m_1, n, n_1.

În aceste condiţii graficul din figura 4 devine cel din figura 5.

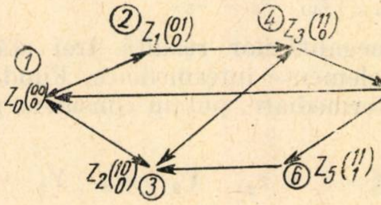

①
$Z_0\binom{00}{0}$
② $Z_1\binom{01}{0}$
④ $Z_3\binom{11}{0}$
⑤
$Z_4\binom{01}{1}$
$Z_2\binom{10}{0}$ ③
⑥ $Z_5\binom{11}{1}$

Fig. 5

Vom transcrie programul de funcţionare al schemei dat de graficul din figura 5. Vom obţine :

$F(0, 0, z_0) = z_0$, $\Phi(0, 0, z_0) = 0$,

$F(0, 1, z_0) = z_1$, $\Phi(0, 1, z_0) = 0$,

$F(0, 1, z_1) = z_1$, $\Phi(0, 1, z_1) = 0$,

$F(0, 0, z_1) = z_0$, $\Phi(0, 0, z_1) = 0$,

$F(1, 0, z_0) = z_2$, $\Phi(1, 0, z_0) = 0$,

$F(1, 0, z_2) = z_2$, $\Phi(1, 0, z_2) = 0$,

$F(0, 0, z_2) = z_0$, $\Phi(0, 0, z_2) = 0$

$F(1, 1, z_1) = z_3$, $\Phi(1, 1, z_1) = 0$,

$F(1, 1, z_3) = z_3$, $\Phi(1, 1, z_3) = 0$,

$F(1, 0, z_3) = z_2$, $\Phi(1, 0, z_3) = 0$.

$F(1, 1, z_2) = z_3$, $\Phi(1, 1, z_2) = 0$,

$F(0, 1, z_3) = z_4$, $\Phi(0, 1, z_3) = 1$,

$F(0, 1, z_4) = z_4$, $\Phi(0, 1, z_4) = 1$,

$F(0, 0, z_4) = z_0$, $\Phi(0, 0, z_4) = 0$

$F(1, 1, z_4) = z_5$, $\Phi(1, 1, z_4) = 1$,

$$F(1, 1, z_5) = z_5, \quad \Phi(1, 1, z_5) = 1,$$
$$F(0, 1, z_5) = z_4, \quad \Phi(0, 1, z_5) = 1,$$
$$F(1, 0, z_5) = z_5, \quad \Phi(1, 0, z_5) = 0.$$

Comparînd între ele valorile diferite ale lui Φ pentru aceleași valori ale comenzilor a și b și în continuare același lucru pentru F, rezultă

$$\begin{aligned} & z_0 \neq z_3, \quad z_0 \neq z_4, \quad z_0 \neq z_5, \\ & z_1 \neq z_3, \quad z_1 \neq z_4, \quad z_1 \neq z_5, \\ & z_2 \neq z_4, \quad z_2 \neq z_5, \\ & z_3 \neq z_4, \quad z_3 \neq z_5. \end{aligned} \tag{11}$$

Din examinarea inegalităților rezultă trei stări independente și deci sînt necesare două elemente intermediare. Fiindcă trebuie să introducem două elemente intermediare, putem considera patru stări independente și anume:

$$Y_0 = z_0, \quad Y_1 = z_1 = z_2, \quad Y_2 = z_3, \quad Y_3 = z_4 = z_5. \tag{12}$$

Aceasta corespunde la transformarea graficului din figura 5 în cel din figura 6.

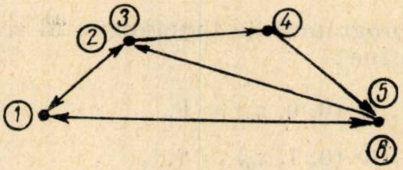


Fig. 6

Cu notațiile (12), programul de funcționare devine:

$$F(0, 0, Y_0) = Y_0, \quad \Phi(0, 0, Y_0) = 0,$$
$$F(0, 1, Y_0) = Y_1, \quad \Phi(0, 1, Y_0) = 0,$$
$$F(0, 1, Y_1) = Y_1, \quad \Phi(0, 1, Y_1) = 0,$$
$$F(0, 0, Y_1) = Y_0, \quad \Phi(0, 0, Y_1) = 0,$$
$$F(1, 0, Y_0) = Y_1, \quad \Phi(1, 0, Y_0) = 0,$$
$$F(1, 0, Y_1) = Y_1, \quad \Phi(1, 0, Y_1) = 0,$$
$$F(1, 1, Y_1) = Y_2, \quad \Phi(1, 1, Y_1) = 0,$$
$$F(1, 1, Y_2) = Y_2, \quad \Phi(1, 1, Y_2) = 0,$$
$$F(1, 0, Y_2) = Y_1, \quad \Phi(1, 0, Y_2) = 0,$$
$$F(0, 1, Y_2) = Y_3, \quad \Phi(0, 1, Y_2) = 1,$$
$$F(0, 1, Y_3) = Y_3, \quad \Phi(0, 1, Y_3) = 1,$$

$$F(0, 0, Y_3) = Y_0, \quad \Phi(0, 0, Y_3) = 0,$$
$$F(1, 1, Y_3) = Y_3, \quad \Phi(1, 1, Y_3) = 1,$$
$$F(1, 0, Y_3) = Y_1, \quad \Phi(1, 0, Y_3) = 0.$$

Notăm cu X şi Y elementele intermediare şi alegem stările lor în felul următor :

$$\begin{array}{ccc} & x & y \\ Y_0 & 0 & 0 \\ Y_1 & 0 & 1 \\ Y_2 & 1 & 1 \\ Y_3 & 1 & 0 \end{array} \tag{13}$$

Notăm funcţiile de lucru ale elementelor intermediare cu

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= f(a_N, b_N, x_N, y_N), \\ y_{N+1} &= g(a_N, b_N, x_N, y_N). \end{aligned} \tag{14}$$

În urma alegerii (13) a stărilor elementelor X şi Y transcriem programul de funcţionare pentru f, g şi Φ. Vom obţine :

$$f(0, 0, 0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \Phi(0, 0, 0, 0) = 0,$$
$$f(0, 1, 0, 0) = 0, \quad g(0, 1, 0, 0) = 1, \quad \Phi(0, 1, 0, 0) = 0,$$
$$f(0, 1, 0, 1) = 0, \quad g(0, 1, 0, 1) = 1, \quad \Phi(0, 1, 0, 1) = 0,$$
$$f(0, 0, 0, 1) = 0, \quad g(0, 0, 0, 1) = 0, \quad \Phi(0, 0, 0, 1) = 0,$$
$$f(1, 0, 0, 0) = 0, \quad g(1, 0, 0, 0) = 1, \quad \Phi(1, 0, 0, 0) = 0,$$
$$f(1, 0, 0, 1) = 0, \quad g(1, 0, 0, 1) = 1, \quad \Phi(1, 0, 0, 1) = 0,$$
$$f(1, 1, 0, 1) = 1, \quad g(1, 1, 0, 1) = 1, \quad \Phi(1, 1, 0, 1) = 0,$$
$$f(1, 1, 1, 1) = 1, \quad g(1, 1, 1, 1) = 1, \quad \Phi(1, 1, 1, 1) = 0,$$
$$f(1, 0, 1, 1) = 0, \quad g(1, 0, 1, 1) = 1, \quad \Phi(1, 0, 1, 1) = 0,$$
$$f(0, 1, 1, 1) = 1, \quad g(0, 1, 1, 1) = 0, \quad \Phi(0, 1, 1, 1) = 1,$$
$$f(0, 1, 1, 0) = 1, \quad g(0, 1, 1, 0) = 0, \quad \Phi(0, 1, 1, 0) = 1,$$
$$f(0, 0, 1, 0) = 0, \quad g(0, 0, 1, 0) = 0, \quad \Phi(0, 0, 1, 0) = 0,$$
$$f(1, 1, 1, 0) = 1, \quad g(1, 1, 1, 0) = 0, \quad \Phi(1, 1, 1, 0) = 1,$$
$$f(1, 0, 1, 0) = 0, \quad g(1, 0, 1, 0) = 1, \quad \Phi(1, 0, 1, 0) = 0.$$

Pentru stările care au rămas nedeterminate, considerăm :

$$f(1, 1, 0, 0) = 1, \quad g(1, 1, 0, 0) = 1, \quad \Phi(1, 1, 0, 0) = 0,$$

$$f(0, 0, 1, 1) = 0, \quad g(0, 0, 1, 1) = 0, \quad \Phi(0, 0, 1, 1) = 0.$$

În felul acesta funcțiile f, g, și Φ sînt perfect determinate și obținem relațiile de recurență ale schemei :

$$x_{N+1} = \xi_N, \quad y_{N+1} = \eta_N$$

$$\xi_N = a_N b_N \bar{x}_N y_N \cup a_N b_N x_N y_N \cup \bar{a}_N b_N x_N y_N \cup \bar{a}_N b_N x_N \bar{y}_N \cup$$

$$\cup a_N b_N x_N \bar{y}_N \cup a_N b_N \bar{x}_N \bar{y}_N = a_N b_N \cup b_N x_N = b_N (a_N \cup x_N),$$

$$\eta_N = \bar{a}_N b_N \bar{x}_N y_N \cup \bar{a}_N b_N \bar{x}_N y_N \cup a_N \bar{b}_N \bar{x}_N \bar{y}_N \cup a_N \bar{b}_N \bar{x}_N y_N \cup$$

$$\cup a_N b_N \bar{x}_N y_N \cup a_N b_N x_N y_N \cup a_N \bar{b}_N x_N y_N \cup a_N \bar{b}_N x_N \bar{y}_N \cup$$

$$\cup a_N b_N \bar{x}_N \bar{y}_N = a_N \bar{b}_N \cup b_N \bar{x}_N \cup a_N y_N = a_N (\bar{b}_N \cup y_N) \cup b_N \bar{x}_N =$$

$$= (a_N \cup b_N \bar{x}_N)(\bar{b}_N \cup y_N \cup b_N \bar{x}_N) = (a_N \cup b_N)(a_N \cup \bar{x}_N)(\bar{b}_N \cup$$

$$\cup y_N \cup \bar{x}_N) = (a_N \cup b_N)(a_N \cup \bar{x}_N) \overline{b_N \bar{y}_N x_N},$$

$$w_N = \bar{a}_N b_N x_N y_N \cup \bar{a}_N b_N x_N \bar{y}_N \cup a_N b_N x_N \bar{y}_N = \bar{a}_N b_N x_N y_N \cup$$

$$\cup b_N x_N \bar{y}_N = b_N x_N (\bar{a}_N \cup \bar{y}_N).$$

de unde rezultă relațiile (3).

Reținem următoarea formă a ecuațiilor (3) ale schemei :

$$x_N = b_{N-1}(a_{N-1} \cup x_{N-1}),$$

$$y_N = a_{N-1} \bar{b}_{N-1} \cup b_{N-1} \bar{x}_{N-1} \cup a_{N-1} y_{N-1}, \tag{15}$$

$$w_N = b_N (x_N \bar{a}_N \cup x_N \bar{y}_N).$$

O altă metodă dată de Gr. C. Moisil în [8] constă în scrierea formulelor de recurență direct din text.

Din enunțul problemei se vede că w devine 1 după ce se realizează succesiunea $a = 1$, $b = 1$ în $a = 0$, $b = 1$ și această stare se menține indiferent de starea lui a. Deci

$$w_N = \bar{a}_N b_N a_{N-1} b_{N-1} \cup b_N w_{N-1} = b_N (\bar{a}_N b_{N-1} a_{N-1} \cup w_{N-1}). \tag{16}$$

Să arătăm echivalența formulelor (15) și (16).

Pentru a elimina pe x și y din (15), observăm că :

$$x_N \bar{y}_N = b_{N-1}(a_{N-1} \cup x_{N-1}) [(\bar{a}_{N-1} \cup b_{N-1})(\bar{b}_{N-1} \cup x_{N-1})(\bar{a}_{N-1} \cup$$

$$\cup y_{N-1})] = b_{N-1}(a_{N-1} \cup x_{N-1}) [(\bar{a}_{N-1} \cup b_{N-1} \bar{y}_{N-1})(\bar{b}_{N-1} \cup x_{N-1})] =$$

$$= b_{N-1}(a_{N-1} \cup x_{N-1}) [\bar{a}_{N-1}(\bar{b}_{N-1} \cup x_{N-1}) \cup x_{N-1} b_{N-1} \bar{y}_{N-1}] =$$

$$= b_{N-1} x_{N-1} (a_{N-1} \cup x_{N-1}) [\bar{a}_{N-1} \cup \bar{y}_{N-1}) = w_{N-1}$$

şi deci

$$w_N = b_N (x_N \bar{a}_N \cup w_{N-1}).$$

Însă

$$x_N = b_{N-1} a_{N-1} \cup b_{N-1} x_{N-1} (\bar{a}_{N-1} \cup \bar{y}_{N-1} \cup a_{N-1} y_{N-1}) =$$
$$= b_{N-1} a_{N-1} \cup w_{N-1} \cup b_{N-1} a_{N-1} x_{N-1} y_{N-1} = b_{N-1} a_{N-1} \cup w_{N-1}.$$

Atunci

$$w_N = b_N [\bar{a}_N (b_{N-1} a_{N-1} \cup w_{N-1}) \cup w_{N-1}] = b_N [\bar{a}_N b_{N-1} a_{N-1} \cup w_{N-1}]$$

adică (16).

Acum în (16) notăm două stări intermediare cu expresiile :

$$x_N = w_{N-1} \cup b_{N-1} a_{N-1},$$
$$\bar{y}_N = w_{N-1} \cup \bar{b}_{N-1} \bar{a}_{N-1}.$$

Observăm că

$$x_N \bar{y}_N = w_{N-1}.$$

Deci w_N din (16) devine :

$$w_N = b_N (\bar{a}_N x_N \cup a_N w_{N-1}) = b_N (\bar{a}_N x_N \cup a_N x_N \bar{y}_N) =$$
$$= b_N x_N (\bar{a}_N \cup a_N \bar{y}_N) = b_N x_N (\bar{a}_N \cup \bar{y}_N)$$

care ne dă a treia formulă (15).

Înlocuind această expresie în notaţiile făcute anterior, obţinem :

$$x_N = b_{N-1} x_{N-1} (\bar{a}_{N-1} \cup \bar{y}_{N-1}) \cup b_{N-1} a_{N-1} = b_{N-1} [a_{N-1} \cup \bar{a}_{N-1} x_{N-1} \cup$$
$$\cup \bar{y}_{N-1} x_{N-1}] = b_{N-1} (a_{N-1} \cup x_{N-1})$$

adică prima formulă (15)

Pe de altă parte se obţine :

$$\bar{y}_N = b_{N-1} x_{N-1} (\bar{a}_{N-1} \cup \bar{y}_{N-1}) \cup \bar{b}_{N-1} \bar{a}_{N-1} = x_{N-1} \bar{a}_{N-1} \cup$$
$$\cup b_{N-1} x_{N-1} \bar{y}_{N-1} \cup \bar{b}_{N-1} \bar{a}_{N-1}$$

şi deci

$$y_N = (\bar{x}_{N-1} \cup a_{N-1}) (\bar{b}_{N-1} \cup \bar{x}_{N-1} \cup y_{N-1}) (b_{N-1} \cup a_{N-1}) =$$
$$= [\bar{x}_{N-1} \cup a_{N-1} (\bar{b}_{N-1} \cup y_{N-1})] (b_{N-1} \cup a_{N-1}) =$$
$$= [\bar{x}_{N-1} (b_{N-1} \cup a_{N-1}) \cup a_{N-1} (\bar{b}_{N-1} \cup y_{N-1})] =$$
$$= \bar{x}_{N-1} b_{N-1} \cup \bar{x}_{N-1} a_{N-1} (b_{N-1} \cup \bar{b}_{N-1}) \cup a_{N-1} \bar{b}_{N-1} \cup a_{N-1} y_{N-1} =$$
$$= \bar{x}_{N-1} b_{N-1} \cup a_{N-1} \bar{b}_{N-1} \cup a_{N-1} y_{N-1}.$$

adică a 2-a formulă (15) şi deci echivalenţa formulelor (15) şi (16) este demonstrată.

Primită la redacţie la 20 ianuarie 1965

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Samuel H. Caldwell, *Switching circuits and logical design*. New York, 1958.
2. E. J. Mc Cluskey, Jr., *Transinents in combinational logic circuits*. Redundancy techniques for computing systems 1962.
3. David A-Huffman, *The design and use of hazard-free switching net-works*. J. Assoc. Comput. Mach. **4**, 47—62 (1957).
4. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Editura tehnică, Bucureşti, 1959.
5. Gr. C. Moisil, *Analiza, sinteza şi simplificarea circuitelor cu tuburi electronice, cu transistori şi cu criotroni*. St. cerc. mat., **X**, 173 (1959).
6. Gr. C. Moisil, *Întrebuinţarea logicelor trivalente în teoria mecanismelor automate în scheme cu contacte reale*. Com. Acad. R.P.R., **VI**, *3*, 385 (1956).
7. Gr. C. Moisil, *Circuite cu transistori*, vol. I şi II. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962.
8. Gr. C. Moisil, *On the Synthesis of switching circuits with relays and contacts or with Electronic and Solid-state Devices*. Automatic and Remote contro-proceedings of the international Congres of the International Federation of Automatic Control Moscow, 1960.
9. Mariana Nedelcu, *Analiza unor scheme cu relee temporizate*. Bul. ştinţ. Acad. R.P.R., **7**, *1*, 19—32 (1955).
10. Mariana Nedelcu, *Considérations sur certains schémas à relais temporisés et à relais d'intensité*. Revue de math. pures et appl., **I**, *2*, 199—217 (1956).
11. Mariana Nedelcu, *Sur les schémas éléctroniques à fonctionnement de relais et schéma à redresseurs éléctroniques*. Bull. Mathem., **II** *1*, 75 —95 (1958).
12. Mariana Nedelcu, *L'Analyse de certains compteurs*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. et Phys. de la R.P.R., **4** (52) *2*, 49—58 (1960).
13. Mariana Nedelcu, *Considérations on the analysis and synthesis of circuits with electronic tubes*. Lucrările congresului de la Tihany (RPU) septembrie 1962 (sub tipar).
14. Mariana Nedelcu, *Analysis and synthesis of solid-state sequential circuits*. Lucrările simpozionului internaţional IFAC de ,,Teoria sistemelor de relee şi automate finite" Moscova, octombrie 1962 (sub tipar în limba rusă).
15. Gr. C. Moisil, *An algebraic theory of the actual operation on relay switching circuits*. Circular letter nr. 5 ,,Hazard and race phenomena in switching circuits". An international symposium to be held in Bucharest, 1965.

VECTORI ANALITICI GENERALIZAȚI[1]

DE

DAN PASCALI

În lucrare se consideră sisteme de ecuații cu derivate areolare de ordinul întîi cu *n* funcții complexe necunoscute, care se pot scrie matricial sub forma

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w}.$$

Integrarea ecuației eliptice liniare de ordinul al doilea și a altor tipuri de ecuații eliptice se reduce la integrarea unui sistem de forma considerată.
În lucrare se extind proprietățile funcțiilor analitice generalizate la soluțiile acestor sisteme.

În 1912, D. Pompeiu (57) introduce noțiunea de derivata areolară. Considerînd clasa funcțiilor neanalitice, derivata areolară apare, chiar de la început, ca funcționala ce măsoară, în fiecare punct al domeniului de definiție, abaterea de la olomorfie a unei astfel de funcții.

Dacă $U(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ este continuă în vecinătatea V_{z_0} a punctului z_0, se numește ***derivată areolară*** a lui $U(z)$ în z_0

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \lim_{\gamma \to z_0} \frac{\frac{1}{2i}\int_{\gamma} U(z)\,\mathrm{d}z}{\text{mes. } \delta} \tag{1}$$

pe toate familiile de domenii δ, limitate de contururile γ simple, rectificabile și închise, regulate în punctul z_0.

---

[1] Versiunea în l. franceză va apărea în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, *6* (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 707–736, BUCUREȘTI, 1965

Dacă $U(z) \in C^1$, atunci

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Atît D. Pompeiu, cît şi alţi matematicieni români G. Călugăreanu [10], N. Ciorănescu [12], M. Ghermănescu [28], M. Nicolescu [43] şi matematicieni străini P. Burgatti [9], M. Kasner [34], care au studiat derivata areolară înainte de 1931, au considerat exclusiv cazul funcţiilor de clasă C^1, funcţii numite *poligene*, care sînt soluţii ale sistemului Cauchy-Riemann neomogen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2A(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2B(x, y)$$

pentru $A(x, y)$ şi $B(x, y)$ funcţii continue.

În 1931, această noţiune atît de fecundă pentru fizica matematică, este pusă în adevărata sa lumină în teza lui N. Teodorescu [62], care consideră derivata areolară, independent de existenţa derivatelor parţiale ale funcţiilor $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ prin limita raportului (1).

Introducerea definiţiei largi a derivatei areolare permite înlocuirea ecuaţiei

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = V(z),$$

cu membru drept continuu într-un domeniu plan D, prin ecuaţia funcţională

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} U(z)\,\mathrm{d}z - \iint_{\delta} V(z)\,\mathrm{d}\omega_z = 0$$

care are loc pentru orice cuplu (γ, δ) din D şi dă o soluţie generalizată în sensul lui Sobolev [61] pentru sistemul Cauchy-Riemann cu membru al doilea.

N. Teodorescu pune în legătură definiţia derivatei areolare cu derivata funcţiei aditive şi absolut continue

$$F(\delta) = \frac{1}{2i}\int_{\gamma} U(z)\,\mathrm{d}z.$$

Această legătură, în cazul în care $F(\delta)$ nu este absolut continuă, dar cu variaţie mărginită, a fost extinsă de Gr. C. Moisil [36] şi mai tîrziu de G. Fichera [23].

O funcţie continuă în z, a cărei derivată areolară este nulă în fiecare punct al domeniului D, este olomorfă în D.

O funcţie $U(z)$, care are derivată areolară continuă în D, se numeşte *olomorfă* (α) în acest domeniu. N. Teodorescu extinde pentru funcţiile olomorfe (α) formula de reprezentare

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{U(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial U}{\partial \bar{t}}\,\frac{\mathrm{d}\omega_t}{t-z}\,.$$

C fiind frontiera domeniului D, formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile şi închise, formulă stabilită de D. Pompeiu pentru funcţii poligene.

După teza lui N. Teodorescu, derivata areolară este studiată de N. Ciorănescu [13], I. Elianu [20]—[21], Griffith Evans [22], J. Ridder [60], A. Tonolo [70] şi alţii.

Dezvoltarea analizei funcţionale a permis în 1952 lui I. N. Vekua în [73] să reia teoria derivatei areolare, plecînd de la sistemul liniar cu derivate parţiale de ordinul întîi

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g, \end{cases}$$

unde a, b, c, d, f, g sînt funcţii date de x şi y în D şi să aplice, cu mult succes, metodele analizei funcţionale, dezvoltînd astfel teoria funcţiilor analitice generalizate, în monografia [77]. Un punct de vedere analog este dezvoltat de L. Bers [1] — [2].

Punînd

$$A = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib)\,;\ B = \frac{1}{4}(a + d + ic - id)\,;\ F = \frac{1}{2}(f + ig)$$

sistemul (2) se poate scrie

$$(3)\qquad \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + B\bar{U} + F.$$

Deoarece continuitatea coeficienţilor nu este suficientă pentru existenţa soluţiilor $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ de clasă $C^1(D)$, I. N. Vekua extinde operatorul $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ în sensul definiţiei lui D. Pompeiu.

I. N. Vekua caută soluţiile extinse ale ecuaţiei (3) în clasa funcţiilor $C_{\bar{z}}(D)$. În [67], N. Teodorescu demonstrează identitatea funcţiilor de clasă $C_{\bar{z}}(D)$ cu funcţiile olomorfe (α) în domeniul D.

O deosebită atenţie este acordată integralei lui Pompeiu [58]

$$(4)\qquad Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}\omega_t\,.$$

În lucrarea [64], N. Teodorescu a demonstrat că pentru $f(z)$ măsurabilă şi mărginită în D, funcţia $Tf\,(z)$ este continuă (chiar continuă Hölder) în tot planul, olomorfă în exteriorul lui D, nulă la infinit şi

$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}} = f(z).$$

Aceste rezultate sînt extinse de I. N. Vekua [76] pentru $f(z) \in L_p$, $p > 2$, arătînd că T este un operator liniar complet continuu de la spaţiul $L_p(D)$ la spaţiul $C_\alpha(D)$, al funcţiilor hölderiene de exponent $\alpha = \frac{p-2}{p}$

În particular, dacă $f(z) \in C(\overline{D})$, atunci

$$\|Tf\| \leqslant \|T\| \, \|f\|_{C(D)}.$$

N. Teodorescu [68] organizează spaţiul liniar $C_{\bar{z}}(\overline{D})$ ca un spaţiu Banach, cu ajutorul normei

$$\|U\|_{C_{\bar{z}}(\overline{D})} = \|U - TV\|_{C(D)} + \|T\| \, \|V\|_{C(D)},$$

unde

$$V(z) = \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \in C(\overline{D}).$$

Relativ la convergenţa şirurilor de elemente din $C_{\bar{z}}(\overline{D})$ în topologia introdusă, are loc următoarea teoremă [68], [73] :

Condiţia necesară şi suficientă ca un şir de elemente $\{U_n(z)\}$ din $C_{\bar{z}}(\overline{D})$ să fie convergent este ca şirul valorilor lor $\{U_n(z)\}$ pe conturul C şi şirul derivatelor lor areolare $\left\{\frac{\partial U_n}{\partial \bar{z}}\right\}$ în $\overline{D}$ să fie uniform convergente.

În teza sa [62], N. Teodorescu a introdus polinoamele şi seriile areolare. Polinomul areolar de ordinul n este soluţia în $C_{\bar{z}}(D)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial^n f(z)}{\partial \bar{z}^n} = \varphi_0(z)$$

unde $\varphi_0(z)$ este o funcţie olomorfă în D. Forma generală a polinomului areolar de ordinul n este :

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\,\varphi_1(z) + \ldots + \bar{z}^n \varphi_n(z),$$

unde $\varphi_k(z)$ $(k = 0,1, \ldots, n)$ sînt funcţii olomorfe în D.

Legătura între această reprezentare a polinoamelor areolare şi dezvoltarea lui Almansi- Nicolescu [44] a funcţiilor poliarmonice în plan este pusă în evidenţă în nota lui Dan Pascali [49]. Această legătură este extinsă în [50] între reprezentarea seriilor areolare şi reprezentarea funcţiilor analitice reală în plan, a lui N. Ciorănescu [14].

În [53] s-a dat o nouă reprezentare a polinoamelor areolare, cu ajutorul iterării operatorului integral al lui Pompeiu (4), reprezentare sugerată de dezvoltările date de M. Nicolescu în [45].

N. Teodorescu consideră în [62], [64] ecuaţia cu derivate areolare

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + F, \tag{5}$$

unde $A(z)$ este o funcţie măsurabilă şi mărginită în D. Soluţia generală a ecuaţiei omogene corespunzătoare lui (5) este

$$U(z) = \Phi(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)}{t-z}\mathrm{d}\omega_t} \tag{6}$$

unde $\Phi(z)$ este o funcţie olomorfă arbitrară în D.

I. N. Vekua în [73], [74] şi [77] a generalizat reprezentarea (6) la ecuaţia (3) omogenă

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + B\bar{U} \tag{7}$$

cu $A(z), B(z) \in L_p(D)$, $p > 2$

Fie

$$g(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\dfrac{\overline{U(z)}}{U(z)} & \text{pentru } U(z) \neq 0, \\ A(z) + B(z) & \text{pentru } U(z) = 0. \end{cases}$$

În acest caz, soluţia generală a ecuaţiei (7) este

$$U(z) = \Phi(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{g(t)}{t-z}\mathrm{d}\omega_t}, \tag{8}$$

unde $\Phi(z)$ este o funcţie olomorfă arbitrară în D.

Soluţiile ecuaţiei (7) sînt numite de I. N. Vekua în monografia [77] *funcţii analitice generalizate*, iar reprezentarea (8), reprezentarea de speţa întîi a funcţiilor analitice generalizate.

Cu ajutorul reprezentării (8), sînt generalizate pentru soluţiile ecuaţiei (7) proprietăţi ale funcţiilor analitice ca : izolarea zerourilor, principiul maximului modulului, prelungirea analitică, teorema variaţiei argumentului, teorema lui Liouville etc.

Reducînd ecuaţia (7) la forma normală

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = A\bar{U} \tag{9}$$

I. N. Vekua stabileşte pentru funcţiile analitice generalizate reprezentarea de speţa a doua

$$U(z) = \Psi(z) + \iint_D \Gamma_1(z, t)\, \Psi(t)\, \mathrm{d}\omega_t + \iint_D \Gamma_2(z, t)\, \overline{\Psi(t)}\, \mathrm{d}\omega_t \tag{10}$$

funcția $\psi(z)$ fiind olomorfă arbitrară în D, iar

$$\Gamma_1(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j}(z, t), \quad \Gamma_2(z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{2j+1}(z, t)$$

$$K_1(z,t) = -\frac{A(t)}{\pi(t-z)}, \quad K_n(z, t) = \iint_D K_1(z, s)\, \overline{K_{n-1}(s, t)}\, d\omega_s,$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Funcțiile $\Gamma_1(z, t)$ și $\Gamma_2(z, t)$ se numesc *rezolventele* ecuației (9).

Plecînd de la reprezentarea de spețа a doua (10) a funcțiilor analitice generalizate, I. N. Vekua rezolva în [73] și [77] problema la limită de tip Hilbert-Riemann pentru ecuația (7). De asemenea, în lucrarea (35) L. G. Mihailov rezolvă problema la limită Riemann pentru ecuația (7). Reprezentările soluțiilor ecuației (7) pe suprafețe și unele aplicații la teoria membranelor au fost date de I. I. Daneliuk [16], [17], [18].

Folosind alte metode, problemele la limită pentru sistemul (2) mai sînt studiate și în lucrările lui W. Haack [29], W. Haack și G. Hellwig [30], G. Hellwig [32], Joachim Nitsche [46], Johannes Nitsche [47], [48], N. K. Usmanov [71], [72] și alții.

Aplicațiile în geometrie și mecanică ale sistemelor (2) sînt puse în evidență în lucrările lui Gr. C. Moisil [39] și I. N. Vekua [76].

B. V. Boiarski [5] și I. N. Vekua [77] studiază ecuația mai generală

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - q(z)\frac{\partial U}{\partial z} = AU + B\overline{U} \tag{11}$$

pentru care generalizează reprezentarea de spețа a doua (10) în care funcția $\Psi(z)$ satisface ecuația

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} - q(z)\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

A. Douglis [19] și B. V. Boiarski [6], [7] extind unele rezultate la sistemele eliptice liniare în plan cu $2n > 2$ variabile dependente, care se pot scrie matricial sub forma (11). Orice ecuație eliptică liniară de ordin superior este echivalentă cu un asemenea sistem. De aceea B. V. Boiarski [8] remarcă că studierea acestor sisteme prezintă un interes considerabil atît din considerente principiale cît și datorită posibilității unor aplicații la ecuații eliptice de ordin superior.

Vectorii $\Psi(z)$, soluții ale ecuației matriciale de forma (12), care intervin în reprezentarea de spețа a doua a soluțiilor ecuației matriciale (11) trebuie să satisfacă în plus anumite condiții de ortogonalitate, rezultate din aplicarea alternativei lui Fredholm. Structura săracă a clasei formată din vectorii $\Psi(z)$ de acest tip, îngreunează mult, în acest cadru general, studiul problemelor la limită pentru ecuația matricială de forma (11).

Funcțiile analitice se comportă în raport cu derivata areolară ca și constantele față de derivarea obișnuită. În plan, G. N. Poloji [56] și

D. Pascali [55] au extins derivata areolară prin operatori, în care funcțiile analitice sînt înlocuite prin funcții (p, q)-analitice respectiv prin funcții monogene în sensul lui V. S. Fedorov [24].

Derivata areolară în spațiul cu mai multe dimensiuni a fost introdusă, prin folosirea algebrei cuaternionilor sau a simbolismului matricial, de către Gr. C. Moisil [37], [38] și N. Teodorescu [40], [63]. În această direcție, studiul derivatei areolare este continuat în lucrările lui R. Fueter [25], A. V. Bițadze [3], [4], Huan-Le-Dî [33], M. Nedelcu [42], D. Pascali [51] , [52] și alții.

Informații privind diferite contribuții la dezvoltarea teoriei derivatei areolare se găsesc în lucrarea lui N. Teodorescu [65] și în Rapoartele la al IV-lea Congres al matematicienilor români [59]. O bogată bibliografie asupra studiului derivatei areolare și a diferitelor extensiuni ale noțiunii de monogeneitate se găsește în [31].

În cele ce urmează vom face un studiu amănunțit asupra sistemelor eliptice liniare de ordinul întîi în plan cu $2n > 2$ funcții reale necunoscute, care se pot scrie matricial sub formă complexă

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\overline{w}, \tag{13}$$

unde $w\,(z)$ este un vector cu n componente iar $A\,(z)$ și $B\,(z)$ matrici pătratice de ordinul n. Ca formă, acest sistem este un caz particular al sistemelor matriciale (12) și reprezintă extensiunea pentru mai multe variabile dependente a ecuației (7).

Generalizarea reprezentării de prima speță pentru sistemele (13) ne permite să stabilim nu numai analogia între proprietățile soluțiilor unui astfel de sistem și vectorii analitici dar și să dăm răspunsuri precise alternativei lui Fredholm, aplicată sistemului de ecuații integrale echivalent.

1. Să considerăm sistemul eliptic liniar, de ordinul întîi, în plan, cu $2n$ funcții reale necunoscute

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial x} - \dfrac{\partial v_j}{\partial y} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[a_{jk}\,(x, y)\, u_k + b_{jk}\,(x, y)\, v_k\right] + f_j'\,(x, y) \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial y} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[c_{jk}\,(x, y)\, u_k + d_{jk}\,(x, y)\, v_k\right] + f_j''\,(x, y) \end{cases} \tag{14}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Presupunem coeficienții a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, d_{jk} și termenii liberi f_j', f_j'' măsurabili și mărginiți într-un domeniu bidimensional $\overline{D}$ mărginit. Relativ la frontiera C a domeniului D, vom face următoarele presupuneri :

1°. Este formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile și închise $C_0, C_1, \ldots, C_m$ fără puncte comune, C_0 conținînd în interiorul său toate celelalte curbe.

2°. Tangenta la curba C_j $(j = 0,1, \ldots, m)$ în punctul $t \in C_j$ formează cu axa Ox unghiul $\theta\,(t)$, care satisface condiția Hölder.

Notînd $w_j(z) = u_j(x, y) + iv_j(x, y)$[2] $(j = 1, 2, \ldots, n)$ şi

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w_j}{\partial x} + i\frac{\partial w_j}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} - \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right)\right]$$

sistemul (14) se poate scrie sub forma complexă

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} = \sum_{k=1}^{n} [A_{jk}(z)\, w_k + B_{jk}(z)\, \overline{w}_k] + f_j(z), \tag{15}$$

unde

$$A_{jk} = \frac{1}{4}(a_{jk} + d_{jk} + ic_{jk} - ib_{jk})\,; \quad B_{jk} = \frac{1}{4}(a_{jk} - d_{jk} + ic_{jk} + ib_{jk})\,;$$

$$f_j = \frac{1}{2}(f' + f_j'')$$

$$(j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Introducînd notaţia matricială

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \overline{w} = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ \vdots \\ \overline{w}_n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} A = \{A_{jk}\}, \quad B = \{B_{jk}\}, \\ (j, k = 1, 2, \ldots, n) \end{matrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

sistemul (15) devine

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\overline{w} + f. \tag{16}$$

Sistemul omogen corespunzător este

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\overline{w}. \tag{17}$$

DEFINIŢIA 1. *Un vector soluţie a sistemului* (17) *de clasă* $C_{\bar{z}}(D)$ *se numeşte vector analitic generalizat al sistemului* (17). *Asemenea soluţii le vom numi şi soluţii regulate ale sistemului* (17).

2. Lucrarea începe (§ 1) prin reducerea ecuaţiei eliptice generale, în plan, la un sistem de forma (14). În § 2 se dă o reprezentare pentru vectorii analitici generalizaţi, care extinde reprezentarea de speţa întîi a funcţiilor analitice generalizate, dată de I. N. Vekua. O consecinţă imediată a acestei reprezentări este reducerea problemei Hilbert pentru sistemul (17), în cazul particular $B(z) = 0$, la o problemă Hilbert pentru vectori olomorfi.

---

[2] Pentru simplificare, vom nota, mai departe, funcţiile cu litere mici cu indici, vectorii cu litere mici fără indici, iar matricile cu litere mari. Funcţiile şi vectorii olomorfi îi vom nota prin literele mici greceşti φ şi ψ, iar matricele olomorfe prin literele mari greceşti Φ şi Ψ.

În § 4 se construiește un sistem de ecuații integrale echivalent cu sistemul (14), se dă o reprezentare a vectorilor analitici generalizați ca soluții ale acestui sistem de ecuații integrale și se studiază proprietățile nucleelor și rezolventelor acestui sistem de ecuații integrale singulare.

În § 7 și 8 se introduc vectorii analitici generalizați regulați pe porțiuni, se inversează reprezentarea de speța întîi și se consideră integrale generalizate de tip Cauchy.

Articolul se încheie cu o trecere în revistă a problemelor Riemann și Hilbert, pentru sistemul (17).

§ 1. LEGĂTURA CU ECUAȚIA ELIPTICĂ DE ORDINUL AL DOILEA

3. După cum se știe, o ecuație liniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip eliptic poate fi totdeauna adusă la forma normală

$$\Delta u = a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u + f(x, y), \tag{18}$$

unde $u = u(x, y)$ este funcția reală necunoscută. Presupunem, ca mai sus, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ și $f(x, y)$ funcții măsurabile și mărginite într-un domeniu mărginit $\overline{D}$.

În monografia sa [77], I. N. Vekua stabilește legătura între ecuația (18) și sistemul (14) pentru $n = 1$, în cazul $c(x, y) \equiv 0$, și menționează că integrarea ecuației eliptice generale de ordinul al doilea nu poate fi redusă la integrarea unui asemenea sistem.

Mai jos, vom indica un procedeu de reducere a integrării ecuației (18) la integrarea unui sistem de tip (14) cu $n = 2$. Notînd

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y) \quad \text{și} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -q(x, y),$$

integrarea ecuației (18) este echivalentă cu integrarea sistemului

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = ap - bq + cu + f, \\ &\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = p + q, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = -q + p. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Această echivalență este valabilă și pentru soluții generalizate ale ecuației (18), adică pentru funcții $u(x, y)$ cu derivată medie aparținînd clasei $C_{\frac{}{2}}(\overline{D})$.

4. Acest procedeu se poate extinde uşor la sisteme de m ecuaţii liniare, care se pot scrie matricial sub forma (18). Pentru $m \geqslant 2$, sistemul (19) va conţine mai puţin de 4 m ecuaţii. Astfel, în cazul $m = 2$, sistemul

$$\begin{cases} \Delta u = a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{11}\dfrac{\partial u}{\partial y} + b_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y} + c_{11}u + c_{12}v + f_1 \\[2ex] \Delta v = a_{21}\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{21}\dfrac{\partial u}{\partial y} + b_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y} + c_{21}u + c_{22}v + f_2 \end{cases}$$

cu notaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -q, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -s$$

este echivalent cu sistemul de tip (14) cu 6 ecuaţii :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial y} = a_{11}p + a_{12}r - b_{11}q - b_{12}s + c_{11}u + c_{12}v + f_1, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial r}{\partial x} - \dfrac{\partial s}{\partial y} = a_{21}p + a_{22}r - b_{21}q - b_{22}s + c_{21}u + c_{22}v + f_2, \\[2ex] \dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial s}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = p + s, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -q + r. \end{cases}$$

Analog, integrarea ecuaţiei metaarmonice în plan

$$\Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \ldots + a_{n-1}\Delta u + a_n u = f$$

se reduce la integrarea unui sistem de tipul (14).

Prin urmare integrarea unei clase bogate de ecuaţii şi sisteme eliptice liniare se poate reduce la integrarea sistemelor (14).

§ 2. REPREZENTAREA DE SPEŢA ÎNTÎI A VECTORILOR ANALITICI GENERALIZAŢI

În acest paragraf vom extinde reprezentarea (8) a lui I. N. Vekua pentru soluţia generală a sistemului (17) în cazul $n > 1$ pentru matricile $A(z)$ şi $B(z)$ cu componente măsurabile şi mărginite în domeniul $\overline{D}$.

5. DEFINIŢIA 2. *O matrice* $W(z)=\{w_{jk}(z)\}$ *ale cărei coloane sînt* n *vectori analitici generalizaţi ai ecuaţiei* (17) *liniari independenţi în domeniul* $\overline{D}$ *se numeşte matrice integrală a sistemului* (17) în $\overline{D}$.

Deoarece fiecare coloană a matricei $W(z)$ satisface ecuaţia (17), matricia integrală va fi o soluţie a ecuaţiei matriciale

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z} = AW + B\overline{W}. \tag{20}$$

Condiţia de liniar-independenţă a coloanelor unei matrice integrale în întreg domeniul D poate fi eliminată prin introducerea soluţiilor regulate ale ecuaţiei (20).

DEFINIŢIA 3. *Matricea pătratică* $W(z)=\{w_{jk}(z)\}$ *este o soluţie regulată a ecuaţiei matriciale liniare şi omogene* (20) *în* $\overline{D}$, *dacă* :

1°. $W(z)$ *verifică ecuaţia* (20) *în domeniul* $\overline{D}$.

2°. *Funcţiile* $w_{jk}(z)\in C_{\bar z}(\overline{D})$ $(j, k = 1, 2, \dots, n)$

3°. *Există cel puţin un punct* $z_0 \in D$ *astfel ca* $|W(z_0)| = \det W(z_0)$ *să fie diferit de zero.*

Determinantul $|W|$ satisface, după cum se vede uşor, ecuaţia

$$\frac{\partial |W|}{\partial \bar z} = (a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})\,|W| + (b_{11}+b_{22}+\dots+b_{nn})\,|\overline{W}|,$$

adică o ecuaţie de tip (14) pentru $n=1$, şi admite o reprezentare de forma (8) :

$$|W(z)| = \varphi(z)\, e^{\sigma(z)},$$

unde funcţia olomorfă $\varphi(z)$ este neidentic nulă în virtutea condiţiei 3°. Urmează că $W(z)\neq 0$, în D, cu excepţia cel mult a unei mulţimi de puncte izolate din D. Funcţia olomorfă $\varphi(z)$ fiind arbitrară, o vom lua de tip exponenţial sau constantă, astfel încît $|W(z)|\neq 0$ în orice punct din D.

6. Fie G discul $|z|\leqslant R$, unde R este suficient de mare, astfel ca $\overline{D}\subset G$. Prelungim funcţiile $A_{jk}(z)$ şi $B_{jk}(z)$ pînă la nişte funcţii măsurabile şi mărginite, definite pe G, punîndu-le egale cu zero pentru z în exteriorul lui D.

În cele ce urmează, vom folosi pentru matricile $A=\{A_{jk}\}$ următoarea normă

$$\|A\| = \max_{j,k}\|A_{jk}\|,$$

unde

$$\|A_{jk}\| = \sup_{z\in G}|A_{jk}(z)|.$$

Să considerăm matricea

$$H(z) = A(z) + B(z)\,\overline{W}W^{-1} \tag{21}$$

cu componente măsurabile şi mărginite în G şi nule în exteriorul lui D.

Fiecărei soluţii regulate $W(z)$ a ecuaţiei (20) îi ataşăm o soluţie regulată $E(z)$ a ecuaţiei matriciale

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} = HE. \tag{22}$$

Fie operatorul integral al lui Pompeiu

$$T_G(f(z)) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}\omega_t .$$

Pentru simplificare vom scrie

$$Pf = T_G(Hf).$$

Soluţia $E(z)$ a ecuaţiei matriciale (22) în discul G, continuă în tot planul, olomorfă în exteriorul lui D şi egală la infinit cu matricea unitate I, o construim cu ajutorul aproximaţiilor succesive, în felul următor :

$$E_0(z) = I$$

$$E_1(z) = I + P(I)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E_n(z) = I + P(E_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} P^k(I), \quad (P^0(I) = I)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Deoarece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{\bar{t}^n}{t-z}\,\mathrm{d}t = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

din formula de reprezentare Pompeiu-Teodorescu, rezultă, pentru $z \in G$,

$$T_G(\bar{z}^n) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\bar{t}^n}{t-z}\,\mathrm{d}\omega_t = \frac{\bar{z}^{n+1}}{n+1}, \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Ţinînd seama de acest rezultat

$$\|P^n(I)\| \leqslant \|H\|^n\, T_G^n(1)| = \frac{(\|H\|\,|\bar{z}|)^n}{n\,!}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

şi

$$\|E_n(z)\| \leqslant \mathrm{e}^{\|H\|\,|\bar{z}|}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Prin urmare, aproximaţiile succesive converg uniform în G către

$$E(z) = \lim_{n\to\infty} E_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(I).$$

După cum se vede ușor, seria $\left\{\frac{\partial E_n}{\partial z}\right\}$ converge de asemenea uniform în G și conform condiției necesare și suficiente de convergență în $C\bar{z}$ $(\bar{D})$, matricea E (z) este o soluție regulată a ecuației matriciale (22). Cum matricea E (z) este independentă de alegerea discului G, făcînd $R \to \infty$, ea va avea componente funcții olomorfe în exteriorul lui și va fi mărginită în tot planul, în norma introdusă.

TEOREMA 1. *Dacă W (z) este o soluție regulată a ecuației matriciale (20), atunci*

$$W(z) = E(z)\,\Phi(z), \tag{23}$$

unde Φ (z) este o matrice pătratică, de ordinul n, nesingulară de funcții olomorfe în $\bar{D}$.

Demonstrație. Din ecuația (22) și din egalitatea (21) în conformitate cu regula de derivare a matricei inverse avem

$$\frac{\partial E^{-1}}{\partial \bar{z}} = -E^{-1}\frac{\partial E}{\partial \bar{z}}E^{-1} = -E^{-1}A - E^{-1}B\,\overline{W}W^{-1}.$$

Să formăm derivata produsului

$$\frac{\partial\,(E^{-1}W)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial E^{-1}}{\partial \bar{z}}W + E^{-1}\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = -E^{-1}AW - E^{-1}B\overline{W} +$$
$$+ E^{-1}AW + E^{-1}B\overline{W} = 0$$

astfel produsul $E^{-1}W$ este o matrice pătratică arbitrară ale cărei elemente sînt funcții olomorfe în D, de unde rezultă imediat reprezentarea (23).

Consecință. Dacă w (z) este un vector analitic generalizat al sistemului (17), atunci

$$w(z) = E(z)\,\varphi(z), \tag{24}$$

unde

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \varphi_2(z) \\ \vdots \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}$$

este un vector arbitrar de funcții olomorfe în $\bar{D}$.

Se poate arăta ușor că, pentru $n = 1$, reprezentările (24) și (8) coincid.

DEFINIȚIA 3. *Vectorul $\varphi(z)$ (respectiv matricea Φ (z)) se numește divizor analitic al vectorului analitic generalizat (24) (respectiv al matricei regulate (23)).*

7. Deoarece elementele unei linii ale matricei regulate E (z) nu se pot anula simultan, din reprezentarea (24) rezultă imediat teorema lui T. Carleman [11], care afirmă că : zerourile componentelor unei soluții a sistemului (17) sînt izolate.

Conform reducerii integrării ecuației eliptice liniare (18) la integrarea unui sistem de forma (14), din § 1, reprezentarea (24) pune în evidență legătura între soluțiile ecuației (18) și funcțiile analitice.

§ 3. CAZUL PARTICULAR $B(z) = 0$

8. O aplicație imediată a reprezentării (24) este rezolvarea problemei Hilbert pentru sistemul (17) cu $B(z) = 0$.

În acest caz, sistemul (14) omogen se scrie

$$
(25) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial x} - \dfrac{\partial v_j}{\partial y} = \sum\limits_{k=1}^{n} [a_{jk}(x, y)\, u_k - b_{jk}(x, y)\, v_k] \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial y} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x} = \sum\limits_{k=1}^{n} [b_{jk}(x, y)\, u_k + a_{jk}(x, y)\, v_k] \end{cases}
$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

iar ecuația matricială (17)

$$
(26) \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mathrm{A}w,
$$

unde

$$
A = \{A_{jk}\} \text{ și } A_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + ib_{jk}).
$$

În cazul ecuației (26), matricea regulată $E(z)$ este independentă de matricea regulată $W(z)$. Mai mult, dacă A este o matrice constantă, formula de reprezentare (24) devine

$$
w(z) = \mathrm{e}^{A\bar{z}} \varphi(z).
$$

9. Să considerăm următoarea *problemă la limită de tip Hilbert*:

Să se găsească o soluție regulată a sistemului (25) în $\overline{D}$, *care pe conturul* C *să satisfacă condiția la limită*

$$
\sum_{k=1}^{n} (\mu_{jk}(t)\, u_k(t) + \nu_{jk}(t)\, v_k(t)) = \gamma_j(t), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)
$$

unde $\mu_{jk}(t)$, $\nu_{jk}(t)$ *și* $\gamma_j(t)$ *sînt funcții reale, continue, date pe* C.

În cazul coeficienților a_{jk} și b_{jk} constanți, această problemă a fost considerată de N. K. Usmanov [71], iar în cazul coeficienților variabili (de Dan Pascali [54].

În scriere matricială, această problemă revine la găsirea unui vector analitic generalizat $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ al sistemului (26) care verifică pe C condiția la limită

$$
(27) \qquad \mathrm{Re}\,[(M - iN)\, w] = Mu + Nv = \gamma,
$$

unde

$$M = \{\mu_{jk}\}, \quad N = \{\nu_{jk}\}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \qquad (j, k = 1,2, \ldots, n).$$

Ţinînd seama de reprezentarea (24), condiţia (27) se scrie

$$(M - iN) E \varphi + (M + iN) \overline{E} \overline{\varphi} = 2 \gamma.$$

Notînd

$$(M - iN) E = p + iq,$$

problema de mai sus pentru $w(z)$ se reduce la următoarea problemă Hilbert pentru divizorul său analitic $\varphi(z)$ pe conturul C

$$\mathrm{Re}\,[(p + iq) \varphi] = \gamma,$$

care este studiată în monografia lui N. I. Musheli̧svili [41].

§ 4. REPREZENTAREA DE SPEŢA A DOUA A VECTORILOR ANALITICI GENERALIZAŢI

10. Să considerăm sistem de ecuaţii integrale Fredholm

$$w(z) + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(t) w(t) + B(t) \overline{w(t)}}{t - z} \, d\omega_t = g(z), \tag{28}$$

unde

$$g(z) = \psi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(t)}{t - z} \, d\omega_t,$$

$\psi(z)$ fiind un vector cu componente funcţii olomorfe în D.

Din proprietăţile operatorului integral al lui Pompeiu rezultă imediat echivalenţa între soluţiile sistemului de ecuaţii integrale (28) şi soluţiile de clasă $C_{\bar{z}}(\overline{D})$ ale sistemului

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\overline{w} + f. \tag{16}$$

11. Pentru a arăta că sistemul de ecuaţii integrale (28) este rezolubil pentru orice vector $g(z)$, este suficient să demonstrăm că sistemul de ecuaţii integrale omogen corespunzător

$$w(z) + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(t) w(t) + B(t) \overline{w(t)}}{t - z} \, d\omega_t = 0 \tag{29}$$

nu admite decît soluţia banală $w(z) \equiv 0$.

Putem scrie sistemul (29) sub forma

$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)\,w(t) + B(t)\,\overline{w(t)}}{t-z}\,\mathrm{d}\omega_t$$

şi fie vectorul $w(z)$ o soluţie a sa. După cum se ştie, integrala din membrul drept reprezintă un vector de componente funcţii continue, mărginite în tot planul, olomorfe în exteriorul lui D şi nule la infinit. Cum matricea $E(z)$ din reprezentarea (25) este olomorfă şi mărginită în exteriorul lui D, vectorul

$$\varphi(z) = E^{-1}(z)\,w(z)$$

are componentele olomorfe şi mărginite în tot planul complex şi nule la infinit. Conform teoremei lui Liouville $\varphi(z) \equiv 0$ şi deci $w(z) \equiv 0$.

12. În acest fel, sistemul omogen (29) neavînd soluţii nebanale, vectorul $g(z)$ nu va fi supus la nici o condiţie suplimentară.

Înlocuind pe A şi B prin λA şi λB, obţinem condiţia necesară de rezolvare a sistemului de ecuaţii integrale (28). Prin urmare, sistemul (28) nu admite funcţii proprii şi poate fi rezolvat prin metoda aproximaţiilor succesive:

$$w_0(z) = g(z)$$

$$w_1(z) = g(z) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)g(t)}{t-z}\,\mathrm{d}\omega_t - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{B(t)\overline{g(t)}}{t-z}\,\mathrm{d}\omega_t$$

. . . .

$$w_n(z) = g(z) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)w_{n-1}(t)}{t-z}\,\mathrm{d}\omega_t - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{B(t)\overline{w_{n-1}(t)}}{t-z}\,\mathrm{d}\omega_t$$

. . . .

Notînd

$$(30)\quad \begin{cases} K_1(z,t) = -\dfrac{A(t)}{\pi(t-z)}, \quad H_1(z,t) = -\dfrac{B(t)}{\pi(t-z)} \\ K_n(z,t) = \displaystyle\iint_D [K_1(z,s)\,K_{n-1}(s,t) + H_1(z,s)\,\overline{H_{n-1}(s,t)}]\,\mathrm{d}\omega_s \\ H_n(z,t) = \displaystyle\iint_D [K_1(z,s)\,H_{n-1}(s,t) + H_1(z,s)\,\overline{K_{n-1}(s,t)}]\,\mathrm{d}\omega_s \end{cases}$$

$$(n = 2, 3, \ldots)$$

putem scrie

$$w_n(z) = w_{n-1}(z) + \iint_D K_n(z,t)\,g(t)\,\mathrm{d}\omega_t + \iint_D H_n(z,t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}\omega_t,$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

De aici rezultă că vectorul soluţie a sistemului (28) poate fi reprezentat sub forma

$$(31)\qquad w(z) = g(z) + \iint_D \Gamma_1(z,t)\, g(t)\, \mathrm{d}\omega_t + \iint_D \Gamma_2(z,t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{d}\omega_t,$$

unde

$$\Gamma_1(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(z,t), \quad \Gamma_2(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j(z,t).$$

Matricile $\Gamma_1(z,t)$ şi $\Gamma_2(z,t)$ se numesc *rezolventele* sistemului de (ecuaţii integrale (28). Ele sînt matrici cu componente funcţii olomorfe în z în exteriorul lui D.

Ţinînd seama de forma vectorului $g(z)$, soluţia generală a sistemului (16) este de forma

$$w(z) = w_o(z) + w_*(z),$$

unde $w_0(z)$ este soluţia generală a sistemului omogen (17)

$$(32)\qquad w_o(z) = \psi(z) + \iint_D \Gamma_1(z,t)\, \psi(t)\, \mathrm{d}\,\omega_t + \iint_D \Gamma_2(z,t)\, \overline{\psi(t)}\, \mathrm{d}\,\omega_t$$

iar $w_*(t)$ o soluţie particulară a sistemului neomogen (16), pe care o putem scrie în următorul mod

$$w_*(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \Omega_1(z,t) f(t)\, \mathrm{d}\,\omega_t - \frac{1}{\pi}\iint_D \Omega_2(z,t)\, \overline{f(t)}\, \mathrm{d}\,\omega_t,$$

unde

$$(33)\quad \Omega_1(z) = \frac{1}{t-z} + \iint_D \frac{\Gamma_1(z,s)}{t-s}\, \mathrm{d}\,\omega_s,\ \Omega_2(z,t) = \iint_D \frac{\Gamma_2(z,s)}{\bar{t}-\bar{s}}\, \mathrm{d}\omega_s.$$

Matricile $\Omega_1(z,t)$ şi $\Omega_2(z,t)$ se numesc *nucleele* sistemului (17).

13. Ne vom opri acum puţin la studiul proprietăţilor rezolventelor şi nucleelor sistemului omogen (17). Spre deosebire de metodele întrebuinţate de I. N. Vekua în [73] şi [77] pentru cazul $n = 1$, metoda folosită mai jos este mai directă.

Prin sumarea relaţiilor (30), obţinem pentru rezolventele $\Gamma_1(z,t)$ şi $\Gamma_2(z,t)$ următorul sistem de ecuaţii integrale matriciale

$$\begin{cases} \Gamma_1(z,t) + \dfrac{A(t)}{\pi(t-z)} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \frac{A(s)\,\Gamma_1(s,t) + B(s)\,\overline{\Gamma_2(s,t)}}{s-z}\, \mathrm{d}\,\omega_s = 0, \\[2ex] \Gamma_2(z,t) + \dfrac{B(t)}{\pi(t-z)} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \frac{A(s)\,\Gamma_2(s,t) + B(s)\,\overline{\Gamma_1(s,t)}}{s-z}\, \mathrm{d}\,\omega_s = 0. \end{cases}$$

Introducînd în (33) valorile rezolventelor $\Gamma_1(z,t)$ și $\Gamma_2(z,t)$ date de ecuațiile de mai sus, căpătăm pentru nucleele sistemului omogen (17) următorul sistem de ecuații integrale matriciale

$$\begin{cases} \Omega_1(z,t) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \dfrac{A(s)\,\Omega_1(s,t) + B(s)\,\overline{\Omega_2(s,t)}}{s-z}\,\mathrm{d}\omega_s = \dfrac{1}{t-z} \\ \Omega_2(z,t) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \dfrac{A(s)\,\Omega_2(s,t) + B(s)\,\overline{\Omega_1(s,t)}}{s-z}\,\mathrm{d}\omega_s = 0 \end{cases}$$

echivalent cu sistemul cu derivate areolare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\,\Omega_1(z,t)}{\partial\bar{z}} = A(z)\,\Omega_1(z,t) + B(z)\,\overline{\Omega_2(z,t)}, \\ \dfrac{\partial\,\Omega_2(z,t)}{\partial\bar{z}} = A(z)\,\Omega_2(z,t) + B(z)\,\overline{\Omega_1(z,t)}. \end{cases}$$

Pentru $n = 1$, aceste sisteme coincid cu cele stabilite de I. N. Vekua în monografia sa [77]. Din ele rezultă că componentele matricilor $\Omega_1(z,t)$ și $\Omega_2(z,t)$ aparțin clasei $C_{\bar{z}}$ în tot planul, cu excepția punctului $z = t$, unde $\Omega_1(z,t)$ are o singularitate de forma $|z-t|^{-1}$ iar $\Omega_2(z,t)$ o singularitate de forma $\ln|z-t|$. În plus, componentele lor sînt funcții olomorfe în raport cu z, în exteriorul lui D.

Relațiile de recurență (30) pot fi scrise și sub următoarea formă

$$\begin{cases} K_n(z,t) = \displaystyle\iint_D [K_{n-1}(z,s)\,K_1(s,t) + H_{n-1}(z,s)\,\overline{H_1(s,t)}]\,\mathrm{d}\,\omega_s, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n = 2,3,\ldots). \\ H_n(z,t) = \displaystyle\iint_D [K_{n-1}(z,s)\,H_1(s,t) + H_{n-1}(z,s)\,\overline{K_1(s,t)}]\,\mathrm{d}\omega_s, \end{cases}$$

Prin sumarea acestor relații, obținem

$$\begin{cases} \Gamma_1(z,t) + \dfrac{A(t)}{\pi(t-z)} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \dfrac{\Gamma_1(z,s)\,A(t)}{t-s}\,\mathrm{d}\,\omega_s + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \dfrac{\Gamma_2(z,s)\,\overline{B(t)}}{\bar{t}-\bar{s}}\,\mathrm{d}\,\omega_s = 0 \\ \Gamma_2(z,t) + \dfrac{B(t)}{\pi(t-z)} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \dfrac{\Gamma_2(z,t)\,\overline{A(t)}}{\bar{t}-\bar{s}}\,\mathrm{d}\,\omega_s + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \dfrac{\Gamma_1(z,s)\,B(t)}{t-s}\,\mathrm{d}\,\omega_s = 0 \end{cases}$$

iar în virtutea relațiilor (33)

$$\begin{cases} \Omega_1(z,t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \dfrac{\Omega_1(z,s)\,A(s) + \Omega_2(z,s)\,\overline{B(s)}}{s-t}\,\mathrm{d}\,\omega_s + \dfrac{1}{t-z} \\ \Omega_2(z,t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \dfrac{\Omega_2(z,s)\,\overline{A(s)} + \Omega_1(z,s)\,B(s)}{\bar{s}-\bar{t}}\,\mathrm{d}\,\omega_s \end{cases}$$

de unde sistemul cu derivate areolare

$$
\text{(34)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\ \Omega_1(z,t)}{\partial \bar{t}} = -\,\Omega_1(z,t)\,A(t) - \Omega_2(z,t)\,\overline{B(t)}, \\[2ex] \dfrac{\partial\ \Omega_2(z,t)}{\partial t} = -\,\Omega_2(z,t)\,\overline{A(t)} = \Omega_1(z,t)\,B(t). \end{cases}
$$

De aici rezultă, ca mai sus, că matricea $\Omega_1(z, t)$ aparţine clasei $C_{\bar{t}}$ iar matricea $\Omega_2(z,t)$, clasei C_t, în tot planul. În plus, componentele lui $\Omega_1(z, t)$ sînt funcţii olomorfe, iar componentele lui $\Omega_2(z, t)$ funcţii coolomorfe, în exteriorul lui D în raport cu variabila t.

Din relaţiile (33) deducem

$$
\frac{\partial\Omega_1(z,t)}{\partial\bar{t}} = \pi\,\Gamma_1(z,t) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial\Omega_2(z,t)}{\partial t} = \pi\,\Gamma_2(z,t)
$$

iar în virtutea relaţiilor (34)

$$
\begin{cases} \Gamma_1(z,t) = -\dfrac{1}{\pi}\,\Omega_1(z,t)\,A(t) - \dfrac{1}{\pi}\,\Omega_2(z,t)\,\overline{B(t)}, \\[2ex] \Gamma_2(z,t) = -\dfrac{1}{\pi}\,\Omega_2(z,t)\,\overline{A(t)} - \dfrac{1}{\pi}\,\Omega_1(z,t)\,B(t). \end{cases}
$$

Aceste relaţii ne dau o exprimare directă a rezolventelor în funcţie de nuclee. După cum se observă, spre deosebire de cazul unei singure funcţii complexe necunoscute, în cazul sistemelor (17) trebuie să ţinem seama de necomutativitatea produsului matricial.

14. În virtutea sistemului de ecuaţii integrale (28) pentru $f(z) \equiv 0$, vectorul $\psi(z)$ olomorf în D este unic determinat de integrala Cauchy

$$
\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{w(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t.
$$

Înlocuind această reprezentare a lui $\Psi(z)$ în formula (32), obţinem *formula integrală a lui Cauchy*

$$
\text{(35)}\qquad w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Omega_1(z,t)\,w(t)\,\mathrm{d}t - \Omega_2(z,t)\,\overline{w(t)}\,\mathrm{d}\bar{t}.
$$

Ea ne dă o soluţie regulată a sistemului omogen (17) în domeniul D, în funcţie de valorile pe frontieră ale acestei soluţii.

§ 5. SISTEMUL ADJUNCT ŞI IDENTITATEA LUI GREEN

15. Alături de sistemul omogen

$$
\text{(17)}\qquad \frac{\partial w}{\partial\bar{z}} = Aw + B\bar{w}
$$

să considerăm *sistemul său adjunct*

$$\frac{\partial w'}{\partial \bar{z}} = -w'A - \overline{w}'B, \tag{36}$$

unde

$$w'(z) = (w_1'(z), w_2'(z), \ldots, w_n'(z)),$$

$$\overline{w}'(z) = (\overline{w}_1'(z), \overline{w}_2'(z), \ldots, \overline{w}_n'(z)).$$

Atunci avem

$$\frac{1}{2i}\int_C w'(z)\, w(z)\, dz = \iint_D \frac{\partial w' w}{\partial \bar{z}}\, d\omega_z = \iint_D \left(\frac{\partial w'}{\partial \bar{z}} w + w' \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) d\omega_z =$$

$$= \iint_D (w' B\overline{w} - w' \overline{B} w)\, d\omega_z.$$

În acest fel, obținem *identitatea lui Green*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_C w'(z)\, w(z)\, dz\right) = 0 \tag{37}$$

valabilă pentru vectori analitici generalizați arbitrari, soluții ale sistemelor (17) și (36). Identitatea (37) rămîne valabilă, dacă înlocuim unul sau amîndoi vectorii $w(z)$ și $w'(z)$ prin matricile regulate $W(z)$ și $W'(z)$ ale sistemelor corespunzătoare.

Identitatea (37) se mai poate scrie și sub forma

$$\int_C (w'(z)\, w(z)\, dz - \overline{w}'(z)\, \overline{w}(z)\, d\bar{z}) = 0.$$

16. Un procedeu asemănător vom folosi pentru generalizarea teoremei lui Cauchy pentru vectori analitici generalizați. În acest caz, vom porni de la ecuațiile (34) și de la ecuația

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = \overline{A}\overline{w} + \overline{B} w$$

obținută prin conjugarea ecuației (17).

Aplicînd formula lui Green

$$\frac{1}{2i}\int_C \Omega_1(z, t)\, w(t)\, dt = \iint_D \frac{\partial(\Omega_1 w)}{\partial \bar{t}}\, d\omega_t = \iint_D \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{t}} w + \Omega_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{t}}\right) d\omega_t =$$

$$= \iint_D (\Omega_1 B\overline{w} - \Omega_2 \overline{B} w)\, d\omega_t$$

şi

$$-\frac{1}{2i}\int_C \Omega_2(z,t)\,\overline{w(t)}\,\mathrm{d}\bar{t}=\iint_D \frac{\partial(\Omega_2\overline{w})}{\partial t}\,\mathrm{d}\omega_t=\iint_D\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial t}\,\overline{w}+\Omega_2\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\omega_t=$$

$$=\iint_D(\Omega_2\,\overline{B}w-\Omega_1\,B\overline{w})\,\mathrm{d}\omega_t$$

prin adunare deducem

$$\int_C(\Omega_1(z,t)\,w(t)\,\mathrm{d}t-\Omega_2(z,t)\,\overline{w(t)}\,\mathrm{d}\bar{t})=0. \tag{38}$$

Relaţia (38) are loc pentru orice curbă simplă, rectificabilă şi închisă. situată în D.

§ 6. GENERALIZAREA UNOR REZULTATE

17. Să considerăm ecuaţia matricială omogenă

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{z}}=AWC+B\overline{W}D, \tag{39}$$

unde matricile coeficienţi A,B,C,D au componente măsurabile şi mărginite în $\overline{D}$. Pentru $C=D=I$, ecuaţia se reduce la ecuaţia (20).

Pentru sisteme de acest tip, condiţia 3° din definiţia 3 a soluţiei regulate va fi înlocuită prin condiţia :

3'. $|W(z)|=\det W(z)\neq 0$ în tot domeniul $\overline{D}$.

Fiecărei soluţii regulate $W(z)$ a ecuaţiei (39) îi ataşăm o soluţie regulată a ecuaţiei

$$\frac{\partial E}{\partial\bar{z}}=H(z)\,E,$$

unde

$$H(z)=A(z)\,WC(z)\,W^{-1}+B(z)\,\overline{W}D(z)\,W^{-1}$$

pe care o construim la fel ca în § 2.

TEOREMA 2. *Dacă* $W(z)$ *este o soluţie regulată a ecuaţiei matriciale* (39), *atunci*

$$W(z)=E(z)\,\Phi(z), \tag{40}$$

unde $\Phi(z)$ *este o matrice pătratică de ordinul* n, *nesingulară, arbitrară de funcţii olomorfe în* D.

Demonstraţia acestei teoreme este identică cu aceea a teoremei 1.

18. Ecuaţia (39) este echivalentă cu ecuaţia integrală matricială Fredholm

$$(41) \qquad W(z) + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)\,W(t)\,C(t) + B(t)\,\overline{W(t)}\,D(t)}{t - z}\,\mathrm{d}\omega_t = \Psi(z),$$

unde $\Psi(z)$ este o matrice olomorfă în D.

La fel ca în § 4, se demonstrează, folosind reprezentarea (40), că ecuaţia omogenă corespunzătoare admite numai soluţia $W(z) \equiv 0$ şi, prin urmare, ecuaţia integrală (41) este rezolubilă oricare ar fi matricea olomorfă $\psi(z)$. În acest mod, ne putem asigura de forma şi existenţa soluţiei ecuaţiei (39).

§ 7. VECTORI ANALITICI GENERALIZAŢI REGULAŢI PE PORŢIUNI

19. În § 4 am văzut că orice vector analitic generalizat $w(z)$ al sistemului (17) este o soluţie a sistemului de ecuaţii integrale

$$(42) \qquad w(z) + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)\,w(t) + B(t)\,\overline{w(t)}}{t - z}\,\mathrm{d}\omega_t = \psi(z),$$

unde $\psi(z)$ este un vector olomorf în D, şi reciproc. Prelungind analitic componentele vectorului $\psi(z)$, vom considera prelungirea corespunzătoare a componentelor vectorului $w(z)$ ca soluţii ale sistemului omogen (17), în exteriorul domeniului D.

Vom presupune asupra componentelor coeficienţilor matriciali $A(z)$ şi $B(z)$ că au o mulţime discretă sau un număr finit de arce de discontinuităţi de prima speţă în D.

Fie L o curbă, adică o mulţime finită de arce simple, rectificabile şi închise, disjuncte între ele. Ea poate fi interioară, exterioară sau să intersecteze domeniul D. Vom nota cu T^+ domeniul conex, mărginit de curba L, iar T^- domeniul complimentar lui $T^+ + L$ faţă de întreg planul complex.

DEFINIŢIA 4. *Un vector $w(z)$ soluţie a sistemului omogen (17) se numeşte vector analitic generalizat regulat pe porţiuni, avînd pe L ca linie de salturi, dacă :*

a) *Vectorul $w(z)$ este o soluţie regulată a sistemului (17) în orice domeniu mărginit al planului complex, neconţinînd puncte ale curbei L.*

b) *Componentele vectorului $w(z)$ sînt continuu prelungibile pe L, la stînga şi la dreapta.*

c) *Componentele vectorului $w(z)$ admit pe curba L numai discontinuităţi de prima speţă.*

d) *Curba L nu conţine punctele limită ale zerourilor nici unei componente a vectorului $w(z)$.*

În condiţiile de mai sus, matricea $H(z)$ definită prin egalitatea (21) rămîne măsurabilă şi mărginită în G. Prin urmare, reprezentarea de prima speţă

$$(24) \qquad w(z) = E(z)\,\varphi(z)$$

rămîne valabilă şi pentru vectorii analitici generalizaţi regulaţi pe porţiuni ai sistemului (17). Cum matricea $E(z)$ este continuă în tot planul complex, rezultă că $w(z)$ şi $\varphi(z)$ au aceleaşi discontinuităţi. De aici urmează că $w(z)$ poate avea numai singularităţi izolate : puncte singulare aparente, poli şi puncte singulare esenţiale. În particular, dacă vectorul $w(z)$ este regulat pe porţiuni, atunci divizorul său analitic $\varphi(z)$ este olomorf pe porţiuni.

Consideraţii analoge se pot face şi asupra reprezentării de speţa a doua. Într-adevăr, dacă $w(z)$ este un vector soluţie a sistemului omogen (17), în virtutea ecuaţiei (42) şi a reprezentării (32) avem

$$\iint_D \Gamma_1(z,t)\psi(t)\,d\omega_t + \iint_D \Gamma_2(z,t)\overline{\psi(t)}\,d\omega_t = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)w(t)+B(t)\overline{w(t)}}{t-z}\,d\omega_t .$$

Urmează că vectorul

$$\lambda(z) = \iint_D \Gamma_1(z,t)\,\psi(t)\,d\omega_t + \iint_D \Gamma_2(z,t)\,\overline{\psi(t)}\,d\omega_t$$

este continuu în tot planul, olomorf în exteriorul lui D şi nul la infinit. De aici rezultă că vectorii $w(z)$ şi $\psi(z)$ au aceleaşi discontinuităţi şi aceeaşi valoare la infinit. Deci, dacă vectorul $w(z)$ este regulat pe porţiuni, atunci vectorul $\psi(z)$ este olomorf pe porţiuni.

20. În problemele la limită, de care ne vom ocupa în § 9, de o deosebită importanţă este inversarea formulei de reprezentare (24).

În virtutea reprezentării (23) şi a ecuaţiei matriceale (20), matricea regulată $E(z)$ va satisface ecuaţia matricială

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{z}} = AE + B\overline{E}\,\overline{\Phi}\,\Phi^{-1}. \tag{43}$$

Această ecuaţie este de forma (39) considerată în § 6. Soluţia ei depinde de matricea olomorfă $\Phi(z)$ dată.

Conform rezultatelor din § 6, ecuaţia matricială (43) este echivalentă cu ecuaţia matricială integrală Fredholm

$$E(z) + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(t)E(t) + B(t)\overline{E(t)}\,\overline{\Phi(t)}\,\Phi^{-1}(t)}{t-z}\,d\omega_t = I, \tag{44}$$

matricea unitate I fiind valoarea matricei $E(z)$ la infinit.

Reprezentarea (24) în care am înlocuit matricea $E(z)$ cu soluţia ecuaţiei integrale (44) ne arată că fiecărui vector $\varphi(z)$ olomorf pe porţiuni îi corespunde un vector analitic generalizat regulat pe porţiuni, al sistemului (17), şi reciproc, fiecărui vector analitic generalizat regulat pe porţiuni îi corespunde un vector $\varphi(z)$ olomorf pe porţiuni. Cu alte cuvinte, această reprezentare stabileşte un omomorfism între spaţiul liniar al vectorilor generalizaţi regulaţi pe porţiuni, ai sistemului (17) şi spaţiul vectorilor olomorfi pe porţiuni (cu n componente). Prin acest omomorfism, subspațiului vectorilor analitici generalizați regulați pe porțiuni, ai sistemului (17), îi corespunde spațiul vectorilor olomorfi (cu n componente).

21. DEFINIȚIA 5. *Vectorul analitic generalizat, care corespunde unui vector constant, se numește vector constant analitic generalizat.*

Pentru asemenea soluții, se demonstrează imediat:

TEOREMA 3. *Un vector analitic generalizat regulat în tot planul este un vector constant analitic generalizat.*

DEFINIȚIA 6. *Vectorul analitic generalizat, care corespunde unui vector cu componente polinoame, se numește vector polinom analitic generalizat.*

TEOREMA 4. *Un vector analitic generalizat, regulat în tot planul și avînd ordin finit la infinit, este un vector polinom analitic generalizat.*

§ 8. VECTORI INTEGRALI GENERALIZAȚI DE TIP CAUCHY

22. Fie L, ca mai sus, linia salturilor vectorilor analitici generalizați $w(z)$ regulați pe porțiuni, ai sistemului (17). Să considerăm vectorul integral de tip Cauchy

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau(t)}{t-z}\,dt,$$

unde $\tau(t)$ este un vector cu componente integrabile pe L.

Înlocuind această reprezentare a vectorului $\psi(z)$ în formula (32), obținem vectorul *integral generalizat de tip Cauchy*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_1(z, t)\,\tau(t)\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_2(z, t)\,\overline{\tau(t)}\,d\bar{t}. \tag{45}$$

Pentru orice vector integrabil $\tau(t)$, vector integral generalizat de tip Cauchy, (45) ne dă o soluție regulată pe porțiuni a sistemului omogen (17), nulă la infinit.

Vectorul integral generalizat de tip Cauchy (45) poate fi scris și sub forma

$$w(z) = \psi(z) + \lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau(t)}{t-z}\,dt + \lambda(z), \tag{46}$$

unde $\lambda(z)$ este, după cum am văzut mai sus, continuu în tot planul și nul la infinit.

23. Dacă componentele vectorului $\tau(z)$ îndeplinește pe L condiția lui Hölder, atunci

$$\left\{\begin{aligned} \psi^{+}(t) &= \frac{1}{2}\,\tau(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau(t')}{t'-t}\,dt' \\ \psi^{-}(t) &= -\frac{1}{2}\,\tau(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau(t')}{t'-t}\,dt' \end{aligned}\right.$$

şi ţinînd seama de (46)

$$w^+(t) = \frac{1}{2}\tau(t) + w(t), \tag{47}$$

$$w^-(t) = -\frac{1}{2}\tau(t) + w(t), \tag{48}$$

unde

$$w(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_1(t, t')\,\tau(t')\,\mathrm{d}t' - \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_2(t, t')\,\overline{\tau(t')}\,\mathrm{d}\overline{t}'.$$

Din formulele (47) şi (48) obţinem formulele de salt ale lui Plemelj-Sohoţki

$$\begin{cases} w^+(t) - w^-(t) = \tau(t), \\ w^+(t) + w^-(t) = 2w(t). \end{cases} \tag{49}$$

24. Înlocuind curba L, de mai sus, cu frontiera C a domeniului D şi folosind formulele (48) şi (49), se stabileşte uşor :

TEOREMA 5. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca vectorul* $\varphi(z)$, *satisfăcînd condiţia lui Hölder pe* C, *să reprezinte valorile limită ale unui vector analitic generalizat, regulat în* D *şi continuu pe* $D + C$, *este*

$$\int_C (\Omega_1(z, t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \Omega_2(z, t)\,\overline{\varphi(t)}\,\mathrm{d}\overline{t}) = 0$$

pentru orice punct z *situat în exteriorul lui* $D + C$.

§ 9. PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU VECTORI ANALITICI GENERALIZAŢI

Vom încheia lucrarea prin a schiţa cîteva tipuri de probleme la limită pentru soluţiile sistemului (17).

25. **Problema Riemann redusă.** *Să se găsească un vector analitic regulat pe porţiuni, al sistemului (17), avînd ordin finit la infinit, cu condiţia la limită*

$$w^+(t) - w^-(t) = g(t) \quad pe\ L, \tag{50}$$

unde $g(t)$ *este un vector dat pe curba* L, *ale cărui componente îndeplinesc condiţia lui Hölder.*

Ţinînd seama de prima formulă (49), soluţia acestei probleme poate fi scrisă

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_1(z, t)\,g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_2(z, t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}\overline{t}.$$

Această soluţie satisface condiţia la limită (50), dar se anulează la infinit. Pentru înlăturarea acestui neajuns, vom adăuga un vector polinom analitic generalizat $p(z)$, care este continuu în tot planul și deci soluția problemei (50) are forma

$$(51) \quad w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_1(z, t)\, g(t)\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_2(z, t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{d}\bar{t} + p(z).$$

Se poate arăta ușor că alte soluții cu partea principală dată $p(z)$ la infinit nu există.

26. **Problema Riemann.** *Să se găsească un vector analitic generalizat regulat pe porțiuni, al sistemului (17), avînd curba L ca linie de salturi și ordin finit la infinit, cu condiția la limită*

$$(52) \qquad w^+(t) = G(t)\, w^-(t) + g(t) \quad \text{pe } L,$$

unde $G(t)$ este o matrice dată pe L, cu componente hölderiene pe L și nesingulară în fiecare punct de pe L, iar $g(t)$ este un vector dat pe L, care verifică de asemenea condiția Hölder.

În problema Riemann omogenă corespunzătoare, condiția (52) este înlocuită prin condiția

$$(53) \qquad w^+(t) = G(t)\, w^-(t).$$

Ținînd seama de reprezentarea de speța întîi

$$w(z) = E(z)\, \varphi(z)$$

și de continuitatea matricei $E(z)$ în tot planul

$$w^+(t) = E(z)\, \varphi^+(z) \quad \text{și} \quad w^-(z) = E(z)\, \varphi^-(z)$$

problema (53) se reduce la o problemă Riemann omogenă pentru vectorul $\varphi(z)$ olomorf pe porțiuni

$$(54) \qquad \varphi^+(t) = G(t)\, \varphi^-(t)$$

studiată în lucrarea lui F. D. Gahov [26] și monografia lui N. I. Mushelișvili [41].

Indicele și sistemul canonic ale problemei Riemann (53) sînt indicele și sistemul canonic ale problemei Riemann corespunzătoare (54).

Dacă $X(z)$ este matricea canonică a problemei (54) :

$$X^+(t) = G(t) X^-(t),$$

vectorul $X^{-1}(z)\, w(z)$ este o soluție regulată a sistemului omogen

$$(55) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(X^{-1} w) = X^{-1} A X (X^{-1} w) + X^{-1} B \bar{X}\, \overline{(X^{-1} w)},$$

în tot planul.

Sistemul (55) este de același tip cu sistemul (17) și, prin urmare, sistemului (55) i se pot aplica rezultatele din paragrafele precedente.Fie $p(z)$ un vector polinom analitic generalizat al sistemului (55).

Soluția $X^{-1}(z)\, w(z)$ fiind regulată în tot planul și avînd ordin finit la infinit, va fi un vector polinom analitic generalizat :

$$X^{-1}(z)\, w(z) = p(z).$$

Deci, soluția generală a problemei Riemann (53) este de forma

$$w(z) = X(z)\, p(z).$$

Rezolvarea problemei Riemann neomogene (52) se reduce la găsirea unui vector analitic generalizat regulat pe porțiuni, a sistemului (55), care verifică condiția la limită

$$[X^{-1}(t)\, w(t)]^{+} - [X^{-1} w(t)]^{-} = (X_{-}^{-1})^{+}\, g(t) \quad \text{pe} \quad L$$

adică o problemă de tipul (50).

Un studiu amănunțit al problemei Riemann pentru sistemul (14) omogen, în cazul particular $n = 1$, se găsește în articolul lui L. G. Mihailov [35], iar o parte din rezultate sînt reproduse în cartea lui F. D. Gahov [27].

27. **Problema Hilbert.** ***Să se găsească un vector analitic generalizat*** $w(z)$, ***regulat în domeniul*** D, ***al sistemului*** (17), ***ale cărui componente satisfac, pe frontiera*** C, ***condițiile la limită***

$$\text{(56)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (\mu_{jk}(t)\, u_k(t) + \nu_{jk}(t)\, v_k(t)) = \gamma_j(t), \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

unde $\mu_{jk}(t)$, $\nu_{jk}(t)$, $\gamma_{jk}(t)$ ***sînt funcții reale date pe conturul*** C.

Cazul particular $B(z) = 0$ a fost studiat în § 3.

Folosind simbolismul matricial, cazul general se reduce la un sistem de ecuații integrale singulare, urmînd un procedeu asemănător ca cel folosit de I. N. Vekua în [73] și [77].

28. **Problema derivatei oblice pentru ecuația eliptică.** ***Să se găsească în domeniul*** D ***o soluție regulată a ecuației***

$$\text{(57)} \qquad \Delta u = a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u$$

care să satisfacă pe frontiera C ***condiția la limită***

$$\alpha(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(t)\, u = \delta(t),$$

unde funcțiile $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ ***sînt reale continue, date pe*** C.

Această problemă a fost rezolvată de I. N. Vekua în [75], folosind ecuațiile integrale pentru partea reală a unei funcții analitice generalizate.

Ecuația eliptică (57) este echivalentă, după cum am văzut în § 1, cu sistemul (19). În acest cadru mai general, problema derivatei oblice este un caz particular al problemei Hilbert de mai sus. Această reducere este valabilă și pentru problema derivatei oblice în cazul sistemelor eliptice scrise matricial sub forma (57).

Primită la redacție la 1 octombrie 1964

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bers, *Partial differential equations and generalized analytic functions*. Proc. Nat. Ac. Sc., USA, **37**, *1*, 42–47 (1951).
2. L. Bers, *Theory of pseudo-analytic functions*. New York, 1953.
3. А. В. Бицадзе, *Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений*. ДАН СССР, **93**, *4*, 595—597 (1963).
4. А. В. Бицадзе, *О двумерных интегралах типа Коши*. Сооб. Акад. Наук Груз. ССР, **16**, *3*, 177—184 (1955).
5. Б. В. Боярский, *Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами*. Матем, сб., **43** (85); *4*, 451—503 (1957).
6. — *Общее представление решений эллиптической системы 2n уравнений на плоскости*. ДАН СССР, **122**, *4*, 543—546 (1958).
7. *Некоторые граничные задачи для системы 2n уравнений эллиптического типа на плоскости*. ДАН СССР, **124**, *1*, 15—18 (1958).
8. — *Proprietățile generale ale soluțiilor sistemelor eliptice în plan*, volumul „*Teoria funcțiilor de variabilă complexă*”, p. 145–168, I. S.R.S., București, 1961.
9. P. Burgatti, *Sulle funzioni analitiche d'ordine n*. Boll. Unione Mat. Italiana, **1**, *1* (1922).
10. G. Călugăreanu, *Sur les fonctions polygènes*. (Thèse), Paris, Gauthier-Villars, 1928.
11. T. Carleman, *Sur les systèmes linéaires aux derées partielles du premier ordre à deux variables*. C. R. Paris, 197, 471–474 (1933).
12. N. Ciorănescu, *Sur une formule due à M. D. Pompeiu*. Bull. Math. et Phys., **2** (1930).
13. — *Sur les fonctions monogènes aréolairement*. Mathematica, **12**, 26 (1936).
14. — *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables réeles*. Analele Academiei Române, seria III, mem. 10, 1943.
15. M. Cotlar, *Familles normales de fonctions nonalytiques*. Ann. Soc. Argentina, **129.** (1939).
16. И. И. Данилюк, *О некоторых вопросах теории эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка на поверхностях*. ДАН СССР, **105**, *1*, 11—14 (1955).
17. — *Об интегральных представлениях решений некоторых эллиптических систем первого порядка на поверхностях с приложением к теории оболочек*. ДАН СССР, **109**, *1*, 17—20, (1956).
18. — *О задаче с косой производной для эллиптических систем I-го порядка*. ДАН СССР, *1*, 9–12 (1958).
19. A. Douglis, *A function-theoretic approach to elliptic system of equations in two variables*. Comm. pures and applied Math., **6**, *2*, 259–289 (1953).
20. I. Elianu, *Asupra funcțiilor neanalitice de mai multe variabile complexe*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științ. mat. și fiz., **6**, *3*, 511–523 (1954).
21. I. Elianu, *Derivata areolară și diferențiala exterioară*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științ. mat și fiz., **8**, *1*, (1956).
22. Griffith Evans, *An elliptic system corresponding to Poisson's equation*. Acta Mat. Szeged, **6** (1932).
23. G. Fichera, *Lezioni sulle transformazioni lineari*. vol. I. Instituto matematico Trieste, 1954.
24. В. С. Федоров, *Моногенности*. Матем. сб. **18** (60), *3*, 553—578 (1946).
25. R. Fueter, *Die Funktionentheorie der Differential-Gleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reelen variablen*. Comm. Math. Helvetici, **7**, 307–330 (1934).
26. Ф. Д. Гахов, *Краевая задача Римана для системы пар функций*. Успехи матем. наук, **VII**, *4* (50), 3—54 (1952).
27. — *Краевые задачи*. Физматгиз, Москва, 1958.
28. M. Ghermănescu, *Sur une classe de fonctions monogènes*. Bul. Șc. Polit. Timișoara, 1929.
29. W. Haack, *Allgemeine Randwertprobleme für Differentialgleichungen vom elliptischen Typus*. Math. Nachr., 7, 1–30 (1952).
30. W. Haack und G. Hellwig, *Die Uberführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf Fredholmsche Integralgleichungen*. Math. Nachr., **4**, 408–418 (1950–1951).
31. Corina haimovici (Reischer), *Funcții pe algebre de ordin finit*. (Disertație) Iași, 1960.

32. G. Hellwig, *Das Randwertproblem eines linearen elliptischen Systeme*. Math. Zeitschriften, **56**, 388–408 (1952).
33. Хуан-ле-дэ, *Некоторые основные теоремы о голоморфном векторе*. **2**, *2*, 53—58 (1958).
34. M. Kasner, *A new theory of polygenic functions*. Science, **46** (1927).
35. Л. Г. Михайлов, *Краевая задача типа задачи Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и некоторые интегральные уравнения*. Ученые записки. Труды физ. матем. ф-та Тадж. гос. ун-та, **10**, 32—79 (1957).
36. Gr. C. Moisil, *Sur un système d'équations fonctionnelles*. C. R. Paris, 192 (1931).
37. Gr. C. Moisil, *Sur les quaternions monogènes*. Bull. Sci. Math., **55**, 168–174 (1931).
38. Gr. C. Moisil, *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivée partielles de la physique mathématique*. Bucarest, 1931.
39. Gr. C. Moisil, *Asupra invarianților sistemelor lui Vecua*. Nota I, III Com. Acad. R.P.R., **5**, **1**, 7–11 ; 13–19 (1955), Nata II Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științ. mat. și fiz., **6**, *3*, 595–601. (1954).
40. Gr. C. Moisil, N. Teodorescu, *Fonctions holomorphes dans l'espace*, Mathematica, Cluj, **5**, 142–159 (1931).
41. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*. Физматгиз, Москва, 1962.
42. M. Nedelcu, *La théorie des polynômes aréolaires dans l'espace à m dimensions* : I. *Le polynôme aréolaire d'ordre I*. Revue de math. pures et appl., **IV**, *4* (1959). II. *The n-order areolar polinominal*, Revue de math. pures et appl., **V**, *1*, (1960). III. *Théorème de Morera et applications des polynômes aux équations à dérivées aréolaires et aux problèmes aux limites*. Bull. Math. de la Soc. de Sc. Math. de la R.P.R., **3** (51), *2* (1959).
43. M. Nicolescu, *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace* (Thèse), Paris, Gauthier Villars, 1928.
44. M. Nicolescu, *Les fonctions polyharmoniques*. Hermann, Paris, 1936.
45. M. Nicolescu, *Unele proprietăți de descompunere ale funcțiilor de mai multe variabile și în particular ale funcțiilor poliarmonice*. Rev. Univ. „C. I. Parhon" și a Politeh. Buc. 4–5, 53–63 (1954).
46. Joachim Nitsche, *Das erste Randwertproblem eines linearen elliptischen Differentialgleichungenssystems*. Math. Nachr., **7**, 31–33 (1952).
47. Johannes Nitsche, *Über die linearen Randwertprobleme eines quasilinearen elliptischen Differentialgleichhungssystems*. Math. Ztschr., **61**, 236–347 (1954).
48. Johannes Nitsche, *Untersuchungen über die linearen Randwertaufgaben linearer und quasilinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme*. I, II, Math. Nachr., **14**, 75–127, 157–182 (1955).
49. Dan Pascali, *The areolar polynomials and the Almansi development in the plane*. Revue de math. pures et appl., **IV**, *3*, 451–455 (1959).
50. Dan Pascali, *Funcții areolar conjugate în plan*. Com. Acad. R.P.R., **X**, 4, 263–267 (1960).
51. Dan Pascali, *Cuanternioni olomorfi*, St. cerc. mat. **XII**, *1*, 163–186 (1961).
52. — *Однородная задача Гильберта для голоморфных кватернионов*. Revue de math. pures et appl., **VIII**, *4*, 653–659) (1963).
53. Dan Pascali, *O nouă reprezentare a polinoamelor areolare în plan*. St. cerc. mat., **XV**, *2*, 149–251 (1964).
54. Dan Pascali, *Reprezentarea soluțiilor unui sistem cu derivate areolare de ordinul întîi în plan*. St. cerc. mat., **XV**, *3*, 347–351 (1964).
55. Dan Pascali, *Monogeneitatea Fedorov în plan*. St. cerc. mat., **XV**, *10*, (1964).
56. Г.Н. Положий, *К вопросу о (p, q) аналитических функциях комплексного переменного и их применениях*. Revue de math. pures et appl., **II**, 331–361 (1957).
57. D. Pompeiu, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe*, Rendiconti Palermo, **33**, *1*, 108–113 (1912), **35**, *1*, 277–281 (1913).
58. D. Pompeiu , *Sur une classe d'intégrales doubles*, I–III, *1*, 128–131, 265–271, 289–296 (1912), IV, *3*, 272–277 (1914–1915).
59. Rapports — Le IV-ème Congrès des Mathématiciens Roumains, Bucarest 27 mai — 4 juin 1956.
60. J. Ridder, *Über areolar harmonische Functionen*. Acta Matematica **78**, 205–289 (1946).

61. С. Л. Соболев, *Некоторые применение функционального анализа в математической физике*. Новосибирск, 1962.
62. N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique* (Thése), Paris, Gauthier-Villars, 1931.
63. N. Teodorescu, *Sur l'emploi de conditions globales dans quelques problèmes physiques*. Annali di Matematica, 11, 1932, 325–362.
64. N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire*. Bucarest, 1936.
65. N. Teodorescu, *Cercetările românești și sovietice în teoria derivatei areolare și a funcțiilor monogene* (α), Analele Româno-Sovietice, seria Mat. -Fiz., *2*, 5–20 (1958).
66. N. Teodorescu, *Dérivée et primitive aréolaires*. Annali di Matematica **44** (1960).
67. N. Teodorescu, *Funcții olomorfe* (α) *și funcții de clasă C_z*. Com. Acad. R.P.R., **X**, *6*, 491–499 (1960).
68. N. Teodorescu, *Aproximarea funcțiilor olomorfe* (α) *prin polinoame areolare*. Com. Acad. R.P.R., **XI**, *4*, 375–382 (1961).
69. N. Teodorescu, *Dérivée aréolaire globale et dérivée généralisée*. Bull. Math. de la Soc. de Sc. Math. de la R.P.R., **6**, *3–4*, (1962).
70. A. Tonolo, *Sulle funzioni complexe di più variabili*. Rendiconti del Sem. Mat. Univ. di Padova, **5**, *1–2*, (1935).
71. Н. К. Усманов, *Граничные задачи дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа*. Труды Ун-та физ. и матем. АН Латв. ССР., **I**, 41—100 (1960).
72. — *К граничным задачам функций, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа*. Труды Ун-та физ. матем. АН латв. ССР, **II**, 59—100 (1950).
73. И. Н. Векуа, *Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек*. Матем, сб., 31 (73), *2*, 217—314, (1952).
74. — *Общее представление функций двух независимых переменных, допускающих производные в смысле С. Л. Соболева и проблемы приммитивных*. ДАН СССР, **89**, *5*, 773—775 (1953).
75. — *Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа*. ДАН СССР, **90**, *6*, 1113—1116 (1953).
76. J. N. Vekua, *Cîteva probleme ale teoriei funcțiilor analitice generalizate și ale aplicațiilor în geometrie și mecanică*. Bul. Mat. a Soc. de Șt. mat. și fiz. a R.P.R., **1**, *2*, (1957).
77. — *Обобщенные аналитические функции*. Физматгиз, Москва, 1959.

INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A GRUPURILOR SPINORIALE[1]

DE

IULIAN POPOVICI şi CEZAR GHEORGHE
(Bucureşti) (Bucureşti)

Punctul de plecare al lucrării de faţă îl constituie studiul mulţimii reprezentărilor matriciale ale unei algebre Clifford C_n [7]. Grupul spinorial astfel introdus este caracterizat prin formulele (11) sau (17), (19); grupul liniar (19) este un subgrup ortogonal. Se stabileşte forma generală a identităţilor lui Pauli [3]. Se stabileşte de asemenea legătura acestor rezultate cu teoria generală a reprezentărilor grupurilor unimodulare.

1. INTRODUCERE

Fie C_n algebra Clifford asociată spaţiului euclidian complex E_n de metrică $\delta_{ij}(i,j = 1,\ldots, n)$. În cele ce urmează vom presupune că n este par ($n = 2\nu$), caz în care algebra Clifford corespunzătoare $C_{2\nu}$ admite o reprezentare pe algebra operatorilor liniari ai spaţiului vectorial complex $\sum_N$ cu $N = 2^\nu$ (spaţiul spinorial asociat lui $C_{2\nu}$) [7]. Alegînd o bază fixă în $\sum_N$, această reprezentare devine matricială [2], [7].

Fie e_i un sistem de matrici de ordinul N, involutive şi anticomutative două cîte două:

$$e_i\, e_j + e_j\, e_i = 2\,\delta_{ij}. \tag{1}$$

(0 matrice M este prin definiţie involutivă dacă $M^2 = 1$).

Pornind de la matricile (1), putem construi următoarea reprezentare a bazei algebrei Clifford $C_{2\nu}$ prin matrici involutive:

$$e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\, 0} = i^s\, e_{j_1} \ldots e_{j_{2s}}\ (j_1 < \ldots < j_{2s};\ i^2 = -1) \tag{2}$$

$$e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\, 1} = i^{s-1}\, e_{j_1} \ldots e_{j_{2s-1}} (j_1 < \ldots < j_{2s-1}) \tag{2'}$$

---

[1] Versiunea în l. franceză va apărea în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **X**, 7 (1965).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5 P. 737–746, BUCUREŞTI, 1965

($s = 1, \dots, \nu$), unde indicele α_p ($p = 1, \dots, n$) este 1 sau 0 după cum p figurează sau nu figurează printre indicii $j_1, \dots, j_{2s}$ respectiv $j_1, \dots, j_{2s-1}$. Vom conveni ca matricea (2) corespunzătoare lui $s = 0$ să coincidă cu matricea unitate. Observăm că orice matrice (2), (2′) poate fi exprimată cu ajutorul simbolului $e_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}}$ cu $\alpha_p = 1$ sau 0 ($p = 1, \dots, n+1$), şirurile ordonate $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ conţinînd un număr par de termeni egali cu 1 şi un număr impar de termeni egali cu 0. Obţinem matricile (2) pentru $\alpha_{n+1} = 0$ şi matricile (2′) pentru $\alpha_{n+1} = 1$.

Fie G_ν grupul aditiv al şirurilor $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ definite mai sus, sumele componentelor efectuîndu-se modulo 2. Notăm prin $\alpha, \beta, \dots$, elementele grupului G_ν. Rezultă că matricile (2), (2′) pot fi exprimate prin simbolurile $e_\alpha, e_\beta, \dots$.

Vom asocia fiecărei perechi $\alpha\ (\alpha_p)$, $\beta\ (\beta_p)$ de elemente ale grupului G_ν următoarele două numere întregi:

$$(3) \qquad [\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha] = \sum_{p>q} (\alpha_p \beta_q - \alpha_q \beta_p), (p, q = 1, \dots, n+1).$$

Se verifică imediat următoarele relaţii:

$$(4) \qquad 2 \sum_{p>q} \alpha_p \beta_q + \sum_p \alpha_p \beta_p \equiv [\alpha, \beta] \bmod 4$$

$$(5) \qquad [\alpha + \beta, \beta] \equiv [\beta, \alpha] \bmod 4.$$

Teorema A. *Matricile e_α date de (2), (2′) verifică relaţiile:*

$$(6) \qquad e_\alpha e_\beta = i^{[\alpha,\beta]} e_{\alpha+\beta}.$$

Oricare ar fi matricile e_α verificînd (6), există un sistem de matrici e_i care verifică (1) şi (2), (2′).

Demonstraţie. Matricile:

$$(7) \qquad E_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = e_{i_1} \dots e_{i_l} \ (i_1 < \dots < i_l;\ l = 0, \dots, n)$$

[$\alpha_i = 1$ sau 0 ($i = 1, \dots, n$) după cum i figurează sau nu figurează printre indicii $i_1, \dots, i_l$] verifică [6], [7] relaţiile:

$$(8) \qquad E_{\alpha_1 \dots \alpha_n} E_{\beta_1 \dots \beta_n} = (-1)^{\sum\limits_{i>j} \alpha_i \beta_j} E_{\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n}.$$

Comparînd (2), (2′) cu (7), relaţiile (8) devin:

$$(8') \qquad e_\alpha e_\beta = (-1)^{\sum\limits_{p>q} \alpha_p \beta_q} i^{\sum\limits_p \alpha_p \beta_p} e_{\alpha+\beta}$$

(8′) se reduce imediat la (6) în virtutea relaţiei (4).

Fie e_α un sistem de matrici verificînd (1). Punem:

$$(9) \qquad e_i = e_{\alpha^i} \ [\alpha^i (\alpha^i_j = \delta^i_j,\ \alpha^i_{n+1} = 1) \in G_\nu].$$

Vom demonstra relaţiile (2), (2′) prin inducţie în raport cu numărul natural s definit de $2s = \sum_p \alpha_p$.

Mai întîi, din (6) rezultă că matricile e_i definite de (9) verifică (1). Remarcăm că, pentru $s = 1$, (2′) coincide cu (9). Vom arăta acum că din relația (2′) (s fiind fixat) rezultă (2). În adevăr, fie $\alpha(\alpha_p) \in G_\nu$, astfel că $\sum_p \alpha_p = 2s$ și $\alpha_{n+1} = 0$. Notăm cu k cel mai mare indice pentru care $\alpha_k = 1$ și definim elementul $\beta \in G_\nu$ prin $\beta = \alpha + \alpha^k$, cu α^k dat de (9). Din (8′) se poate deduce :

$$e_\beta \, e_k = - i e_\alpha . \tag{10}$$

Dar β are componenta $\beta_{n+1} = 1$ și prin urmare matricea e_β corespunzătoare este dată de (2′). Din (10) se deduce :

$$e_\alpha = i^s e_{j_1} \dots e_{j_{2s-1}} e_k . \tag{10′}$$

(10′) coincide cu (2) pentru că, din definiția lui k, deducem $k > j_{2s-1}$. În același fel se poate arăta că relația (2′) corespunzătoare lui $s + 1$ rezultă din (2) (cu s fixat).

2. GRUPUL SPINORIAL

În acest paragraf vom relua anumite rezultate clasice privind transformările spinoriale [2], [7].

Fie $\mathbb{S}_\nu$ *grupul transformărilor care leagă între ele diversele reprezentări matriciale prin matrici de ordinul* N *ale lui* $C_{2\nu}$. Vom spune că $\mathbb{S}_\nu$ *este grupul spinorial asociat algebrei Clifford* $C_{2\nu}$.

Existența unor reprezentări ale lui $C_{2\nu}$ pentru care matricile e_i verificînd (1) sînt hermitice [2], impune considerarea *subgrupului* $\mathbb{S}'_\nu$ *al lui* $\mathbb{S}_\nu$ *care conservă proprietatea matricilor* e_i *de a fi hermitice.*

TEOREMA B. $\mathbb{S}_\nu$ *este dat de grupul transformărilor*

$$e'_\alpha = S^{-1} e_\alpha S, \tag{11}$$

unde e_α *sînt date de* (2), (2′) *și* S *este o matrice de ordinul* N, *factorizat la subgrupul transformărilor* (11) *pentru care* $S = \lambda$ (λ *complex arbitrar*). *Grupul* $\mathbb{S}'_\nu$ *coincide cu grupul transformărilor* (11) *cu* S *unitară, factorizat la subgrupul pentru care* $S = e^{it}$ (t *real arbitrar*).

Demonstrație. Două sisteme de matrici e_i, e'_i verificînd (1) sînt legate prin relația [5], [7] :

$$e'_i = S^{-1} e_i S. \tag{12}$$

Din (12) rezultă (11), conform relațiilor (2), (2′). Fie acum o matrice S' astfel ca :

$$e'_\alpha = S'^{-1} e_\alpha S'. \tag{11′}$$

Relațiile (11), (11′) dau :

$$e_\alpha S' S^{-1} = S' S^{-1} e_\alpha . \tag{13}$$

Din (13) rezultă că matricea $S'S^{-1}$ aparține centrului algebrei Clifford $C_{2\nu}$ [7] şi avem :

$$S' = \lambda S \tag{13'}$$

cu λ complex.

Din (2) și (2′) rezultă că matricile e_i sînt hermitice dacă și numai dacă e_α sînt hermitice. Vom demonstra existența unei matrici T unitare ($T^{-1} = \overline{T}$, unde $\overline{T}$ este adjuncta lui T) care verifică relațiile (11) oricare ar fi e_α, e'_α hermitice, date de (2), (2′). În adevăr, (11) poate fi scrisă sub forma :

$$e'_\alpha = S\, e_\alpha\, S^{-1} \tag{14}$$

pentru e_α, e'_α hermitice. (11) și (14) dau, în virtutea lui (13′) :

$$S\bar{S} = \rho. \tag{15}$$

Matricea SS avînd urma pozitivă, din (15) rezultă că $\rho > 0$. Atunci se verifică ușor că matricea

$$T = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\, S \tag{16}$$

este unitară.

Fie acum S, S' două matrici unitare care verifică (11), (11′). Relațiile (13′) implică atunci $\lambda = e^{it}$ (t real).

3. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A GRUPURILOR $\mathfrak{S}_\nu$ ȘI $\mathfrak{S}'_\nu$

TEOREMA C. *$\mathfrak{S}_\nu$ și $\mathfrak{S}'_\nu$ sînt subgrupuri (proprii) ale grupurilor ortogonale în $N^2 - 1$ variabile complexe respectiv reale (pentru $\nu > 1$), care operează asupra matricilor e_α cu $\alpha \neq 0$ date de* (2), (2′).

Demonstrație. Din teorema A rezultă că grupul $\mathfrak{S}_\nu$ este caracterizat prin proprietatea de a invaria formulele (6). e_α, e'_α fiind două sisteme de matrici care verifică (6), avem :

$$e'_\alpha = c_\alpha^\beta\, e_\beta, \tag{17}$$

unde c_α^β ($\alpha, \beta \in G_\nu$) sînt elementele unei matrici nesingulare de ordinul N^2. Din (6) și (17) deducem :

$$\sum_{\gamma,\delta} i^{[\gamma,\delta]}\, c_\alpha^\gamma\, c_\beta^\delta\, e_{\gamma+\delta} = \sum_\gamma i^{[\alpha,\beta]}\, c_{\alpha+\beta}^\gamma\, e_\gamma. \tag{18}$$

Considerînd pe δ fix în membrul stîng al lui (18), indicii γ și $\gamma + \delta$ parcurg simultan grupul G_ν. Această observație ne permite să substituim indicele γ prin $\gamma + \delta$. Conform relațiilor (5), formulele (18) devin în urma acestei substituții :

$$\sum_{\gamma,\delta} i^{[\delta\,\gamma]}\, c_\alpha^{\gamma+\delta}\, c_\beta^\delta\, e_\gamma = \sum_\gamma i^{[\alpha,\beta]}\, c_{\alpha+\beta}^\gamma\, e_\gamma. \tag{18'}$$

Matricile e_α fiind liniar independente, din (18′) deducem :

$$\sum_\delta i^{[\delta,\gamma]}\, c_\alpha^{\gamma+\delta}\, c_\beta^\delta = i^{[\alpha,\beta]}\, c_{\alpha+\beta}^\gamma. \tag{19}$$

Efectuînd calculele în ordine inversă, se vede ușor că orice transformare (17), (19) invariază formulele (6).

În consecință, *grupul spinorial* $\$_\nu$ *este caracterizat prin formulele* (17), (19). Aceste transformări invariază proprietatea matricilor e_α de a fi hermitice dacă și numai dacă c_α^β sînt reali. $\$'_\nu$ *este atunci subgrupul real definit de* (17), (19).

Dacă luăm în (19) $\gamma = 0$, vom obține :

$$c_\alpha^\delta c_\beta^\delta = i^{[\alpha,\beta]} c_{\alpha+\beta}^0. \tag{19'}$$

Se verifică ușor că oricare ar fi $\gamma \neq 0$ din G_ν, există α (α_p), $\beta(\beta_p) \in G_\nu$ astfel ca $\alpha + \beta = \gamma$ și $\sum\limits_p \alpha_p \beta_p$ să fie impar. Din (4) rezultă că $[\alpha, \beta]$ este de asemenea impar. Membrul drept al lui (19′) este atunci antisimetric în α și β, în timp ce membrul stîng este simetric. Avem deci :

$$c_\alpha^0 = 0, \quad (\alpha \neq 0). \tag{20}$$

Din (19′) și (20) deducem :

$$c_\alpha^\delta c_0^\delta = 0, \quad (\alpha \neq 0). \tag{19''}$$

În virtutea lui (20), matricea c_α^β $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$ este nesingulară și din (19″) rezultă :

$$c_0^\alpha = 0, \quad (\alpha \neq 0), \tag{20'}$$

Luînd în (19′) $\alpha = \beta = 0$, obținem, în virtutea lui [20′), $(c_0^0)^2 = c_0^0$. Cum matricea c_α^β este nesingulară, nu putem avea [în virtutea lui (20) sau (20′)] $c_0^0 = 0$. În consecință

$$c_0^0 = 1. \tag{20''}$$

Relațiile (20′), (20″) puteau fi deduse și în mod direct, din faptul că grupul $\$_\nu$ invariază matricea unitate e_0.

Din (19), (20) și (20″) se poate deduce :

$$c_\alpha^\gamma c_\beta^\gamma = \delta_{\alpha\beta}. \tag{21}$$

Relațiile (20), (20′), (20″) și (21) pun în evidență faptul că *grupul liniar definit de* (19) *este un subgrup ortogonal în* $N^2 - 1$ *variabile*. Cealaltă afirmație conținută în enunțul teoremei C rezultă din considerente de ordin dimensional. Conform teoremei B, grupurile $\$_\nu$ și $\$'_\nu$ au $N^2 - 1$ parametri complecși respectiv reali. Avem, evident, pentru $\nu > 1$:

$$N^2 - 1 < \frac{1}{2}(N^2 - 1)(N^2 - 2).$$

Dar numărul de parametri ai grupului ortogonal în $N^2 - 1$ variabile este dat de membrul drept al acestei inegalități.

Vom demonstra acum că *matricile* c_α^β *care verifică* (19) *definesc rotații proprii ale lui* E_{N^2-1} (produse ale unui număr par de simetrii). În adevăr, urmele matricilor e_α $(\alpha \neq 0)$ sînt nule [2], [7]. Avem deci :

$$\text{tr. } e_{\alpha+\beta} = N \delta_{\alpha\beta}. \tag{22}$$

Din (6), (11), (17) și (22) se deduce ușor:

$$c_\alpha^\beta = \frac{1}{N}\,\mathrm{tr.}\,(S^{-1}\,e_\alpha\,S\,e_\beta). \tag{23}$$

În virtutea lui (23), orice matrice c_α^β verificînd (19) poate fi unită cu matricea unitate printr-un șir continuu de matrici care verifică de asemenea (19). *Grupul definit de* (19) *este deci continuu.*

4. IDENTITĂȚILE LUI PAULI

Vom stabili în acest paragraf forma generală (corespunzătoare unei algebre Clifford oarecare) a identităților lui Pauli [3].

TEOREMA D. *Matricile* e_α *date de* (2), (2′) *verifică relațiile următoare* (*identitățile lui Pauli*):

$$\sum_{\alpha\in G_\nu} (e_\alpha)_{\rho\sigma}\,(e_\alpha)_{\tau\omega} = N\,\delta_{\rho\omega}\,\delta_{\tau\sigma}, \quad (\rho, \sigma, \tau, \omega = 1,.., N) \tag{24}$$

Demonstrație. Fie S o matrice oarecare de ordinul N. Punem:

$$T = \sum_\alpha e_\alpha\,S e_\alpha. \tag{25}$$

Avem conform lui (6):

$$e_\beta\,T = \sum_\alpha i^{[\beta,\,\alpha]}\;e_{\alpha+\beta}\,S\,e_\alpha \tag{25'}$$

$$Te_\beta = \sum_\alpha i^{[\alpha,\,\beta]}\,e_\alpha\,S\,e_{\alpha+\beta}. \tag{25''}$$

Din (5) rezultă că substituția lui α prin $\alpha + \beta$ transformă relațiile (25′) și (25″) una în cealaltă. Matricea T aparține deci centrului algebrei Clifford $C_{2\nu}$ și avem:

$$\sum_\alpha e_\alpha\,S\,e_\alpha = \lambda, \;(\lambda \text{ complex}). \tag{26}$$

Relația (26) devine:

$$\sum_\alpha (e_\alpha)_{\rho\sigma}\,(e_\alpha)_{\tau\omega} = \lambda_{\tau\sigma}\,\delta_{\rho\omega}. \tag{27}$$

pentru

$$(S)_{\rho\sigma} = \delta_{\rho\tau}\,\delta_{\omega\sigma}. \tag{27'}$$

Coeficientul $\lambda_{\tau\sigma}$ poate fi determinat ușor prin contracția lui (27) în ρ și ω. Relația (27) se reduce atunci la (24).

Remarcăm că orice vector cu N^2 componente a_α ($\alpha \in G_\nu$) poate fi exprimat sub forma:

$$a_\alpha = \mu_{\tau\omega}\,(e_\alpha)_{\omega\tau}\,, \tag{28}$$

unde $\mu_{\tau\omega}$ sînt invarianţi în raport cu grupul (19). Vectorii $(e_\alpha)_{\rho\sigma}$ $(\rho \neq \sigma)$ sînt izotropi; doi vectori $(e_\alpha)_{\rho\sigma}$ şi $(e_\alpha)_{\tau\omega}$ $(\rho \neq \omega$ sau $\tau \neq \sigma)$ sînt perpendiculari. Din (28) şi (24) se deduce:

$$N \mu_{\tau\omega} = a_\alpha (e_\alpha)_{\tau\omega}. \tag{28'}$$

5. O TEOREMĂ DE REPREZENTARE

Folosind identităţile lui Pauli (24), putem arăta uşor că *relaţia* (23) *determină un omomorfism de grupuri liniare.* Teoremele B şi C definesc atunci un izomorfism al grupului complex caracterizat de (19) cu grupul proiectiv complex în $N-1$ variabile independente; restricţia reală a grupului (19) este izomorfă cu grupul unitar în N variabile factorizat la subgrupul transformărilor $S = e^{it}$ (t real). Obţinem astfel *două reprezentări liniare N-valente ρ şi ρ': una a grupului unimodular complex în N variabile, cealaltă a grupului special unitar în N variabile* ($N = 2^\nu$). ***Reprezentările ρ şi ρ' sînt exprimate de*** (23) *cu S unimodulară respectiv unitară*; *ele sînt deci continue.* Codomeniile lui ρ şi ρ' sînt grupurile (complex respectiv real) definite de (19).

TEOREMA E. ***Reprezentările liniare ρ şi ρ' sînt ireductibile.***

Demonstraţie. Vom arăta [4] că dacă aplicăm unei combinaţii liniare oarecare $\sum a_\alpha x^\alpha$ $(\alpha \in G_\nu,\ \alpha \neq 0)$ în coordonatele x^α ale spaţiului E_{N^2-1} diferite transformări (19) se obţin N^2-1 combinaţii liniare independente.

Fie G_p subgrupul lui G_ν definit prin:

$$\alpha(\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}) \in G_p \rightleftarrows \alpha_p = 0. \tag{29}$$

Matricile diagonale $\underset{(p)}{C}$ cu

$$\underset{(p)}{C}{}^\alpha_\alpha = \begin{cases} 1\ (\alpha \in G_p) \\ -1\ (\alpha \notin G_p) \end{cases} \tag{30}$$

sînt de forma (19). În adevăr, orice matrice (19) diagonală este caracterizată prin:

$$c^\alpha_\alpha c^\beta_\beta = c^{\alpha+\beta}_{\alpha+\beta} \tag{31}$$

însă matricile $\underset{(p)}{C}$ verifică (31).

Pornim acum de la o combinaţie liniară oarecare $\sum a_\alpha x^\alpha$ şi presupunem, pentru a fixa ideile, că coeficientul lui x^α cu $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{2s} = 1$, $\alpha_{2s+1} = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$ nu este nul. Aplicînd operaţia $\underset{(1)}{C}$, forma se reproduce, coeficienţii a_α cu $\alpha_1 = 0$ rămînînd neschimbaţi, ceilalţi schimbîndu-şi semnul. Prin scădere se deduce o nouă combinaţie liniară în care nu figurează decît acei x^α cu $\alpha_1 = 1$. Procedînd la fel pentru indicii 2,3,..,$2s$, vom avea o nouă combinaţie liniară în care intră doar componentele x^α cu $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{2s} = 1$. Folosind acum operaţiile $\underset{(2s+1)}{C}, \ldots, \underset{(n+1)}{C}$, vom elimina prin adunare toţi x^α cu $\alpha_{2s+1} = 1$, sau $\alpha_{2s+2} = 1$, sau ... sau $\alpha_{n+1} = 1$. În definitiv, vedem că din combinația liniară dată se poate deduce orice termen nenul al său. Pentru a termina demonstrația teoremei E este suficient să stabilim următoarea proprietate : oricare ar fi elementele γ, δ ale grupului $G_\nu (\gamma \neq 0,\ \delta \neq 0)$, există o matrice c_α^β verificînd (19) cu $c_\gamma^\delta \neq 0$. În adevăr, fie e_α un sistem de matrici dat de (2), (2′). Din (6) rezultă că e_γ și e_δ pot fi considerate ca matricile e_1' și e_1'' a două sisteme e_i' respectiv e_i'' care verifică (1). Avem atunci conform lui (12) $e_\delta = T^{-1} e_\gamma T$ și (23) dă (pentru $S = T$) $c_\gamma^\delta = 1$.

6. PONDEREA DOMINANTĂ A REPREZENTĂRII ρ

Necesitatea acestui paragraf rezultă din faptul că *ponderea dominantă* [1] *a unei reprezentări liniare ireductibile a grupului unimodular complex în m variabile caracterizează reprezentarea respectivă.*

Fie $\mathfrak{L}$ algebra Lie a grupului unimodular complex în $N = 2^\nu$ variabile. ρ induce o reprezentare liniară a lui $\mathfrak{L}$ dată de :

(32) $$B_{\alpha\beta} = -\frac{1}{N}\ \mathrm{tr.}(A\,[e_\alpha,\ e_\beta]),\quad (\mathrm{tr.}\ A = 0).$$

Formula (32) rezultă din (23).

Fie $\mathfrak{C}$ algebra Cartan a lui $\mathfrak{L}$ definită prin :

(33) $$h = \lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_{N-1} h_{N-1},\qquad (\lambda_1 \ldots \lambda_{N-1}\ \text{arbitrari})$$

cu

(33′) $$(h_\rho)_{\tau\omega} = \delta_{\rho\tau}\,\delta_{\rho\omega} - \delta_{N\tau}\,\delta_{N\omega},\qquad (\rho = 1, \ldots, N-1).$$

Imaginea matricii (33) prin reprezentarea (32) este :

(34) $$H = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_{N-1} H_{N-1}$$

cu

(34′) $$(H_\rho)_{\alpha\beta} = \frac{1}{N}([e_\alpha,\ e_\beta]_{NN} - [e_\alpha,\ e_\beta]_{\rho\rho}).$$

Fie a_α $(\alpha \in G_\nu,\ \alpha \neq 0)$ un vector propriu al operatorului H_ρ corespunzător valorii proprii m_ρ. Componentele $\mu_{\tau\omega}$ ale vectorului a_α date de (28′) verifică [conform lui (24)] relațiile :

$$\mu_{\tau\omega} = 0\ (\tau \neq \rho \neq \omega,\ \tau \neq N \neq \omega)$$

(35) $$\left.\begin{aligned}(m_\rho - 1)\,\mu_{\tau N} = (m_\rho + 1)\,\mu_{N\tau} = 0\\ (m_\rho - 1)\,\mu_{\rho\tau} = (m_\rho + 1)\,\mu_{\tau\rho} = 0\end{aligned}\right\}(N \neq \tau \neq \rho),$$

$$(m_\rho - 2)\,\mu_{\rho N} = (m_\rho + 2)\,\mu_{N\rho} = \mu_{\rho\rho} = \mu_{NN} = 0 :$$

Din (35) rezultă că *ponderea dominantă a reprezentării* ρ *este* :

(36) $$\Lambda = 2\,\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{N-1}.$$

Forma liniară complexă (36) reprezintă valoarea proprie a operatorului H definit de (34), (34′) corespunzătoare vectorului propriu $(e_\alpha)_{N1}(\ \alpha \neq 0)$.

7. FORME BILINIARE ŞI PĂTRATICE SPINORIALE

Se pot considera mărimi tensoriale în raport cu grupul liniar (19) (complex sau real). Orice vector a_α în raport cu acest grup are componenta a_0 invariantă, rezultat ce se extinde în mod corespunzător la tensori de diverse ordine.

Formele biliniare spinoriale constituie un exemplu de obiect geometric asociat grupului (19). Fie φ, ψ doi spinori [2], [4], [7] (doi vectori ai spațiului liniar $\sum_N$), primul covariant și al doilea contravariant :

$$\varphi' = S\varphi, \quad \psi' = \psi S^{-1}. \tag{37}$$

Formele biliniare

$$V_\alpha = \psi e_\alpha \varphi, \tag{38}$$

unde e_α sînt date de (2), (2′), se transformă după legea :

$$V'_\alpha = \psi S^{-1} e_\alpha S\varphi = c^\beta_\alpha V_\beta, \tag{38′}$$

c^β_α verificînd (19). În consecință, *formele biliniare* (38) *constituie componentele unui vector în raport cu grupul complex* (19).

Dacă ne limităm la grupul unitar al lui $\sum_N$, formulele (37) de transformare a vectorilor devin :

$$\varphi' = S\varphi, \psi' = \psi S \tag{37′}$$

unde S reprezintă o matrice unitară. Spinorii φ și ψ^* (complex conjugat cu ψ) au deci aceeași lege de transformare și *formele pătratice*

$$Q_\alpha = \varphi^* e_\alpha \varphi \tag{39}$$

constituie componentele unui vector în raport cu grupul (19) *real*. Acest vector este real pentru e_α hermitice. Formele pătratice spinoriale covariante în E_n [2], [4] sînt generalizate de (39).

Din (24) rezultă :

$$\sum_{\alpha\neq 0} V^2_\alpha = (N-1) V^2_0, \sum_{\alpha\neq 0} Q^2_\alpha = (N-1) Q^2_0. \tag{40}$$

Lucrarea de față conține toate elementele necesare pentru a extinde rezultatele din [8] asupra formelor biliniare și pătratice spinoriale la cazul unei algebre Clifford $C_{2\nu}$.

Primită la redacție la 10 noiembrie 1964

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București.
Facultatea de fizică a Universității din București

BIBLIOGRAFIE

1. E. Cartan, J. Math. pures et appl., **10** (1914).
2. V. Fok, Zs. Phys, **57** (1929).
3. W. Pauli, Ann. Inst. H. Poincaré, **6** (1936).
4. E. Cartan, *La théorie des spineurs*. Exposés de Géométrie, Paris, 1938.
5. F. Murnaghan, *The theory of group representations*. New York, 1938.
6. H. Weyl, *The classical groups*. Princeton, 1946.
7. П. Рашевский, Усп. Мат. Наук, **X**, *2* (64) (1955).
8. I. Popovici, A. Popovici, Revue Roumaine de math. pures et appl., **10**, *7* (1964).

LINIE DE AŞTEPTARE CU NUMĂR LIMITAT DE SOLICITANŢI ŞI SERVIRE ÎN FAZE[1]

DE

P. ISCOVICI şi G. GODINI

Un sistem format din două staţii de servire S_1, S_2 fiecare staţie fiind capabilă să îndeplinească numai faza s_1, s_2, respectiv, este analizat în condiţiile intrărilor Poisson, a serviciului exponenţial şi unele modificări ale disciplinei liniei de aşteptare. Este dată metoda pentru obţinerea expresiilor probabilităţilor P_n de a avea n solicitanţi în sistem.

În unele probleme practice din teoria aşteptării se poate ivi situaţia în care servirea solicitanţilor să fie alcătuită dintr-o serie de k subservicii $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$, cu menţiunea că aceste subservicii nu sînt întotdeauna solicitate toate, ci începînd de la un anumit indice succesiv pînă la sfîrşit.

De exemplu, presupunînd că serviciul în genere se compune din k faze (subservicii) $s_1, s_2, \ldots, s_k$, un solicitant dacă are nevoie de toate fazele va începe cu s_1 şi va trece succesiv prin toate pînă la s_k inclusiv. Dacă începe însă cu faza s_i, înseamnă că trebuie să treacă succesiv prin fazele $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_k$.

Acest serviciu în faze poate fi efectuat de o singură staţie şi în acest caz, staţia este profilată pentru a putea efectua toate subserviciile, începînd de la primul succesiv pînă la ultimul.

Se poate însă organiza un sistem de k staţii $S_1, S_2, \ldots, S_k$, profilate fiecare respectiv şi exclusiv pe fazele $s_1, s_2, \ldots, s_k$.

De exemplu, dacă solicitantul intră în staţia S_1, înseamnă că are nevoie de toate subserviciile şi va trece deci succesiv prin toate staţiile de servire. Dacă intră în stația S_i, înseamnă că are nevoie numai de subserviciile $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_k$ și deci solicitantul va trece succesiv prin stațiile S_i, $S_{i+1}, \ldots, S_k$.

---

[1] Versiunea în l. engleză va apărea în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, 7 (1965)

În cazul unei singure stații de servire cu servire în faze este firesc că dacă stația este ocupată, solicitantul care urmează în ordine a fi servit, indiferent de fază, trebuie să aștepte.

În celălalt caz se poate admite ca în timp ce unele stații sînt ocupate, solicitantul care urmează în ordine să intre în servire să ocupe, în anumite condiții, o stație disponibilă.

De aici rezultă și interesul practic pe care îl poate prezenta o linie de așteptare cu servire în faze organizază în acest sens.

În cele ce urmează vom examina cazul servirii cu două faze în două stații de servire.

Ipotezele de lucru sînt următoarele :

— număr limitat de solicitanți (m) ;

— serviciul are două faze s_1 și s_2 în stațiile S_{I} și S_{II} cu ratele de servire respectiv μ_1 și μ_2, timpul de servire fiind exponențial ;

— *fiecare* solicitant sosește în sistem conform distribuției Poisson cu rata medie λ ;

— fenomenul depinde de mărimea intervalului de timp ales și nu de momentul inițial al intervalului (principiul omogeneității în timp) ;

— o anumită disciplină a liniei de așteptare care cere :

a) în sistem nu poate intra la un moment oarecare decît cel mult un solicitant ;

b) cele două subservicii nu se pot termina în același timp și nu pot avea loc în același timp o servire și o sosire în sistem ;

c) solicitanții sînt serviți în ordinea sosirii ;

d) un solicitant poate cere fie numai serviciul s_2 cu probabilitatea B, fie ambele servicii s_1 și s_2 în această ordine cu probabilitatea A $(A + B = 1)$;

e) dacă solicitantul care urmează a fi servit cere ambele servicii și S_{I} este ocupată, așteaptă pînă la eliberarea stației S_{I} ;

f) dacă solicitantul în ordine a fi servit cere s_2 și S_{II} este liberă, intră în această stație ;

g) dacă S_{II} este ocupată și S_{I} liberă și solicitantul ce urmează a fi servit cere ambele servicii, intră în S_{I} ;

h) dacă S_{II} este ocupată și S_{I} liberă și solicitantul ce urmează a fi servit cere s_2, așteaptă pînă la eliberarea stației S_{II} ;

i) dacă solicitantul din stația S_{I} a terminat servirea dar S_{II} este ocupată, așteaptă în S_{I} pînă la eliberarea stației S_{II}, pentru a putea trece în această stație (avînd prioritate față de solicitantul care, urmînd a intra în servire, cere s_2) ;

j) doi solicitanți din sistem pot intra în același moment în cele două stații, cu respectarea restricțiilor de mai înainte ;

Exemplu. Dacă S_{I} este liberă, S_{II} ocupată, în linia de așteptare se găsesc cel puțin doi solicitanți, din care primul cere evident S_{II}, iar al doilea S_{I}, după eliberarea staţiei S_{II}, primii doi solicitanţi din linia de aşteptare ocupă respectiv staţiile S_{II} şi S_{I}.

Notaţii :

P_n (t) reprezintă probabilitatea de a avea n solicitanţi în sistem la timpul t $(n = 0,1,2,\ldots, m)$;

$P_{n,\mathrm{I}}(t)$ reprezintă probabilitatea de a avea n solicitanţi în sistem, din care unul în S_{I} şi S_{II} liberă (aceasta înseamnă că următorul solicitant a fi servit cere ambele servicii, $n = 1,2,\ldots,m$);

$P_{n,\mathrm{II}}\,t$ reprezintă probabilitatea de a avea n solicitanţi în sistem din care unul în S_{II} şi S_{I} liberă (aceasta înseamnă că solicitantul în ordine a fi servit cere serviciul s_2, $n = 1,2,\ldots, m$);

$\mathrm{P}_{n,\mathrm{I\,II}}(t)$ reprezintă probabilitatea de a avea n solicitanţi în sistem cu ambele staţii ocupate, $n = 2,3,\ldots,m$;

$\overline{\mathrm{P}}_{n,\mathrm{I\,II}}(t)$ reprezintă probabilitatea de a avea n solicitanţi în sistem şi ambele staţii lucrează efectiv;

$\overline{\overline{\mathrm{P}}}_{n,\mathrm{I\,II}}$ (t) reprezintă probabilitatea de a avea n solicitanţi în sistem, ambele staţii ocupate şi staţia S_{I} cu serviciul terminat;

$\lambda^{(s)}$ numărul solicitanţilor care sosesc în unitatea de timp, în cazul în care în sistem se găsesc s solicitanţi $(s \leqslant m)$.

Valoarea lui $\lambda^{(s)}$ este $\lambda^{(s)} = (m - s)\,\lambda$.

Calculul probabilităţilor necesare conduce la următoarele relaţii:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda^{(0)}\Delta t) + P_{1,\mathrm{II}}(t)\,\mu_2\,\Delta t$$

din care rezultă :

$$-\,m\,\lambda\,P_0 + P_{1,\mathrm{II}}\,\mu_2 = 0$$

$$\begin{aligned} P_{1,\mathrm{I}}(t + \Delta t) = P_0(t)\,\lambda^{(0)}\Delta t . A + P_{1,\mathrm{I}}(t)(1 - \mu_1\Delta t)(1 - \\ - \lambda^{(1)}\Delta t) + \overline{\mathrm{P}}_{2,\mathrm{I\,II}}(t)\,\mu_2\,\Delta t, \end{aligned} \tag{1}$$

de unde

$$m\,\lambda\,A\,P_0 - [\,\mu_1 + (m - 1)\,\lambda]\,P_{1,\mathrm{I}} + \mu_2\,\overline{\mathrm{P}}_{2,\mathrm{I\,II}} = 0$$

$$\begin{aligned} P_{1,\mathrm{II}}(t + \Delta t) = P_0(t)\,\lambda^{(0)}\,\Delta t . B + P_{1,\mathrm{I}}\,(t)\,\mu_1\,\Delta t + P_{1,\mathrm{II}}\,(t)\,(1 - \\ - \lambda^{(1)}\,\Delta t)(1 - \mu_2\,\Delta t) + P_{2,\mathrm{II}}(t)\,\mu_2\,\Delta t + \overline{\overline{P}}_{2,\mathrm{I\,II}}(t)\,\mu_2\,\Delta t \end{aligned} \tag{2}$$

de unde

$$m\,\lambda\,B\,P_0 + \mu_1\,P_{1,\mathrm{I}} - [\mu_2 + (m - 1)\,\lambda]\,P_{1,\mathrm{II}} + \mu_2\,P_{2,\mathrm{II}} + \mu_2\,\overline{\overline{P}}_{2,\mathrm{I\,II}} = 0,$$

$$\begin{aligned} P_{2,\mathrm{I}}(t + \Delta t) = P_{1,\mathrm{I}}(t)\,\lambda^{(1)}\,\Delta t .\ A + P_{2,\mathrm{I}}(t)\,(1 - \lambda^{(2)}\,\Delta t)\,(1 - \mu_1\,\Delta t) + \\ + \overline{\mathrm{P}}_{3,\mathrm{I\,II}}(t)\,\mu_2\,\Delta t\ A, \end{aligned} \tag{3}$$

de unde

$$(m - 1)\,\lambda\,A\ P_{1,\mathrm{I}} - [\mu_1 + (m - 2)\,\lambda]\,P_{2,\mathrm{I}} + \mu_2\,A\,\overline{\mathrm{P}}_{3,\mathrm{I\,II}} = 0$$

$$\begin{aligned} P_{2,\mathrm{II}}(t + \Delta t) = P_{1,\mathrm{II}}(t)\,\lambda^{(1)}\,\Delta t\,B + P_{2,\mathrm{II}}(t)\,(1 - \lambda^{(2)}\,\Delta t)\,(1 - \mu_2\,\Delta t) + \\ + P_{3,\mathrm{II}}(t)\,\mu_2\,\Delta t\ B + \overline{\overline{P}}_{3,\mathrm{I\,II}}(t)\,\mu_2\,\Delta t B, \end{aligned} \tag{4}$$

de unde

$$(m-1)\lambda B P_{1,\mathrm{II}} - [\mu_2 + (m-2)\lambda] P_{2,\mathrm{II}} + \mu_2 B P_{3,\mathrm{II}} + \mu_2 B \overline{\overline{P}}_{3,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0$$

$$\overline{P}_{2,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t+\Delta t) = P_{1,\mathrm{I}}(t)\lambda^{(1)}\Delta t B + P_{1,\mathrm{II}}(t)\lambda^{(1)}\Delta t A + P_{2,\mathrm{I}}(t)\mu_1\Delta t +$$

$$+ \overline{P}_{2,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)(1-\lambda^{(2)}\Delta t)(1-\mu_1\Delta t - \mu_2\Delta t) + P_{3,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t A + \tag{5}$$

$$\overline{P}_{3,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t B + \overline{\overline{P}}_{3,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t A,$$

de unde

$$(m-1)\lambda B P_{1,\mathrm{I}} + (m-1)\lambda A P_{1,\mathrm{II}} + \mu_1 P_{2,\mathrm{I}} - [\mu_1 + \mu_2 +$$

$$+ (m-2)\lambda]\overline{P}_{2,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + \mu_2 A P_{3,\mathrm{II}} + \mu_2 B \overline{P}_{3,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + \mu_2 A \overline{\overline{P}}_{3,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0,$$

$$\overline{\overline{P}}_{2,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t+\Delta t) = \overline{P}_{2,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\mu_1\Delta t + \overline{\overline{P}}_{2,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)(1-\lambda^{(2)}\Delta t)(1-\mu_2\Delta t), \tag{6}$$

de unde

$$\mu_1 \overline{P}_{2,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} - [\mu_2 + (m-2)\lambda]\overline{\overline{P}}_{2,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0 \tag{7}$$

Pentru cazul $2 < n < m$ avem

$$P_{n,\mathrm{I}}(t+\Delta t) = P_{n-1,\mathrm{I}}(t)\lambda^{(n-1)}\Delta t + P_{n,\mathrm{I}}(t)(1-\lambda^{(n)}\Delta t)(1-\mu_1\Delta t) +$$

$$+ \overline{P}_{n+1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t A,$$

de unde

$$(m-n+1)\lambda P_{n-1,\mathrm{I}} - [\mu_1 + (m-n)\lambda] P_{n,\mathrm{I}} + \mu_2 A \overline{P}_{n+1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0, \tag{8}$$

$$P_{n,\mathrm{II}}(t+\Delta t) = P_{n-1,\mathrm{II}}(t)\lambda^{(n-1)}\Delta t + P_{n,\mathrm{II}}(t)(1-\lambda^{(n)}\Delta t)(1-\mu_2\Delta t) +$$

$$+ P_{n+1,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t B + \overline{\overline{P}}_{n+1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t.\ B,$$

de unde

$$(m-n+1)\lambda P_{n-1,\mathrm{II}} - [\mu_2 + (m-n)\lambda] P_{n,\mathrm{II}} + \mu_2 B P_{n+1,\mathrm{II}} +$$

$$+ \mu_2 B \overline{\overline{P}}_{n+1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0, \tag{9}$$

$$\overline{P}_{n,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t+\Delta t) = \overline{P}_{n-1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\lambda^{(n-1)}\Delta t + P_{n,\mathrm{I}}(t)\mu_1\Delta t + \overline{P}_{n,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)(1 -$$

$$- \lambda^{(n)}\Delta t)(1-(\mu_1+\mu_2)\Delta t) + P_{n+1,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t A + \overline{P}_{n+1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t B +$$

$$\overline{\overline{P}}_{n+1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\mu_2\Delta t A,$$

de unde

$$(m-n+1)\lambda \overline{P}_{n-1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + \mu_1 P_{n,\mathrm{I}} - [(\mu_1+\mu_2) + (m-n)\lambda]\overline{P}_{n,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} +$$

$$+ \mu_2 A P_{n+1,\mathrm{II}} + \mu_2 B \overline{P}_{n+1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + \mu_2 A \overline{\overline{P}}_{n+1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0, \tag{10}$$

$$\overline{\overline{P}}_{n,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t+\Delta t) = \overline{\overline{P}}_{n-1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\lambda^{n-1}\Delta t + \overline{P}_{n,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)\mu_1\Delta t + \overline{\overline{P}}_{n,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}(t)(1 -$$

$$- \lambda^{(n)}\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)$$

de unde

$$(m-n+1)\lambda\overline{\overline{P}}_{n-1,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} + \mu_1\overline{P}_{n,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} - [\mu_2 + (m-n)\lambda]\overline{\overline{P}}_{n,\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = 0. \tag{11}$$

Pentru cazul $n = m$ avem

$$P_{m,\mathrm{I}}(t+\Delta t) = P_{m-1,\mathrm{I}}(t)\lambda^{(m-1)}\Delta t + P_{m,\mathrm{I}}(t)(1-\mu_1\Delta t),$$

de unde

$$\lambda P_{m-1,\mathrm{I}} - \mu_1 P_{m,\mathrm{I}} = 0, \tag{12}$$

$$P_{m,\mathrm{II}}(t + \Delta t) = P_{m-1,\mathrm{II}}(t)\, \lambda^{(m-1)} \Delta t + P_{m,\mathrm{II}}(t)(1 - \mu_2 \Delta t),$$

de unde

$$\lambda P_{m-1,\mathrm{II}} - \mu_2 P_{m,\mathrm{II}} = 0, \tag{13}$$

$$\overline{P}_{m,\mathrm{I\,II}}(t + \Delta t) = \overline{P}_{m-1,\mathrm{I\,II}}(t)\, \lambda^{(m-1)} \Delta t + P_{m,\mathrm{I}}(t)\, \mu_1 \Delta t +$$
$$+ \overline{P}_{m,\mathrm{I\,II}}(t)(1 - \mu_1 \Delta t)\,(1 - \mu_2 \Delta t)$$

de unde

$$\lambda \overline{P}_{m-1,\mathrm{I\,II}} + \mu_1 P_{m,\mathrm{I}} - (\mu_1 + \mu_2)\, \overline{P}_{m,\mathrm{I\,II}} = 0,$$

$$\overline{\overline{P}}_{m,\mathrm{I\,II}}(t + \Delta t) = \overline{\overline{P}}_{m-1,\mathrm{I\,II}}(t)\, \lambda^{(m-1)} \Delta t + \overline{P}_{m,\mathrm{I\,II}}(t)\, \mu_1 \Delta t + \tag{14}$$
$$+ \overline{\overline{P}}_{m,\mathrm{I\,II}}(t)(1 - \mu_2 \Delta t),$$

de unde

$$\lambda \overline{\overline{P}}_{m-1,\mathrm{I\,II}} + \mu_1 \overline{P}_{m,\mathrm{I\,II}} - \mu_2 \overline{\overline{P}}_{m,\mathrm{I\,II}} = 0. \tag{15}$$

Relaţiile (1) — (15) reprezintă un sistem liniar de $4m - 1$ ecuaţii cu $4\,m - 1$ necunoscute P_0, $P_{1,\mathrm{I}'}$, $P_{1,\mathrm{II}}$, $P_{2,\mathrm{I}}$, $P_{2,\mathrm{II}}$, $\overline{P}_{2,\mathrm{I},\mathrm{II}}$,

$$\overline{\overline{P}}_{2,\mathrm{I},\mathrm{II}}, \ldots, P_{m,\mathrm{I}}, \quad P_{m,\mathrm{II}}, \quad \overline{P}_{m,\mathrm{I},\mathrm{II}}, \quad \overline{\overline{P}}_{m,\mathrm{I},\mathrm{II}}.$$

Se observă că adunînd cele $4m - 1$ ecuaţii, obţinem o identitate, ceea ce arată că de fapt există numai $4m-2$ ecuaţii distincte. Aceasta înseamnă că putem rezolva sistemul în funcţie de P_0.

Pe de altă parte, deoarece

$$P_1 = P_{1,\mathrm{I}} + P_{1,\mathrm{II}}$$

şi

$$P_n = P_{n,\mathrm{I}} + P_{n,\mathrm{II}} + \overline{P}_{n,\mathrm{I},\mathrm{II}} + \overline{\overline{P}}_{n,\mathrm{I},\mathrm{II}}, \qquad (n = 2, 3, \ldots, m)$$

vom obţine probabilitatea P_n ca în sistem să se găsească n solicitanţi ($n = 1, 2, \ldots, m$) în funcţie de P_0.

Între probabilităţile $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m$ există relaţia

$$\sum_{n=0}^{m} P_n = 1 \tag{16}$$

care ne permite determinarea lui P_0.

Să remarcăm că sistemul de ecuaţii astfel construit dă posibilitatea de a calcula nu numai probabilităţile P_n, ci şi probabilităţile ca staţiile fiind ocupate totuşi să lucreze efectiv sau prima staţie să fie ocupată fără să lucreze.

Aceste probabilități sînt :

$$P = \sum_{n=2}^{m} \overline{P}_{n,\,\mathrm{I\,II}} \tag{17}$$

și

$$\overline{\overline{P}} = \sum_{n=2}^{m} \overline{\overline{P}}_{n,\,\mathrm{I\,II}}\cdot \tag{18}$$

Vom observa, de asemenea, că :

$$P_{n.\,\mathrm{I,\,II}} = \overline{P}_{n,\,\mathrm{I\,II}} + \overline{\overline{P}}_{n,\,\mathrm{I\,II}}. \tag{19}$$

Întrucît în practică sînt necesare valorile medii ale lungimii liniei de așteptare $M\ (l)$, ale numărului de solicitanți în sistem $M\ (n)$, ale timpului de așteptare a unui solicitant care intră în sistem $M\ (w)$ și ale timpului total pe care un solicitant care intră în sistem îl petrece în sistem $M\ (v)$, dăm valorile acestor medii, în ipoteza că în cazul în care stațiile sînt ocupate, dar stația S_{I} nu lucrează efectiv, solicitantul din această stație nu este considerat în linia de așteptare (așteptînd să intre în servire) :

$$\begin{aligned} M\ (l) &= \sum_{n=2}^{m} (n-1)\,(P_{n,\,\mathrm{I}} + P_{n,\,\mathrm{II}}) + \sum_{n=3}^{m} (n-2)\,\boldsymbol{P}_{n,\,\mathrm{I\,II}} = \\ &= \sum_{n=3}^{m} (n-2)\,P_n + \sum_{n=2}^{m} (P_{n,\,\mathrm{I}} + P_{n,\,\mathrm{II}}), \end{aligned} \tag{20}$$

$$M\ (n) = \sum_{n=1}^{m} n\,P_n, \tag{21}$$

$$M\ (w) = \frac{M\ (l)}{[m - M\ (n)]\,\lambda}, \tag{22}$$

$$M\ (v) = \frac{M\ (n)}{[m - M(n)]\,\lambda}\cdot \tag{23}$$

Primită la redacție la 17 noiembrie 1964

Institutul de științe economice, București,
Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. N. K. Jaiswal, *Time — Dependent Solution of the Bulk-Service Queuing Problem*, Operations Research, **8**, *6*.
2. A. Kaufmann, *Méthodes et modéles de la recherche opérationnelle*. Paris.

ASUPRA UNUI PROCES STAŢIONAR ÎNTÎLNIT ÎN TEORIA LANŢURILOR DE ORDIN INFINIT[1]

DE

HARRY COHN

În această notă vom demonstra că procesul staţionar întîlnit în [3] aparţine unei clase de procese considerată în [1]. În consecinţă, teorema limită centrală din [3] se poate înlocui cu teoremele 2 şi 3.

1. Fie $(T, \mathfrak{T})$ şi $(E, \mathfrak{S})$ două spaţii măsurabile. Pentru fiecare $n \in N^\star$ să notăm prin E^n produsul cartezian $E^{\{1,\ldots,n\}}$ şi prin $\mathfrak{S}^n$ produsul $\mathfrak{S}^{\{1,\ldots,n\}}$. Pentru fiecare $x \in E$ fie u_x o transformare a lui T în T. Pentru $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ să definim $u_x = u_{x_n} \circ \ldots \circ u_{x_1}$ şi să presupunem că $\{(t, x_1, \ldots, x_n) \mid u_{(x_1, \ldots, x_n)}(t) \in A\} \in \mathfrak{T} \otimes \mathfrak{S}^n$ pentru toţi $n \in N^\star$ şi $A \in \mathfrak{T}$.

Fie $\mathscr{M}$ spaţiul Banach al funcţiilor definite pe T reale, mărginite şi $\mathfrak{T}$-măsurabile cu norma

$$\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|.$$

Fie p o funcţie reală definită pe $T \times \mathfrak{S}$ cu proprietăţile :

1) $0 \leqslant p(t, A) \leqslant p(t, E) = 1$ pentru $(t, A) \in T \times \mathfrak{S}$;

2) $A \to p(t, A)$ este o funcţie de mulţime complet aditivă pentru orice $t \in T$;

3) $t \to p(t, A)$ aparţine lui $\mathscr{M}$, pentru orice $A \in \mathfrak{S}$.

Pentru orice $n \in N^\star$, fie $p_{1,n}$ funcţia definită pe $T \times \mathfrak{S}^n$ prin relaţiile

$$p_{1,n} = p \qquad \text{dacă } n = 1,$$

$$p_{1,n}(t, A) = \int_E p(t, \mathrm{d}x_1) \int_E \ldots \int_E p(U_{(x_1, \ldots, x_{n-1})}(t), \mathrm{d}x_n)\, \Phi_A(x_1, \ldots, x_n)$$

dacă $n > 1$.

Pentru fiecare $n \in N^\star$ să notăm prin $p_{1,n}^k$ funcţia definită pe $T \times \mathfrak{S}^n$ prin relaţiile

$$p_{1,n}^k = p_{1,n} \qquad \text{dacă } k = 1,$$

---

[1] Versiunea în l. engleză va apărea în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, 7 (1965).

$$p^{k}_{1,n}(t, A) = \int_E p(t, \mathrm{d}x)\, p^{k-1}_{1,n}(u_x(t), A) \qquad \text{dacă } k > 1,$$

unde $(t, A) \in T \times \mathfrak{S}^n$.

În cele ce urmează vom presupune că E este un spațiu metric, complet și separabil.

Să considerăm acum procesul staționar $(E^z, \mathfrak{S}^z, p^z)$, unde $p^z(p_r^{-1}{}_{\{n, \ldots, m\}}(A)) = p^{\infty}_{n,m}(A)$ pentru $(n, m) \in Z^z$ și $p_r^{-1}{}_{\{n, \ldots, m\}}(A) \in \mathfrak{S}^z$.

Teorema 1. *Dacă pentru orice* $n \in N^*$, $p^{\infty}_{1,n}$ *este o probabilitate pe* $\mathfrak{S}^n$ *cu proprietatea*

$$| p^{k+1}_{1,n}(t, A) - p^{\infty}_{1,n}(A) | < \varepsilon_k$$

pentru orice $t \in T$, $A \in \mathfrak{S}$, *atunci procesul staționar* $(E^z, \mathfrak{S}^z, p^z)$ *satisface condiția* (I) *din* [1] 2).

Demonstrație. După [2] pentru fiecare $t \in T$ există un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P_t)$ și un șir de variabile aleatoare $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ definite pe Ω cu valori în E, astfel ca

$$P_t(\xi_1(\omega) \in A) = p(t, A)$$

$$P_t(\xi_{n+1}(\omega) \in A \mid \xi_j, 1 \leqslant j \leqslant n)_{\xi_j(\omega) = x_j} = p(u_{(x_1, \ldots, x_n)}(t);\ A)$$

pentru orice $n \in N^*$, $A \in \mathfrak{S}$, $x_i \in E$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Utilizînd condiția teoremei de mai sus, obținem

$$| p^{n}_{1,l}(u_{(x_1, \ldots, x_k)}(t);\ B) - p^{\infty}_{1,l}(B) | < \varepsilon_n,$$

$$| p^{n+k}_{1,l}(t, B) - p^{\infty}_{1,l}(B) | < \varepsilon_{n+k}.$$

Din inegalitatea triunghiului avem

$$| p^{(n)}_{1,l}(u_{(x_1, \ldots, x_k)};\ (t)\, B) - p^{n+k}_{1,l}(t;\ B) | < \varepsilon_n + \varepsilon_{n+k} = \varepsilon_{n,k}.$$

Dacă notăm prin $\mathfrak{M}^b_a$, σ-algebra generată de mulțimea evenimentelor de forma $\{\omega \mid (\xi_{i_1}(\omega), \ldots, \xi_{i_m}(\omega) \in A^m\}$ pentru orice $a \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant b$, $A^m \in \mathfrak{S}^m$, relația de mai sus devine

$$| P_t(B^{-1} | \mathfrak{M}^k_1) - P_t(B^{-1}) | < \varepsilon_{n,k},$$

unde $B^{-1} = \{\omega \mid (\xi_{n+k}(\omega), \ldots, \xi_{n+k+l}(\omega)) \in B) \in M^{k+n+l}_{k+n}$.

Deoarece l este arbitrar iar familia de mulțimi care satisfac relația de mai sus este clasă monotonă, obținem conform proprietății 1.1.1 din [1] că

$$| P_t(\Lambda_1 \Lambda_2) - P_t(\Lambda_1)\, P_t(\Lambda_2) | < \varepsilon_{n,k}\, P_t(\Lambda_1),$$

unde $\Lambda_1 \in \mathfrak{M}^k_1$ și $\Lambda_2 \in \mathfrak{M}^{\infty}_{k+n}$.

---

2) Procesul staționar $\{\zeta_n\}_{-\infty < n < +\infty}$ satisface condiția (I) dacă

$$| P(A\, B) - P(A) P(B) | < \varphi(\mathrm{n})\, P(A),$$

unde $A \in \mathfrak{A}^k_{-\infty}$, $B \in \mathfrak{A}^{\infty}_{k+n}$, $\varphi(n) \downarrow 0$ iar $\mathfrak{A}^b_a$ este σ-algebra generată de mulțimea evenimentelor de forma $\{(\zeta_{i_1}, \cdots, \zeta_{i_m}) \in A^m\}$. $A^m \in \mathfrak{S}^m$.

De aici obţinem că pentru orice $l_0, k_0, n, k \in N^*$, $k > k_0$ avem
$|p^{k-k_0}_{1,k_0+n+l_0}(t; A^{(k_0+n+l_0)}) - p^{k-k_0}_{1,k_0}(t; A^{(k_0)})\, p^{n+k}_{1,l_0}(t; A^{(l_0)})| < \varepsilon_{n,k_0}\, p^{k-k_0}_{1,k_0}(t; A^{(k_0)})$,
unde $A^{(k_0+n+l_0)} = A^{(k_0)} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ ori}} \times A^{(l_0)}, A^{(k_0)} \in \S^{k_0}, A^{(l_0)} \in \mathfrak{S}^{l_0}$.

Cînd $k \to \infty$, obţinem

$$|p^{\infty}_{1,k_0+n+l_0}(A^{(k_0+n+l_0)}) - p^{\infty}_{1,k_0}(A^{(k_0)})\, p^{\infty}_{1,l_0}(A^{(l_0)})| < \varepsilon_n\, p^{\infty}_{1,k_0}(A^{(k_0)}),$$

de unde rezultă imediat teorema enunţată mai sus.

Dacă sînt satisfăcute condiţiile teoremei 1 din [3] atunci

$$|p^{k+1}_{1,n}(t; A) - p^{\infty}_{1,n}(A)| \leqslant \inf_{1 \leqslant s \leqslant k} (6 \sum_{j \geqslant s} \frac{a_j}{1-h} + 2\, h^{(k/s)-1}),$$

unde

$$0 < h < 1 \text{ şi } \sum_{n \in N^*} a_n < \infty.$$

Conform rezultatului obţinut mai sus, teorema 5 din [3] poate fi înlocuită cu următoarele două teoreme valabile pentru procesele staţionare care satisfac relaţia (I) (vezi [1]).

Fie f o funcţie reală $\mathfrak{S}^r$-măsurabilă definită pe E^r. Pentru fiecare $n \in N^*$ să notăm $f_n = f_0\, p_{r\{n, \ldots, n+r-1\}}$.

TEOREMA 2. *Să presupunem că* $E(f_1) = 0$ $E(|f_1|\alpha) < \infty$ *pentru un* $\alpha > 2$ *şi că dispersia sumei* $f_1 + \ldots + f_n$, $\sigma_n \to \infty$ *cînd* $n \to \infty$. *Atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P^z \left(\frac{f_1 + \ldots + f_n}{\sigma_n} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-u^2}{2}} du.$$

TEOREMA 3. *Să presupunem că* $E(f_1) = 0$, $E(f_1^2) < \infty$ *şi* $\sum_{n \in N^*} \left(\sum_{j \geqslant \sqrt{n}} a_n\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ *atunci*

$$\sigma^2 = E f_1^2 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} E(f_1 f_{h+1}) < \infty.$$

Dacă în plus $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P^z \left(\frac{(f_1 + \ldots + f_n}{\sigma \sqrt{n}} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Primită la redacţie la 1 decembrie 1964

Centrul de statistică matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. И. А. Ибрагимов, *Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов*. Теория вероятности, **VII**, *4*, 361—392 (1962).

2. M. Иосифеску, *Случайные системы с полными связями с произвольным множеством состояний*. Revue de Math. pures et appliquées, **8**, 611–635 (1963).

3. C. T. Ionescu-Tulcea, *On a class of operators occuring in the theory of chains of infinite order*. Canadian Journal of Math., **11**, 112–121 (1959).

TEOREME LIMITĂ PENTRU SISTEMELE CU LEGĂTURI COMPLETE[1]

DE

HARRY COHN

Scopul acestei lucrări este de a stabili o legătură între comportarea asimptotică a sumelor normate de variabile aleatoare ataşate unui sistem cu legături complete şi comportarea asimptotică a sumelor corespunzătoare unui proces staţionar ataşat sistemului cu legături complete dat. Se demonstrează că în anumite condiţii o serie de proprietăţi valabile pentru o clasă de procese staţionare considerată de I. A. Ibraghimov [7] se transpun în cazul sistemelor cu legături complete. Aceste rezultate generalizează o serie de teoreme limită cunoscute în teoria lanţurilor cu legături complete.

1. Fie $(X, \mathcal{F})$ şi $(W, \mathcal{V})$ două spaţii măsurabile şi $\{u(.\,; x), x \in X\}$ o familie de aplicaţii ale lui W în el însuşi.

Să notăm

$$X^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} X_j,\ X_j = X,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ n \in N^* = \{1, 2, \ldots\},\ Z =$$

$= \{\ldots, -n, \ldots 0, \ldots, n, \ldots\}$ $\mathfrak{F}^{(n)}$ σ-algebra produs corespunzătoare lui $X^{(n)}$.

Fie $B(W, \mathcal{V})$ spaţiul Banach al funcţiilor φ definite pe W, reale mărginite şi $\mathcal{V}$-măsurabile, cu norma uzuală

$$\|\varphi\| = \sup_{c \in W} |\varphi(c)|.$$

Vom presupune că

$$\{(c\,; x^{(n)}) \mid u(c\,; x^{(n)}) \in V\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^{(n)}$$

---

[1] Conceptul de lanţ cu legături complete a fost introdus în teoria probabilităţii în 1935 de către O. Onicescu şi G. Mihoc [10], fiind apoi generalizat de diferiţi autori. Cea mai recentă generalizare este noţiunea de sistem cu legături complete introdusă în 1963 de M. Iosifescu [8]. Un studiu sistematic al proceselor cu legături complete conţinînd lucrări publicate pînă în 1960 este făcut în [1].

ST CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 757–764, BUCUREŞTI, 1965

pentru orice $V \in \mathcal{V}$ și $n \in N^*$.

Fie P o funcție definită pe $W \times \mathfrak{F}$ astfel ca pentru fiecare $c \in W$, $P\,(c\,;.)$ să fie o probabilitate pe $\mathcal{F}$ și pentru fiecare $A \in \mathcal{F}$, $P\,(c.\,;A) \in$ $\in B\,(W, \mathcal{V})$.

După [8] familia de aplicații $(u\,(.\,;x))\; x \in X)$ și funcția P determină un sistem aleator omogen cu legături complete. Pentru fiecare $c \in W$ există un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P_c)$ și un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N^*}$ definite pe Ω cu valori în X astfel ca

$$P_c\,(\xi_1\,(\omega) \in A) = P\,(c\,;A),$$

$$P_c\,(\xi_{n+1}\,(\omega) \in A\;\;(\xi_j, 1 \leqslant j \leqslant n)_{\xi_j\,(\omega) = x_j} = P\,(u\,(c\,;x^{(n)})\,;\;A)$$

pentru orice $n \in N^*, x^{(n)} \in X^{(n)}, A \in \mathcal{F}$.

Pentru $l \in N^*$, fie $P_{1,l}$ funcția definită pe $W \times \mathcal{F}^{(l)}$ prin relațiile

$$P_{1,l} = P \qquad\qquad \text{dacă} \quad l = 1,$$

$$P_{1,l}\,(c\,;A^{(l)}) = \int_X P\,(c\,;\,\mathrm{d}x_1) \int_X \dots \int_X P\,(u\,(c\,;\,x^{(l-1)})\,;\,\mathrm{d}x_l)\cdot\chi_{A^{(l)}}\,(x_1\,,\dots,x_l)$$

$$\text{dacă } l > 1,$$

unde $\chi_{A^{(l)}}$ este indicatorul mulțimii $A^{(l)}$.

Pentru l și $n \in N^*$ fie $P_{1,l}^{(n)}$ funcția definită pe $W \times \mathcal{F}^{(l)}$ prin relațiile

$$P_{1,l}^{(n)} = P_{1,l} \qquad\qquad \text{dacă } n = 1,$$

$$P_{1,l}^{(n)}\,(c\,;\;A^{(l)}) = \int_X P\;(c\,;\,\mathrm{d}x)\;P_{1,l}^{(n-1)}\;(u\,(c\,;x)\,;\;A^{(l)}) \qquad \text{dacă } n > 1.$$

Se obține cu ușurință

$$P_{1,l}^{(n)}\,(c\,;\;A^{(l)}) = P_c\,((\xi_n\,(\omega) \in A_1, \dots,\; \xi_{n+l-1}\,(\omega)) \in A_l),$$

unde $A^{(l)} = A_1 \times \dots \times A_l$, $A_i \in \mathcal{F}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant l$.

În condiții destul de largi [8], pentru orice $c \in W$ există o probabilitate $P_{1,l}^{\infty}$ pe $\mathcal{F}^{(l)}$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} P_{1,l}^{(n)}\,(c\,;A^{(l)}) = P_{1,l}^{\infty}\;(A^{(l)})$$

uniform în raport cu $c \in W$, $l \in N^*$, $A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$.

Din această ultimă relație se obține imediat

$$P_{1,l}^{\infty}\;(X^{(k)} \times A^{(l-k)}) = P_{1,l}^{\infty}\,(A^{(l-k)} \times X^{(k)})$$

pentru fiecare k, $l \in N^*$, $(k < l)$, $A^{(l-k)} \in \mathcal{F}^{(l-k)}$, $A^{(k)} \in \mathcal{F}^{(k)}$.

Această relație pune în evidență staționaritatea măsurilor $P_{1,l}^{\infty}$ pentru fiecare $l \in N^*$.

În cele ce urmează vom nota prin $E_c\;(\varphi)$ valoarea medie a variabilei aleatoare φ reală sau complexă, definită pe Ω și P_c - integrabilă.

Fie f o funcție definită pe X, reală și $\mathcal{F}$-măsurabilă și să notăm $f_i = f_0\,\xi_i$.

Pentru $m, n \in N^*$ să notăm prin $P^{\infty}_{m,n}$ funcţia definită pe $\mathcal{F}^{(m-n+1)}$ prin relaţia

$$P^{\infty}_{m,n}(A^{(m-n+1)}) = P_{1,m-n+1}(A^{(m-n+1)}).$$

Să considerăm acum funcţiile de repartiţie :

$$F_{t_0,\dots,t_n}(a_{t_1},\dots,a_{t_n}) = P_{t_1,t_n}(f(x_{t1}) < a_{t_1},\dots,f(x_{t_n}) < a_{t_n})$$

pentru

$$t_1,\dots,t_n \in Z, t_1 < t_2 < \dots < t_n\, a_{t_1},\dots,a_{t_n} \in R.$$

Din binecunoscuta teoremă a lui Kolmogorov, obţinem că există un cîmp de probabilitate $(E, \mathcal{G}, P^{\infty})$ şi un şir de variabile aleatoare $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ definite pe E cu valori reale astfel ca funcţiile de repartiţie corespunzătoare acestui proces să fie $F_{t_1,\dots,t_n}(a_{t_1},\dots,a_{t_n})$. Deoarece, după cum am menţionat mai sus, măsurile $P^{\infty}_{1,l}$ sînt staţionare pentru orice $l \in N^*$; rezultă că şirul de variabile aleatoare $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ defineşte un proces staţionar în sens restrîns [2]).

Fie $\{\xi_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ un proces stocastic şi $\mathfrak{A}^b_a$ σ-algebra generată de evenimentele de forma $\{(\zeta_{i_1},\dots,\zeta_{i_m}) \in H\}$, unde $a \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant b$ iar H este o mulţime boreliană k-dimensională arbitrară

Să considerăm condiţia

$$|P(B|\mathfrak{A}^k_{-\infty}) - P(B)| \leqslant \varphi(n), \tag{I}$$

unde $A \in \mathfrak{A}^{\infty}_{k+n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$ (vezi [7]).

În cele ce urmează vom presupune îndeplinite următoarele două condiţii :

Condiţia 1.1. Există un şir de numere pozitive $(\varepsilon_n)_{n\in N^*}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ astfel ca :

$$|P^{(n)}_{1,l}(c; A^{(l)}) - P^{\infty}_{1,l}(A^{(l)})| < \varepsilon_n$$

pentru orice $c \in W$, $l \in N^*$ şi $A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$.

Condiţia 1.2. Există o constantă M $(M > 0)$ astfel ca

$$E_c(|f_n|) < M$$

pentru orice $n \in N^*$.

---

[2]) Vom spune că procesul $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ este staţionar în sens restrîns, dacă repartiţia vectorului aleator $(\eta_{t_1}\dots,\eta_{t_n})$ este identică cu repartiţia vectorului aleator $(\eta_{t_1+h},\dots,\eta_{t_n+h})$ pentru orice $h, t_1,\dots,t_n \in Z$ şi $n \in N^*$.

Să considerăm acum următoarele funcţii

$$F_n(x) = P_c\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n\,E^{\infty}(f)}{\alpha_n} < x\right\}$$

$$F_n^{\infty}(x) = P^{\infty}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i - n\,E^{\infty}(f)}{\alpha_n} < x\right\}$$

$$\Phi_n(t) = E_c\left(e^{i\frac{t}{\alpha_n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n\,E^{\infty}(f)\right)}\right),$$

$$\Phi_n^{\infty}(t) = E^{\infty}\left(e^{i\frac{t}{\alpha_n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i - n\,E^{\infty}(f)\right)}\right),$$

unde α_n este un şir de numere reale cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.

TEOREMA 1.1. *Să presupunem că sînt satisfăcute condiţiile* 1.1 *şi* 1.2 *de mai sus. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n^{\infty}(x) = F^{\infty}(x)$ *pentru orice* x *punct de continuitate al lui* $F^{\infty}(x)$, $F^{\infty}(x)$ *fiind o funcţie de repartiţie, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F^{\infty}(x)$ *pentru orice* x *punct de continuitate al lui* $F^{\infty}(x)$, *iar procesul staţionar* $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ *satisface condiţia* (I).

Demonstraţie. Ultima afirmaţie a teoremei a fost demonstrată în [2]. Să demonstrăm acum prima parte a teoremei. Pentru aceasta este suficient să arătăm că $\lim\limits_{u\to\infty} |\Phi_n(t) - \Phi^{\infty}(t)| = 0$ pentru orice $t \in R$, unde prin $\Phi^{\infty}(t)$ notăm funcţia caracteristică corespunzătoare lui F^{∞}.

Fie $t \in R$ fixat; să considerăm şirul $(n'_k)_{k\in N^*}$ de numere naturale astfel ca

$$\lim_{k\to\infty} |\Phi_{n'_k}(t) - \Phi^{\infty}(t)| = \limsup |\Phi_n(t) - \Phi^{\infty}(t)| = \alpha(t)$$

şi să presupunem că $\alpha(t) \neq 0$. Să alegem acum un subşir $(n''_k)_{k\in N^*}$ al lui $(n'_k)_{k\in N^*}$ astfel încît $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_{n''_k}(t) = \Phi(t)$. De aici obţinem

$$|\overline{\Phi}(t) - \Phi^{\infty}(t)| = \alpha(t).$$

Fie m un număr natural arbitrar. Deoarece

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n\,E^{\infty}(f)}{\alpha_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} f(\xi_i) - m\,E^{\infty}(f)}{\alpha_n} + \frac{\sum\limits_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) - (n-m)\,E^{\infty}(f)}{\alpha_n}$$

iar prima componentă din membrul drept converge către 0 cînd $n \to \infty$ pentru orice $\omega \in \Omega$, avem

$$\lim_{k\to\infty} \Phi'_{n''_k}(t) = \lim_{k\to\infty} \Phi_{n''_k}(t) = \overline{\Phi}(t),$$

unde prin $\Phi_n^m(t)$ înţelegem funcţia caracteristică a variabilei aleatoare $\frac{\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) - (n-m)E^{\infty}(f)}{\alpha_n}$.

Aplicînd teorema lui Sluţky (Cap. 20.3 din [4]) variabilei aleatoare

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i - nE^{\infty}(f)}{\alpha_n},$$

obţinem că repartiţia sa asimptotică este identică cu repartiţia asimptotică a variabilei aleatoare

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i - nE^{\infty}(f)}{\alpha_{n+m}}.$$

Am ţinut seama mai sus că $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_n} = 1$ pentru orice $m \in N^*$, proprietate ce are loc deoarece $\alpha_n = h(n)\, n^{\frac{1}{\alpha}}$, $h(n)$ fiind o funcţie cu variaţie lentă (vezi [7]).

Utilizînd lema 1 din [8], obţinem

$$|\Phi_n^m(t) - \Phi_n^{\infty}(t)| < 2\,\varepsilon_m.$$

pentru orice $n \in N^*$. Prin urmare

$$|\overline{\Phi}(t) - \Phi^{\infty}(t)| < 2\,\varepsilon_m.$$

Dar m este arbitrar iar $\varepsilon_m \to 0$ cînd $m \to \infty$. Rezultă $\alpha(t) = 0$ şi teorema este demonstrată.

Teorema 1.1 constituie o generalizare a teoremei 1.1 din [2]. Conform acestui rezultat, o serie de teoreme limită valabile pentru procesele staţionare ce satisfac condiţia (I) se transpun în cazul sistemelor cu legături complete. O astfel de transpunere a fost dată în [2], folosind însă o teoremă care presupune condiţii mai restrictive decît cele folosite în teorema 1.1 de mai sus. Condiţiile teoremelor din [2] se modifică după cum urmează : în teorema 2.1 condiţiile 1 şi 2 se înlocuiesc cu condiţiile 1.1 şi 1.2 de mai sus, iar în teorema 2.3 condiţia 1 se înlocuieşte cu condiţia 1.1, iar condiţia $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{(n)}}{\sqrt{n}} \neq 0$ se înlocuieşte cu condiţia $\lim_{n\to\infty} \sigma_{(n)} = \infty$.

2. **Legea tare a numerelor mari.** TEOREMA 2.1. *Să presupunem că sînt satisfăcute condiţiile* 1.1 *şi* 1.2 *de mai sus. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)}{n} = E^{\infty}(f)$$

pe o mulţime de probabilitate P_c *egală cu 1.*

Demonstrație. Vom aminti la început că procesul staționar $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ satisface condiția (I), după cum a fost arătat în [2]. Legea zero sau unu stabilită de Kolmogorov în cazul variabilelor aleatoare independente se păstrează pentru un proces staționar ce satisface condiția (I) (vezi de exemplu [11]). Rezultă că procesul staționar $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ este metric tranzitiv (vezi [6]) și i se poate aplica teorema ergodică a lui Birkhoff.

Să considerăm cîmpurile de probabilitate $(R^\infty, \mathcal{B}^\infty, \widetilde{P}_c)$ și $(R^\infty, \mathcal{B}^\infty, \widetilde{P}^\infty)$, unde $\widetilde{P}_c$ și $\widetilde{P}^\infty$ sînt probabilitățile corespunzătoare spațiului selecțiilor pentru procesele $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ și respectiv $\{\eta_n\}_{n\in N^*}$.

Fie șirul de variabile aleatoare $(\widetilde{x}_n)_{n\in N^*}$ definite în modul următor :

$$\widetilde{x}_n(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x_n, \quad (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in R^\infty, \quad n \in N^*.$$

Aceste variabile aleatoare au aceleași repartiții finit dimensionale ca și variabilele aleatoare $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ cînd repartițiile lor sînt date prin intermediul probabilității P_c și aceleași repartiții finit dimensionale ca și variabilele aleatoare $\{\eta_n\}_{n\in N^*}$ cînd repartițiile lor sînt date prin intermediul probabilității $\widetilde{P}^\infty$.

Fie acum $\mathcal{B}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, \ldots)$ σ-algebra minimală în raport cu care $\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, \ldots$ sînt măsurabile.

Să considerăm mulțimea

$$A = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mid \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = E^\infty(f) \right\}.$$

Evident, $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, \ldots)$.

Să observăm acum că familia de mulțimi pentru care condiția 1.1 este satisfăcută este clasă monotonă. De aici rezultă imediat că pentru orice $B_n \in \mathcal{B}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, \ldots)$

$$|\widetilde{P}_c(B_n) - \widetilde{P}^\infty(B_n)| < \varepsilon_n.$$

Prin urmare

$$|\widetilde{P}_c(A) - \widetilde{P}^\infty(A)| < \varepsilon_n$$

pentru orice $n \in N^*$, de unde rezultă $\widetilde{P}_c(A) = \widetilde{P}^\infty(A)$. Dar din teorema ergodică a lui Birkhoff $\widetilde{P}^\infty(A) = 1$ și teorema este demonstrată.

Teorema de mai sus constituie o generalizare a rezultatului obținut în [9].

3. Rezultatele paragrafelor 1 și 2 pot fi extinse în cazul unor variabile dependente de un tip mai general.

Fie $(\Omega, \mathcal{X}, P)$ un cîmp de probabilitate, $(X, \mathcal{F})$ un spaţiu măsurabil şi $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un şir de variabile aleatoare definite pe Ω cu valori în X. Fie f o funcţie reală definită pe X şi $\mathcal{F}$-măsurabilă. Vom considera următoarele două condiţii

Condiţia 3.1. Există o funcţie de mulţime $P^{\infty}_{1,l}$ definită pe $\mathcal{F}^{(l)}$ pentru orice $l \in N^*$ astfel ca

$$|P((\xi_{n+k}, \ldots, \xi_{n+k+l-1}) \in A^{(l)} \mid \xi_0, \ldots, \xi_n) - P^{\infty}_{1,l}(A^{(l)})| < \varepsilon_k$$

cu $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ şi $\xi_0 = 1$.

Condiţia 3.2. Există o constantă M $(M > 0)$ astfel ca

$$E(|f_n|) < M$$

pentru orice $n \in N^*$.

În aceste condiţii se obţine cu uşurinţă că :

1) $P^{\infty}_{1,l}$ este o probabilitate pe $\mathcal{F}^{(l)}$;

2) $P^{\infty}_{1,l}$ este o măsură staţionară în sens restrîns;

3) $\int_X |f| \, \mathrm{d}P^{\infty}_{1,l} < M + 1$.

Să notăm cu $E^{\infty}(f) = \int_X f \, \mathrm{d}P^{\infty}_{1,l}$ şi fie $(E, \mathcal{Q}, P^{\infty})$ cîmpul de probabilitate pe care este definit procesul staţionar $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ ataşat măsurilor $(P^{\infty}_{1,l},\ l_{\in N^*})$.

TEOREMA 3.1. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile* 3.1 *şi* 3.2 *de mai sus şi dacă păstrînd notaţiile utilizate în enunţul teoremei* 1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} F^{\infty}_n(x) = F^{\infty}(x)$ *pentru orice x punct de continuitate al lui $F^{\infty}(x)$, F^{∞} fiind o funcţie de repartiţie, atunci lim* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F^{\infty}(x)$ *pentru orice x punct de continuitate al lui F^{∞} iar procesul staţionar $\{\eta_n\}_{-\infty<n<+\infty}$ satisface condiţia (I).*

TEOREMA 3.2. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile* 3.1 *şi* 3.2 *de mai sus, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)}{n} = E^{\infty}(f)$$

pe o mulţime de probabilitate P egală cu 1.

Primită la redacţie la 1 decembrie 1964

Centrul de statistică matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. G. Ciucu, R. Théodorescu, *Procese cu legături complete*, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960.
2. H. Cohn, *Asupra comportării asimptotice a sistemelor cu legături complete*. St. cerc. mat., **17**, *3* (1965).
3. H. Cohn, *Le problème limite central pour les systèmes aléatoires a liaison complètes*. C.R. Acad. Sci. Paris, **259**, *20*, 3 423 – 3 426 (1964).
4. H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, 1946.
5. J. L. Doob, *Stochastic Processes*. New York-London, 1952.
6. P. Halmoş, *Measure Theery*. New York, 1950.
7. И. А. ИБРАГИМОВ, *Некоторые прэдельные теоремы для стационарных процессов*. Теория вероятностей, **VII**, *4*, 361—392 (1962).
8. М. ИОСИФЕСКУ, *Случайные системы с полными связями с произвольным множеством состояний*. Rev. de math. pures et appl., **VIII**, 4, 611 – 645 (1963).
9. M. Iosifescu, *Sur la loi forte des grands nombres pour les systèmes aléatoires homogénes à liaison complète à un ensemble quelconque d'états*. C.R. Acad. Sc., Paris, **258**, 4 421 – 4 423 (1964).
10. O. Onicescu, G. Mihoc, *Sur les chaînes statistique*. C.R. Acad. Sci., Paris, **200**, 511 – 512 (1935).
11. И. РОЗАНОВ, *Стационарные случайные процессы*. Moscova, 1963.

O PROBLEMĂ DE TEORIA AŞTEPTĂRII CU SERVIRE ETEROGENĂ

DE

G. GODINI

Se consideră o linie de aşteptare Poisson avînd K staţii de servire eterogene. Datorită faptului că staţiile de servire sînt eterogene, se ridică problema schimbării disciplinei clasice deoarece se poate întîmpla ca, în cazul în care este liberă o staţie cu rata medie de servire mai mică, solicitantul să prefere să aştepte în linie de aşteptare, pentru a intra într-o staţie cu servire mai rapidă, decît să intre în această staţie, dacă estimarea timpului total petrecut în sisteme este astfel mai mic. Tratîndu-se în aceste condiţii cazul general a K staţii de servire, se determină probabilităţile P_n de a avea n solicitanţi în sistem.

În teoria liniilor de aşteptare cu mai multe staţii de servire, cazul în care ratele medii de servire sînt diferite conduce la necesitatea schimbării disciplinei clasice [2] care cere ca atunci cînd una sau mai multe staţii de servire sînt disponibile un solicitant care intră în sistem să-şi aleagă la întîmplare una din staţiile disponibile. În [4] şi [3] se face critica acestei discipline şi se arată că în cazul în care solicitantul cunoaşte diferenţa dintre ratele de servire a diferitelor staţii va prefera staţia care serveşte cel mai repede decît una la întîmplare dintre cele libere. Mai mult chiar [4], se poate întîmpla ca, în cazul în care este liberă o staţie cu rata medie de servire mai mică, solicitantul să prefere să aştepte în linia de aşteptare, pentru a intra într-o staţie cu servirea mai rapidă, decît să intre în această staţie, dacă estimarea timpului total petrecut în sistem este astfel mai mic. În [4] s-a tratat cazul unei linii de aşteptare Poisson (intrări Poisson şi timp de servire exponenţial) cu două staţii de servire.

În cele ce urmează vom trata cazul general a k staţii de servire, determinînd probabilităţile P_n de a avea n solicitanţi în sistem.

★

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 765–775, BUCUREŞTI, 1965

Vom examina cazul unei linii de așteptare cu k stații de servire $S_1, S_2, \ldots, S_k$ în următoarele ipoteze :

α) Sosirile solicitanților în linia de așteptare urmează o distribuție Poisson cu rata medie λ.

β) Timpul de servire al fiecărei stații S_i urmează o distribuție exponențială cu rata medie de servire μ_i iar $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_k$.

γ) Cînd $\gamma = \lambda / \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i \right)$ este mai mic decît unitatea, există o soluție independentă de distribuție inițială

δ) O anumită disciplină care cere ca :

— În linia de așteptare să nu poată intra la un moment oarecare decît un singur solicitant.

— Stațiile de servire nu sînt părăsite de mai mulți solicitanți în același timp.

— Dacă stația S_1 este liberă, un solicitant care intră în sistem va ocupa această stație indiferent dacă celelalte sînt libere sau nu (deoarece S_1 dă serviciul cel mai rapid).

—Dacă stația S_1 este ocupată, un solicitant care intră în sistem va aștepta pentru a fi servit de S_1 indiferent dacă stația S_2 este sau nu liberă. Dar dacă numărul solicitanților care *așteaptă* să fie serviți de stația S_1 (nu ne interesează numărul celor care sînt în sistem) devine C_1, un solicitant care intră în sistem se va duce la stația S_2, dacă aceasta este liberă, în caz contrar el va aștepta ca al $(C_1 + 1)$-lea solicitant în linia de așteptare (nu în sistem). Să observăm că primii C_1 solicitanți vor fi serviți de stația S_1 iar al $(C_1 + 1)$-lea solicitant va fi servit de stația S_2 numai dacă aceasta va fi liberă înaintea terminării serviciului solicitantului din S_1 ; altfel el va deveni al C_1-lea solicitant din linia de așteptare și va fi servit de S_1. Deci dacă în linia de așteptare (nu în sistem) se găsește cel puțin un solicitant, atunci stația S_1 este sigur ocupată. Dacă în linia de așteptare se găsesc cel puțin $C_1 + 1$ solicitanți, atunci stația S_2 este sigur ocupată. Dacă în linia de așteptare se găsesc $C_1 + C_2$ solicitanți al $C_1 + C_2 + 1$-lea solicitant se va duce la stația S_3 dacă aceasta este liberă, altfel va aștepta ca al $C_1 + C_2 + 1$-lea solicitant din linia de așteptare și va fi servit de stația S_3 numai dacă aceasta va termina serviciul înaintea servirii unui solicitant din stația S_1 sau S_2. În general, dacă în linia de așteptare se găsesc $C_1 + C_2 + \ldots + C_j$ solicitanți $(j < k)$, atunci stațiile $S_1, S_2, \ldots, S_j$ sînt sigur ocupate, iar un solicitant care intră în sistem își va alege stația S_{j+1} dacă aceasta este liberă, dacă nu va aștepta ca al $C_1 + C_2 + \ldots + C_j + 1$-lea solicitant în linia de așteptare și va fi servit de stația S_{j+1} numai dacă aceasta va termina serviciul înaintea servirii unui solicitant din stațiile $S_1, S_2, \ldots, S_j$.

— Dacă toate stațiile sînt ocupate, iar în linia de așteptare se găsesc un număr de solicitanți mai mare sau egal decît $\sum\limits_{i=1}^{k-1} C_i$, atunci solicitanţii vor hotărî în ce staţie să intre numai cînd vor ajunge pe locurile $\sum_{j=1}^{s} C_j + 1$ $(1 \leqslant s \leqslant k - 1)$, ţinînd seama de cele de mai sus.

Observaţia 1. Dacă anumiţi C_i $(1 \leqslant i \leqslant k - 1)$ sînt zero, cele de mai sus rămîn încă valabile cu următoarea menţiune : dacă de exemplu $C_1 = C_2 = \ldots = C_l$ $(l < k - 1)$ sînt zero, iar C_{l+1} (în cazul $l < k - 1$) este diferit de zero, atunci un solicitant care intră în sistem îşi va alege dintre staţiile $S_1, S_2, \ldots, S_{l+1}$, staţia disponibilă cu indicele cel mai mic, în caz contrar aşteptînd eliberarea uneia din aceste staţii.

Cazul în care toţi C_i sînt zero a fost tratat complet în [3].

În cele ce urmează vom presupune că există cel puţin un C_i $(1 \leqslant i \leqslant k - 1)$ diferit de zero (întreg pozitiv).

Observaţia 2. Să presupunem că primele k_1 staţii de servire au ratele egale cu μ_1, următoarele k_2 staţii de servire au ratele de servire egale cu μ_2 şi aşa mai departe pînă la ultimele k_s staţii de servire care au ratele de servire egale cu μ_s astfel ca să avem $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_s$ şi $\sum_i k_i = k$. Atunci obligatoriu $C_i = 0$, cu excepţia eventual a lui $C_{k_1}, C_{k_2}, \ldots, C_{k_{s-1}}$.

Notaţii :

$a_1 a_2 \ldots a_s$ reprezintă o submulţime oarecare de s elemente a mulţimii $\{1,2,\ldots, k\}$;

$E^t_{n:a_1a_2\ldots a_s}$ reprezintă evenimentul „n solicitanţi aşteaptă să fie serviţi în linia de aşteptare şi s solicitanţi sînt serviţi în staţiile $S_{a_1}, S_{a_2}, \ldots, S_{a_s}$ la timpul t" (deci în sistem avem $n + s$ solicitanţi) $n = 0,1,\ldots, \sum_{i=1}^{k-1} C_i$.

$E^{n,t}$ reprezintă evenimentul „n solicitanţi în sistem la timpul t", $n = 0,1,\ldots$

$$P_{n:a_1a_2\ldots a_s}(t) = P\,(E^t_{n:a_1a_2\ldots a_s})\,.$$

$$P_n(t) = P\,(E^{n,t}).$$

Să observăm că dacă nu aşteaptă nici un solicitant în linia de aşteptare, avem un număr de evenimente $E_{0:a_1a_2\ldots a_s}$ egal cu numărul submulţimilor lui $\{1,2,\ldots, k\}$, adică 2^k evenimente (considerînd că mulţimea vidă a lui $\{1,2,\ldots, k\}$ ne conduce la evenimentul $E^{0,t}$). Dacă în linia de aşteptare aşteaptă n solicitanţi a fi serviţi $1 \leqslant n \leqslant C_1$, atunci staţia S_1 este sigur ocupată şi deci evenimentul $E_{n:a_1a_2\ldots a_s}$ are un $a_i = 1$ şi numărul acestor evenimente este egal cu numărul submulţimilor mulţimii $\{2,3,\ldots,k\}$, adică 2^{k-1} evenimente pentru fiecare n, deci în total $C_1 2^{k-1}$ evenimente pentru toţi n astfel ca $1 \leqslant n \leqslant C_1$. (Să observăm că în cazul $C_1 = 0$, relaţia $1 \leqslant n \leqslant C_1$ îşi pierde sensul). În general, dacă $\sum_{i=1}^{l-1} C_i + 1 \leqslant n \leqslant \sum_{i=1}^{l} C_i$ $(2 \leqslant l \leqslant k - 1)$, atunci staţiile $S_1, S_2, \ldots, S_l$ sînt ocupate şi deci numărul evenimentelor $E_{n:a_1a_2\ldots a_s}$ pentru n fixat este egal cu numărul submulţimilor lui $\{l+1,\ldots,k\}$ adică 2^{k-l}, iar pentru orice n care îndeplineşte relaţia $\sum_{i=1}^{l-1} C_i + 1 \leqslant n \leqslant \sum_{i=1}^{l} C_i$ avem un număr de evenimente egal cu $C_l 2^{k-l}$.

Deci în total avem un număr de evenimente $E_{n:a_1a_2\ldots a_s}\left(n \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} C_i\right)$ egal cu $2^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_i 2^{k-i}$. Acest rezultat este valabil şi în cazul în care anumiţi C_i sînt zero.

Determinarea probabilităţilor $P_{n:a_1a_2\ldots a_s}$. Am presupus că nu toţi C_i sînt egali cu zero. Fie atunci $C_{i_1}, C_{i_2},\ldots, C_{i_m}$ acei C_i diferiţi de zero unde $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots . < i_m \leqslant k-1$ şi $1 \leqslant m \leqslant k-1$. Vom considera la început cazul evenimentelor în care nu aşteaptă în linia de aşteptare nici un solicitant, adică $E_{0:a_1a_2\ldots a_s}$. Să observăm că evenimentul $E^{0,t+\Delta t}$ se realizează cu una din situaţiile :

$E^{0,t}$ şi nici o sosire în Δt.

$E^{t}_{0:a_1}$ şi servirea lui în Δt $(a_1 = 1,2,\ldots, k)$.

Rezultă

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\cdot\Delta t) + \sum_{a_1} P_{0:a_1}(t)\,\mu_{a_1}\cdot\Delta t,$$

de unde

$$\sum_{a_1} P_{0:a_1}\,\mu_{a_1} = \lambda P_0. \tag{1}$$

Pentru evenimentul $E^{t+\Delta t}_{0:a_1a_2\ldots a_s}$ vom distinge următoarele cazuri :

a) $E^{t+\Delta t}_{0:12\ldots s}$ şi $s \geqslant i_1$.

Acest eveniment se realizează cu una din situaţiile :

$E^{t}_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i_1-1}(i_1+1)(i_1+2)\ldots s}$ şi o sosire în Δt, unde $\alpha_i \in \{1,2,\ldots,i_1\}$;

$E^{t}_{0:12\ldots s}$ şi nici o sosire şi nici o servire în Δt ;

$E^{t}_{0:12\ldots s a_{s+1}}$ şi servirea solicitantului din staţia $S_{a_{s+1}}$ în Δt [1])

$E^{t}_{1:12\ldots s}$ şi servirea unui solicitant din $S_1, S_2,\ldots S_{i_1}$ în Δt.

Rezultă

$$P_{0:12\ldots s}(t+\Delta t) = \sum_{\alpha_i\in\{1,2,\ldots i_1\}} P_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i_1-1}(i_1+1)(i_1+2)\ldots s}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t +$$

$$+ P_{0:12\ldots s}(t)(1-\lambda\Delta t)\left[1-\left(\sum_{i=1}^{s}\mu_i\right)\Delta t\right] +$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} P_{0:12\ldots s a_{s+1}}(t)\,\mu_{a_{s+1}}\cdot\Delta t + P_{1:12\ldots s}(t)\left(\sum_{i=1}^{i_1}\mu_i\right)\Delta t,$$

---

[1]) În cazul $s=k$, acest eveniment este imposibil şi deci are probabilitatea zero. În formule vom păstra totuşi probabilitatea acestui eveniment fără a mai specifica faptul că probabilitatea acestui eveniment pentru $s = k$ este zero. De altfel în cele ce urmează oriunde vom întîlni evenimentul $E_{n:a_1a_2\ldots a_s a_{s+1}}$ vom presupune că este imposibil pentru $s=k$ fără a mai specifica aceasta.

de unde

$$\begin{aligned}&\lambda . \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,i_1\}} P_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i_1-1}(i_1+1)(i_1+2)\ldots s} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{s} \mu_i\right) P_{0:12\ldots s} + \\ &+ \sum_{a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} P_{0:12\ldots s\, a_{s+1}} + \left(\sum_{i=1}^{i_1} \mu_i\right) P_{1:12\ldots s} = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

b) $E_{0:12\ldots s}^{t+\Delta t}$ și $s < i_1$. (Această situație apare cînd $i_1 \neq 1$)

Acest eveniment se realizează cu una din situațiile:

$E_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{s-1}}^{t}$ și o sosire în Δt, unde $\alpha_i \in \{1,2,\ldots,s\}$;

$E_{0:12\ldots s}^{t}$ și nici o sosire și nici o servire în Δt;

$E_{0:12\ldots s\, a_{s+1}}^{t}$ și servirea solicitantului din $S_{a_{s+1}}$ în Δt.

Rezultă

$$\begin{aligned}P_{0:12\ldots s}(t+\Delta t) &= \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,s\}} P_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{s-1}}(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t + \\ &+ P_{0:12\ldots s}(t)(1-\lambda\Delta t)\left[1 - \left(\sum_{i=1}^{s} \mu_i\right)\Delta t\right] + \sum_{a_{s+1}} P_{0:12\ldots s\, a_{s+1}}(t)\, \mu_{a_{s+1}} \Delta t,\end{aligned}$$

de unde

$$\lambda \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,s\}} P_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{s-1}} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{s} \mu_i\right) P_{0:12\ldots s} + \sum_{a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} P_{0:12\ldots s\, a_{s+1}} = 0. \tag{3}$$

c) $E_{0:12\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s}^{t+\Delta t}$ și $r \geqslant i_1$, unde $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_s$ sînt mai mari decît $r+1$.

Acest eveniment se realizează cu una din situațiile:

$E_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i_1-1}(i_1+1)\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s}^{t}$ și o sosire în Δt, unde $\alpha_i \in \{1,2,\ldots,i_1\}$;

$E_{0:12\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s}^{t}$ și nici o sosire și nici o servire în Δt;

$E_{0:12\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}^{t}$ și servirea solicitantului din stația $S_{a_{s+1}}$ în Δt;

$E_{1:12\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s}^{t}$ și servirea unui solicitant din $S_1, S_2, \ldots S_{i_1}$ în Δt.

Rezultă

$$\begin{aligned}P_{0:12\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s}(t+\Delta t) &= \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,i_1\}} P_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i_1-1}(i_1+1)\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s}(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t + \\ &+ P_{0:12\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s}(t)(1-\lambda \cdot \Delta t)\left[1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i + \sum_{i=r+1}^{s} \mu_{a_i}\right)\Delta t\right] + \\ &+ \sum_{a_{s+1}} P_{0:12\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}(t)\, \mu_{a_{s+1}} \Delta t + P_{1:12\ldots r\, a_{r+1}\ldots a_s}(t)\left(\sum_{i=1}^{i_1} \mu_i\right)\Delta t,\end{aligned}$$

de unde

$$\lambda \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,i_1\}} P_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i_1-1}(i_1+1)\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s} - \left[\lambda + \sum_{i=1}^{r} \mu_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=r+1}^{s} \mu_{a_i}\right] P_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s} + \sum_{a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} P_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{i_1} \mu_i\right) P_{1:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s} = 0 \tag{4}$$

d) $E^{t+\Delta t}_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}$ şi $r < i_1$, unde $a_{r+1},\ldots,a_s$ sînt mai mari decît $r+1$(Această situaţie apare cînd $i_1 \neq 1$.) Acest eveniment se realizează cu una din situaţiile :

$E^{t}_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{r-1}a_{r+1}\ldots a_s}$ şi o sosire în Δt, unde $\alpha_i \in \{1,2,\ldots,r\}$;
$E^{t}_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}$ şi nici o sosire şi nici o servire în Δt ;
$E^{t}_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}$ şi servirea solicitantului din staţia $S_{a_{s+1}}$ în Δt.
Rezultă :

$$P_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}(t+\Delta t) = \sum_{\alpha_i \in \{1,2,\ldots,r\}} P_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{r-1}a_{r+1}\ldots a_s}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t +$$

$$+ P_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}(t)(1-\lambda\cdot\Delta t)\left[1 - \left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i + \sum_{i=r+1}^{s}\mu_{a_i}\right)\Delta t + \right.$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} P_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}(t)\,\mu_{a_{s+1}}\cdot\Delta t,$$

de unde :

$$\lambda \sum_{\alpha_i \in \{1,2\ldots r\}} P_{0:\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{r-1}a_{r+1}\ldots a_s} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{r}\mu_i + \sum_{i=r+s}^{s}\mu_{a_i}\right) P_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s} +$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} P_{0:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}} = 0 \tag{5}$$

e) $E^{t+\Delta t}_{0:a_1a_2\ldots a_s}$, unde $a_i \neq 1$. Acest eveniment se realizează cu una din situaţiile :

$E^{t}_{0:a_1a_2\ldots a_s}$ şi nici o sosire şi nici o servire în Δt
$E^{t}_{0:a_1a_2\ldots a_s a_{s+1}}$ şi servirea solicitantului din staţia $S_{a_{s+1}}$ în Δt.
Rezultă :

$$P_{0:a_1a_2\ldots a_s}(t+\Delta t) = P_{0:a_1a_2\ldots a_s}(t)(1-\lambda\cdot\Delta t)\left[1 - \left(\sum_{i=1}^{s}\mu_{a_i}\right)\Delta t\right] +$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} P_{0:a_1a_2\ldots a_s a_{s+1}}(t)\,\mu_{a_{s+1}}\cdot\Delta t,$$

de unde:

$$(6)\qquad \left(\lambda + \sum_{i=1}^{s} \mu_{a_i}\right) P_{0:a_1 a_2 \ldots a_s} - \sum_{a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} P_{0:a_1 a_2 \ldots a_s a_{s+1}} = 0.$$

Să determinăm acum probabilitatea evenimentului $E_{n:a_1 a_2 \ldots a_s}$, unde

$$\sum_{j=0}^{l-1} C_{i_j} \leqslant n < \sum_{j=1}^{l} C_{i_j},$$ 2) $(l \geqslant 1)$

Să observăm că în acest caz stațiile $S_1, S_2, \ldots, S_{i_l}$ sînt obligatoriu ocupate.

Evenimentul $E^{t+\Delta t}_{n:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s}$ 3) se realizează cu una din situațiile:

$E^{t}_{n-1:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s}$ și o sosire în Δt;

$E^{t}_{n:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s}$ și nici o sosire și nici o servire în Δt;

$E^{t}_{n:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s a_{s+1}}$ și servirea solicitantului din stația $S_{a_{s+1}}$ în Δt;

$E^{t}_{n+1:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s}$ și servirea unui solicitant din $S_1, S_2, \ldots S_{i_l}$ în Δt.

Rezultă:

$$P_{n:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s}(t+\Delta t) = P_{n-1:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s}(t)\cdot \lambda \Delta t +$$

$$+ P_{n:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s}(t)(1-\lambda\Delta t)\left[1 - \left(\sum_{i=1}^{i_l} \mu_i + \sum_{i=i_l+1}^{s} \mu_{a_i}\right)\Delta t\right] +$$

$$+ \sum_{a_{s+1}} P_{n:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s a_{s+1}}(t)\, \mu_{a_{s+1}} \Delta t + P_{n+1:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s}(t)\left(\sum_{i=1}^{i_l} \mu_i\right)\Delta t,$$

de unde:

$$\lambda P_{n-1:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{i_l} \mu_i + \sum_{i=i_l+1}^{s} \mu_{a_i}\right) P_{n:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s} +$$

$$(7)\qquad + \sum_{a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} P_{n:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s a_{s+1}} + \left(\sum_{i=1}^{i_l} \mu_i\right) P_{n+1:12\ldots i_l a_{i_l+1}\ldots a_s} = 0.$$

Pentru $n = \sum_{j=1}^{l} C_{i_j}$ $(l \geqslant 1)$ vom distinge următoarele cazuri:

a) $E^{t+\Delta t}_{n:12\ldots s}$ și $s \geqslant i_{l+1}$ 4)

---

2) Convenim să luăm $C_{i_0} = 1$.

3) Se poate întîmpla ca $\{a_{i_l+1}, \ldots, a_s\}$ să fie mulțimea vidă.

4) Dacă $l = m$, atunci convenim ca $i_{l+1} = k$.

Acest eveniment se realizează cu una din situațiile :

$E^t_{n-1:12\dots s}$ și o sosire în Δt;
$E^t_{n:12\dots i_l\alpha_{i_l+1}\dots\alpha_{i_{l+1}-1}(i_{l+1}+1)\dots s}$ și o sosire în Δt, unde $\alpha_i \in \{(i_l+1),\dots,i_{l+1}\}$5);
$E^t_{n:12\dots s}$ și nici o sosire și nici o servire în Δt;
$E^t_{n:12\dots sa_{s+1}}$ și servirea solicitantului din stația $S_{a_{s+1}}$ în Δt;
$E^t_{n+1:12\dots s}$ și servirea unui solicitant din $S_1, S_2,\dots S_{i_{l+1}}$ în Δt.

Rezultă :

$$P_{n:12\dots s}(t+\Delta t) = P_{n-1:12\dots s}(t).\,\lambda.\,\Delta t +$$

$$+ \sum_{\alpha_i\in\{i_l+1,\dots,i_{l+1}\}} P_{n:12\dots i_l\alpha_{i_l+1}\dots\alpha_{i_{l+1}-1}i_{l+1}\dots s}(t)\,\lambda\cdot\Delta t +$$

$$+ P_{n:12\dots s}(t)(1-\lambda\Delta t)\left[1-\left(\sum_{i=1}^{S}\mu_i\right)\Delta t\right] + \sum_{a_{s+1}} P_{n:12\dots sa_{s+1}}(t)\,\mu_{a_{s+1}}\,\Delta t +$$

$$+ P_{n+1:12\dots s}(t)\left(\sum_{i=1}^{i_{l+1}}\mu_i\right)\Delta t,$$

de unde :

$$\lambda P_{n-1:12\dots s} + \lambda\cdot \sum_{\alpha_i\in\{i_l+1,\dots,i_{l+1}\}} P_{n:12\dots i_l\alpha_{i_l+1}\dots\alpha_{i_{l+1}-1}i_{l+1}\dots s} -$$

$$-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{s}\mu_i\right)P_{n:12\dots s} + \sum_{a_{s+1}}\mu_{a_{s+1}}P_{n:12\dots sa_{s+1}} + \tag{8}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{i_{l+1}}\mu_i\right)P_{n+1:12\dots s} = 0.$$

b) $E^{t+\Delta t}_{n:12\dots s}$ și $i_l < s < i_{l+1}$. (Această situație apare cînd $i_{l+1} \neq i_l+1$.)
Să observăm că acest eveniment se realizează cu una din următoarele situații :

$E^t_{n-1:12\dots s}$ și o sosire în Δt;
$E^t_{n:12\dots i_l\alpha_{i_l+1}\dots\alpha_{s-1}}$ și o sosire în Δt, unde $\alpha_i \in \{i_l+1,\dots,s\}$ 6);
$E^t_{n:1\dots s}$ și nici o sosire și nici o servire în Δt;
$E^t_{n:12\dots sa_{s+1}}$ și servirea solicitantului din stația $S_{a_{s+1}}$ în Δt.

---

5) În cazul $i_{l+1} = i_l + 1$, mulțimea $\{\alpha_{i_l+1},\dots,\alpha_{i_{l+1}-1}\}$ se reduce la mulțimea vidă și evenimentul va fi de fapt $E_{n:12\dots i_l(i_{l+1}+1)\dots S}$.

6) Se poate întîmpla ca mulțimea $\{\alpha_{i_l+1},\dots,\alpha_s\}$ să fie vidă și în acest caz evenimentul este $E_{n:12\dots i_l}$.

Rezultă :

$$P_{n:12\ldots s}(t+\Delta t)=P_{n-1:12\ldots s}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t+$$
$$+\sum_{\alpha_i\in\{i_l+1,\ldots,s\}} P_{n:12\ldots i_l\alpha_{i_l+1}\ldots\alpha_{s-1}}(t)\,\lambda\Delta t+$$
$$+P_{n:12\ldots s}(t)(1-\lambda\Delta t)\left[1-\left(\sum_{i=1}^{s}\mu_i\right)\Delta t\right]+\sum_{a_{s+1}} P_{n:12\ldots s\,a_{s+1}}(t)\mu_{a_{s+1}}\Delta t,$$

de unde :

$$\lambda P_{n-1:12\ldots s}+\lambda\sum_{\alpha_i\in\{i_l+1,\ldots,s\}} P_{n:12\ldots i_l\alpha i_l+1\ldots\alpha_{s-1}}-$$
$$-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{s}\mu_i\right)P_{n:12\ldots s}+\sum_{a_{s+1}}\mu_{a_{s+1}}P_{n:12\ldots s\,a_{s+1}}=0\,; \tag{8'}$$

c) $E^{t+\Delta t}_{n:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}$ şi $r\geqslant i_{l+1}$, unde $a_{r+1},\ldots,a_s$ sînt mai mari decît $r+1$

Acest eveniment se realizează cu una din situaţiile :

$E^t_{n-1:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}$ şi o sosire în Δt;

$E^t_{n:12\ldots i_l\alpha_{i_l+1}\ldots\alpha_{i_{l+1}-1}(i_{l+1}+1)\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}$ şi o sosire în Δt, unde $\alpha_i\in\{i_l+$
$+1,\ldots,i_{l+1}\}$;

$E^t_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s}$ şi nici o sosire şi nici o servire în Δt;

$E^t_{n:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}$ şi servirea solicitantului din staţie $S_{a_{s+1}}$ în Δt;

$E^t_{n+1:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}$ şi servirea unui solicitant din staţiile $S_1,\ldots,S_{i_{l+1}}$ în Δt.

Rezultă :

$$P_{n:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}(t+\Delta t)=P_{n-1:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t+$$
$$+\sum_{\alpha_i\in\{i_l+1,\ldots,i_{l+1}\}} P_{n:12\ldots i_l\alpha_{i_l+1}\ldots\alpha_{i_{l+1}-1}(i_{l+1}+1)\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}(t)\,\lambda\,\Delta t+$$
$$+P_{n:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}(t)\,(1-\lambda\Delta t)\left[1-\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i+\sum_{i=r+1}^{s}\mu_{a_i}\right)\Delta t\right]+$$
$$+\sum_{a_{s+1}} P_{n:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}(t)\,\mu_{a_{s+1}}\Delta t+P_{n+1:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}\left(\sum_{i=1}^{i_{l+1}}\mu_i\right)\Delta t,$$

de unde :

$$\lambda P_{n-1:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}+\lambda\sum_{\alpha_i\in\{i_l+1,\ldots,i_{l+1}\}} P_{n:12\ldots i_l\alpha_{i_l+1}\ldots\alpha_{i_{l+1}-1}(i_{l+1}+1)\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}-$$
$$-\left[\lambda+\sum_{i=1}^{r}\mu_i+\sum_{i=r+1}^{s}\mu_{a_i}\right]P_{n:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}+\sum_{a_{s+1}}\mu_{a_{s+1}}P_{n:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{i_{l+1}}\mu_i\right)P_{n+1:12\ldots r\,a_{r+1}\ldots a_s}=0. \tag{9}$$

d) $E^{t+\Delta t}_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s}$ și $i_l < r < i_{l+1}$, unde $a_{r+1}, \ldots, a_s$ sînt mai mari decît $r+1$. Acest eveniment se realizează cu una din situațiile :

$E^t_{n-1:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s}$ și o sosire în Δt;

$E^t_{n:12\ldots i_l \alpha_{i_l+1}\ldots \alpha_{r-1} a_{r+1}\ldots a_s}$ și o sosire în Δt, unde $\alpha_i \in \{i_l + 1, \ldots, r\}$,

$E^t_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s}$ și nici o sosire și nici o servire în Δt;

$E^t_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}$ și servirea solicitantului din stația $S_{a_{s+1}}$ în Δt.

Rezultă :

$$\begin{aligned}
P_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s}(t+\Delta t) &= P_{n-1:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t + \\
&+ \sum_{\alpha_i \in \{i_l+1,\ldots,r\}} P_{n:12\ldots i_l \alpha_{i_l+1}\ldots \alpha_{r-1} a_{r+1}\ldots a_s}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t + \\
&+ P_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s}(t)(1-\lambda\Delta t)\left[1 - \left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i + \sum_{i=r+1}^{s}\mu_{a_i}\right)\Delta t + \right. \\
&+ \sum_{a_{s+1}} P_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}}(t)\,\mu_{a_{s+1}}\Delta t,
\end{aligned}$$

de unde :

$$\begin{aligned}
&\lambda P_{n-1:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s} + \lambda \sum_{\alpha_i \in \{i_l+1\ldots r\}} P_{n:12\ldots i_l \alpha_{i_l+1}\ldots \alpha_{r-1}\cdot a_{r+1}\ldots a_s} - \\
(9')\qquad &- \left(\lambda + \sum_{i=1}^{r}\mu_i + \sum_{i=r+1}^{s}\mu_{a_i}\right) P_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s} + \\
&+ \sum_{a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} P_{n:12\ldots r a_{r+1}\ldots a_s a_{s+1}} = 0.
\end{aligned}$$

e) $E^{t+\Delta t}_{n:12\ldots i_1}$ se realizează cu unul din evenimentele de la cazul b) (pentru $s = i_1$) cu excepția evenimentului al doilea. Obținem, în definitiv, ecuația :

$$(8'')\qquad \lambda P_{n-1:12\ldots i_1} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{i_1}\mu_i\right) P_{n:12\ldots i_1} + \sum_{a_1} P_{n:12\ldots i_1 a_1} = 0.$$

f) $E^{t+\Delta t}_{n:12\ldots i_1 a_{i_1+1}\ldots a_s}$ se realizează cu unul din evenimentele de la cazul d) pentru $r = i_1$ cu excepția evenimentului al doilea. Se obține :

$$\begin{aligned}
&\lambda P_{n-1:12\ldots i_1 a_{i_1+1}\ldots a_s} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{i_1}\mu_i + \sum_{i=i_1+1}^{s}\mu_{a_i}\right) P_{n:12\ldots i_1 a_{i_1+1}\ldots a_s} + \\
(9'')\qquad &+ \sum_{a_{s+1}} \mu_{a_{s+1}} P_{n:12\ldots i_1 a_{i_1+1}\ldots a_s a_{s+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Să observăm că (1) – (9″) reprezintă un sistem de $2^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_i 2^{k-i}$ ecuații cu necunoscutele $P_{n:a_1a_2\ldots a_s}$, unde $n = 0, 1, \ldots, \sum_i C_i + 1$, iar $\{a_1, \ldots, a_s\} \subset \subset \{1, \ldots, k\}$ adică $2^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_i 2^{k-1} + 1$ necunoscute, deci putem rezolva acest sistem în funcţie de P_0.

Valorile $P_{n:a_1a_2\ldots a_s}$ o dată calculate, putem afla probabilităţile P_n de a avea n solicitanţi în sistem conform formulei :

$$P_n = \sum_{m+s=n} P_{m:a_1a_2\ldots a_s}. \tag{10}$$

Pentru $n \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} C_i + k$ are loc relaţia :

$P_n =$ prob. $\{n - k$ solicitanţi aşteaptă pentru servire şi toate staţiile sînt ocupate$\}$

şi pentru $n > \sum_{i=1}^{k-1} C_i + k$ avem

$$P_n = (\gamma + 1) P_{n-1} - \gamma P_{n-2}, \tag{11}$$

cum poate fi verificat cu uşurinţă.

Însumînd relaţia (11) pentru $n = \sum_{i=1}^{k-1} C_i + k + 1, \sum_{i=1}^{k-1} C_i + k + 2, \ldots$ obţinem :

$$P_{\sum\limits_i C_i + k} = \gamma P_{\sum\limits_i C_i + k - 1} \tag{12}$$

din (11) şi (12) rezultă relaţia de recurenţă

$$P_n = \gamma^{n - \sum\limits_i C_i - k + 1} P_{\sum\limits_i C_i + k - 1}, \qquad n \geqslant \sum_i C_i + k. \tag{13}$$

Ţinînd seama că $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ şi folosind (10) şi (13) putem obţine valorile probabilităţilor P_n în funcţie de λ şi μ_i.

În practică sînt necesare valorile medii ale lungimii liniei de aşteptare $M(l)$, numărului de solicitanţi în sistemul $M(n)$, timpului de aşteptare a unui solicitant care intră în sistem $M(w)$ şi timpului total pe care un solicitant care intră în sistem îl petrece în sistem $M(v)$ care pot fi calculate pornind de la definiţie şi folosind (13).

Primită la redacţie la 17 noiembrie 1964

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. W. Feller, *Probability Theory and Its Applications*, vol. I. Wiley, New York, 1957.
2. H. Gumbel, *Waiting Lines with Heterogeneous Servers* Operations Research, **8** (1960).
3. P. Iscovici, G. Godini, *Linie de aşteptare cu staţii de servire prioritare*. Comunicările Academiei R.P.R., **10** (1963).
4. B. Krishnamoorthi, *On Poisson Queue with Two Heterogeneous Servers*. Operations Research, **11** (1963).

[illegible] reprezentative [illegible]

[illegible]

[illegible] care depinde de mărimea [illegible]

[illegible] formulele:

(10) [illegible]

[illegible] relația

[illegible]

(11) [illegible]

corespunzător [illegible] normale

Folosind relația (1) putem scrie [illegible]

obținem

(12) [illegible]

din (11) și (12) rezultă relația de recurență

(13) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

BIBLIOGRAFIE

[illegible]

O PROBLEMĂ DE AŞTEPTARE CU O SINGURĂ STAŢIE DE SERVIRE

DE

G. GODINI

Se consideră o linie de aşteptare Poisson cu o singură staţie de servire, în care disciplina liniei de aşteptare este modificată în sensul că dacă la un moment dat în sistem nu se găseşte nici un solicitant, atunci staţia de servire va începe să lucreze numai cînd în linia de aşteptare se găsesc un număr dat de solicitanţi. Se determină probabilităţile de a avea *n* solicitanţi în sistem, precum şi diferite valori medii necesare în practică.

În teoria liniilor de aşteptare cu o singură staţie de servire s-a presupus că atunci cînd un solicitant intră în sistem, staţia de servire sau era ocupată sau dacă nu era ocupată începea servirea acestui solicitant. Dar se poate întîmpla ca din considerente de ordin practic staţia de servire să nu înceapă servirea unui solicitant decît atunci cînd se ştie că are un număr dat de solicitanţi la servire.

În cele ce urmează vom considera efectele pe care le are schimbarea disciplinei liniei de aşteptare în acest sens.

★

Vom considera cazul unei linii de aşteptare cu o singură staţie de servire în următoarele ipoteze :

— sosirile solicitanţilor în linia de aşteptare urmează o distribuţie Poisson cu rata medie λ;

— timpul de servire urmează o distribuţie exponenţială cu rata medie de servire μ;

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 ;$$

— fenomenul depinde de mărimea intervalului de timp ales şi nu de momentul iniţial al intervalului (principiul omogeneităţii în timp);

— o anumită disciplină care cere ca în linia de aşteptare să nu poată intra la un moment dat decît un singur solicitant; cînd o staţie de servire devine disponibilă, solicitantul care urmează în ordine a fi servit trebuie să intre în această staţie. Dar dacă la un moment dat staţia de servire încetează de a mai da servicii (adică la acel moment avem zero solicitanţi în sistem), atunci un solicitant care intră în sistem va aştepta în linia de aşteptare pînă la intrarea celui de-al $(s+1)$-lea solicitant, cînd va începe servirea lui.

Notaţii :

$E^t_{n,m}$ reprezintă evenimentul „n solicitanţi în sistem la timpul t şi m staţii lucrează" $n = 1, 2, \ldots$ $m = 0, 1$;

$E^{n,t}$ reprezintă evenimentul „n solicitanţi în sistem la timpul t" $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_{n,m}(t) = P(E^t_{n,m});$$

$$P_n = P(E^{n,t}).$$

Să observăm că dacă $n > s$, atunci $m = 1$ şi deci $E^t_{n,0}$ are loc numai pentru $n = 0, 1, \ldots, s$. De asemenea, pentru $n = 0$, evenimentul $E^t_{0,0}$ este de fapt $E^{0,t}$.

Folosind obişnuita tehnică „Δt", putem determina probabilităţile P_n de a avea n solicitanţi în sistem şi vom obţine formulele :

$$(1)\qquad P_{1,1} = \frac{\lambda}{\mu} P_0,$$

$$(2)\qquad P_{1,0} = P_0,$$

$$(3)\qquad P_{2,1} = \frac{\lambda+\mu}{\mu} P_{1,1},$$

$$(4)\qquad P_{n,0} = P_{n-1,0},\qquad n = 2, 3, \ldots, s,$$

$$(5)\qquad P_{n+1,1} = \frac{\lambda+\mu}{\mu} P_{n,1} - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1,1}{}^{1)},\qquad n = 2, 3, \ldots, s,$$

$$(6)\qquad P_n = \frac{\lambda+\mu}{\mu} P_{n-1} - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-2}\qquad n > s+1.$$

Valoarea lui P_n pentru $1 \leqslant n \leqslant s$ este dată de relaţia

$$(7)\qquad P_n = P_{n,1} + P_{n,0}.$$

Pentru a obţine valoarea lui P_n în funcţie de P_0 să ţinem seama că $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ şi să observăm că avem din (1) — (6) relaţiile

$$(1')\qquad P_{1,1} = \rho P_0,$$

$$(3')\qquad P_{2,1} = (\rho+1) P_{1,1} = (\rho^2+\rho) P_0.$$

---

1) Pentru $n = s$, în membrul întîi avem de fapt P_{s+1}.

Se poate arăta prin inducţie că

$$P_{n,1} = (\rho^n + \rho^{n-1} + \ldots + \rho) P_0 = \frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}, \qquad 1 \leqslant n \leqslant s. \tag{8}$$

Ţinînd seama de (2), (4), (7) şi (8) avem

$$P_n = \left(\sum_{i=0}^{n} \rho^i\right) P_0 = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} P_0, \qquad 1 \leqslant n \leqslant s. \tag{9}$$

În general, pentru $n \geqslant s + 1$ se obţine formula

$$P_n = (\rho^n + \rho^{n-1} + \ldots + \rho^{n-s}) P_0 = \left(\sum_{i=n-s}^{n} \rho^i\right) P_0 = \rho^{n-s} \frac{1-\rho^{s+1}}{1-\rho} P_0. \tag{10}$$

Valoarea lui P_0 se află folosind faptul că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ şi înlocuind valorile lui P_n din (9) şi (10). Vom avea

$$P_0 = \frac{1-\rho}{s+1}. \tag{11}$$

Rezultă că

$$P_n = \frac{1-\rho^{n+1}}{s+1}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant s \tag{12}$$

şi

$$P_n = \rho^{n-s} P_s = \frac{\rho^{n-s}(1-\rho^{s+1})}{s+1} \quad \text{pentru } n \geqslant s+1. \tag{12'}$$

Probabilitatea ca staţia să nu lucreze este egală cu

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{s} P_{n,0} = (s+1) P_0 = 1 - \rho \tag{13}$$

şi deci nu depinde de s.

Deoarece în practică avem nevoie de diferite valori medii ca de exemplu valorile medii ale lungimii liniei de aşteptare $M(l)$, numărului de solicitanţi în sistem $M(n)$, timpului de aşteptare a unui solicitant care intră în sistem $M(w)$ şi timpului total pe care un solicitant care intră în sistem îl petrece în sistem $M(v)$, vom da mai jos expresiile acestor medii care se obţin din definiţia mediei, folosind (12), (12′) şi făcînd unele calcule algebrice simple. Vom căpăta :

$$M(l) = \sum_{n=1}^{s} n P_{n,0} + \sum_{n=2}^{s} (n-1) P_{n,1} + \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-1) P_n = \sum_{n=1}^{s} P_{n,0} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) P_n = \frac{1}{s+1} \left\{ s(1-\rho) + \frac{s(s-1)}{2} - \frac{\rho^3 - \rho^{s+2}}{(1-\rho)^2} + \frac{(s-1)\rho^{s+2}}{1-\rho} + \right.$$

$$\left. + (1-\rho^{s+1}) \left[\frac{s\rho}{1-\rho} + \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} \right] \right\}, \tag{14}$$

$$M(n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = \frac{1}{s+1}\left\{\frac{s(s+1)}{2} - \frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\rho^2-\rho^{s+2}}{1-\rho} - s\rho^{s+2}\right) + \right.$$

$$\left. + (1-\rho^{s+1})\left[\frac{s\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\right]\right\}, \tag{15}$$

$$M(w) = \frac{M(l)}{\lambda}, \tag{16}$$

$$M(v) = \frac{M(n)}{\lambda}. \tag{17}$$

Observăm că aceste valori medii sînt funcţii de λ, μ şi s. Pentru $s = 0$ se obţin formulele cunoscute din teoria clasică a liniilor de aşteptare Poisson (intrări Poisson şi timp de servire exponenţial) cu o singură staţie de servire.

Primită la redacţie la 19 decembrie 1964

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. W. Feller, *Probability Theory and its Applications.* Wiley, New York, 1957.
2. A. Kaufmann, *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle.* Paris.
3. Houlden, *Some Technique of Operational Research,* London, 1962.

MIŞCĂRI PLANE ROTAŢIONALE ALE UNUI FLUID PERFECT ÎN PREZENŢA UNOR OBSTACOLE

DE

HORIA I. ENE

În lucrarea de faţă, pornind de la faptul că, în mişcarea plană rotaţională, componenţa după axa Oz a vîrtejului se scrie $\zeta = -f(\psi)$, am considerat cazul mişcării cu o distribuţie liniară a vitezelor la mari distanţe în prezenţa cilindrului eliptic. Apoi am studiat cazul mişcării cu o distribuţie parabolică a vitezelor la mari distanţe în prezenţa cilindrului eliptic, a plăcii plane şi a cilindrului circular, ultimele două cazuri constituind o soluţie exactă a problemelor rezolvate de H. T. Nagamatsu [9] aproximativ.

Rezolvarea problemelor Dirichlet apărute am făcut-o cu ajutorul metodei directe dată de C. Iacob [7].

Mişcarea plană a fluidelor perfecte în cazul cînd este rotaţională, implică un vîrtej de componente $(0, 0, \zeta)$, în care componenta în lungul axei Oz este de forma [6]:

$$\zeta = -f(\psi),$$

unde ψ este funcţia de curent.

În acest mod se vede că vom putea obţine diverse categorii de mişcări pentru diferite expresii ale lui $f(\psi)$. În lucrarea de faţă vom studia două categorii de mişcări: una cu o distribuţie liniară a vitezelor la mari distanţe, iar cea de-a doua cu o distribuţie parabolică.

Pentru rezolvarea problemelor Dirichlet care apar, vom folosi metoda directă dată de C. Iacob [7], metodă pe care am mai utilizat-o în [3].

I. DISTRIBUŢIA LINIARĂ A VITEZELOR

1. PUNEREA PROBLEMEI

Aceste mişcări poartă denumirea de mişcări fluide cu vîrtej constant şi au făcut obiectul cercetării mai multor autori printre care menţionăm pe S. A. Ciaplîghin [1], H. Sanden [10], V. Vâlcovici [12], [13], H. S. Tsien [11], Y. H. Kuo [8], C. Iacob [4], [5], [6], I. I. Cristea [2].

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 781–791, BUCUREŞTI, 1965

Considerînd componenta ζ a vîrtejului ca fiind constantă :

$$\zeta = a$$

vom ajunge la considerarea unui potenţial complex generalizat $F_0(z)$ care conţine constanta a [2].

Distribuţia de viteze a fluidului neperturbat va fi dată de expresia

$$w_0 = \frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}z} - \mathrm{i}ax.$$

Deoarece la mari distanţe, cu toată prezenţa obstacolului, mişcarea rămîne neperturbată, viteza fluidului în prezenţa obstacolului va satisface la mari distanţe condiţia :

$$\lim_{z \to \infty} w = w_0. \tag{1}$$

Vom căuta atunci potenţialul complex generalizat al mişcării fluidului în prezenţa obstacolului sub forma :

$$F(z) = F_0(z) + F^*(z), \tag{2}$$

unde $F^*(z)$ este un potenţial perturbator.

Viteza fluidului în mişcarea perturbată va avea expresia :

$$w = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} - \mathrm{i}ax = w_0 + \frac{\mathrm{d}F^*}{\mathrm{d}z}$$

astfel încît la mari distanţe, conform cu (1), vom avea de satisfăcut condiţia :

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\mathrm{d}F^*}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{1'}$$

Pe suprafaţa obstacolului, punînd condiţia ca fluidul să alunece, vom avea :

$$\left[\mathrm{Im}\,\{F(z)\} - \frac{1}{2}ax^2\right]_C = k, \tag{3}$$

unde k este o constantă.

Dacă :

$$F(z) = \varphi(x, y) + \mathrm{i}\psi(x, y)$$
$$F_0(z) = \varphi_0(x, y) + \mathrm{i}\psi_0(x, y)$$
$$F^*(z) = \varphi^*(x, y) + \mathrm{i}\psi^*(x, y)$$

condiţia la limită (3) se scrie sub forma :

$$\psi(x, y) - \frac{1}{2}ax^2 = k \text{ pe } C \tag{3'}$$

sau încă, conform cu (2) :

$$\psi^*(x, y) = -\psi_0(x, y) + \frac{1}{2}ax^2 + k \text{ pe } C. \tag{3''}$$

Problema revine deci la a determina potenţialul complex perturbator $F^*(z)$ care este o funcţie olomorfă în exteriorul obstacolului, avînd de îndeplinit condiţia la mari distanţe (1′) şi condiţia pe contur (3″).

2. CAZUL CILINDRULUI ELIPTIC

a) *Cilindrul eliptic cu axa mare orientată pe direcţia de curgere a fluidului.* Vom lua cazul mişcării fluide cu vîrtej constant în jurul unui cilindru eliptic sau considerînd mişcarea plană, în jurul elipsei de ecuaţie :

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(c+\frac{q^2}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(c-\frac{q^2}{c}\right)^2}=1. \tag{4}$$

Mişcarea fluidului neperturbat este caracterizată de funcţia :

$$F_0(z)=\mathrm{i}\,\frac{a}{2}z^2+V_0 z, \tag{5}$$

unde a este mărimea vîrtejului, iar V_0 este mărimea vitezei particulelor situate pe axa Ox la mari distanţe. Rezultă că viteza fluidului neperturbat are expresia :

$$w_0=V_0-ay.$$

Deci condiţia (1) se va scrie în cazul nostru :

$$\lim_{z\to\infty} w=V_0-ay. \tag{6}$$

În conformitate cu (2) vom căuta potenţialul complex generalizat al mişcării sub forma :

$$F(z)=\mathrm{i}\,\frac{a}{2}z^2+V_0 z+F^*(z). \tag{7}$$

Viteza fluidului perturbat se va scrie deci :

$$w=V_0-ay+\frac{\mathrm{d}F^*}{\mathrm{d}z}$$

avînd de îndeplinit aceeaşi condiţie (1′).

Condiţia pe contur (3″) se va scrie sub forma :

$$\psi^*(x,y)=\frac{a}{2}\left(y-\frac{V_0}{a}\right)^2+k-\frac{V_0^2}{2a}\quad\text{pe C} \tag{8}$$

Transformarea lui Jukovschi :

$$z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{q^2}{\zeta}\right) \tag{9}$$

sau inversa ei :

$$\zeta=z+\sqrt{z^2-q^2} \tag{10}$$

realizează corespondenţa între cercul $|\zeta| = c$ din planul (ζ) şi elipsa de ecuaţie (4) din planul (z).

Avînd la bază metoda lui C. Iacob [7] de rezolvare a problemelor la limită de tip Dirichlet pentru contururi reprezentabile conform, cu ajutorul unor funcţii raţionale pe un cerc şi cu date raţionale pe contur, vom considera funcţia ajutătoare :

$$g(\zeta) = F^*\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta}\right)\right]. \tag{11}$$

Membrul doi al condiţiei la limită pe contur (8) fiind un polinom de gradul doi în y, îl vom nota :

$$P(y) = \frac{a}{2}\left(y - \frac{V_0}{a}\right)^2 + k' \tag{12}$$

sau încă, folosind (11), vom scrie :

$$\operatorname{Re}\{-ig(\zeta)\}_{|\zeta|=c} = P[y(\xi, \eta)|_{|\zeta|=c}], \tag{13}$$

unde $y(\xi, \eta)$ rezultă din (9) sub forma :

$$y = \frac{\eta}{2}\left(1 - \frac{q^2}{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

Ştiind că pe cercul $|\zeta| = c$ avem :

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right), \quad \eta = \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{c^2}{\zeta}\right),$$

vom avea de calculat expresia :

$$A(\zeta) = P\left\{y\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right); \ \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{c^2}{\zeta}\right)\right]\right\}. \tag{14}$$

Un calcul simplu ne dă :

$$A(\zeta) = -\frac{a}{32}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^2 \zeta^2 - \frac{V_0}{4i}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\zeta - \frac{c^4 a}{32}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^2 \frac{1}{\zeta^2} + \frac{V_0 c^2}{4i}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\frac{1}{\zeta} + k'',$$

unde :

$$k'' = \frac{a}{16\,c^2}(c^2 - q^2)^2 + k.$$

Funcţia $A(\zeta)$ avînd polurile $\zeta = 0$ şi $\zeta = \infty$, vom nota cu $A_1(\zeta)$ partea principală a acestei funcţii referitoare la polul interior $\zeta = 0$:

$$A_1(\zeta) = -\frac{a}{32}(c^2 - q^2)^2 \frac{1}{\zeta^2} + \frac{V_0}{4i}(c^2 - q^2)\frac{1}{\zeta}. \tag{15}$$

Conform lui [7] putem scrie condiţia la limită (13) sub forma:

$$-\,\mathrm{i}g(\zeta) = 2\,A_1(\zeta) - \mathrm{i}\tau \tag{16}$$

sau folosind (15) obţinem:

$$g(\zeta) = -\frac{\mathrm{i}a}{16}(c^2-q^2)^2\frac{1}{\zeta^2} + \frac{V_0}{2}(c^2-q^2)\frac{1}{\zeta} + \tau.$$

Ţinînd seama de (11) putem scrie:

$$F^*(z) = g(z + \sqrt{z^2-q^2})$$

de unde:

$$F^*(z) = -\frac{\mathrm{i}a}{16\,q^4}(c^2-q^2)^2\,(z-\sqrt{z^2-q^2})^2 + \frac{V_0}{2q^2}(c^2-q^2)(z-\sqrt{z^2-q^2}). \tag{17}$$

Potenţialul perturbator dat de (17) se vede că verifică şi condiţia la mari distanţe (1′). Introducînd (17) în (7) avem expresia finală a potenţialului complex generalizat sub forma:

$$\begin{aligned} F(z) = {} & \frac{V_0}{2q^2}\left[(c^2+q^2)\,z - (c^2-q^2)\sqrt{z^2-q^2}\right] + \\ & + \frac{\mathrm{i}a}{2}\left\{\left[1-\frac{1}{4\,q^4}(c^2-q^2)^2\right]z^2 + \frac{1}{4\,q^4}(c^2-q^2)^2 z\sqrt{z^2-q^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\,q^2}(c^2-q^2)^2\right\} \end{aligned} \tag{18}$$

şi viteza:

$$w = \frac{V_0}{2\,q^2}\left[c^2+q^2-(c^2-q^2)\frac{z}{\sqrt{z^2-q^2}}\right] - ay + \frac{\mathrm{i}a}{8\,q^4}(c^2-q^2)^2\frac{(z-\sqrt{z^2-q^2})^2}{\sqrt{z^2-q^2}}. \tag{19}$$

În formulele (18) şi (19) dacă facem $a = 0$, se obţin formulele cunoscute din mişcarea irotaţională.

b) *Cilindrul eliptic cu axa mare perpendiculară pe direcţia de curgere a fluidului.* În acest caz, transformarea conformă va fi:

$$z = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta}\right) \tag{20}$$

iar inversa ei:

$$\zeta = \mathrm{i}(-z + \sqrt{z^2+q^2}). \tag{21}$$

Păstrînd aceleaşi notaţii şi aplicînd metoda directă dată de C. Iacob [7] vom obţine succesiv:

$$A_1(\zeta) = \frac{a}{32}(c^2+q^2)^2\frac{1}{\zeta^2} - \frac{V_0}{4}(c^2+q^2)\frac{1}{\zeta},$$

$$g(\zeta) = \frac{\mathrm{i}a}{16}(c^2+q^2)^2\frac{1}{\zeta^2} - \frac{\mathrm{i}V_0}{2}(c^2+q^2)\frac{1}{\zeta} + \tau,$$

de unde potențialul perturbator va fi :

$$F^*(z) = -\frac{\mathrm{i}a}{16\,q^4}(c^2+q^2)^2(z+\sqrt{z^2+q^2})^2 - \frac{V_0}{2\,q^2}(c^2+q^2)(z+\sqrt{z^2+q^2}).$$

Un calcul simplu ne dă potențialul complex generalizat sub forma :

$$F(z) = \frac{V_0}{2\,q^2}\left[(q^2-c^2)z-(q^2+c^2)\sqrt{z^2+q^2}\right]+\frac{\mathrm{i}a}{2}\left\{\left[1-\frac{1}{4\,q^4}(q^2+c^2)^2\right]z^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\,q^4}(c^2+q^2)^2\,z\sqrt{z^2+q^2}-\frac{1}{8\,q^2}(c^2+q^2)^2\right\} \tag{22}$$

iar viteza :

$$w = \frac{V_0}{2\,q^2}\left[q^2-c^2-(q^2+c^2)\frac{z}{\sqrt{z^2+q^2}}\right]-ay-\frac{\mathrm{i}a}{8\,q^4}(c^2+q^2)^2\frac{(z+\sqrt{z^2+q^2})^2}{\sqrt{z^2+q^2}}. \tag{23}$$

Și în acest caz formulele obținute de noi, (22) și (23), constituie o generalizare a cazului cunoscut din mișcarea irotațională. De asemenea, în aceste formule dacă vom face $q = c$ obținem tocmai cazul plăcii plane studiat de noi în [3].

II. DISTRIBUȚIA PARABOLICĂ A VITEZELOR

1. PUNEREA PROBLEMEI

Vom presupune că componenta de pe axa Oz a vîrtejului este o funcție liniară de y. În acest caz vom obține un profil parabolic al vitezelor la mari distanțe, pus în evidență de H. T. Nagamatsu [9] :

$$u = V_0 - 3ay^2, \qquad v = 0, \tag{24}$$

unde V_0 este viteza la infinit în lungul axei Ox, a este o constantă care înglobează și curbura parabolei, iar u și v sînt proiecțiile vitezei pe cele două axe.

Întrucît vîrtejul este constant în lungul unei linii de curent (y = const.), va trebui să presupunem curbura mică, deci a mic, și de asemenea perturbația datorită prezenței obstacolului mică. Aceste ipoteze au fost făcute și de H. T. Nagamatsu [9]. În plus, H. T. Nagamatsu are nevoie de aceste ipoteze pentru a obține într-o primă aproximație ecuația lui Laplace pentru funcția de curent.

Perturbația datorită prezenței obstacolului o vom pune în evidență prin introducerea unei viteze de perturbație care ne conduce la un potențial perturbator $F(z)$. În acest mod viteza apare sub forma :

$$u - \mathrm{i}v = V_0 - 3ay^2 + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}. \tag{25}$$

Acum problema revine la a determina potenţialul complex perturbator $F(z)$, care este o funcţie olomorfă în exteriorul obstacolului şi care îndeplineşte condiţiile :

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{26}$$

şi

$$\operatorname{Im}\{F(z)\} = \psi(x, y) = k - V_0 y + a y^3 \text{ pe } C. \tag{27}$$

2. CILINDRUL ELIPTIC

a) *Cilindrul eliptic cu axa mare orientată pe direcţia de curgere a fluidului.* Folosind transformarea lui Jukovschi :

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta}\right) \tag{28}$$

sau inversa ei

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - q^2} \tag{29}$$

avem o corespondenţă între exteriorul cercului $|\zeta| = c$ din planul (ζ) şi elipsa de semiaxe $\frac{1}{2}\left(c + \frac{q^2}{c}\right)$ şi $\frac{1}{2}\left(c - \frac{q^2}{c}\right)$ din planul (z).

Observînd că funcţia de transformare (28) şi condiţia la limită (27) sînt funcţii raţionale, vom putea aplica metoda directă dată de C. Iacob [7]. Pentru aceasta să considerăm funcţia ajutătoare :

$$g(\zeta) = F\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta}\right)\right]. \tag{30}$$

Membrul drept al condiţiei la limită (27) fiind un polinom de gradul trei în y, îl vom nota cu :

$$P(y) = k - V_0 y + a y^3. \tag{31}$$

Ştiind că pe cercul $|\zeta| = c$ avem :

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right) \qquad \eta = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\left(\zeta - \frac{c^2}{\zeta}\right)$$

şi deducînd din (28)

$$y = \frac{\eta}{2}\left(1 - \frac{q^2}{\xi^2 + \eta^2}\right)$$

rezultă că avem de calculat expresia :

$$A(\zeta) = P\left\{y\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta}\right); \ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\zeta - \frac{c^2}{\zeta}\right)\right]\right\}.$$

O serie de calcule elementare ne dau :

$$A\,(\zeta) = -\frac{a}{64\mathrm{i}}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^3\zeta^3 + \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\left[\frac{3\,ac^2}{16}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^2 - V_0\right]\zeta +$$

$$+\frac{ac^6}{64\mathrm{i}}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^3\frac{1}{\zeta^3} + \frac{c^2}{4\mathrm{i}}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\left[V_0 - \frac{3\,ac^2}{16}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^2\right]\frac{1}{\zeta} + k.$$

Partea principală a acestei funcţii referitoare la polul inferior $\zeta=0$ se scrie :

$$A_1(\zeta) = \frac{ac^6}{64\mathrm{i}}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^3\frac{1}{\zeta^3} + \frac{c^2}{4\mathrm{i}}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\left[V_0 - \frac{3\,ac^2}{16}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^2\right]\frac{1}{\zeta}\cdot \tag{32}$$

Condiţia la limită (27), cu notaţiile (30) şi (31), se scrie :

$$\mathrm{Re}\{-\mathrm{i}g\,(\zeta)\}_{|\zeta|=c} = P\,[y\,(\xi,\eta)|_{|\zeta|=c}].$$

Aplicînd teorema cercului a lui Milne-Thomson avem :

$$-\mathrm{i}g\,(\zeta) = 2\,A_1\,(\zeta) - \mathrm{i}\tau. \tag{33}$$

Înlocuind (32) în (33) avem :

$$g(\zeta) = \frac{ac^6}{32}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^3\frac{1}{\zeta^3} + \frac{c^2}{2}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\left[V_0 - \frac{3\,ac^2}{16}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^2\right]\frac{1}{\zeta} + \tau. \tag{34}$$

Din (30) cu (29) putem scrie :

$$F(z) = g(z + \sqrt{z^2 - q^2})$$

sau folosind (34) avem :

$$F\,(z) = \frac{ac^6}{32\,q^6}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^3\,(z - \sqrt{z^2-q^2})^3 +$$

$$+\frac{c^2}{2\,q^2}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\left[V_0 - \frac{3ac^2}{16}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^2\right](z - \sqrt{z^2-q^2}). \tag{35}$$

Calculînd $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ se vede că avem îndeplinită condiţia (26). Introducînd în (25) obţinem

$$u - \mathrm{i}v = V_0 - 3ay^2 - \frac{3a}{32\,q^6}(c^2-q^2)^3\,\frac{(z-\sqrt{z^2-q^2})^3}{\sqrt{z^2-q^2}} -$$

$$-\frac{c^2-q^2}{2q^2}\left[V_0 - \frac{3a\,(c^2-q^2)^2}{16c^2}\right]\frac{(z-\sqrt{z^2-q^2})}{\sqrt{z^2-q^2}}. \tag{36}$$

b) *Cilindrul eliptic cu axa mare perpendiculară pe direcţia de curgere a fluidului.* Pentru a reprezenta conform exteriorul elipsei din planul

(z) pe exteriorul cercului de rază c din planul (ζ), vom folosi transformarea :

$$z = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta}\right). \tag{37}$$

Inversa ei va fi :

$$\zeta = \mathrm{i}\left(-z + \sqrt{z^2 + q^2}\right). \tag{38}$$

Păstrînd aceleaşi notaţii, vom considera funcţia ajutătoare :

$$g(\zeta) = F\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta}\right)\right] \tag{39}$$

şi deducînd din (37) :

$$y = \frac{\xi}{2}\left(1 + \frac{q^2}{\xi^2 + \eta^2}\right)$$

vom obţine pentru funcţia $A(\zeta)$ expresia :

$$A(\zeta) = \frac{a}{64}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)^3\zeta^3 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)\left[\frac{3\,ac^2}{16}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)^2 - V_0\right]\zeta +$$
$$+ \frac{ac^6}{64}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)^3\frac{1}{\zeta^3} + \frac{c^2}{4}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)\left[\frac{3\,ac^2}{16}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)^2 - V_0\right]\frac{1}{\zeta} + k.$$

Partea principală a acestei funcţii referitoare la polul interior $\zeta = 0$ este :

$$A_1(\zeta) = \frac{ac^6}{64}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)^3\frac{1}{\zeta^3} + \frac{c^2}{4}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)\left[\frac{3\,ac^2}{16}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)^2 - V_0\right]\frac{1}{\zeta}\cdot \tag{40}$$

Cu (40) în (33) obţinem :

$$g(\zeta) = \frac{\mathrm{i}ac^6}{32}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)^3\frac{1}{\zeta^3} + \frac{\mathrm{i}c^2}{2}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)\left[\frac{3ac^2}{16}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)^2 - V_0\right]\frac{1}{\zeta} + \tau. \tag{41}$$

Din (39) putem scrie :

$$F(z) = g\left[\mathrm{i}\left(-z + \sqrt{z^2 + q^2}\right)\right]$$

şi folosind (41) avem :

$$F(z) = -\frac{a(c^2+q^2)^3}{32q^6}\left(z + \sqrt{z^2 + q^2}\right)^3 + \frac{c^2 + q^2}{2q^2}\left[\frac{3a}{16\,c^2}(c^2+q^2)^2 - V_0\right]\times$$
$$\times\left(z + \sqrt{z^2 + q^2}\right). \tag{42}$$

Aceasta se vede că verifică condiţia (26). Introducînd această expresie în (25), avem viteza sub forma :

$$u - \mathrm{i}v = V_0 - 3ay^2 - \frac{3a(c^2 + q^2)^3}{32\,q^6}\,\frac{\left(z + \sqrt{z^2 + q^2}\right)^3}{\sqrt{z^2 + q^2}} +$$
$$+ \frac{c^2 + q^2}{2q^2}\left[\frac{3a}{16\,c^2}(c^2 + q^2)^2 - V_0\right]\frac{\left(z + \sqrt{z^2 + q^2}\right)}{\sqrt{z^2 + q^2}}. \tag{43}$$

3. PLACA PLANĂ

Din formulele (42) și (43), făcînd $q = c$, obținem soluția pentru cazul mișcării în jurul plăcii de lungime $2\,c$, situată în lungul axei Oy și cu centrul în origină. Vom avea respectiv :

$$F(z) = -\frac{a}{4}\left(z + \sqrt{z^2 + c^2}\right)^3 + \left(\frac{3ac^2}{4} - V_0\right)\left(z + \sqrt{z^2 + c^2}\right) \tag{44}$$

și

$$u - \mathrm{i}v = V_0 - 3ay^2 - \frac{3a}{4}\,\frac{\left(z + \sqrt{z^2 + c^2}\right)^3}{\sqrt{z^2 + c^2}} +$$

$$+ \left(\frac{3ac^2}{4} - V_0\right)\frac{\left(z + \sqrt{z^2 + c^2}\right)}{\sqrt{z^2 + c^2}}. \tag{45}$$

Menționăm că H. T. Nagamatsu [9] a studiat cazul plăcii plane care face un unghi α cu axa Ox și a obținut soluția în coordonate polare, dar o soluție aproximativă în sensul că pentru funcția de curent obține ecuația :

$$\Delta\psi = \frac{2k}{c}\left[1 - k\left(\frac{y}{c}\right)^2 + \dots\right]\psi$$

unde k și c sînt constante, presupuse mici. Astfel funcția de curent satisface ecuația lui Laplace în primă aproximație, pe cînd la noi funcția de curent este o funcție armonică.

4. CILINDRUL CIRCULAR

Să considerăm aceeași mișcare dată de (24) însă în jurul cilindrului circular de rază R și cu centrul în origină. În acest caz problema se rezolvă direct, fără a mai utiliza transformări conforme, ci doar aplicînd susamintita metodă dată de C. Iacob [7].

Avînd în vedere că putem scrie :

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

unde $z = x + \mathrm{i}y$ și $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$, membrul drept al condiției la limită (27) va fi un polinom în z și $\bar{z}$ pe care îl vom nota :

$$H(z, \bar{z}) = k - V_0\frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}} - \frac{a(z - \bar{z})^3}{8\mathrm{i}}.$$

Notînd :

$$H\left(z, \frac{R^2}{z}\right) = M(z)$$

vom putea scrie condiţia la limită (27) sub forma :

$$\operatorname{Re}\{-\mathrm{i}F(z)\}_{|z|=R}=\{M(z)\}_{|z|=R}.$$

Notînd cu $M_1(z)$ partea principală a funcţiei $M(z)$ referitoare la polul interior $z=0$, vom putea scrie conform cu [7] :

$$-\mathrm{i}F(z)=2M_1(z)+\mathrm{i}\tau$$

de unde avem, după o serie de calcule elementare, expresia finală a potenţialului perturbator sub forma :

$$F(z)=R^2\left(V_0-\frac{3aR^2}{4}\right)\frac{1}{z}+\frac{aR^6}{4}\frac{1}{z^3}$$

iar viteza se scrie :

$$u-\mathrm{i}v=V_0-3ay^2-R^2\left(V_0-\frac{3aR^2}{4}\right)\frac{1}{z^2}-\frac{3aR^6}{4}\frac{1}{z^4}. \tag{46}$$

Formula (46) reprezintă o soluţie exactă a problemei, problemă pentru care H. T. Nagamatsu [9] a dat tot o soluţie aproximativă.

Primită la redacţie la 20 ianuarie 1965

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. C. A. ЧАПЛЫГИН, *К теории метелей.* Moscova-Leningrad, II, 567–575 (1948).
2. I. I. Cristea, St. cerc. mat., **XIV**, *2*, 253–306 (1963).
3. H. I. Ene şi M. I. Oprică, St. cerc. mat., **XV**, *4*, 471–476 (1964).
4. C. Iacob, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţ. mat. şi fiz., **VI**, *4*, 801–809 (1954).
5. C. Iacob, St. cerc. mat., **V**, *3–4*, 333–349 (1954).
6. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides Bucarest-Paris,* (1959).
7. C. Iacob, Com. Acad. R.P.R., **XII**, *4*, 381–385 (1962).
8. Y. H. Kuo, Quart. of Appl. Math., **I**, *3*, 273–275 (1943).
9. H. T. Nagamatsu, Jour. of Math. and Phys., **30**, 131–139 (1951).
10. H. Sanden, Zeitschrift für Math. und Phys., **61**, 225 (1912).
11. H. S. Tsien, Quart. of Appl. Math., **I**, *2*, 130–148 (1943).
12. V. Vâlcovici, C.R. Acad. Sci. Paris, **158**, 169–171 (1914).
13. V. Vâlcovici, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţ. mat. şi fiz., **IV**, *4*, 653–659 (1952).

PROBLEME LA LIMITĂ BILOCALE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE LININARE

DE

C. TUDOR

În lucrare se consideră, în sensul teoriei distribuţiilor, ecuaţii de forma $P(D)u(t) = 0$, unde $P(D)$ este un polinom diferenţial cu coeficienţi funcţii continue, pentru care se găseşte o familie de distribuţii ce joacă rolul de soluţie elementară. Apoi, folosind o extindere a noţiunii de convoluţie dată în lucrările [1] şi [2], se consideră probleme la limită pentru astfel de ecuaţii.

Fie ecuaţia diferenţială

$$P(D)u(t) = 0 \tag{0.1}$$

(unde $P(D) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{a}_k(t) D^{n-k}$, cu $\mathfrak{a}_k(t)$ funcţii continue, iar $\mathfrak{a}_0(t) \neq 0$, considerată în sensul teoriei distribuţiilor ([3], [5]).

Aceasta înseamnă că se caută o distribuţie $u \in \mathcal{D}'$ care să verifice relaţia :

$$< \varphi, P(D)u > = 0$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$. În cazul ecuaţiilor de forma (0.1) cu coeficienţi constanţi, se defineşte soluţia elementară ca fiind soluţia ecuaţiei :

$$P(D)E(t) = \delta(t) \tag{0.2}$$

($\delta(t)$ fiind măsura lui Dirac). Tot în cadrul teoriei distribuţiilor se cunoaşte noţiunea de convoluţie a două distribuţii. Rolul pe care îl au aceste două noţiuni în studiul ecuaţiilor diferenţiale cu coeficienţi constanţi este cunoscut.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 793–801, BUCUREŞTI, 1965

În lucrările [1] şi [2] se introduce o operaţie de compunere între o familie de distribuţii şi o distribuţie. Rolul soluţiei elementare pentru ecuaţia (0.1) va fi jucat de o familie de distribuţii, operaţia introdusă fiind la fel de utilă în rezolvarea ecuaţiilor de forma (0.1) avînd şi parte dreaptă.

În § 1 vom găsi acea familie de distribuţii ce joacă rolul de soluţie elementară pentru (0.1), pornind de la un sistem fundamental de soluţii ale acestei ecuaţii şi folosind metoda variaţiei constantelor. În acest mod se justifică şi unele calcule făcute în [6].

Cunoscînd această familie de distribuţii, vom studia în § 2 probleme la limită bilocale pentru ecuaţii (0,1) cu coeficienţii $\mathfrak{a}_k(t)$ funcţii aparţinînd clasei C^n, [$\mathfrak{a}(t) \in C^n$, dacă funcţia $\mathfrak{a}^{(n)}(t)$ este continuă] folosindu-ne de faptul că, în cadrul teoriei distribuţiilor, condiţiile la limită pot fi considerate ca salturi şi rezolvarea problemelor la limită poate fi redusă la rezolvarea unor ecuaţii avînd parte dreaptă.

Vom aminti (a se vedea [2]) unele definiţii şi propoziţii care se vor dovedi utile în cele ce urmează.

DEFINIŢIA 1. O familie $w = \{w_s\}_{s \in R}$ — de distribuţii se va numi o familie *normală* dacă pentru orice $s \in R$, distribuţia w_s are suportul pe semidreapta $[s, +\infty)$.

Se poate verifica cu uşurinţă că dacă $\varphi \in \mathcal{D}$, suportul funcţiei $\psi(s) = \,< \varphi(t), w_s(t) >$ este mărginit la dreapta.

Fie $w = \{w_s\}_{s \in R}$, o familie normală cu proprietăţile :

i) pentru orice $\psi \in \mathcal{D}$, funcţia $\psi(s) = \,< \varphi, w_s >$ are derivate continue pînă la ordinul p;

ii) dacă $\varphi_m \in \mathcal{D}$ şi $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, atunci funcţiile $\psi_m(s) = \,< \varphi_m\, w_s >$, precum şi derivatele lui $\psi_m(s)$ pînă la ordinul p, tind către zero uniform pe orice segment.

DEFINIŢIA 2. Fie w o familie normală de distribuţii îndeplinind condiţiile i) şi ii) şi x o distribuţie de ordinul p, obţinută prin derivarea de ordinul p a unei măsuri. Se introduce operaţia de compunere :

$$y = w \circ x$$

prin condiţia :

$$< \varphi, w \circ x > \; = \; << \varphi(t), w_s(t) >, x(s) > \tag{0.3}$$

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* $w = \{w_s\}_{s \in R}$ *şi* x *sînt aceleaşi ca în definiţia* 2 *cu* $p = n - 1$, *atunci pentru orice operator diferenţial liniar*

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{a}_k(t)\, D^{n-k}$$

(*unde* $a_k(t) \in C^n$), *familia*

$$[P(D)](w) = \{P(D)\, w_s\}_{s \in R}$$

îndeplineşte de asemenea condiţiile i) şi ii) *şi, în plus,*

$$P(D)(w \circ x) = [P(D)](w) \circ x. \tag{0.4}$$

Demonstraţia este analogă celei din [2].

Fie f o funcţie avînd derivata de ordinul n continuă pe toată dreapta reală în afară de punctele $t_1, t_2, \ldots, t_m$, unde are discontinuităţi de prima speţă. Notăm cu $f^{(k)}$, derivata distribuţiei f şi cu $[f^{(k)}]$, distribuţia egală cu derivata de ordinul k, în sensul obişnuit al funcţiei f, în intervalele $(-\infty, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_m, +\infty)$ (şi nedefinităîn punctele $t_p, p = 1, 2, \ldots, m$). Dacă $f_p^{(k)}$ sînt salturile derivatei $f^{(k)}$ în t_p ($k = 0, 1, \ldots, n - p$; $p = 1, 2, \ldots, m$), cu ajutorul formulei de integrare prin părţi (a se vedea şi [5]) găsim :

$$f^{(k)} = [f^{(k)}] + \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} f_p^{(k-i)}\, \delta^{(i-1)}(t - t_p). \tag{0,5}$$

§ 1. Fie ecuaţia

$$P(D)\, w_s(t) = \delta(t - s). \tag{1.1}$$

şi $\{u_k(t)\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (0.1).

Considerăm

$$w_s(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t, s)\, u_k(t) \tag{1.2}$$

şi vom determina $c_k'(t, s)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ din sistemul de ecuaţii

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t, s)\, u_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } 0 \leqslant i \leqslant n - 2, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{a}_0(t)}\, \delta(t - s), & \text{pentru } i = n - 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Rezolvînd acest sistem după regula lui Cramer, găsim pentru $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$c_k'(t, s) = (-1)^{n+k} \frac{W(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n)}{\mathfrak{a}_0(t)\, W(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\, \delta(t - s), \tag{1.4}$$

unde $W(f_1 f_2, \ldots, f_n)$ înseamnă, ca de obicei, wronskianul sistemului de funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Notînd

$$D_k(t) = (-1)^{n+k} \frac{W(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n)}{\mathfrak{a}_0(t)\, W(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \tag{1.5}$$

relaţia (1.4) devine

$$c_k'(t, s) = D_k(t)\, \delta(t - s) = D_k(s)\, \delta(t - s). \tag{1.6}$$

Deoarece $\delta(t - s) = Y'(t - s)$, $Y(t - s)$ fiind funcţia lui Heaviside, din (1.6) rezultă :

$$c_k(t, s) = D_k(s)\, Y(t - s) + c_k(s), \tag{1.7}$$

$c_k(s)$ depinzînd numai de parametrul s. Prin urmare vom avea :

$$w_s(t) = \left[\sum_{k=1}^{n} D_k(s)\, u_k(t)\right] Y(t - s) + \sum_{k=1}^{n} c_k(s)\, u_k(t). \tag{1.8}$$

Cum ultima sumă din (1.8) este o soluţie a ecuaţiei omogene (0.1), vom reţine de aici numai familia:

$$w_s(t) = \left[\sum_{k=1}^{n} D_k(s)\, u_k(t)\right] Y(t-s) \tag{1.9}$$

sau:

$$w_s(t) = G(t, s)\, Y(t-s), \tag{1.10}$$

unde $G(t, s)$ este chiar funcţia Green a ecuaţiei (0.1), după cum se poate vedea urmărind formulele (1.3)—(1.5).

Apariţia acestei funcţii face mai naturală introducerea ei pe această cale.

Din (1.10) se deduce că $w_s(t) \equiv 0$, pentru $t < s$, adică familia $w = \{w_s\}_{s\in R}$ este normală. De asemenea se deduce cu uşurinţă că familia w satisface condiţiile i) şi ii).

Prin urmare, familia normală de distribuţii:

$$w = \{G(t, s)\, Y(t-s)\}_{s\in R} \tag{1.11}$$

joacă rolul de soluţie elementară pentru ecuaţia (0.1).

Dacă notăm $\Delta = \{\delta(t-s)\}$, după cum s-a arătat în [2] Δ este o familie compozabilă de distribuţii şi în plus:

$$\Delta \circ x = x$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{D}'$.

Rezultă că, dacă x este o distribuţie de ordinul p $(p \leqslant n-1)$ obţinută prin derivarea de ordinul p a unei măsuri, soluţia ecuaţiei:

$$P(D)\, u = x, \tag{1.12}$$

unde $P(D)$ este operatorul diferenţial cu coeficienţii din clasa $C^{n-1}_{[(-\infty,+\infty)]}$ [1], este:

$$u = w \circ x. \tag{1.13}$$

Aplicaţie. Ne propunem să găsim soluţia ecuaţiei

$$P(D)\, u(t) = \sum_{k=0}^{m} \mathfrak{b}_k\, \delta^{(k)}(t-a), \quad (m \leqslant n-1) \tag{1.14}$$

cu $\mathfrak{b}_k$ constante.

Întrucît, punînd $w = \{w_s(t)\}_{s\in R}$, avem:

$$< \varphi, w \circ \delta^{(k)} > \; = \; \ll \varphi, w_s > , \delta^{(k)} >,$$

rezultă

$$w \circ \delta^{(k)}(t-a) = (-1)^k \left.\frac{\mathrm{d}^k w_s}{\mathrm{d}s^k}\right|_{s=a}$$

aşa încît:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \mathfrak{b}_k \left.\frac{\mathrm{d}^k w_s(t)}{\mathrm{d}s^k}\right|_{s=a}. \tag{1.15}$$

---

[1] De aici înainte va fi vorba numai de astfel de operatori.

§ 2. Să considerăm acum următoarea problemă la limită bilocală

$$\left.\begin{aligned} &P(D)\,u(t) = 0, && 0 \leqslant k \leqslant p-1,\\ &u^{(k)}(a) = \alpha_k, && 0 \leqslant j \leqslant n-p-1,\\ &u^{(j)}(b) = \beta_j, && a < b. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Vom transforma această problemă într-o ecuaţie cu parte dreaptă, căutînd soluţii, distribuţii de tip funcţie, avînd în punctele a şi b discontinuităţi de prima speţă cu salturile :

$$\left.\begin{aligned} &u^{(k)}(a+0) - u^{(k)}(a-0) = \alpha_k\\ &u^{(k)}(b+0) - u^{(k)}(b-0) = \beta_k \end{aligned}\quad (0 \leqslant k \leqslant n-1)\right\} \tag{2.2}$$

unde $\alpha_p, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-p}, \ldots, \beta_{n-1}$ sînt parametri pe care-i vom alege în aşa fel încît să obţinem soluţia problemei (2.1).

Folosind (0.4) avem, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$u^{(k)} = [u^{(k)}] + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{k-i}\, \delta^{(i-1)}(t-a) + \beta_{k-i}\, \delta^{(i-1)}(t-b)\right). \tag{2.3}$$

Înlocuind (2.3) în ecuaţia (2.1) şi ţinînd seamă de faptul că :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathfrak{a}_k(t)\, [u^{(n-k)}] = 0,$$

obţinem ecuaţia cu partea dreaptă :

$$\begin{aligned} P(D)\,u(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{i-1}^{j} \Big[&\alpha_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}(a)\, \delta^{(i-j-1)}(t-a) +\\ &+ \beta_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}(b)\, \delta^{(i-j-1)}(t-b)\Big] \end{aligned} \tag{2.4}$$

Soluţia ecuaţiei (2.4) va fi :

$$\begin{aligned} u(t) = w \circ \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{i-1}^{j} \Big[&a_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}(a)\, \delta^{(i-j-1)}(t-a) +\\ &+ \beta_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}(b)\, \delta^{(i-j-1)}(t-b)\Big], \end{aligned} \tag{2.5}$$

unde w este dată de (1.11), compunerea avînd, evident, sens, datorită formei speciale a distribuţiei din membrul drept al ecuaţiei (2.5).

Ţinînd seama şi de aplicaţia din § 1, obţinem :

$$\begin{aligned} u(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{i-1}^{j} \Bigg[&(-1)^{(i-j-1)}\, \alpha_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}(a)\, \frac{\mathrm{d}^{i-j-1}}{\mathrm{d}s^{i-j-1}} w_s(t)\Big|_{s=a} +\\ &+ (-1)^{i-j-1}\, \beta_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}(b)\, \frac{\mathrm{d}^{i-j-1}}{\mathrm{d}s^{i-j-1}} w_s(t)\Big|_{s=b}\Bigg] \end{aligned}$$

adică :

$$u\,(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-1} C_{i-1}^{j} \left[\alpha_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}\,(a) \frac{\mathrm{d}^{i-j-1}}{\mathrm{d}s^{i-j-1}}\, w_s\,(t) \Big|_{s=a} + \right.$$

$$\left. + \beta_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}\,(b) \frac{\mathrm{d}^{i-j-1}}{\mathrm{d}s^{i-j-1}}\, w_s\,(t) \Big|_{s=b} \right] \tag{2.6}$$

sau încă, întrucît $w_s\,(t) \equiv 0$ pentru $t < s$:

$$u\,(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < a \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1} C_{i-1}^{j}\, \alpha_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}\,(a) \frac{\mathrm{d}^{i-j-1}}{\mathrm{d}s^{i-j-1}}\, w_s\,(t) \Big|_{s=a}, \text{ pentru } a<t<b \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1} C_{i-1}^{j} \left[\alpha_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}\,(a) \frac{\mathrm{d}^{i-j-1}}{\mathrm{d}s^{i-j-1}}\, w_s\,(t) \Big|_{s=a} + \right. \\ \qquad \left. + \beta_{n-k-i}\, \mathfrak{a}_k^{(j)}\,(b) \frac{\mathrm{d}^{i-j-1}}{\mathrm{d}s^{i-j-1}}\, w_s\,(t) \Big|_{s=b} \right], \text{ pentru } t > b. \end{cases} \tag{2.7}$$

Din (2.7) se vede că :

$$u^{(k)}\,(a+0) - u^{(k)}\,(a-0) = \alpha_k,\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1).$$

Vom pune acum condiția ca să avem și :

$$u^{(j)}\,(b+0) - u^{(j)}\,(b-0) = \beta_j,\ (j = 0, 1, \ldots, n-p-1). \tag{2.8}$$

Se observă însă că în partea stîngă a relațiilor (2.8) apar numai parametrii $\alpha_p,\ \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{n-1}$. Prin urmare, aici avem un sistem de p ecuații cu p necunoscute, deci studiul compatibilității problemei la limită (2.1) este echivalent cu studiul compatibilității unui sistem de ecuații algebrice.

§ 3. Fie acum problema la limită bilocală :

$$\left[\begin{array}{l} P\,(D)\,u\,(t) = 0 \\ V_p\,(u) = 0 \end{array} \right. \qquad (p = 1,\ 2, \ldots,\ m \leqslant 2n), \tag{3.1}$$

cu formele

$$V_p\,(u) = \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_p^k\, u^{(k)}\,(a) + \beta_p^{(k)}\, u^{(k)}\,(b)], \qquad (p = 1,\ 2, \ldots,\ m) \tag{3.2}$$

liniar independente.

Cazul $m = 2n$ se reduce la cazul precedent.

În cazul $m < 2n$, matricea :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^0 \ldots \alpha_1^{n-1} & \beta_1^0 \ldots \beta_1^{n-1} \\ \alpha_2^0 \ldots \alpha_2^{n-1} & \beta_2^0 \ldots \beta_2^{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_m^0 \ldots \alpha_m^{n-1} & \beta_m^{n-1} \ldots \beta_m^{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

avînd rangul m, există un minor de ordinul m, (din coloanele $i_1, i_2, \ldots, i_m$), diferit de zero, așa că rezolvînd sistemul de ecuații :

$$V_p(u) = 0, \quad (p = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.4}$$

în raport cu necunoscutele $u^{(i_1)}, u^{(i_2)}, \ldots, u^{(i_m)}$, unde

$$u^{(i_k)} = \begin{cases} u^{(i_k)}(a), \text{ dacă } i_k \leqslant n-1 \\ u^{(i_k-n+1)}(b), \text{ dacă } i_k > n-1. \end{cases} \tag{3.5}$$

găsim aceste necunoscute ca niște combinații liniare de cele rămase, notate cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ $(r = 2n - m)$. Pentru ușurința calculelor vom pune :

$$\left.\begin{aligned} u^{(j)}(a) &= \sum_{l=1}^{r} Q_{jl}\lambda_l \\ & \qquad\qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \\ u^{(j)}(b) &= \sum_{l=1}^{r} R_{jl}\lambda_l \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

deci dacă $j \leqslant n-1$ și $j \neq i_s$ $(0 \leqslant i_s \leqslant n-1)$, există l_0 $(1 \leqslant l_0 \leqslant r)$, așa încît :

$$u^{(j)}(a) = \lambda_{l_0}, \ Q_{jl} = \delta_{ll_0}.$$

Analog pentru $u^{(j)}(b)$.

În acest mod problema a fost redusă la cazul precedent.

§ 4. *Observație*. Calculele se simplifică mult în cazul ecuației (0.1) cu coeficienți constanți. Astfel, în locul ecuației (2.4), se obține ecuația

$$P(D)\,u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} [A_k\,\delta^{(k)}(t-a) + B_k\,\delta^{(k)}(t-b)], \tag{4.1}$$

unde

$$\left|\begin{matrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n-1} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_{n-1} \\ & \mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_1 & \ldots & \mathfrak{a}_{n-2} \\ & & \mathfrak{a}_0 & \ldots & \mathfrak{a}_{n-3} \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \mathfrak{a}_0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_0 \end{matrix}\right|, \tag{4.2}$$

elementele nescrise în această matrice fiind toate nule. Înlocuind în (4.2) vectorul coloană α cu vectorul coloană β obținem vectorul B. În felul acesta, soluția problemei (2.1), depinzînd de parametrii $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{n-1}$ este :

$$u(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < a, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A_k\,G^{(k)}(t, s)\Big|_{s=a}, \text{ pentru } a < t < b, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} [A_k\,G^{(k)}(t, s)|_{s=a} + B_k\,G^{(k)}(t, s)|_{s=b}], \text{ pentru } t > b. \end{cases} \tag{4.3}$$

Se observă imediat că soluţia dată de (4.3) are proprietatea că :

$$u^{(k)}(a+0)-u^{(k)}(a-0)=\alpha_k,\ (k=0,1,\ldots,n-1). \tag{4.4}$$

Dacă vom pune acum condiţia că şi

$$u^{(k)}(b-0)=\beta_k,\ (k=0,1,2,\ldots,n-p-1), \tag{4.5}$$

obţinem soluţia problemei (2.1).

Sistemul (4.5) se scrie încă :

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_k\, G^{(k+i)}(t,s)\Big|_{\substack{s=a\\t=b}}=\beta_i-\sum_{k=p}^{n-1} A_k\, G^{(k+i)}(t,s)\Big|_{\substack{s=a\\t=b}}(0\leqslant i\leqslant n-p-1) \tag{4.6}$$

În partea dreaptă a sistemului apar $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-p-1}$ iar prin intermediul coeficienţilor $A_p, A_{p+1},\ldots, A_{n-1}$ după cum rezultă din (4.2), numai $\alpha_0\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$, adică datele din (2.1).

Folosind încă o dată (4.2) avem :

$$A_k=\sum_{j=0}^{n-k-1}\mathfrak{a}_j\,\alpha_{n-k-j-1},\ (k=0,1,\ldots,p-1), \tag{4.7}$$

aşa încît (4.6) se mai scrie :

$$\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{n-k-1}\mathfrak{a}_j\, G^{(k+i)}(t,s)\,\alpha_{n-k-j-1}\Big|_{\substack{s=a\\t=b}}=\beta_i-\sum_{k=p}^{n-1} A_k\, G^{(k+i)}(t,s)\Big|_{\substack{s=a\\t=b}} \tag{4.8}$$

cu $i=0,1,\ \ldots, n-p-1$, sau :

$$\sum_{k=0}^{n-p-1}\left(\sum_{j=0}^{k}\mathfrak{a}_{k-j}\, G^{(k+i)}(t,s)\right)\Big|_{\substack{s=a\\t=b}}\alpha_{n-k-1}=\beta_i',\ (i=0,1,\ldots,n-p-1), \tag{4.9}$$

unde :

$$\beta_i'=\beta_i-\sum_{k=p}^{n-1}A_k\, G^{(k+i)}(t,s)\Big|_{\substack{s=a\\t=b}}. \tag{4.10}$$

Determinantul sistemului (4.9) este :

$$\Delta=\left|\begin{array}{c}
\mathfrak{a}_0 G(t,s)\ \ a_1 G(t,s)+\mathfrak{a}_0 G'(t,s)\ldots\mathfrak{a}_{n-p-1}G(t,s)+\mathfrak{a}_{n-p-2}G'(t,s)+\\
+\ldots+\mathfrak{a}_0 G^{(n-p-1)}(t,s)\\
\mathfrak{a}_0 G'(t,s)\ \ \mathfrak{a}_1 G'(t,s)+\mathfrak{a}_0 G''(t,s)\ldots\mathfrak{a}_{n-p-1}G'(t,s)+\mathfrak{a}_{n-p-2}G''(t,s)+\\
+\ldots+\mathfrak{a}_0 G^{(n-p)}(t,s)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{a}_0 G^{(n-p-1)}(t,s)\ \ \mathfrak{a}_1 G^{(n-p-1)}(t,s)+\\
+\mathfrak{a}_0 G^{(n-p)}(t,s)\ldots\mathfrak{a}_{n-p-1}G^{(n-p-1)}(t,s)+\mathfrak{a}_{n-p-2}G^{(n-p)}(t,s)+\\
+\ldots+\mathfrak{a}_0 G^{(2n-2p-2)}(t,s)
\end{array}\right|_{\substack{s=a\\t=b}}$$

şi se scrie ca o sumă de determinaţi dintre care numai unul nu este identic nul şi anume :

$$
\Delta = (a_0)^{n-p} \left| \begin{matrix} G(t, s) & G'(t, s) & \ldots & G^{(n-p-1)}(t, s) \\ G'(t, s) & G''(t, s) & \ldots & G^{(n-p)}(t, s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G^{(n-p-1)}(t, s) & G^{(n-p)}(t, s) & \ldots & G^{(2n-2p-2)}(t, s) \end{matrix} \right|_{\substack{s=a \\ t=b}} \tag{4.11}
$$

De asemenea se observă că rangul matricei sistemului (4.9) este acelaşi cu rangul matricei de determinat (4.11).

Rezultă deci că dacă această matrice are rangul $r \leqslant n-p$, problema la limită bilocală (2.2) are $n-p-r+1$ soluţii liniar independente.

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1965

Facultatea de matematică
şi mecanică a Universităţii
din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Romulus Cristescu, *Opérateurs engendrés par des familles de distributions.* C.R. de L'Acad. des Sc. Paris, **258**, *12* (1964).
2. Romulus Cristescu, *Familles composables de distributions et systèmes physiques Linéaires.* Rev. Roum. de math. pures et appliquées, **IX**, *8* (1964).
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, том, 1, 2, Москва, 1958.
4. Gh. Marinescu, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
5. Laurent Schwartz, *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1950.
6. А. В. Солодов, *Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами.* Москва, 1962.

ASUPRA CATEGORIILOR DE DIAGRAME[1]

DE

ANDREI DUMA

În această Notă se studiază unele proprietăţi de permanenţă privind categoriile de diagrame şi functorii extinşi. Rezultatul principal al lucrării îl constituie următoarea teoremă : *O categorie de diagrame peste o categorie Grothendieck este încă o categorie Grothendieck.*

§ 1. CATEGORII DE DIAGRAME

DEFINIŢIE. Se înţelege prin schemă un triplet $\Sigma = (I, \ \Phi, \ d)$ în care I şi Φ sînt mulţimi iar d o aplicaţie a lui Φ în $I \times I$.

Elementele lui I se numesc vîrfuri, cele ale lui Φ săgeţi. Dacă $\varphi \in \Phi$ este o săgeată, se numeşte orientarea sa : $d(\varphi) = (i, j)$, unde i este sursa lui φ, iar j este adresa sa. Săgeată compusă de origină i şi de extremitate j (i, j fiind elemente arbitrare ale lui I) este o mulţime finită de săgeţi $\varphi_1 \ \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ astfel încît sursa lui φ_1 este : $S\varphi_1 = i$, adresa lui φ_n : $B\varphi_n = j$, iar pentru $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $B\ \varphi_k = S\ \varphi_{k+1}$.

Orice $\mathcal{U}$ categorie, mică unde $\mathcal{U}$ este un univers Grothendieck, este o schemă.

Fie Σ o schemă şi $\mathcal{C}$ categorie arbitrară ; se numeşte diagramă peste $\mathcal{C}$ de schemă Σ, următorul concept : oricărui vîrf îi este asociat un obiect $D(i)$ al lui $\mathcal{C}$ şi oricărei săgeţi φ a lui Σ, de orientare (i, j), îi este asociată un morfism $D(\varphi) : D(i) \to D(j)$. Dacă D, D' sînt diagrame de schemă Σ peste aceeaşi categorie $\mathcal{C}$, atunci un morfism al lui D în D' este o mulţime

---

[1] Versiunea în l. franceză a apărut în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, 5 (1965).

$\{\alpha_i : D(i) \to D'(i)\}_{i\in I}$ de morfisme din $\mathcal{C}$, astfel ca pentru orice săgeată φ de orientare (i, j), diagrama următoare să fie comutativă :

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "D(\varphi)"'] & D'(i) \arrow[d, "D'(\varphi)"] \\
D(j) \arrow[r, "\alpha_j"] & D'(j)
\end{tikzcd}$$

Este clar că familia tuturor diagramelor de schemă Σ peste $\mathcal{C}$ este încă o mulţime-element a lui $\mathcal{U}$, fiind un univers şi $\mathcal{C}$ o $\mathcal{U}$-categorie mică.

Familia tuturor diagramelor de schemă Σ peste $\mathcal{C}$ şi a morfismelor de diagrame formează o categorie pe care o vom nota în cele ce urmează cu $\mathcal{C}^\Sigma$.

Dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un functor şi Σ o schemă, atunci există un functor $F^\Sigma : \mathcal{C}^\Sigma - \mathcal{D}^\Sigma$, definit într-o manieră evidentă.

În [1] se arată că numeroase proprietăţi ale categoriei $\mathcal{C}$ se transmit categoriei $\mathcal{C}^\Sigma$ şi analog cele ale lui F se transferă asupra lui F^Σ ; aceasta este de fapt esenţa teoremei de permanenţă a lui Grothendieck. Vom încerca în această notă să aducem o completare acestei teoreme (§ § 2—3).

§ 2. CITEVA OBSERVAŢII ASUPRA TEOREMEI DE PERMANENŢĂ

Vom considera o schemă fixată Σ şi $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorii abeliene. În aceste condiţii, $\mathcal{C}^\Sigma$ şi $\mathcal{D}^\Sigma$ sînt abeliene. Dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un functor aditiv, la fel este şi F^Σ. Propoziţia următoare este utilă pentru consideraţiile noastre.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă F este un functor exact, la fel este şi F^Σ.*

Pentru demonstraţie este suficient să folosim definiţia functorului F^Σ şi noţiunea de şir exact de diagrame.

PROPOZIŢIA 2. *Dacă F este un functor deplin fidel, la fel este şi functorul F^Σ.*

Demonstraţie. F fiind deplin fidel, prin definiţie, pentru orice pereche de obiecte A, B a lui $\mathcal{C}$, F induce o aplicaţie biunivocă :

$$F(A, B) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB).$$

Dacă D, D' sînt diagrame peste $\mathcal{C}$ şi $\alpha : D \to D'$ este un morfism al lui $\mathcal{C}^\Sigma$ astfel încît $F^\Sigma(\alpha) = 0$, se deduce că $F(\alpha_i) = 0$ pentru orice $i \in I$, deci $\alpha = 0$. Dacă $\beta : F^\Sigma D \to F^\Sigma D'$ este un morfism al lui $\mathcal{D}^\Sigma$, atunci $\beta = (\beta_i)_{i\in I}$, unde $\beta_i : FD(i) \to FD'(i)$; prin urmare există α_i, $\alpha_i : D(i) \to D'(i)$ astfel ca $\beta_i = F(\alpha_i)$ căci F este deplin fidel. Este clar că α_i sînt unici. Deci : $\beta = F^\Sigma(\alpha)$, unde $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$.

PROPOZIŢIA 3. *Dacă $H : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ este un functor adjunct la stînga pentru $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, atunci $H^\Sigma : \mathcal{D}^\Sigma \to \mathcal{C}^\Sigma$ este adjunct la stînga lui F^Σ.*

Demonstrație. Este suficient să considerăm morfismele functoriale :

$$\Psi : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow H \circ F,$$

$$\Phi : F \circ H \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}.$$

Cum : $\Phi_F \circ F\,\Psi = 1_F$, deducem că $\Phi^{\Sigma}_{F^{\Sigma}} \circ F^{\Sigma}\,\Psi^{\Sigma} = 1_{F^{\Sigma}}$.

§ 3. CATEGORII DE DIAGRAME PESTE O CATEGORIE DE MODULE

Fie $\mathcal{C} = {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ categoria modulelor unitare stîngi peste un inel Λ cu unitate. Pentru a nu avea dificultăți din punct de vedere logic, ne putem limita la module, ale căror mulțimi subiacente fac parte dintr-un univers suficient de mare.

Notăm prin $\Sigma = (I, \Phi, d)$ o schemă și prin Λ^{Σ} o algebră ; pentru construcția algebrei Λ^{Σ}, vom considera mai întîi algebra liberă $\Lambda\,\{\bar{\Phi}\}$, unde $\bar{\Phi} = \Phi \bigcup I$, iar aceasta o factorizăm la un ideal $\mathfrak{A}$ generat de elemente de forma :

i) $\lambda\, \varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_n - \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \lambda$; $\varphi_i \in \Phi$ $\lambda \in \Lambda$, $(i = 1, \ldots, n)$.

ii) Drept generatori ai lui $\mathfrak{U}$ servesc de asemenea toate compunerile de forma $\varphi_1 \varphi_2 \ldots, \varphi_n$ astfel ca $\varphi \in \Phi$ și ca această compunere să nu formeze o săgeată compusă a lui Σ (ex. i_0 ca : $B\varphi_{i_0} \neq S\, \varphi_{i_0+1}$).

iii) Notăm prin $\varphi\,(i)$ elementele lui Φ indexate cu elementele lui I ; noi impunem elementelor $\varphi\,(i)$ să fie unități în Λ^{Σ}, adică printre generatorii lui $\mathfrak{U}$ se găsesc elementele de forma :

$\varphi\,(i) \circ \varphi - \varphi$ dacă $B\,(\varphi) = i$

$\psi \circ \varphi\,(i) - \psi$ dacă $S\,(\psi) = i$,

$\varphi\,(i) \circ \varphi$, $\psi \circ \varphi\,(i)$ în caz contrar.

Notăm prin Λ^{Σ} algebra cît a lui $\Lambda\,\{\bar{\Phi}\}$ prin idealul bilateral $\mathfrak{A}$.

Remarcă. Este clar că se poate considera în Σ relații de comutativitate [1] și atunci algebra Λ^{Σ} se va construi astfel ca să fie satisfăcute aceste relații de comutare, aceasta realizîndu-se prin lărgirea convenabilă a idealului $\mathfrak{A}$.

Considerăm categoria $\mathcal{C}_1$ formată din toate Λ^{Σ}-modulele stîngi M pentru care $\Lambda^{\Sigma} M = M$. Notăm încă prin φ imaginea generatorului φ a lui $\Lambda\,\{\bar{\Phi}\}$ în Λ^{Σ} prin omomorfismul canonic. În aceste condiții, pentru $i \neq j$ avem $\varphi\,(i)\, \varphi\,(j) = 0$ și $\varphi\,(i)\, \varphi\,(i) = \varphi\,(i)$.

Fie acum M un Λ^{Σ}-modul pentru care $\Lambda^{\Sigma} M = M$. Din cele ce preced se deduce că M este suma directă : $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, unde M_i sînt Λ- module stîngi unitare. Într-adevăr, M_i este un sumand direct asociat proiectorului $\varphi\,(i)$ (M_i este în mod canonic un Λ modul, dar nu și un Λ^{Σ}-modul).

PROPOZIȚIA 4. *Categoria* ${}_{\Lambda}\mathcal{C}^{\Sigma}$ *este echivalentă cu categoria* $\mathcal{C}_1$.

Demonstrație. Asociem fiecărui modul M cu proprietatea că $\Lambda^{\Sigma} M = M$ o diagramă D_M peste ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ de schemă Σ în felul următor : punem $D(i) = M_i$, M_i fiind sumandul direct asociat proiectorului $\varphi(i)$. Dacă ψ este o săgeată de orientare (i, j), atunci punem : $D(\psi)$ ca fiind compunerea elementului ψ al lui Λ^{Σ} cu elementele lui M_i. Dacă $x \in M_i$, atunci ψx este un element unic al lui M_j ca :

$$\varphi(j)\, \psi\, x = \psi\, x.$$

$D(\psi)$ este un Λ -omomorfism, căci este un omomorfism de grupuri și în plus :

$$D(\psi)\ (\lambda\, x) = \psi(\lambda x) = \psi(\lambda\, \varphi(i)\, x) = [\varphi\ (\lambda\, \varphi((i)]\,(x) =$$

$$= [\psi(\lambda)\, \varphi(i)]\,(x) = \lambda\,[\psi(\varphi(i)\, x)] = \lambda(\psi\, x) = \lambda\,[D(\psi)\, x)].$$

Se constată ușor că asocierea $M \to D_M$ este un functor T de la $\mathcal{C}_1$ în ${}_{\Lambda}\mathcal{C}^{\Sigma}$.

Un functor de la ${}_{\Lambda}\mathcal{C}^{\Sigma}$ în $\mathcal{C}_1$ se construiește după cum urmează : unei diagrame D peste ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ (de schemă Σ) i se asociază Λ^{Σ} -modulul :

$$M_D = \bigoplus_{i \in I} D(i)$$

iar acțiunea elementelor lui Λ^{Σ} este evidentă :

$$\psi x = 0 \text{ dacă } d\psi = (i, j) \text{ și } x \notin D(i);$$

$$\psi x = D(\psi)(x) \text{ dacă } d\psi = (i, j) \text{ și } x \in D(i);$$

$$\varphi(i)\, x = 0 \text{ dacă } x \notin D(i);$$

$$\varphi(i)\, x = x \text{ dacă } x \in D(i).$$

Un calcul simplu probează că asocierea $D \to M_D$ este un functor S adjunct la dreapta lui T și deplin fidel. Acest lucru arată de fapt că între cele două categorii, functorii T și S realizează o echivalență.

PROPOZIȚIA 5. *$\mathcal{C}_1$ este o categorie abeliană, cu generator și limite inductive exacte.*

Demonstrație. $\mathcal{C}_1$ este o categorie abeliană și satisface Ab 5 căci ea este echivalentă cu ${}_{\Lambda}\mathcal{C}^{\Sigma}$, care are aceste proprietăți în virtutea teoremei de permanență.

Notăm prin Λ^{Σ}_{i} subgrupul lui Λ^{Σ} format din elementele ψ astfel ca : $\varphi(i)\, \psi = \psi$, unde ψ este o săgetă compusă a lui Λ^{Σ}. Este evidentă că Λ^{Σ}_{i} este un Λ^{Σ} -modul și că familia de obiecte $(\Lambda^{\Sigma}_{i})_{i \in I}$ a lui $\mathcal{C}_1$ este o familie de generatori pentru $\mathcal{C}_1$; morfismele lui Λ^{Σ}_{i} în Λ^{Σ} modulul M se identifică cu mulțimea aplicațiilor lui $\varphi(i)$ în M.

Fie acum $\mathcal{C}$ o categorie cu generatori și limite inductive exacte ; din [2] deducem că există un inel Λ și functoriii $\mathcal{C} \xrightarrow{S} {}_{\Lambda}\mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$, T exact și S deplin fidel și adjunct la dreapta lui T. Dacă Σ este o schemă, atunci functorii :

$$\mathcal{C}^{\Sigma} \xrightarrow{S^{\Sigma}} {}_{\Lambda}\mathcal{C}^{\Sigma} \xrightarrow{T^{\Sigma}} \mathcal{C}^{\Sigma}$$

se găsesc în aceeaşi situaţie conform propoziţiilor 2 şi 3.

Din propoziţiile 4 şi 5 rezultă următoarea :

TEOREMĂ. *O categorie de diagrame peste o categorie abeliană cu limite inductive exacte şi generatori (sau categorie Grothendieck) este o categorie Grothendieck.*

Primită la redacţie la 19 septembrie 1964

Facultatea de matematică şi
mecanică a Universităţii din
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku Math. Journal, **2**, (1957).
2. P. Gabriel, *Des cathégories abéliennes.* Bull. Soc. Math. de France, *2* (1962).
3. P. Gabriel şi N. Popescu, *Caractérisation de la catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes.* C.R. de Acad. Sci. Paris, **256**, *17* (1964).

DETERMINAREA MIŞCĂRILOR CU VÎRTEJ CONSTANT ÎN JURUL UNEI CLASE PARTICULARE DE PROFILE

DE

RODICA CHIRILĂ

Utilizînd metoda de rezolvare a problemei lui Dirichlet pentru cerc cu date funcţii raţionale de coordonate, care a fost propusă în [4], se dă expresia potenţialului complex de perturbare în cazul mişcării cu vîrtej constant în prezenţa unui profil de aripă. Acest profil este obţinut din cercul $|Z| = r$ cu ajutorul transformării (1), unde $w(Z)$ este o funcţie raţională de Z definită de (13).

1. Mişcările bidimensionale cu vîrtej constant au constituit obiectul a numeroase cercetări. Ele au fost considerate de H. von Sanden [7] şi V. Vâlcovici [8] încă în 1912–1913.

În 1921, S. A. Ciaplîghin a studiat mişcarea cu vîrtej constant în jurul unui cilindru circular, iar în 1943 H. S. Tsien [6] a studiat mişcarea în jurul unor profile Jukovski simetrice.

De asemenea s-a studiat şi mişcarea în cazul unor profile aflate în prezenţa solului, ţinîndu-se seama de influenţa lui. Astfel P. Harrington şi P. Libby au studiat mişcarea cu vîrtej constant în jurul unui cilindru circular, iar C. Iacob [3] în jurul unei plăci plane, normale solului.

Recent, studiul mişcării cu vîrtej constant a fost reluat de I. Cristea [1] şi Horia Ene [2], pentru cazul fluidului nelimitat, în prezenţa unor profile de formă particulară.

În lucrarea de faţă vom căuta să rezolvăm această problemă în cazul unei clase mai generale de profile, ţinînd seama de o metodă de rezolvare a problemei lui Dirichlet cu date raţionale pe frontieră, care a fost dată de C. Iacob [4], [5].

2. Fie în planul Oxy un profil C, al cărui exterior se poate reprezenta conform pe exteriorul unui cerc Γ, centrat în origine şi de rază r, din planul O_1XY, prin relaţia

$$z = \omega(Z), \qquad (z = x + iy), \tag{1}$$

unde $\omega(Z)$ este o funcţie raţională de $Z = X + \mathrm{i}Y$.

Vom căuta să determinăm mişcarea de vîrtej constant în jurul profilului C, considerat fix, în fluidul incompresibil, în cazul în care viteza la mari distanţe este de forma :

$$u = V_\infty(t) + 2\alpha y, \quad v = 0, \tag{2}$$

unde α este o constantă ce defineşte vîrtejul

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\alpha. \tag{3}$$

Perturbaţia vitezei datorită profilului C, va fi dată de grad Φ, funcţia $\Phi(x, y, t)$ urmînd să fie determinată. Pentru simplificare vom presupune că Φ este o funcţie uniformă. Cîmpul vitezelor este dat de :

$$u = V_\infty(t) + 2\alpha y + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{4}$$

iar din ecuaţia de continuitate vom obţine :

$$\Delta_{(x,y)}\Phi = 0.$$

Introducînd conjugata armonică $\Psi(x, y, t)$ a funcţiei $\Phi(x, y, t)$, care este în mod necesar uniformă, vom considera potenţialul complex al vitezei de perturbare

$$F(z, t) = \Phi(x, y, t) + \mathrm{i}\,\Psi(x, y, t).$$

Punînd condiţiile la limită pentru funcţia $F(z, t)$, vom obţine :

$$\text{a)} \lim_{|z|\to\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

adică :

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{5'}$$

(5') exprimă condiţia ca perturbaţia produsă de obstacol să se anuleze la infinit;

b) fluidul alunecînd pe obstacolul C, vom avea :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ pe } C, \tag{6}$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la această curbă.

Ţinînd seama de (4) şi efectuînd o integrare pe C, vom obţine :

$$\Psi|_C = (-V_\infty(t)\,y - \alpha y^2 + c_1)_C.$$

unde constanta c_1 se poate lua egală cu zero. Dacă notăm

$$(7)\qquad P(y,\ t) = -V_\infty(t)\,y - \alpha y^2,$$

atunci această condiție se mai scrie :

$$(8)\qquad \operatorname{Im}\{F(z,\ t)\}_C = P(y,\ t)_C.$$

Deci trebuie rezolvată problema lui Dirichlet (8), funcția $F(z,\ t)$ fiind olomorfă față de z în domeniul exterior lui C.

Prin relația (1) vom trece la domeniul exterior cercului Γ din planul O_1XY.

Să considerăm funcția

$$-\mathrm{i}\,F(z, t) = -\mathrm{i}\,F[\omega(Z), t] = G(Z, t);$$

$G(Z, t)$ va fi olomorfă față de Z pentru $|Z| > r$ și astfel încît pe Γ să fie verificată condiția :

$$(8')\qquad \operatorname{Re}\{G(Z,\ t)\}_\Gamma = P\left[\frac{\omega(Z) - \overline{\omega}(Z)}{2\mathrm{i}},\ t\right]_\Gamma = R(Z,\ \overline{Z},\ t)_\Gamma$$

unde $R(Z,\ \overline{Z},\ t)$ este o funcție rațională de Z și $\overline{Z}$.

Dar pe Γ avem :

$$R(Z,\ \overline{Z},\ t) = R\left(Z, \frac{r^2}{Z},\ t\right) = R(Z,\ t),$$

$R(Z,\ t)$ fiind o funcție rațională de Z. Condiția (8′) devine :

$$(8'')\qquad \operatorname{Re}\{G(Z,\ t)\}_\Gamma = R(Z,\ t)_\Gamma,$$

funcția rațională $R(Z, t)$ fiind definită de relația :

$$(9)\qquad R(Z, t) = \frac{\alpha}{4}\left[\omega(Z) - \overline{\omega}\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right)\right]^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}V_\infty(t)\left[\omega(Z) - \overline{\omega}\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right)\right].$$

Putem, deci, aplica metoda de rezolvare a problemei lui Dirichlet cu date raționale pe frontieră [4], [5].

Fie $R_0(Z, t)$ partea principală a funcției $R(Z, t)$ relativă la domeniul *interior* circumferinței Γ.

Soluția problemei noastre va fi dată de :

$$(10)\qquad G(Z,\ t) = 2\,R_0(Z\ ,\ t) + k(t),$$

unde $k(t)$ este o funcție reală.

Notînd cu $\omega_0^0(Z)$, $\omega_1^0(Z)$ părțile principale ale funcțiilor $\omega(Z)$, respectiv $\overline{\omega}\left(\frac{r^2}{Z}\right)$ în interiorul lui Γ, și cu $\omega_0(Z)$, $\omega_1(Z)$, $\omega_2(Z)$ părțile principale ale funcţiilor $\omega^2(Z)$, respectiv $\overline{\omega}^2\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right)$, $\omega(Z)\cdot\overline{\omega}\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right)$, referitoare la singularităţile aflate în interiorul lui Γ, expresia (10) se va scrie:

$$G(Z,\ t) = \frac{\alpha}{2}\left[\omega_0(Z) - 2\omega_2(Z) + \omega_1(Z)\right] + \tag{11}$$
$$+ \mathrm{i}V_\infty(t)\left[\omega_0^0(Z) - \omega_1^0(Z)\right] + k(t).$$

Să presupunem, pentru a fixa ideile, că transformarea conformă (1) face să se corespundă punctele de la infinit $z = \infty$ şi $Z = \infty$. Vom avea deci dezvoltarea

$$z = \lambda Z + a_0 + \frac{A(Z)}{B(Z)}, \tag{12}$$

unde gradul lui $A(Z)$ este mai mic decît gradul lui $B(Z)$.

Descompunînd în fracţii simple, vom obţine pentru $\omega(Z)$ expresia:

$$\omega(Z) = \lambda Z + a_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{a_{ij}}{(Z-b_i)^j} \tag{13}$$

unde $|b_i| < r$.

Se vede deci că

$$\omega_0^0(Z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{a_{ij}}{(Z-b_i)^j} \tag{14}$$

$$\omega_1^0(Z) = \bar{\lambda}\frac{r^2}{Z}$$

şi de asemenea:

$$\omega_0(Z) = \left[\omega_0^0(Z)\right]^2 + 2\,a_0\,\omega_0^0(Z) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{d_{ij}}{(Z-b_i)^j},$$
$$\omega_1(Z) = \left[\omega_1^0(Z)\right]^2 + 2\bar{a}_0\,\omega_1^0(Z), \tag{15}$$
$$\omega_2(Z) = a_0\,\omega_1^0(Z) + \left[\omega_1^0(Z) + \bar{a}_0\right]\omega_0^0(Z) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{d'_{ij}}{(Z-b_i)^j},$$

unde d_{ij}, d'_{ij} şi a_1 sînt constante ce se pot calcula.

Avem de exemplu

$$\text{p. princ. }\{2\,\lambda Z\,\omega_0^0(z)\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{d_{ij}}{(Z-b_i)^j},$$

unde

$$d_{ij} = a_{ij}\ \ b_i + a_{i,\,j+1}$$

luînd $a_{i,\,q_i+1} = 0$.

Avem apoi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{d'_{ij}}{(Z-b_i)^j}=\text{p. princ.}\left\{\omega_0^0\,(Z)\,\overline{\omega}_0^0\left(\frac{r^2}{\overline{Z}}\right)\right\}\cdot$$

Ținînd seama de (14) și (15), expresia (11) se va scrie :

$$\begin{aligned}G\,(Z,\,t)&=\frac{\alpha}{2}\,[\omega_0^0\,(Z)-\omega_1^0\,(Z)]^2+[\omega_0^0\,(Z)-\\&-\omega_1^0\,(Z)]\,[\alpha\,(a_0-\bar{a}_0)+\mathrm{i}V_\infty]+\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{e_{ij}}{(Z-a)^j}\end{aligned}\tag{16}$$

unde $e_{ij}=d_{ij}-2\,d'_{ij}$.

Metoda dată de noi permite găsirea pe o cale mai simplă a rezultatelor date de autorii menționați.

3. Ca aplicații vom considera întîi cazul unui profil eliptic și apoi cazul unui profil Jukovski disimetric.

Fie în planul Oxy o elipsă C cu semiaxele a și b. Trecerea la cercul Γ de rază 1 din planul $O_1\,XY$ se va face prin transformarea :

$$z=\omega\,(Z)=\frac{a+b}{2}\,Z+\frac{a-b}{2}\,\frac{1}{Z}\cdot\tag{17}$$

În acest caz vom avea

$$\omega_0^0\,(Z)=\frac{a-b}{2}\cdot\frac{1}{Z}\quad\omega_1^0\,(Z)=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{Z},$$

$$\omega_0\,(Z)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{Z^2};\quad\omega_1\,(Z)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\frac{1}{Z^2};\quad\omega_2\,(Z)=\frac{a^2-b^2}{4}\cdot\frac{1}{Z^2}\cdot$$

Ținînd seama de expresia (11), vom obține :

$$G\,(Z,t)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{b^2}{Z^2}-\mathrm{i}V_\infty\,(t)\,\frac{b}{Z}+k\,(t).\tag{18}$$

Din (17) vom obține :

$$Z=\frac{z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}}{a+b}\tag{17'}$$

ceea ce va da :

$$\begin{aligned}F\,(z,t)&=\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{i}\,\frac{b^2}{(a-b)^2}\,[z-\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}\,]^2+\\&+V_\infty\,\frac{b}{a-b}\,[z-\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}]+\mathrm{i}k\,(t).\end{aligned}\tag{19}$$

Punînd condiția ca în punctul $z = a$ să fie îndeplinită condiția pe frontieră, se obține:

$$k = -\frac{\alpha b^2}{2}.$$

În cazul unui profil Jukovski disimetric, transformarea conformă care va duce la planul O_1XY, va fi:

$$z = \omega(Z) = Z - \beta + \frac{1}{Z - \beta}, \tag{20}$$

unde $\beta = \beta' + i\beta''$ și $|\beta| < r = |1 + \beta|$, unde r este raza cercului.

Calculînd vom obține:

$$\omega_0^0(Z) = \frac{1}{Z - \beta};\quad \omega_1^0(Z) = \frac{r^2}{Z};\quad \omega_0(Z) = \frac{1}{(Z - \beta)^2};\quad \omega_1(Z) = \frac{r^4}{Z^2} - 2\frac{r^2}{Z}\bar{\beta};$$

$$\omega_2(Z) = -\frac{r^2}{Z}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{Z - \beta}\left(\frac{r^2 - \beta\bar{\beta}}{\beta} + \frac{\beta}{r^2 - \beta\bar{\beta}}\right)$$

și ținînd seama de expresia (11) vom obține:

$$\begin{aligned} G(Z, t) = {} & \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{(Z - \beta)^2} + \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{r^4}{Z^2} + \frac{r^2}{Z}\left[\alpha(\beta - \bar{\beta}) + \frac{\alpha}{\beta} - iV_\infty(t)\right] - \\ & - \frac{1}{Z - \beta}\left[\alpha\left(\frac{r^2 - \beta\bar{\beta}}{\beta} + \frac{\beta}{r^2 - \beta\bar{\beta}}\right) - iV_\infty(t)\right] + k(t). \end{aligned} \tag{21}$$

În cazul profilului simetric, β este un număr real, deci $r = 1 + \beta$ și soluția se va scrie

$$\begin{aligned} G(Z, t) = {} & \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{r^4}{Z^2} + \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{(Z - \beta)^2} + \frac{r^2}{Z}\left(\frac{\alpha}{\beta} - i V_\infty\right) - \\ & - \frac{1}{Z - \beta}\left[\alpha\left(\frac{r^2 - \beta^2}{\beta} + \frac{\beta}{r^2 - \beta^2}\right) - iV_\infty(t)\right] + k(t). \end{aligned} \tag{21'}$$

Constanta k se determină impunînd verificarea condiției la limită în punctul $Z = r$. Se găsește

$$k = -\alpha\beta^2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1 + 2\beta}\right).$$

Primită la redacție la 26 ianuarie 1965

Facultatea de matematică
și mecanică a Universității din
București

BIBLIOGRAFIE

1. I. Cristea, St. cerc. mat., **14**, *2*, 253—306 (1963).
2. Horia Ene, Mihai Oprică, St. cerc. mat., **15**, *4*, 471—476 (1964).
3. Caius Iacob, *Introduction Mathematique à la Mecanique des fluides*. Ed. Acad. R.P.R. — — Gauthier Villars, Bucureşti — Paris, 1959.
4. Caius Iacob, Comunicările Academiei R.P.R., **12**, *4*, 381—385 (1962).
5. Caius Iacob, Comunicările Academiei R.P.R., **12**, *10*, 1071—1075 (1962).
6. H. S. Tsien, Quarterly of Applied Math., **1**, 130—148 (1943).
7. H. von Sanden, Zeitschrift für Mat. und Phys., **61** (1912).
8. V. Vâlcovici, C. R. Paris, **158**, 169—171 (1914).

DEFORMĂRI RAPIDE ALE MEMBRANELOR EXTENSIBILE

DE

G. DINCĂ

În cadrul ipotezelor lui D. M. Grigorian [2] pentru deformările rapide ale membranelor extensibile autorul studiază, folosind metodele lui N. Cristescu [4], [5], [6], ordinul de propagare a undelor transversale și longitudinale și relațiile satisfăcute pe fronturile undelor. În concluzie se dă o schemă de integrare care poate fi transformată într-un program pentru o mașină electronică.

1. INTRODUCERE

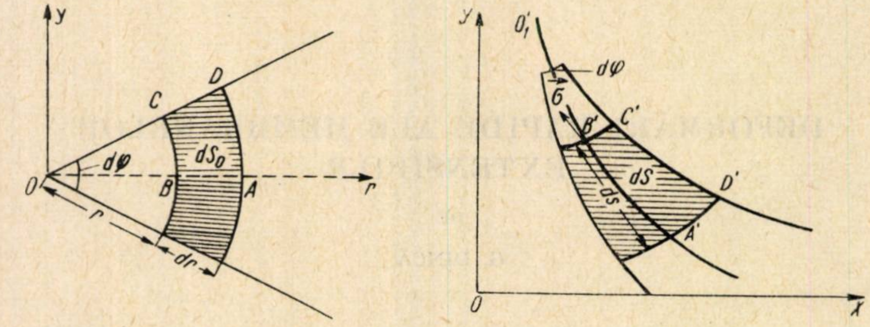
Problema deformărilor rapide ale membranelor extensibile a fost considerată de mai mulți autori, printre care H. A. Rahmatulin [1] D. M. Grigorian [2], A. L. Pavlenko [3]. În această lucrare, problema este reluată în ipotezele formulate de D. M. Grigorian [2]. Cazul unidimensional corespunzător (mișcări rapide ale firelor extensibile) a fost studiat în [4], [5], [6]. Analogia ecuațiilor cu ecuațiile corespunzătoare cazului unidimensional permite o tratare matematică în paralel. Astfel sînt studiate tipurile de unde propagabile și vitezele lor. În încheiere, utilizînd relațiile diferențiale satisfăcute pe fronturile de undă, este dată o schemă de integrare care poate fi transformată într-un program pentru mașina electronică de calcul.

2. PUNEREA PROBLEMEI. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Presupunem că membrana (subțire) este în repaus ocupînd în planul xOz un domeniu circular de rază R_0 și fie că la momentul $t = 0$ pe un cerc de rază r_0 concentric cu cercul frontieră, în direcția axei Oy, se aplică o sarcină de lovire (de exemplu cu un cilindru de rază r_0 al cărui vector

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 817–825, BUCUREȘTI, 1965

viteză orientat după axa cilindrului este normal pe membrană) care provoacă o creştere a vitezei acestui cerc şi o mişcare progresivă în timp după o anume lege dată. Forţele exterioare nu vor fi luate în considerare. Vom presupune [2] că după lovire în membrană apar numai tensiuni radiale iar tensiunile circumferenţiale sînt neglijabile. Originea sistemului fix de coordonate o alegem în centrul cercului de rază R_0, axa Oy după direcţia vitezei de lovire.



a) b)

Fig. 1

Pentru o astfel de punere a problemei va fi folosită simetria referitoare la Oy, ceea ce permite să se privească mişcarea membranei numai în secţiunea meridională xOy. Ca variabile independente vor fi luate timpul t şi coordonata lagrangeană r — distanţa punctelor membranei la axa Oy la momentul $t = 0$. Pentru funcţiile necunoscute se introduc notaţiile : x, y — coordonatele punctului considerat al membranei, v — proiecţia vectorului viteză pe direcţia tangentei $\vec{\tau}$ la conturul secţiunii meridionale a membranei în punctul de coordonate x, y ; ε şi σ — deformaţia şi respectiv tensiunea pe direcţia tangentei $\vec{\tau}$.

Se consideră o porţiune $\mathrm{d}S$ de membrană (fig. 1b) obţinută după un timp oarecare t din deformarea porţiunii iniţiale $\mathrm{d}S_0$ (fig. 1a). Păstrarea unghiului $\mathrm{d}\varphi$ este o consecinţă a simetriei domeniului.

Proiectînd pe axele carteziene de coordonate ecuaţia de mişcare a porţiunii $\mathrm{d}S$ a membranei, se obţine

$$\rho \mathrm{d}S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(x\sigma \frac{\partial x}{\partial s}\right) \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\varphi, \quad \rho \mathrm{d}S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(x\sigma \frac{\partial y}{\partial s}\right) \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\varphi, \tag{2.1}$$

unde $\rho \mathrm{d}S$ este masa elementului considerat şi deci ρ este densitatea superficială iar s este o coordonată curbilinie luată de-a lungul fibrei $O_1'B'A'$, pornind de la o anumită origine arbitrară. În (2.1) s-a ţinut seama de asemenea de faptul că proiecţiile lui $\vec{\sigma} = \sigma\vec{\tau}$ pe axe sînt $\sigma \dfrac{\partial x}{\partial s}$, $\sigma \dfrac{\partial y}{\partial s}$.

Deoarece s este coordonata curbilinie actuală, considerată pe fibra deformată, este mai convenabil să se raporteze ecuațiile de mișcare la o coordonată curbilinie inițială ce se referă la starea inițială. Aceasta va fi coordonata lagrangeană r. Funcțiile necunoscute vor fi considerate funcții de r prin intermediul lui s, și de timpul t : $x\,(s\,(r),\,t),\ldots$ Așadar pentru un t fix avem :

(2.2) $$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\cdot \qquad (x,y)$$

Deformația va fi definită prin

(2.3) $$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}s-\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}-1.$$

Prin urmare formulele (2.2) ce leagă derivatele în raport cu r și s se vor scrie

(2.4) $$\frac{\partial x}{\partial r}=(1+\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial s}\cdot \qquad (x,y)$$

Din legea conservării masei rezultă

(2.5) $$\rho\mathrm{d}S=\rho_0\mathrm{d}S_0,$$

unde ρ_0 este densitatea superficială în starea inițială nedeformată.

Deoarece

$$\mathrm{d}S_0\approx r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}S\approx(r\,\mathrm{d}\varphi+\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi)\,\mathrm{d}s\approx x\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s$$

relația între densitatea actuală ρ și cea inițială ρ_0 este

(2.6) $$\rho_0=\rho\,(1+\varepsilon)\,\frac{x}{r}\cdot$$

Ținînd seama de (2.4) și (2.6), ecuațiile de mișcare se scriu

(2.7) $$r\,\rho_0\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{x\sigma}{1+\varepsilon}\frac{\partial x}{\partial r}\right),\quad r\,\rho_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{x\sigma}{1+\varepsilon}\frac{\partial y}{\partial r}\right).$$

La aceste ecuații mai trebuie adăugată și legea constitutivă.

3. LEGEA CONSTITUTIVĂ ÎNTREAGĂ

Vom admite o lege constitutivă întreagă de forma

(3.1) $$\sigma=\sigma\,(\varepsilon)$$

în care funcția din membrul al doilea este în general monoton crescătoare.

Dacă se ţine seama de (3.1), sistemul (2.7) împreună cu (2.3) derivată în raport cu r, devine

$$
\begin{aligned}
&r\rho_0 \frac{\partial x_t}{\partial t} - \frac{x\sigma}{1+\varepsilon}\frac{\partial x_r}{\partial r} - x_r x \frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} - \sigma}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\sigma x_r^2}{1+\varepsilon}\\
(3.2)\qquad &r\rho_0 \frac{\partial y_t}{\partial t} - \frac{x\sigma}{1+\varepsilon}\frac{\partial y_r}{\partial r} - y_r x \frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} - \sigma}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\sigma x_r y_r}{1+\varepsilon}\\
&x_r \frac{\partial x_r}{\partial r} + y_r \frac{\partial y_r}{\partial r} - (1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0,
\end{aligned}
$$

unde pentru simplificarea scrierii s-a notat $x_r = \dfrac{\partial x}{\partial r}$, $x_t = \dfrac{\partial x}{\partial t}$ etc. Sistemul (3.2) conţine trei ecuaţii cu trei funcţii necunoscute x y, ε şi două variabile independente. Deformaţia poate fi eliminată cu ajutorul relaţiei (2.3). Din punctul de vedere al interpretărilor mecanice este însă mai avantajos să se păstreze ε ca o a treia funcţie necunoscută.

Pentru a vedea ce metodă de integrare se poate aplica acestui sistem, se vor căuta în primul rînd caracteristicile sistemului. Pentru aceasta la sistemul (3.2) adăugăm relaţiile evidente :

$$(3.3)\qquad \frac{\partial x_r}{\partial r}\mathrm{d}r^2 - \frac{\partial x_t}{\partial t}\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x_r\mathrm{d}r - \mathrm{d}x_t\mathrm{d}t\,(x, y)$$

Sistemul (3.2), (3.3) posedă patru familii de caracteristice, două fiind definite de relaţia diferenţială

$$(3.4)\qquad r\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{x\sigma}{1+\varepsilon}$$

iar celelalte două de

$$(3.5)\qquad r\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = x\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}.$$

Toate liniile caracteristice sînt curbe de pantă variabilă, depinzînd de funcţiile necunoscute x şi ε. Din punct de vedere mecanic, liniile caracteristice sînt fronturi de undă. Există deci două tipuri de unde. Caracteristicile (3.4) corespund fronturilor de undă propagabile cu viteza

$$(3.6)\qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm C_{\mathrm{I}}(x, r, \varepsilon) = \pm\sqrt{\frac{x\sigma}{r\rho_0(1+\varepsilon)}}$$

iar caracteristicile (3.5) unor fronturi de undă propagabile cu viteza

$$(3.7)\qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm C_{\mathrm{II}}(x, r, \varepsilon) = \pm\sqrt{\frac{x}{r\rho_0}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}}.$$

Rezolvînd sistemul (3.2), (3.3) în raport cu $\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}$ şi $\frac{\partial x_r}{\partial r}$ se obţine

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\xi x_r + \eta y_r + \sigma x_r (1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\left\{ r\rho_0 \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right\}} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial x_r}{\partial r} = - \frac{(1+\varepsilon)^3 \left\{\frac{x\sigma}{1+\varepsilon} - r\rho_0 \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\left(\xi + \frac{\sigma x_r^2}{1+\varepsilon}\right) + x y_r \left((1+\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} - \sigma\right)(\xi y_r - \eta x_r)}{(1+\varepsilon)^3 \left\{ r\rho_0 \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - x \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\right\}\left\{ r\rho_0 \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{x\sigma}{1+\varepsilon}\right\}},$$

unde

$$\xi = r\rho_0 \left(\mathrm{d}x_r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - \mathrm{d}x_t\right)\frac{1}{\mathrm{d}t},$$

$$\eta = r\rho_0 \left(\mathrm{d}y_r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - \mathrm{d}y_t\right)\frac{1}{\mathrm{d}t}.$$

Dacă se ţine seama de (3.4) din (3.8) rezultă că pe aceste caracteristice sînt satisfăcute relaţiile diferenţiale

$$\mathrm{d}x_t = \pm C_{\mathrm{I}}\, \mathrm{d}x_r - \frac{x_r}{1+\varepsilon}(\pm C_{\mathrm{I}}\, \mathrm{d}\varepsilon - \mathrm{d}v). \tag{3.9}$$

şi încă două similare pentru y.

Pe caracteristicile (3.5) sînt satisfăcute relaţiile

$$r\rho_0 (\pm C_{\mathrm{II}}\, \mathrm{d}\varepsilon - \mathrm{d}v) + \sigma x_r\, \mathrm{d}t = 0. \tag{3.10}$$

În (3.6) şi (3.9) precum şi în (3.7) şi (3.10) semnele se corespund. În (3.9) şi (3.10)

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{1+\varepsilon}(x_r \mathrm{d}x_t + y_r \mathrm{d}y_t) \tag{3.11}$$

creşterea $\mathrm{d}v$ fiind luată în lungul unei linii (3.4) respectiv (3.5). Pentru a stabili natura undelor ce iau naştere, vom considera aşa-numitele condiţii de salt. Vom nota cu croşete $[\Phi]$ saltul funcţiei Φ la traversarea unei curbe caracteristice. Scriind relaţiile (3.3) de o parte şi de alta a unei curbe caracteristice şi ţinînd seama că creşterile $\mathrm{d}x_r$, $\mathrm{d}x_t$ etc. sînt luate în lungul curbelor caracteristice şi sînt de fapt „derivate interioare" care sînt continue la traversarea unei asemenea linii, se obţin relaţiile de compatibilitate cinematică

$$\left[\frac{\partial x_r}{\partial r}\right]\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left[\frac{\partial x_t}{\partial t}\right] = 0, \quad (x, y). \tag{3.12}$$

Din (3.2), ținînd seama de (3.12), se obțin relațiile de compatibilitate dinamică :

$$\left\{r\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{x\sigma}{1+\varepsilon}\right\}\left[\frac{\partial x_r}{\partial r}\right]-x_r x\frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}-\sigma}{(1+\varepsilon)^2}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right]=0,$$

$$(3.13)\qquad \left\{r\rho_0\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{x\sigma}{1+\varepsilon}\right\}\left[\frac{\partial y_r}{\partial r}\right]-y_r x\frac{(1+\varepsilon)\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}-\sigma}{(1+\varepsilon)^2}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right]=0,$$

$$x_r\left[\frac{\partial x_r}{\partial r}\right]+y_r\left[\frac{\partial y_r}{\partial r}\right]-(1+\varepsilon)\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right]=0.$$

Analogia relațiilor (3.13) cu relațiile corespunzătoare cazului unidimensional [7] este evidentă. De fiecare dată însă trebuie avută în vedere semnificația mecanică diferită a mărimilor ce intervin în (3.13).

Pentru a cerceta ce se întîmplă pe fiecare linie caracteristică, în (3.13) se ține seama fie de (3.4), fie de (3.5). Introducînd (3.4) în (3.13) se obține

$$(3.14)\qquad x_r\left[\frac{\partial x_r}{\partial r}\right]+y_r\left[\frac{\partial y_r}{\partial r}\right]=0,\quad \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right]=0,$$

Analog, introducînd (3.5) în (3.13) se obține

$$\frac{\left[\dfrac{\partial x_r}{\partial r}\right]}{x_r}=\frac{\left[\dfrac{\partial y_r}{\partial r}\right]}{y_r}=\frac{\left[\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right]}{1+\varepsilon}$$

sau

$$(3.15)\qquad \frac{\left[\dfrac{\partial x_r}{\partial r}\right]}{x_s}=\frac{\left[\dfrac{\partial y_r}{\partial r}\right]}{y_s}=\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right].$$

Din (3.14) rezultă că undele care se propagă cu viteza (3.6) sînt unde transversale care afectează forma membranei nu și deformația longitudinală $\left(\left[\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right]=0\right)$. Undele ce se propagă cu viteza (3.7) sînt unde longitudinale care dau alungiri propagabile nu și schimbări ale formei membranei. Discontinuitățile derivatelor secunde ale coordonatelor sînt proiecțiile pe axele de coordonate ale discontinuității lui $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial r}$. Din forma relațiilor satisfăcute pe caracteristici este evident însă că cele două tipuri de undă nu se pot separa decît în cazuri cu totul particulare, în general ele generîndu-se și influențîndu-se reciproc.

4. ORDINEA DE PROPAGARE A UNDELOR

Pentru a vedea ordinea în care se propagă cele două tipuri de unde se pot face consideraţii similare cu cele de la firul flexibil [7]. Din (3.6) şi (3.7) se vede că în afară de condiţiile şi la limită, vitezele de propagare vor depinde şi de legea constitutivă (3.1). Pentru o lege constitutivă ca cea reprezentată în figura 2 se obţine :

pe OA şi BC, $(1+\varepsilon)\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} > \sigma$,

$(|C_{\mathrm{I}}| < |C_{\mathrm{II}}|)$,

pe AB şi CD, $(1+\varepsilon)\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} < \sigma$,

$(|C_{\mathrm{I}}| > |C_{\mathrm{II}}|)$,

în punctele A, B, C, $(1+\varepsilon)\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$,

$(|C_{\mathrm{I}}| = |C_{\mathrm{II}}|)$.

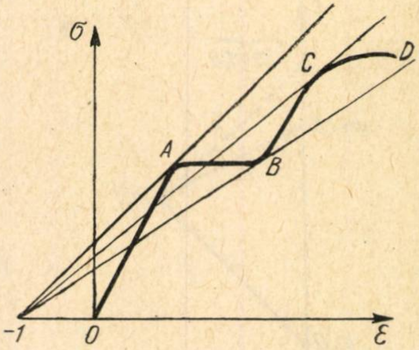


Fig. 2

Bineînţeles, schema de integrare depinde în mare măsură de ordinea de propagare a diferitelor tipuri de unde.

5. SCHEMA DE INTEGRARE

Condiţiile iniţiale ale problemei vor fi formulate astfel : pentru $t=0$ şi $r_0 \leqslant r \leqslant R_0$ sînt cunoscute funcţiile

$$\varepsilon(r,\,0),\ v(r,\,0),\ x(r,\,0),\ y(r,\,0),\ x_r(r,\,0),\ y_r(r,\,0),\ x_t(r,\,0),\ y_t(r,\,0).$$

Se va presupune că condiţiile la limită afectează mereu aceleaşi puncte materiale ale membranei, anume, ele sînt date pe cercurile $r=r_0$ şi $r=R_0$, adică pe două drepte necaracteristice din planul $(r,\,t)$, pe care la fiecare moment sînt cunoscute funcţiile $x_t\,(r_0,\,t)$ $y_t\,(r_0,\,t)$ şi funcţiile $x_t\,(R_0,\,t)$ $y_t\,(R_0,\,t)$. Pentru $r_0 \to 0$ şi $R_0 \to \infty$, obţinem cazul tratat de Grigorian [2] (se înţelege, condiţiile iniţiale şi la limită trebuie modificate în mod corespunzător).

Programul numeric de integrare a unei probleme de tip mixt se compune din două părţi. O parte a programului se referă la punctele de pe cercul $r=r_0$ (sau $r=R_0$) şi altă parte la un punct oarecare interior. Ca bază a schemei de calcul va fi luată o reţea formată cu familiile de caracteristice (3.5). Această metodă a fost folosită pentru prima dată în rezolvarea problemei mixte a mecanicii firelor [4]. Deosebirea constă în aceea că acum, chiar în cazul simplificat cînd pe porţiuni legea constitutivă este formată din segmente de dreaptă, nici una din familiile (3.4) sau (3.5) nu este o familie de drepte. Aşadar caracteristicile (3.4), (3.5) nu sînt dinainte cunoscute. Ele vor fi construite pas cu pas odată cu soluţia.

a) *Programul pentru punctele de pe cercul* $r = r_0$. Se va presupune, pentru exemplificare, că $|C_{\text{I}}| < |C_{\text{II}}|$. În figura 3, $(m, 0)-(m, 1)$ este un segment de caracteristică (3.5) de pantă pozitivă. În nodurile $(m,0)$ și $(m,1)$ valorile funcțiilor necunoscute sînt determinate din condițiile inițiale și la limită sau din integrări anterioare. Trebuie găsită poziția nodului $(m + 1,0)$ și valorile funcțiilor necunoscute în acest nod. Aici,

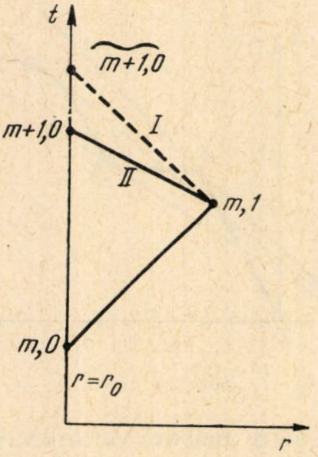


Fig. 3

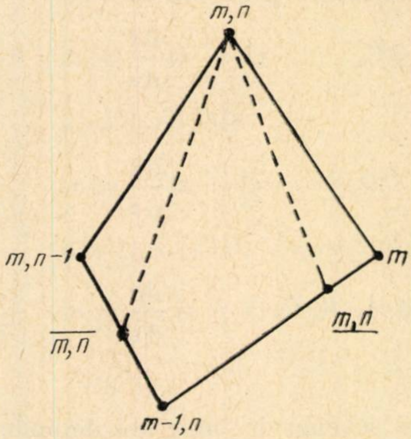


Fig. 4

și în tot ceea ce urmează, între două noduri ale rețelei, porțiunile de caracteristică vor fi aproximate cu segmente de dreaptă măsurate pe tangenta la caracteristică în nodul în care funcțiile necunoscute au fost anterior determinate. Prin urmare poziția nodului $(m + 1,0)$ în primă aproximație se obține intersectînd dreapta

$$r - r_{m,1} = - C^{\text{II}}_{m,1}\,(t - t_{m,1})$$

cu Ot. Deoarece în $(m + 1,0)$ componentele x_t, y_t ale vitezei sînt cunoscute, din (3.11), scrisă în diferențe finite între $(m,1)$ și $(m + 1,0)$, rezultă $v_{m+1,0}$. Apoi din relația (3.10), corespunzătoare caracteristicilor (3.5) de pantă negativă, scrisă în diferențe între aceleași puncte, rezultă $\varepsilon_{m+1,0}$. Pentru a găsi pe x_r, y_r în nodul $(m+1,0)$ trebuie să se recurgă la un procedeu de interpolare sau extrapolare. Prin extrapolare se procedează astfel : din nodul $(m, 1)$ se trasează o caracteristică (3.4) de pantă negativă care intersectată cu $r = r_0$ dă poziția nodului $(\widetilde{m + 1,0})$. Deoarece, în $(m,0)$ și $(m + 1,0)$, ε și v se cunosc, utilizînd formule de extrapolare liniară se obțin valorile lor în $(\widetilde{m+1,0})$. Integrînd relația (3.9) corespunzătoare caracteristicilor (3.4) de pantă negativă între $(m,1)$ și $(\widetilde{m+1,0})$, se obține $x^r_{\widetilde{m+1,0}}$. Prin interpolare liniară între $(\widetilde{m + 1,0})$ și $(m,0)$, se află x^r în nodul $(m+1,0)$.

Analog se procedează pentru aflarea lui y^r în $(m + 1,0)$.

b) *Programul pentru punctele interioare* (*fig. 4*). În figura 4 $(m,n - 1)-(m,n)$ și $(m-1, n+1)-(m,n)$ sînt segmente de caracteristică

(3.5) de pantă pozitivă și respectiv negativă. În nodurile $(m, n-1)$, $(m-1,n)$ și $(m-1, n+1)$ valorile funcțiilor x_t, y_t, x_r, y_r, v, ε sînt cunoscute din condițiile inițiale și la limită sau integrări anterioare.

Cele două relații (3.10) scrise în diferențe finite pe $(m,n-1)-(m,n)$ și respectiv $(m=1, n+1)-(m,n)$ dau pe $v_{m,n}$. Apoi $\varepsilon_{m,n}$ rezultă din relația (3.10) corespunzătoare caracteristicilor (3.5) de pantă negativă integrată între $(m-1,n+1)$ și (m,n). Valorile coordonatelor x, y în nodul (m, n) se pot găsi din formule de tipul

$$\mathrm{d}x = x_t\,\mathrm{d}t + x_r\,\mathrm{d}r \qquad (x, y)$$

scrise în diferențe de exemplu între $(m,n-1)$ și (m,n). Cu valorile lui ε și x găsite mai sus, se calculează $C^{I}_{m,n}$. Acum se pot trasa caracteristicile (3.4) de pantă pozitivă și negativă ce trec prin (m,n) (liniile punctate din fig. 4). Intersectîndu-le respectiv cu caracteristicile $(m-1,n)-(m,n-1)$ și $(m-1,n)-(m-1, n+1)$ se obțin punctele $\overline{(m,n)}$ și respectiv $\underline{(m,n)}$ ale căror coordonate, evident, pot fi calculate. Prin interpolare liniară între $(m-1, n)$ și $(m,n-1)$ și respectiv $(m-1,n)$ și $(m-1, n+1)$ se obțin $\overline{\varepsilon}$, $\overline{v}$, $\overline{x}_r$ $\overline{y}_r$, $\overline{x}_t$, $\overline{y}_t$ și $\underline{\varepsilon}$, $\underline{v}$, $\underline{x_r}$, $\underline{y_r}$, $\underline{x_t}$, $\underline{y_t}$. Apoi din formulele (3.9) integrate de-a lungul lui $\overline{(m,n)}-(m,n)$ și respectiv $\underline{(m,n)}-(m,n)$ se obține $x^{r}_{m,n}$ și $x^{t}_{m,n}$. Analog se procedează pentru a obține $y^{r}_{m,n}$ și $y^{t}_{m,n}$.

Pentru a afla valorile funcțiilor necunoscute în a doua aproximație se procedează ca în [4].

Primită la redacție la 1 decembrie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. Х. А. РАХМАТУЛИН, Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках.* Ф[illegible]тгиз, Москва, 1961, p. 256—270.
2. Д. М. ГРИРОРЯН, *Нормальный удар [illegible]аниченной тонкой мембране*, ПММ, **XIII**, *3*, 277—284 (1949).
3. А. Л. ПАВЛЕНКО и. д., *Поперечный удар по мембране с круглым отверстием.* în Вычислительные методы и программирование. Изд. Моск. ун-та, 1962, p. 183—208.
4. N. CRISTESCU, *Spațial Motion of Elastic-Plastic Strings.* J. Mech. Phys. Solids, **9**, 165 (1961).
5. N. CRISTESCU, *Somme Problems of the Mechanics of Extensible Strings,* in *Stress Waves in Anelastic Solids.* Springer, Verlag, 1963.
6. N. CRISTESCU, *Rapid Motions of Extensible Strings,* J. Mech. Phys. Solids, **12**, 333 (1964).
7. N. CRISTESCU, *Probleme dinamice în teoria plasticității.* Editura tehnică, București, 1958, p. 166—198.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

RECENZIE

KLARA PACH and TAMÁS FREY : *Vector and Tensor Analysis* *(Calcul vectorial şi tensorial)* Terra, Budapesta, 1964, 595 pag. şi 165 figuri.

Este o carte ce interesează în primul rînd pe ingineri (electromecanici, constructori) şi pe fizicieni. Foarte multe teoreme sînt urmate de aplicaţii care intervin efectiv în practica inginerească. Cunoaşterea temeinică a sensului şi domeniului de aplicabilitate a noţiunilor justifică efortul pe care trebuie să-l facă cititorul pentru a urmări cu atenţie demonstraţiile.

Materialul este expus în şapte capitole. În primul, algebra vectorială în spaţiul cu trei dimensiuni şi aplicaţiile clasice la geometria analitică liniară. În al doilea capitol, funcţiile vectoriale depinzînd de un parametru şi ca aplicaţii, studiul mişcării unui punct în R^3, formulele lui Frenet, mişcări particulare. În capitolul trei, funcţii scalare de punct, noţiunea de gradient, semnificaţie geometrico-fizică. Capitolul patru conţine studiul cîmpurilor de vectori, rotori, divergenţă, formulele lui Gauss-Ostrogradski şi Stokes, noţiunea de potenţial vector. În acest capitol s-a inclus o scurtă recapitulare a noţiunilor de analiză clasică necesare pentru a face lectura acestei cărţi cît mai independentă.

În ultimele trei capitole se expun elemente de calcul tensorial. În capitolul cinci se defineşte noţiunea de tensor de ordinul doi în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni ; din reprezentarea prin matrici, rezultă elementele de algebră tensorială, corespondenţa dintre tensorii antisimetrici şi vectorii axiali, valori proprii, invarianţi scalari. În a doua parte a acestui capitol se expun operaţiile de diferenţiere a cîmpurilor $\vec{y}(\vec{x})$ şi anume din $\vec{y}(\vec{x}) = \nabla \cdot \vec{y}$, rot $\vec{y}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{y}$ şi grad $\vec{y}(\vec{x}) = \vec{y} \circ \nabla$, semnificaţii fizice şi aplicaţii la studiul suprafeţelor în R^3. În capitolul şase, după ce se introduc noţiunile algebrice necesare de tensori de ordinul trei, se examinează derivatele tensorilor de ordinul al doilea, teoremele lui Gauss-Ostrogradski şi Stokes, consecinţele lor, singularităţile cîmpurilor (gradient, divergenţă şi rotor superficiali precum şi derivata superficială a tensorilor). Partea a treia a capitolului conţine importante aplicaţii în hidrodinamică, electrotehnică statică şi geometrie. În partea a patra, se expun noţiunile de bază din teoria potenţialului, formulele lui Green, soluţii discontinue, potenţiali întîrziaţi (principiul lui Huyghens) şi aplicaţii la ecuaţia lui Poisson şi a propagării undelor. Capitolul şapte, spaţii multidimensionale şi neeuclidiene, arată posibilităţile de extindere ale noţiunilor stabilite anterior şi invită pe cititor să-şi lărgească cunoştinţele prin lectura unor cărţi matematice de strictă specialitate.

Fiecare dintre cele 19 paragrafe este ilustrat cu numeroase exemple şi exerciţii bine alese.

Este o carte scrisă clar — care poate ar cîştiga mai mult dacă ar fi mai concisă — şi pe care inginerii o vor citi cu un deosebit folos.

I. Barbălat

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

133

1965 SZEP 28

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

- CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
- A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
- LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 304 p. + 52 p., 18,50 lei.
- SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
- N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
- TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
- O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
- O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
- N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
- SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
- S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 5, P. 631—828, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informaţia" — c. 1586

43831

Lei 12. —

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

6

TOMUL 17

1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47, București
Revista apare de 10 ori pe an

F 762

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

TOM. 17, Nr. 6
1965

STUDII ŞI CERCETĂRI
MATEMATICE

SUMAR

Pag.

D. V. IONESCU, Generalizarea unei formule de cvadratură a lui N. Obreschkoff la integrale duble 831

RADU ROŞCA, Asupra elicoidului de arie minima din spaţiul eliptic 843

LASCU BAL şi MARIA PETER, Nomograme cu transparent fără elemente gradate 851

GEORGE BORNEANU, Contribuţii la studiul topologic al curbelor de ordinul cinci 863

C. CONSTANTINESCU, O topologie pe conul funcţiilor superarmonice nenegative 903

MARGARETA FRENKEL FERTIG, Asupra proprietăţilor asimptotice ale soluţiilor unui sistem semiliniar de ecuaţii diferenţiale, care depinde de un parametru mic 907

C. FOIAŞ, Asupra unei probleme de teorie spectrală 921

PETRU T. MOCANU, Funcţii univalente pe sectoare 925

MARGARETA MATEESCU, Două condiţii necesare şi suficiente de existenţă a codurilor liniare corectoare de t erori . . . 933

T. TORÓ, Asupra unei ecuaţii spinoriale cu 4 componente pentru neutrino în prezenţa gravitaţiei, în cazul unei conexiuni de spin nelocale 939

VASILE I. ISTRĂŢESCU, Asupra algebrelor de funcţii lipschitziene. II 943

VASILE I. ISTRĂŢESCU, Observaţie asupra unei teoreme a lui Wielandt 947

C. BĂNICĂ şi N. POPESCU, Categorii cît 951

RECENZII 987

VIAŢA ŞTIINŢIFICĂ 989

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 6, P. 829–994, BUCUREŞTI, 1965

GENERALIZAREA UNEI FORMULE DE CVADRATURĂ A LUI N. OBRESCHKOFF LA INTEGRALE DUBLE [1]

DE

D. V. IONESCU
(Cluj)

Vom numi *formule de cubatură de tip N. Obreschkoff* cu gradul de exactitate 3 formulele de forma

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= a_{11}f(x_1, y_1) + a_{12}f(x_1, y_2) + a_{21}f(x_2, y_1) + a_{22}f(x_2, y_2) + \\
&+ b_{11}\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) + b_{12}\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) + b_{21}\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) + b_{22}\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \\
&+ b'_{11}\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) + b'_{12}\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) + b'_{21}\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1) + b'_{22}\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \\
&+ c_{11}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1) + c_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_2) + c_{21}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + c_{22}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) + \\
&+ c'_{11}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1, y_1) + c'_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1, y_2) + c'_{21}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_1) + \\
&\qquad + c'_{22}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_2) + \\
&+ c''_{11}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_1) + c''_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2) + c''_{21}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_1) + c''_{22}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2) + R,
\end{aligned}
$$

---

[1] Lucrare prezentată la Sesiunea ştiinţifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 11–12 decembrie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM 17, Nr. 6, p. 831–841, BUCUREŞTI, 1965.

unde D este dreptunghiul cu vîrfurile de coordonate (x_i, y_k), $i, k = 1,2$ iar constantele a_{ik}, b_{ik}, b'_{ik}, c_{ik}, c'_{ik}, c''_{ik} se aleg astfel ca restul R să fie nul cînd f este un polinom oarecare de variabilele x şi y de gradul al treilea, dar să fie diferit de zero, cel puţin pentru un polinom de gradul al patrulea.

Într-o lucrare precedentă [1], am stabilit formule de tipul 1, cu două noduri, vîrfurile opuse (x_1, y_1), (x_2, y_2) ale dreptunghiului D şi am determinat restul acestor formule sub formă de integrală dublă, presupunînd că funcţia f este continuă pe dreptunghiul D,

$$D: x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \; y_1 \leqslant y \leqslant y_2 \tag{2}$$

împreună cu derivatele ei parţiale în raport cu x şi y, de ordinele 1, 2, 3, 4.

În această lucrare vom pune în evidenţă anumite formule de tipul 1, cu trei noduri (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2) şi vom pune restul lor tot sub formă de integrală dublă, făcînd asupra funcţiei f aceleaşi ipoteze.

§ 1. PRELIMINARII

1. Vom ajunge la formule de forma (1), procedînd ca în lucrarea [1]. Se consideră sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^3 \partial y} = \alpha_1, \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = \alpha_2, \quad \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial x \partial y^3} = \alpha_1, \tag{3}$$

în care α_1 şi α_2 sînt doi parametri, şi-l vom integra cu condiţiile la limită :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{pentru } x = x_1 \text{ şi } x = x_2 \\
\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pentru } x = x_1 \text{ şi } x = x_2 \\
\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^3} = 0 \quad \text{pentru } x = x_1 \text{ şi } x = x_2
\end{gathered} \tag{4}$$

şi

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} = 0 \quad \text{pentru } y = y_1 \text{ şi } y = y_2 \\
\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pentru } y = y_1 \text{ şi } y = y_2 \\
\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial y^3} = 0 \quad \text{pentru } y = y_1 \text{ şi } y = y_2
\end{gathered} \tag{5}$$

unde

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} \varphi_0(x, y) &= \frac{1}{24}(x - x_1)^3 (x - x_2) \\ \varphi_4(x, y) &= \frac{1}{24}(y - y_1)^3 (y - y_2) \end{aligned}$$

sau

$$\text{(7)}\qquad \begin{aligned} \varphi_0(x, y) &= \frac{1}{24}(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \\ \varphi_4(x, y) &= \frac{1}{24}(y - y_1)^2 (y - y_2)^2. \end{aligned}$$

Constantele α_1 şi α_2 se aleg astfel ca rezolvarea acestei probleme la limită să fie posibilă.

Dacă $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$ este o soluţie a sistemului (3) cu condiţiile (4), (5) şi (6) sau cu condiţiile (4), (5) şi (7), se obţine formula de cubatură

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned} \iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = &- A_0^2(x_2, y_2) f(x_2, y_2) - A_0^2(x_1, y_2) f(x_1, y_2) - \\ &- A_0^2(x_2, y_1) f(x_2, y_1) - A_0^2(x_1, y_1) f(x_1, y_1) + \\ &+ A_0^1(x_2, y_2) \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + A_1^1(x_2, y_2) \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) - \\ &- A_0^1(x_1, y_2) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) - A_1^1(x_1, y_2) \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) - \\ &- A_0^1(x_2, y_1) \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) - A_1^1(x_2, y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1) + \\ &+ A_0^1(x_1, y_1) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) + A_1^1(x_1, y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) - \\ &- A_0^0(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) - A_1^0(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \\ &- A_2^0(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2) + A_0^0(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_2) + \\ &+ A_1^0(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + A_2^0(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2) + \end{aligned}$$

$$+ A_0^0(x_2, y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + A_1^0(x_2, y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) +$$

$$+ A_2^0(x_1, y_2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_1) - A_0^0(x_1, y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1) -$$

$$- A_1^0(x_1, y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) - A_2^0(x_1, y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_1) + R,$$

unde restul R este dat de formula

$$(9) \qquad R = \iint_D \left(\varphi_0 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + \varphi_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_3 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} + \right.$$

$$\left. + \varphi_4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

iar

$$(10) \qquad A_0^0(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad A_1^0(x, y) = \varphi_2(x, y), \quad A_2^0(x, y) = \varphi_3(x, y)$$

$$(11) \qquad A_0^1(x, y) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad A_1^1(x, y) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}$$

$$(12) \qquad A_0^2(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2}.$$

Deoarece în lucrarea [1] am dat metoda de integrare a sistemului (3) cu condițiile (4), (5) și (6) sau (4), (5) și (7), în această lucrare dăm numai rezultatele obținute.

Într-o lucrare ulterioară, vom relua formulele de tip Obreschkoff, cu gradul de exactitate 4.

§ 2. PRIMA FORMULĂ DE TIP OBRESCHKOFF

2. O soluție a sistemului de ecuații cu derivate parțiale (3) cu condițiile la limită (4), (5) și (6) este

$$\varphi_1(x, y) = \frac{\alpha_1}{6}(x - x_1)^3(y - y_1) - \frac{\alpha_1}{12}(y_2 - y_1)(x - x_1)^3 -$$

$$- \frac{1 + 4\alpha_1}{24}(x_2 - x_1)^2(x - x_1)(y - y_1),$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{\alpha_2}{4}(x - x_1)^2(y - y_1)^2 - \frac{1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)}{8}(y_2 - y_1)(x -$$

$$(13)\qquad - x_1)^2 (y - y_1) - \frac{1+2(\alpha_1+\alpha_2)}{8} (x_2 - x_1)(x - x_1)(y - y_1)^2 +$$

$$\frac{1+4\alpha_1}{48}(y_2 - y_1)^2 (x - x_2)^2 + \frac{1+4\alpha_1}{48}(x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2,$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{\alpha_1}{6}(x - x_1)(y - y_1)^3 - \frac{\alpha_1}{12}(x_2 - x_1)(y - y_1)^3 -$$

$$- \frac{1+4\alpha_1}{24}(y_2 - y_1)^2 (x - x_1)(y - y_1),$$

parametrii α_1 şi α_2 fiind astfel încît

$$(14)\qquad 1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Aplicînd formula (8) şi exprimînd parametrul α_2 cu ajutorul lui α_1 din relaţia (14), sîntem conduşi la formula de cubatură :

$$\iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1+2\alpha_1}{24}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\left[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) + \right.$$

$$\left. + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2)\right] - \frac{\alpha_1}{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\left[(x_2 - \right.$$

$$\left. - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2)\right] + \frac{1+4\alpha_1}{48}(x_2 - x_1)^2 (y_2 -$$

$$- y_1)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2)\right] -$$

$$(15)\qquad - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1)\right] -$$

$$- \frac{1}{8}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\,[2f(x_2, y_2) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] + R,$$

unde restul R este dat de formula (9), cu funcţiile (6) şi (13). Formula (15) este de forma

$$A + \alpha_1 B = 0$$

şi ea trebuind să fie valabilă oricare ar fi parametrul α_1, conduce la formulele

$$(16)\qquad A = 0,$$

$$(17)\qquad B = 0.$$

Formula (16) este formula de cubatură :

$$
\begin{aligned}
\iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = {} & \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\left[2f(x_2, y_2) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)\right] - \\
& - \frac{1}{8}(x_2 - x_1)^2(y_2 - y_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1)\right] - \\
& - \frac{1}{8}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2)\right] + \\
& + \frac{1}{24}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\left[(x_2 - x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) + (y_2 - \right. \\
& \left. - y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2)\right] + \frac{1}{48}(x_2 - x_1)^2(y_2 - y_1)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1, y_2) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_1) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_2)\right] + R
\end{aligned}
\tag{18}
$$

în care

$$
R = \iint_D\left(\varphi_0\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_1\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y} + \varphi_2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2} + \varphi_3\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3} + \varphi_4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\tag{19}
$$

cu

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x, y) &= \frac{1}{24}(x - x_1)^3(x - x_2), \\
\varphi_1(x, y) &= -\frac{1}{24}(x_2 - x_1)^2(x - x_1)(y - y_1), \\
\varphi_2(x, y) &= -\frac{1}{4}(x - x_1)^2(y - y_1)^2 + \frac{1}{8}(y_2 - y_1)(x - x_1)^2(y - y_1) \\
&\quad + \frac{1}{8}(x_2 - x_1)(x - x_1)(y - y_1)^2 + \frac{1}{48}(y_2 - y_1)^2(x - x_1)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{48}(x_2 - x_1)^2(y - y_1)^2, \\
\varphi_3(x, y) &= -\frac{1}{24}(y_2 - y_1)^2(x - x_1)(y - y_1), \\
\varphi_4(x, y) &= \frac{1}{24}(y - y_1)^3(y - y_2).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

3. Formula (17) este

$$
\begin{aligned}
(21)\quad & \frac{1}{12}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\left[(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2,y_1)+(y_2-y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,y_2)\right]- \\
& -\frac{1}{12}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\left[(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2,y_2)+(y_2- \right. \\
& \left. -y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2,y_2)\right]-\frac{1}{12}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1,y_2)+\right. \\
& \left. +\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2,y_1)-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2,y_2)\right]=R_\perp ,
\end{aligned}
$$

unde

$$
(22)\qquad R_1=\iint_D\left(\varphi_1^*\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}+\varphi_2^*\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+\varphi_3^*\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

în care

$$
\begin{aligned}
\varphi_1^*(x,y) &= \frac{1}{6}(x-x_1)^3(y-y_1)-\frac{1}{12}(y_2-y_1)(x-x_1)^3- \\
& \quad -\frac{1}{6}(x_2-x_1)^2(x-x_1)(y-y_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(23)\quad \varphi_2^*(x,y) &= -\frac{1}{2}(x-x_1)^2(y-y_1)^2+\frac{1}{4}(y_2-y_1)(x-x_1)^2(y-y_1)+ \\
& +\frac{1}{4}(x_2-x_1)(x-x_1)(y-y_1)^2+\frac{1}{12}(y_2-y_1)^2(x-x_1)^2+ \\
& \quad +\frac{1}{12}(x_2-x_1)^2(y-y_1)^2, \\
\varphi_3^*(x,y) &= \frac{1}{6}(x-x_1)(y-y_1)^3-\frac{1}{12}(x_2-x_1)(y-y_1)^3- \\
& \quad -\frac{1}{6}(y_2-y_1)^2(x-x_1)(y-y_1).
\end{aligned}
$$

Formula (21) este deosebit de interesantă şi va fi studiată amănunţit într-o lucrare ulterioară.

4. Se pot obţine diferite formule de cubatură, făcînd combinaţii liniare între formulele (18) şi (21).

De exemplu, dacă între formulele (18) și (21) se elimină termenul

$$(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2)$$

se obține formula de cubatură

$$\begin{aligned}
\iint_D f \mathrm{d}x \mathrm{d}y = {} & \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)[2f(x_2, y_2) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] - \\
& - \frac{1}{8}(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1)\right] - \\
& - \frac{1}{8}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2)\right] + \\
& + \frac{1}{24}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\Big[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + \\
& + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2)\Big] - \frac{1}{48}(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2)\Big] + R
\end{aligned} \tag{24}$$

în care

$$\begin{aligned}
R = \iint_D \Big(& \varphi_0 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + \varphi_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_3 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} + \\
& + \varphi_4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\Big) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,
\end{aligned} \tag{25}$$

unde

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{24}(x - x_1)^3 (x - x_2),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) = {} & -\frac{1}{12}(x - x_1)^3 (y - y_1) + \frac{1}{24}(y_2 - y_1)(x - x_1)^3 + \\
& + \frac{1}{24}(x_2 - x_1)^2 (x - x_1)(y - y_1),
\end{aligned}$$

$$\varphi_2(x, y) = -\frac{1}{48}(y_2 - y_1)^2 (x - x_1)^2 - \frac{1}{48}(x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2, \tag{26}$$

$$\varphi_3(x, y) = -\frac{1}{12}(x - x_1)(y - y_1)^3 + \frac{1}{24}(x_2 - x_1)(y - y_1)^3 +$$

$$+ \frac{1}{24}(y_2 - y_1)^2 (x - x_1)(y - y_1),$$

$$\varphi_4(x, y) = \frac{1}{24}(y - y_1)^3 (y - y_2).$$

Formula (24) se poate deduce din formula (15), în care se exprimă parametrul α_1 cu ajutorul parametrului α_2 din relația (14) și apoi se face $\alpha_2 = 0$.

§ 3 A DOUA FORMULĂ DE TIP OBRESCHKOFF

5. O soluție a sistemului de ecuații cu derivate parțiale (3) cu condițiile (4), (5) și (7) este

$$\varphi_1(x, y) = \frac{\alpha_1}{12}[2(x - x_1)^3 (y - y_1) - 2(x_2 - x_1)^2 (x - x_1)(y -$$

$$- y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1)^3]$$

$$(27) \quad \varphi_2(x, y) = \frac{\alpha_2}{4}(x - x_1)^2 (y - y_1)^2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}(y_2 - y_1)(x - x_1)^2 (y -$$

$$- y_1) - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}(x_2 - x_1)(x - x_1)(y - y_1)^2 + \frac{2\alpha_1 - 1}{24}(y_2 -$$

$$- y_1)^2 (x - x_1)^2 + \frac{2\alpha_1 - 1}{24}(x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{\alpha_1}{12}[2(x - x_1)(y - y_1)^3 - 2(y_2 - y_1)^2 (x - x_1)(y -$$

$$- y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1)^3]$$

parametrii α_1 și α_2 fiind legați tot prin relația (14).

Ținînd seama de relația (14) și aplicînd formula (8), vom avea formula de cubatură

$$\iint_D f \, dx \, dy = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)[f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] +$$

$$+ \frac{1}{12}(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)\left[2\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) - \right.$$

$$-3\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_2,\ y_1)\Big] + \frac{1}{12}\,(x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)^2\Big[2\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_2, y_2) -$$

$$-3\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_1, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_2,\ y_1)\Big] + \frac{\alpha_1}{12}\,(x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)\Big[(x_2 -$$

$$- x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x_2, y_2) + (y_2 - y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x_2, y_2)\Big] - \frac{\alpha_1}{12}\,(x_2 - \tag{28}$$

$$- x_1)\,(y_2 - y_1)\,\Big[(x_2 - x_1)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x_2, y_1) + (y_2 - y_1)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x_1,\ y_2)\Big] +$$

$$+\,\frac{1}{24}\,(x_2 - x_1)^2\,(y_2 - y_1)^2\Big[(2\,\alpha_1 - 1)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x_2, y_1) + (2\alpha_1 -$$

$$-\,1)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x_1, y_2) - 4\,(1 + \alpha_1)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x_2,\ y_2)\Big] + R,$$

unde restul este dat de formula (9), cu funcții la limită (7) și (27). Formula (28) este de forma

$$A' + \alpha_1\,B' = 0$$

și ea trebuind să fie valabilă oricare ar fi parametrul α_1, vom avea

$$A' = 0, \tag{29}$$

$$B' = 0. \tag{30}$$

Formula (29) este formula de cubatură

$$\iint_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,[f\,(x_1, y_2) + f\,(x_2, y_1)] + \tag{31}$$

$$+\,\frac{1}{12}(x_2 - x_1)^2(y_2 - y_1)\Big[2\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_2, y_2) + \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_1,\ y_2) -$$

$$-\ 3\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_2,\ y_1)\Big] + \frac{1}{12}(x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)^2\Big[2\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_2,\ y_2) -$$

$$-\,3\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_1,\ y_2) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_2, y_1)\,\Big] - \frac{1}{12}\,(x_2 - x_1)^2\,(y_2 -$$

$$-\,y_1)^2\,\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x_2, y_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x_2, y_2)\Big] + R$$

în care

$$R = \iint_D \left(\varphi_0\,\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_2\,\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_4\,\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{32}$$

cu

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x, y) &= \frac{1}{24}(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \\
\varphi_2(x, y) &= -\frac{1}{24}(x - x_1)^2 (y - y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)(x - x_1)^2 (y - y_1) + \\
&\quad + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(x - x_1)(y - y_1)^2 - \frac{1}{24}(y_2 - y_1)^2 (x - x_1)^2 - \qquad (33) \\
&\quad - \frac{1}{24}(x_2 - x_1)^2 (y - y_1)^2 \\
\varphi_4(x, y) &= \frac{1}{24}(y - y_1)^2 (y - y_2)^2 .
\end{aligned}
$$

Formula (30) este identică cu formula (21).

Primită la redacţie la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul
al Academiei R.P.R. – Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Generalizarea formulei de cuadratură a lui N. Obreschkoff la integrale duble.* St. cerc. mat. (Cluj) **XIII**, 35–86 (1962).
2. N. Obreschkoff, *Neue Quadraturformeln.* Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1940, p. 6–26.

ASUPRA ELICOIDULUI DE ARIE MINIMA DIN SPAŢIUL ELIPTIC

DE

RADU ROŞCA

După ce se pune în evidenţă faptul că un elicoid de arie minima R_m, din spaţiul eliptic Σ_3, posedă ∞^1 reţele Voss şi ∞^1 reţele Cebîşev conjugate se stabileşte o corespundenţă între acestea din urmă, şi cupluri de suprafeţe modante aplicabile, din spaţiul obişnuit E_3.

Faptul cunoscut, că într-un spaţiu eliptic tridimensional Σ_3, o dualitate conservă caracterul minima al unei suprafeţe, şi transformă o reţea Cebîşev conjugată, într-o reţea Voss [1]) ne va permite să punem în evidenţă, în această notă, o proprietate a elicoidului de arie minima din Σ_3, care se pretează la diferite dezvoltări.

1. Fie u^j $(j = 1, 2)$ parametrii liniilor de curbură ale unei suprafeţe minima oarecare (**M**) din Σ_3 (vom presupune curbura spaţiului Σ_3 redusă la unitate printr-o omotetie prealabilă) şi **M** şi **M*** punctele *normate* care descriu respectiv pe (**M**) şi duala sa (**M***).

Dacă $\{\tau\} \equiv \{\mathbf{M}\,\mathbf{M}_1\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{M}^*\}$ este tetraedrul autodual construit pe **M**, **M*** şi pe tangentele $\mathbf{M}\,\mathbf{M}_1$ şi $\mathbf{M}\,\mathbf{M}_2$ la liniile de curbură în **M**, (tetraedrul lui Demoulin), avem pentru deplasarea infinitezimală a lui $\{\tau\}$ formulele lui Bianchi [1] condensate sub formă vectorială:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} = \frac{e^{\theta}}{\sqrt{2}}\,\mathbf{M}_1,$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}^*}{\partial u^1} = \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}}\,\mathbf{M}_1, \tag{1.1}$$

---

[1]) Pe cînd o reţea Voss este prin definiţie conjugată în sens Dupin, o reţea Cebîşev în general nu este.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 6, p. 843—849, BUCUREŞTI, 1965

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial u^1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u^2}\mathbf{M}_1, \\ \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial u^1} &= -\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{\sqrt{2}}\mathbf{M} - \frac{\mathrm{e}^{-\theta}}{\sqrt{2}}\mathbf{M}^* - \frac{\partial \theta}{\partial u^2}\mathbf{M}_2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^2} &= \frac{\mathrm{e}^{\theta}}{\sqrt{2}}\mathbf{M}_2, \\ \frac{\partial \mathbf{M}^*}{\partial u^2} &= -\frac{\mathrm{e}^{-\theta}}{\sqrt{2}}\mathbf{M}_2, \\ \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial u^2} &= -\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{\sqrt{2}}\mathbf{M} + \frac{\mathrm{e}^{-\theta}}{\sqrt{2}}\mathbf{M}^* - \frac{\partial \theta}{\partial u^1}\mathbf{M}_1, \\ \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial u^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u^1}\mathbf{M}_2. \end{aligned} \tag{1.1'}$$

(suprafaţa (**M**) fiind minima, cele două curburi principale sînt

$\frac{1}{r_1} = -\mathrm{e}^{-2\theta}$ şi $\frac{1}{r_2} = \mathrm{e}^{-2\theta}$), cu condiţia de integrabilitate

$$\nabla^2\theta + \mathrm{sh}\, 2\theta = 0 \quad (\nabla^2\theta = \mathrm{Lap}\ \theta), \tag{1.2}$$

care este de fapt ecuaţia lui Gauss extinsă la spaţiul Σ_3 sau încă ecuaţia care apare în deformarea sferelor din spaţiul obişnuit E_3.

Liniile asimptotice α^j formînd, ca şi cele de curbură, un sistem ortogonal [1], sînt definite de

$$\alpha^1 = u^1 + u^2, \quad \alpha^2 = u^1 - u^2.$$

Rezultă de aici [6] condiţia

$$\theta = \theta(u^1 + \varepsilon u^2), \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{1.3}$$

pentru ca suprafaţa (**M**) să fie riglată, şi este uşor de văzut că ne putem mărgini să luăm $\varepsilon = 1$.

Ecuaţia (1.2) devine în acest caz

$$\theta'' + \mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta = 0, \quad \left(\theta'' = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{(\mathrm{d}\alpha^1)^2}\right), \tag{1.4}$$

de unde deducem, printr-o primă cuadratură,

$$2\,\theta'^2 + \mathrm{ch}\, 2\theta = c \quad (c = \mathrm{const.}). \tag{1.5}$$

În aceste condiţii vom nota cu E_m elicoidul de arie minima general [2]) definit de ecuaţiile (1.1) şi (1.1′), unde θ este de forma (3) şi satisface relaţia (1.5).

Fie atunci $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2}{\sqrt{2}}$ şi $\mathbf{Q} = \dfrac{\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2}{\sqrt{2}}$ punctele normate care descriu mijloacele segmentelor $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ şi $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$. (Punctele duble ale *involuţiei hiperbolice* $\mathbf{M}_1\ \Phi\ \mathbf{M}_2$ [2]).

Cu ajutorul lui (1.1) şi (1.1′), obţinem în primul rînd

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^1} = \frac{1}{2}(2\theta' \mathbf{Q} - e^{\theta}\,\mathbf{M} - e^{-\theta}\,\mathbf{M}^*), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^2} = -\frac{1}{2}(2\theta'\,\mathbf{Q} + e^{\theta}\,\mathbf{M} - e^{-\theta}\,\mathbf{M}^*)$$

şi

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^1} = -\frac{1}{2}(2\theta'\,\mathbf{P} + e^{\theta}\,\mathbf{M} + e^{-\theta}\,\mathbf{M}^*), \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^2} = \frac{1}{2}(2\theta'\,\mathbf{P} + e^{\theta}\,\mathbf{M} - e^{-\theta}\,\mathbf{M}^*),$$

de unde deducem, ţinînd seama de (1.4) şi (1.5),

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial u^1\,\partial u^2} = \frac{1}{2}(c - e^{2\theta})\,\mathbf{P}, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial u^1\,\partial u^2} = \frac{1}{2}(c - e^{2\theta -})\,\mathbf{Q}. \tag{1.9}$$

Aşadar produsele de patru puncte

$$\left(\mathbf{P}\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^1}\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^2}\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial u^1\,\partial u^2}\right) \text{ şi } \left(\mathbf{Q}\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^1}\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^2}\ \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial u^1\,\partial u^2}\right)$$

fiind nule, curbele u^j *trasează pe suprafeţele* (**P**) *şi* (**Q**) *reţelele conjugate.*

Să arătăm acum că aceste curbe *sînt şi reţele Cebîşev.* În acest scop să desemnăm cu p_{ik} şi q_{ik} coeficienţii primelor forme corespunzătoare suprafeţelor (**P**) şi (**Q**) (sau reţelelor (**P**) şi (**Q**)). Se deduce imediat din (1.6) şi (1.7) şi ţinînd seama de (1.5),

$$p_{11} = \frac{c}{2} = p_{22}, \quad p_{12} = \frac{1}{2}(e^{2\theta} - c), \tag{1.10}$$

---

[2]) Reamintim că în spaţiul Σ_3, există două tipuri de riglate de arie minima; elicoidul de arie minima general şi cel a cărui curbură totală este nulă (*suprafaţa lui Clifford* sau *hipercilindroidul*). O suprafaţă a lui Clifford mai poate fi definită ca o riglată de arie minima pentru care parametrul mişcării elicoidale este egal cu curbura spaţiului Σ_3.

$$(1.11)\qquad q_{11} = \frac{c}{2} = q_{22},\quad q_{12} = \frac{1}{2}(e^{-2\theta} - c).$$

Şi anularea simbolurilor lui Christoffel $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$ şi $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$ corespunzători p_{ik} şi q_{ik}, după cum rezultă imediat din (1.10) şi (1.11), demonstrează propoziţia de mai sus.

Am obţinut astfel un prim rezultat şi anume :

Fie un elicoid R_m şi fie $\mathbf{M}_1$ şi $\mathbf{M}_2$ focarele dreptei δ care este duala normalei în $\mathbf{M}$ la R_m. *Cînd* δ *descrie congruenţa pseudonormală avînd pe* $(\mathbf{M}_1)$ *şi* $(\mathbf{M}_2)$ *ca pînze focale, cele două jumătăţi ale segmentului* $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ *descriu fiecare o reţea Cebîşev conjugată.*

Pentru a stabili proprietatea pe care o avem în vedere, trebuie să determinăm acum reţelele duale $(\mathbf{P}^*)$ şi $(\mathbf{Q}^*)$ corespunzătoare respectiv lui $(\mathbf{P})$ şi $(\mathbf{Q})$.

Punctele normate care descriu aceste reţele sînt definite, după cum se ştie [3], de

$$(1.12)\qquad p\mathbf{P}^* = \left[\mathbf{P}\,\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^1}\,\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^2}\right],$$

$$(1.13)\qquad q\,\mathbf{Q}^* = \left[\mathbf{Q}\,\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^1}\,\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^2}\right].$$

În formulele (1.12) şi (1.13) parantezele [ ] indică operaţia de *produs exterior a trei puncte* din Σ_3, iar p şi q discriminanţii coeficienţilor p_{ik} şi q_{ik}.

Introducînd în aceste paranteze valorile lui $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^j}$ şi $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^j}$, date de (1.6) şi (1.7), şi ţinînd seama de regula de permutare [3] a vîrfurilor normate ale lui $\{\tau\}$, se obţine

$$(1.14)\qquad \mathbf{P}^* = \frac{1}{p}\left(\frac{\mathbf{Q}}{2} + \theta' e^{\theta}\,\mathbf{M}^*\right)$$

$$(1.15)\qquad \mathbf{Q}^* = \frac{1}{q}\left(\frac{\mathbf{P}}{2} - \theta' e^{\theta}\,\mathbf{M}\right).$$

Conform teoriei generale, punctele $\mathbf{P}^*$ şi $\mathbf{Q}^*$ *descriu reţele Voss*, cînd variază u^j şi expresiile lor din (1.14) şi (1.15) pun în evidenţă faptul că *sînt situate respectiv pe dreptele duale* $d^* = \mathbf{M}^*\,\mathbf{Q}$ şi $d = \mathbf{MP}$. Caracterul Voss al reţelelor de mai sus (care este exprimat prin anularea simbolurilor $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$ şi $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ corespunzători lui $(\mathbf{P}^*)$ şi $(\mathbf{Q}^*)$) se poate verifica uşor, observînd că coeficienţi p^*_{ik} şi q^*_{ik} ce figurează în aceste simboluri sînt legaţi de p_{ik} şi q_{ik} prin formulele

$$-\,p^*_{ik} = k_p\,p_{ik},\quad -\,q^*_{ik} = k_q\,q_{ik},$$

unde k_p şi k_q sînt curburile relative ale lui $(\mathbf{P}^*)$ şi $(\mathbf{Q}^*)$.

Pe de altă parte, deducem din (1.6) şi (1.7)

$$\mathbf{M} = -e^{-\theta}\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^1} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u^2}\right) \text{ şi } \mathbf{M}^* = -e^{\theta}\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^1} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u^2}\right).$$

Aceste relaţii exprimă, ţinînd seama de (1), că suprafeţele (M*) şi (Q) şi suprafeţele (M) şi (P) sînt în ***corespondenţă tangenţială*** **şi trecînd la parametri** α^j al asimptoticelor se găseşte

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha^1} = \frac{e^{\theta}}{2}\mathbf{P} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \mathbf{M}^*}{\partial \alpha^1} = \frac{e^{-\theta}}{[2}\mathbf{Q}.$$

Din consideraţiile care precedă, deducem că congruenţele [M P] şi [M* Q] ***sînt parabolice*****, adică razele congruenţelor sînt tangente la liniile asimptotice ale unei pînze focale. Rezultă de aici (pînzele focale coincizînd) că** reţelele (**P**) şi (**Q***) sînt situate pe suprafaţa R_m, iar dualele lor (**P***) şi (**Q**) pe suprafaţa R_m^*, duală lui R_m.

Se poate de altfel verifica printr-un calcul, pe care nu îl vom mai dezvolta, că desfăşurabilele congruenţelor considerate coincid.

Dacă desemnăm cu D o dualitate şi cu $\mathcal{R}_l$ transformarea punctului **I** în *rectangularul* său **I*** pe dreapta l (două puncte rectangulare sînt prin definiţie la o distanţă $\frac{\pi}{2}$ unul de altul, adică produsul scalar $\mathbf{I}.\mathbf{I}^* = 0$), putem enunţa următoarea propoziţie :

Fie un elicoid R_m, *descris de punctul* $\mathbf{M}(u^j)$ *ai cărui parametri* u^j *corespund liniilor de curbură. Pe generatoarea* d, *izvorîtă din* **M**, *cele două puncte* **P** *şi* **Q***, *respectiv definite prin transformările* $\mathbf{P} = \mathcal{R}_d \mathbf{M}$ şi $\mathbf{Q} = D\,\mathcal{R}_{d*}\,D\,\mathbf{M}$ *descriu, respectiv cînd variază* u^j, *o reţea Cebîşev conjugată şi o reţea Voss.*

Această propoziţie pe lîngă faptul că generalizează proprietatea elicoidului de arie minima din E_3 de a fi ∞^1 suprafaţă Voss [5] arată în plus că în *spaţiul* Σ_3 *la fiecare reţea Voss trasată pe* R_m *îi corespunde tot pe* R_m *o reţea Cebîşev conjugată.*

2. Vom termina acest studiu prin examinarea cuplurilor de suprafeţe aplicabile din E_3 pe care le putem face să corespundă unui elicoid R_m. În prealabil reamintim următoarea teoremă a lui Bianchi [5] : *Fiecărei reţea Cebîşev conjugată* (v^j) *din* Σ_3 *îi corespund în* E_3 *două suprafeţe* S_1 *şi* S_2 *aplicabile, curbele* v^j *formînd pe suprafeţele* S_j *reţele Cebîşev cinematic autoconjugate.*

Cum elicoidul R_m se transformă prin dualitate într-o suprafaţă R_m^* de aceeaşi definiţie, vom avea de considerat, în cazul de care ne ocupăm, un al doilea cuplu $[S_1^*, S_2^*]$ de suprafeţe aplicabile, care corespunde reţelei Cebîşev trasată pe R_m^*.

Pentru a pune reţele Cebîşev în joc, sub formă canonică, să facem schimbarea de parametri

$$v^j = \bar{c}\, u^j, \; \bar{c} = \sqrt{\frac{c}{2}}\,. \tag{2.1}$$

În aceste condiţii, introducînd unghiurile ω şi ω^* definite de

$$(2.2)\qquad \frac{e^{2\theta}}{c} - 1 = \cos 2\,\omega, \quad \frac{e^{-2\theta}}{c} - 1 = \cos^2 \omega^*$$

şi ţinînd seama de (1.10) şi (1.11), elementele liniare ale reţelelor Cebîşev conjugate, trasate pe R_m şi R_m^*, devin respectiv

$$ds^2 = (dv^1)^2 + 2\cos 2\,\omega\, dv^1\, dv^2 + (dv^2)^2$$

$$ds^{*2} = (dv^1)^2 + 2\cos 2\,\omega^*\, dv^1\, dv^2 + (dv^2)^2$$

Conform teoremei lui Bianchi, fiecărei din aceste reţele, îi corespunde în E_3 un cuplu de reţele Cebîşev (neconjugate în sens Dupin), aplicabile şi *suplimentare* celei din Σ_3 şi anume

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} ds_1^2 = ds_2^2 &= (dv^1)^2 - 2\cos 2\omega\, dv^1\, dv^2 + (dv^2)^2, \\ ds_1^{*2} = ds_2^{*2} &= (dv^1)^2 - 2\cos 2\omega^*\, dv^1\, dv^2 + (dv^2)^2. \end{aligned}$$

Pe de altă parte se obţine din (1.6) şi (1.7) cu ajutorul ecuaţiilor (1.1), (1.3) şi (1.4)

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{(\partial u^1)^2} &= -\frac{1}{2}(e^{2\theta}\,\mathbf{Q} + c\,\mathbf{P} + 2\theta'\, e^{\theta}\,\mathbf{M}), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{(\partial u^2)^2} &= \frac{1}{2}(e^{2\theta}\,\mathbf{Q} - c\mathbf{P} - 2\theta'\, e^{\theta}\,\mathbf{M}) \end{aligned}$$

şi

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{(\partial u^1)^2} &= -\frac{1}{2}(e^{-2\theta}\,\mathbf{P} + c\,\mathbf{Q} - 2\theta'\, e^{-\theta}\,\mathbf{M}^*), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{(\partial u^2)^2} &= \frac{1}{2}(e^{-2\theta}\,\mathbf{P} - c\,\mathbf{Q} + 2\theta'\, e^{-\theta}\,\mathbf{M}^*), \end{aligned}$$

Dar în virtutea lui (2.1), avem

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{(\partial u^j)^2} = \frac{c}{2}\,\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{(\partial v^j)^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{(\partial u^j)^2} = \frac{c}{2}\,\frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{(\partial v^j)^2}$$

şi nu ne mai rămîne decît de a efectua produsele scalare

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{(\partial u^j)^2}\cdot \mathbf{P}^* \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{(\partial u^j)^2}\cdot \mathbf{Q}^*$$

pentru a obţine coeficienţi p_{ik}^* şi p_{ik}^* corespunzători formelor $d^2\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^*$ şi $d^2\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^*$.

Se obţine astfel

$$(2.6)\qquad p'_{11} = -\frac{e^{2\theta}}{4p}, \quad p'_{22} = \frac{e^{2\theta}}{4p}, \quad q'_{11} = -\frac{e^{-2\theta}}{4q}, \quad q'_{22} = \frac{e^{-2\theta}}{4q}.$$

Notînd pentru motive de comoditate

$$\frac{e^{2\theta}}{4p} = \lambda \quad \text{şi} \quad \frac{e^{-2\theta}}{4q} = \lambda^*$$

şi folosind formulele lui Bianchi [5] relativ la coeficienţii $d_{j\,|\,ik}$, $d^*_{i\,|\,ik}$ corespunzători formelor secunde ale suprafeţelor S_j şi S^*_j aceştia au ca expresie

$$(2.7) \qquad d_{j\,|\,11} = -\lambda = d_{j\,|\,22},\ d_{1\,|\,12} = \sin 2\omega,\ d_{2\,|\,12} = -\sin 2\omega,$$

$$(2.8) \qquad d^*_{j\,|\,11} = -\lambda^* = d^*_{j\,|\,22},\ d^*_{1\,|\,12} = \sin 2\omega^*,\ d^*_{2\,|\,12} = -\sin 2\omega^*.$$

Aceasta fiind, din relaţiile (2.3), (2.7) şi (2.8) se deduce imediat că liniile de curbură pe cele patru suprafeţe S_j şi S^*_j se corespund şi corespund asimptoticelor α^j a celor doi elicoizi duali R_m şi R^*_m. Elementele liniare ale acestor suprafeţe, parametrate prin α^j devin astfel

$$ds^2_1 = ds^2_2 = \sin^2\omega\,(d\alpha^1)^2 + \cos^2\omega\,(d\alpha^2)^2,$$

$$ds^{*2}_1 = ds^{*2}_2 = \sin^2\omega^*\,(d\alpha^1)^2 + \cos^2\omega^*\,(d\alpha^2)^2$$

şi deoarece ω şi ω^* sînt funcţii numai de α^1 este vizibil că suprafeţele în joc sînt *suprafeţe modante* (Suprafeţe pentru care un sistem de linii de curbură este format de geodezice). Reamintim cu această ocazie, următoarea teoremă care concordă cu rezultatul găsit :

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o suprafaţă din E_3 să admită o suprafaţă aplicabilă cu liniile de curbură în corespondenţă şi susceptibilă de o deformaţiune continuă este ca să fie o suprafaţă modantă (Surfaces moulures, Molding surfaces).

Putem deci enunţa următoarea propoziţie : În *spaţiul* Σ_3 *un elicoid* R_m *şi dualul său*, R^*_m, *determină două cupluri* $[S_1\ S_2]$ *şi* $[S^*_1\ S^*_2]$ *de suprafeţe modante aplicabile, a căror linii de curbură în corespondenţă, corespund asimptoticelor lui* R_m *şi* R^*_m, *fiecare cuplu fiind susceptibil de o deformare continuă.*

Primită la redacţie la 12 februarie 1965

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.
Bucureşti, str. M. Eminescu nr. 47

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bianchi, *Lezioni di Geom. differenziale*. Vol. II, Part. II, Zanichelli, Bologna, 1930. L. Bianchi, *Sulla varietà a tre dimenzioni deformabili entro la spazio euclideo a quattro dimensioni*. Mem. Soc. It. delle Sc. (dei × 2) **13**, 261—323 (1905).
2. H. S. M. Coexter, *Non-euclidean Geometry*. University of Toronto Press, 1961.
3. R. Garnier, *Geometrie et cinématique Cayleyennes*. Gauthier Villars, Paris, 1951.
4. S. Finicov, *Deformation à réseau conjugué*. Mem. des Sci. Mathématiques, Fasc. XCVI, Gauthier Villars, Paris, 1939.
5. R. Roşca, *Asupra unui tip de congruenţă* (ω). St. cerc. mat. XVII, *5*, 1965.

NOMOGRAME CU TRANSPARENT FĂRĂ ELEMENTE GRADATE [1]

DE

LASCU BAL şi MARIA PETER

(Cluj)

1. În multe probleme de calcul grafic se folosesc pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii mai complexe, nomogramele cu plan mobil sau nomogramele cu transparent. În cazurile cînd transparentul conţine multe elemente gradate, utilizarea lui devine greoaie şi precizia suferă. Din acest motiv se folosesc numai acele tipuri de nomograme în care transparentul conţine elemente simple : segmente de dreaptă, cercuri, scări rectilinii, scări circulare etc. Astfel sînt nomogramele cu puncte aliniate, nomogramele cu transparent circular, nomogramelele cu transparent dreptunghiular, şi altele. Rămîne însă o importantă clasă de ecuaţii reprezentabile nomografic, care nu pot fi rezolvate în acest fel din cauza complexităţii nomogramei.

În articolul de faţă ne preocupăm de extinderea transparentului cu elemente negradate şi în alte cazuri care pînă în prezent se reprezentau prin nomograme cu transparent cu elemente gradate.

2. Să considerăm la început cazul cînd legăturile între transparent (π') şi planul fix (π) sînt două contacte duble, dintre care primul contact dublu şi unul simplu din al doilea sînt contacte de poziţie, iar ultimul contact simplu din contactul al doilea este contact de rezolvare.

În ipoteza că în planul mobil (π') avem două cîmpuri binare şi în cel fix (π) tot două cîmpuri binare, atunci ataşînd celor două plane

---

[1] Lucrare prezentată la Sesiunea ştiinţifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 11–12 decembrie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 6, p. 851–861, BUCUREŞTI, 1965

sistemele de coordonate $x'O'y'$, respectiv xOy (fig. 1) putem scrie ecuaţiile cîmpurilor binare:

$$(\pi') \qquad\qquad\qquad\qquad (\pi)$$

$$(u_1, u_2): \begin{cases} x' = f_{1.2}(u_1, u_2) \\ y' = g_{1,2}(u_1, u_2) \end{cases} \qquad (u_5, u_6): \begin{cases} x = f_{5.6}(u_5, u_6) \\ y = g_{5.6}(u_5, u_6) \end{cases}$$

$$(u_3, u_4): \begin{cases} x' = f_{3.4}(u_3, u_4) \\ y' = g_{3.4}(u_3, u_4) \end{cases} \qquad (u_7, u_8): \begin{cases} x = f_{7.8}(u_7, u_8) \\ y = g_{7.8}(u_7, u_8) \end{cases}$$

Formula de structură a acestei nomograme este:

$$P'_{1,2}\,|=|\,P_{5,6} \qquad P'_{3,4}\,|\rightrightarrows|\,P_{7,8}$$

Această nomogramă rezolvă ecuaţia:

$$(f_{3.4} - f_{1.2})^2 + (g_{3.4} - g_{1.2})^2 = (f_{7.8} - f_{5.6})^2 + (g_{7.8} - g_{5.6})^2, \tag{1}$$

în care fiind cunoscut orice sistem de valori pentru şapte variabile se determină valorile corespunzătoare a celei de-a opta variabilă.

Să desenăm acum toate cîmpurile binare pe un singur plan, planul fix, şi să folosim în loc de planul transparent cu elemente gradate, o riglă negradată, sau un dreptunghi. Marcăm punctele $P'_{1,2}$ şi $P'_{3,4}$ pe marginea riglei şi fixăm apoi rigla astfel încît punctul $P'_{1,2}$ să coincidă cu punctul $P_{5,6}$, iar $P'_{3,4}$ să fie situat pe o curbă cotată din familia u_7 (fig. 2).

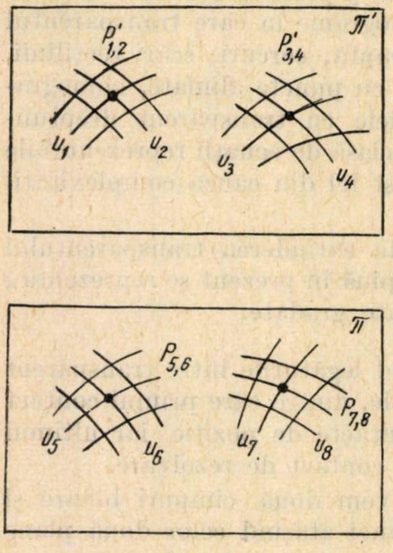


Fig. 1

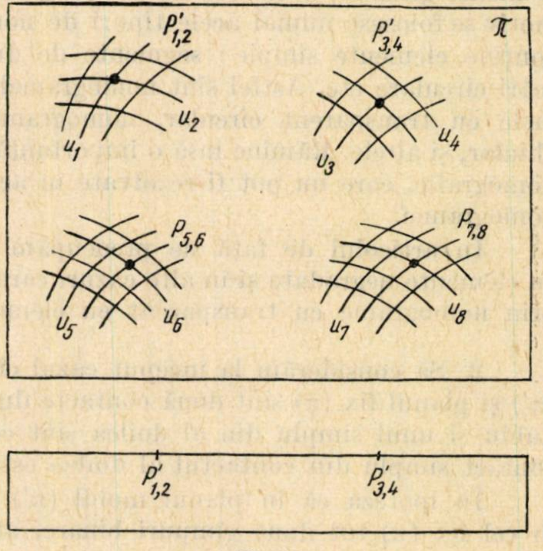


Fig. 2

Cota curbei din familia u_8, care trece prin acest punct împreună cu celelalte cote date, formează o soluţie a ecuaţiei (1).

Se poate observa că rigla poate fi înlocuită cu compasul.

Acest tip de nomogramă e cunoscut sub numele de „nomogramă cu compas”.

Evident că în acest cadru intră şi ecuaţiile :

$$(f_3 - f_1)^2 + (g_4 - g_2)^2 = (f_7 - f_5)^2 + (g_8 - g_6)^2 \tag{2}$$

$$(f_2 - f_1)^2 + (g_2 - g_1)^2 = (f_4 - f_3)^2 + (g_4 - g_3)^2 \tag{3}$$

$$(f_2 - a)^2 + (b - g_1)^2 = (c - f_3)^2 + (g_4 - d)^2 \tag{4}$$

care reprezintă, din punct de vedere geometric, particularizări ale primei nomograme.

3. Să considerăm acum cazul în care legăturile între planele (π) şi (π') sînt determinate de trei contacte duble : un contact dublu şi unul simplu, fiind contacte de poziţie, iar un contact simplu şi unul dublu — contacte de rezolvare.

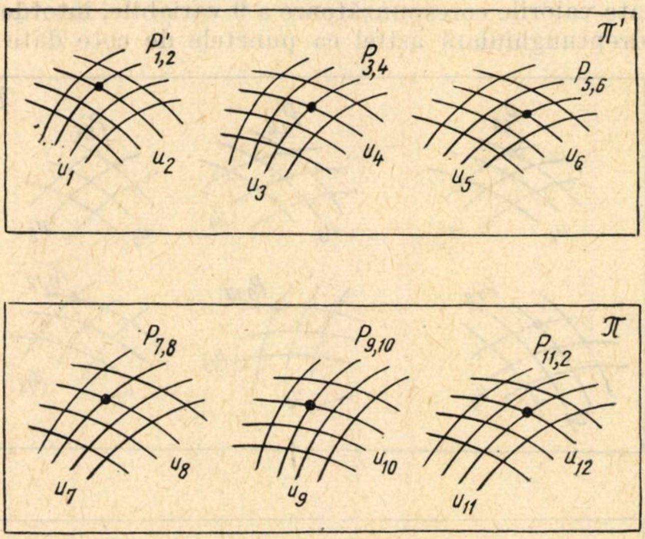


Fig. 3

Să luăm în cele două plane cîte trei cîmpuri binare (fig. 3) :

(π') $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (π)

$$(u_1, u_2) : \begin{cases} x' = f_{1,2}\,(u_1\,,\, u_2) \\ y' = g_{1,2}\,(u_1\,,\, u_2) \end{cases} \qquad (u_7, u_8) : \begin{cases} x = f_{7,8}\,(u_7\,,\, u_8) \\ y = g_{7,8}\,(u_7\,,\, u_8) \end{cases}$$

$$(u_3, u_4) : \begin{cases} x' = f_{3,4}\,(u_3\,,\, u_4) \\ y' = g_{3,4}\,(u_3\,,\, u_4) \end{cases} \qquad (u_9, u_{10}) : \begin{cases} x = f_{9,10}\,(u_9\,,\, u_{10}) \\ y = g_{9,10}\,(u_9\,,\, u_{10}) \end{cases}$$

$$(u_5, u_6) : \begin{cases} x' = f_{5,6}\,(u_5\,,\, u_6) \\ y' = g_{5,6}\,(u_5\,,\, u_6) \end{cases} \qquad (u_{11}, u_{12}) : \begin{cases} x = f_{11,12}\,(u_{11}\,,\, u_{12}) \\ y = g_{11,12}\,(u_{11}\,,\, u_{12}) \end{cases}$$

Nomograma considerată are formula de structură :

$$P'_{1,2} \,|{=}|\, P_{7,8} \qquad P'_{3,4} \,|\underset{\rightarrow}{-}|\, P_{9,10} \qquad P'_{5,6} \,|\rightrightarrows|\, P_{11,12}$$

și reprezintă următorul sistem de trei ecuații cu 12 variabile :

$$(5)\left\{\begin{aligned} &(f_{3.4}-f_{1.2})^2+(g_{3.4}-g_{1.2})^2=(f_{9.10}-f_{7.8})^2+(g_{9.10}-g_{7.8})^2\\ &(f_{5.6}-f_{1.2})\,[(f_{3.4}-f_{1.2})\,(f_{9.10}-f_{7.8})+(g_{3.4}-g_{1.2})\,(g_{9.10}-g_{7.8})]-\\ &-(g_{5.6}-g_{1.2})\,[(f_{3.4}-f_{1.2})\,(g_{9.10}-g_{7.8})-(f_{9.10}-f_{7.8})(g_{3.4}-g_{1.2})]=f_{11.12}-f_{7.8}\\ &(g_{5.6}-g_{1.2})\,[(f_{3.4}-f_{1.2})\,(f_{9.10}-f_{7.8})+(g_{3.4}-g_{1.2})\,(g_{9.10}-g_{7.8})]-\\ &-(f_{5.6}-f_{1.2})\,[(f_{3.4}-f_{1.2})\,(g_{9.10}-g_{7.8})-(f_{9.10}-f_{7.8})(g_{3.4}-g_{1.2})]=g_{11.12}-g_{7.8}\end{aligned}\right.$$

Procedînd și în acest caz în mod analog se desenează toate cîmpurile binare pe planul fix, iar în loc de transparent cu elemente gradate se folosește un echer sau o placă dreptunghiulară.

Fiind date valorile corespunzătoare a 9 variabile, întotdeauna putem așeza placa dreptunghiulară astfel ca punctele de cote date $P'_{1,2}$, $P'_{3,4}$ și $P'_{5,6}$ să fie situate pe două laturi care formează un unghi drept (vezi fig. 4).

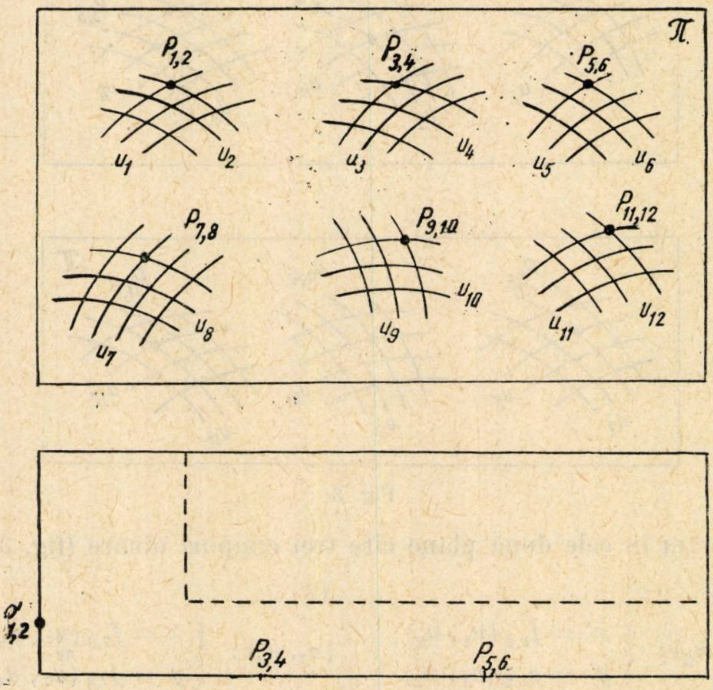


Fig. 4

Deplasăm placa, astfel încît punctul $P'_{1,2}$ să se suprapună peste $P_{7,8}$, iar $P'_{3,4}$ pe o curbă din familia u_9. Determinăm astfel cota curbei u_{10}

care trece prin punctul $P_{9,10}$ şi pe care s-a suprapus punctul $P'_{3,4}$, iar valorile corespunzătoare variabilelor u_{11}, u_{12} sînt date de coordonatele curbilinii ale punctului cu care va coincide $P'_{5,6}$.

Se poate folosi şi în acest caz repetat, de trei ori compasul.

4. Alte nomograme, cu ecuaţiile corespunzătoare, se obţin în cazul în care legăturile între cele două plane sînt : un contact dublu şi unul simplu — contacte de poziţie, şi un contact dublu — contact de rezolvare, sau aceleaşi contacte de poziţie ca mai sus, dar un contact simplu de rezolvare.

Ca exemplu luăm cazul în care în planul (π') avem trei cîmpuri binare, iar în planul (π) — două cîmpuri binare şi o familie de curbe (fig. 5).

Formula de structură este :

$$P'_{1,2}\;|{=}|\;P_{7,8}\qquad P'_{3,4}\;|{-}|\;C_9\qquad P'_{5,6}\;|{\rightleftarrows}|\;P_{10,11}$$

iar sistemul de ecuaţii corespunzător :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2=(f_{10.11}-f_{7.8})^2+(g_{10.11}-g_{7.8})^2,\\
&F_9\left\{\frac{f_{7.8}\,[(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2]+(f_{3.4}-f_{1.2})[(f_{5.6}-f_{1.2})(f_{10.11}-f_{7.8})+}{(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2}\right.\\
&\frac{+(g_{5.6}-g_{1.2})(g_{10.11}-g_{7.8})]-(g_{3.4}-g_{1.2})\,[(f_{5.6}-f_{1.2})(g_{10.11}-g_{7.8})-}{(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2}\\
&\frac{-(f_{10.11}-f_{7.8})(g_{5.6}-g_{1.2})]}{(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2};\;\frac{g_{7.8}\,[(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2]+}{(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2}\\
&\frac{+(g_{3.4}-g_{1.2})\,[(f_{5.6}-f_{1.2})(f_{10.11}-f_{7.8})+(g_{5.6}-g_{1.2})(g_{10.11}-g_{7.8})]+}{(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2}\\
&\left.\frac{+(f_{3.4}-f_{1.2})\,[(f_{5.6}-f_{1.2})(g_{10.11}-g_{7.8})-(f_{10.11}-f_{7.8})(g_{5.6}-{}_{1.2})]}{(f_{5.6}-f_{1.2})^2+(g_{5.6}-g_{1.2})^2};\;u_9\right\}=0.
\end{aligned}\right.$$

Din sistemul (6) determinăm variabilele u_{10}, u_{11}, fiind date celelalte nouă.

Dacă contactul de rezolvare din cazul de mai sus este simplu, nomograma are următoarea formulă de structură :

$$P'_{1,2}\;|{=}|\;P_{7,8}\qquad P'_{3,4}\;|{-}|\;C_9\qquad P'_{5,6}\;|{\rightarrow}|\;C_{10}$$

şi ecuaţia reprezentată se obţine prin eliminarea lui α din sistemul :

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&F_9\,[f_{7.8}+(f_{3.4}-f_{1.2})\cos\alpha-(g_{3.4}-g_{1.2})\sin\alpha;\\
&g_{7.8}+(g_{.3.4}-g_{1.2})\cos\alpha+(f_{3.4}-f_{1.2})\sin\alpha;\,u_9]=0,\\
&F_{10}[f_{7.8}+(f_{5.6}-f_{1.2})\cos\alpha-(g_{5.6}-g_{1.2})\sin\alpha;\\
&g_{7.8}+(g_{3.4}-g_{1.2})\cos\alpha+(f_{5.6}-f_{1.2})\sin\alpha;\;u_{10}]=0.
\end{aligned}\right.$$

Trecînd toate elementele nomogramei în acelaşi plan, putem folosi acelaşi transparent dreptunghiular ca şi în cazul anterior.

Dacă formula de structură conține mai mult de trei puncte în coincidență, atunci utilizarea transparentului dreptiunghiular nu mai este simplă; al patrulea punct cade în interiorul dreptunghiului, ceea ce necesită citirea prin transparent (adică tocmai ce am căutat să evităm prin noua metodă de folosire a transparentului).

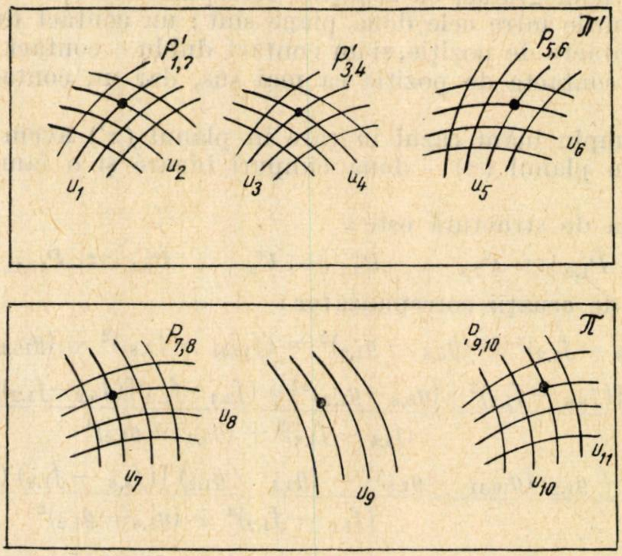

π'
P'1,2
P'3,4
P5,6
u1
u2
u3
u4
u5
u6
π
P7,8
P9,10
u7
u8
u9
u10
u11

Fig. 5

În aceste cazuri se poate aplica, destul de simplu, compasul, după cum arătăm pe un exemplu cu patru puncte în contact:

$$P'_{1,2}\ |{=}|\ P_{9.10} \qquad P'_{3,4}\ |{-}|\ C_{11} \qquad P'_{5,6}\ |{\rightrightarrows}|\ P_{12,13} \qquad P'_{7,8}\ |{\rightrightarrows}|\ P_{14,15}\,.$$

Trecînd toate cîmpurile și familiile de curbe în același plan (fig. 6) utilizarea nomogramei e următoarea: din $P_{9,10}$ cu o deschidere de compas

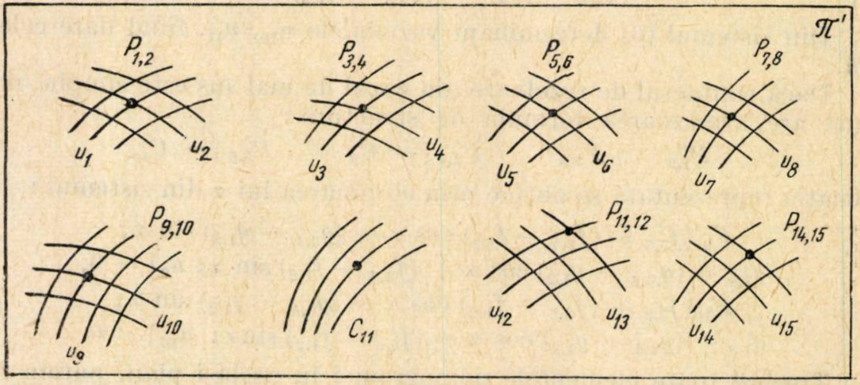

π'
P1,2
P3,4
P5,6
P7,8
u1
u2
u3
u4
u5
u6
u7
u8
P9,10
P11,12
P14,15
u9
u10
C11
u12
u13
u14
u15

Fig. 6

egală cu $P'_{1,2}\,P'_{3,4}$ descriem un arc de cerc care taie curba C_{11} dată în unul sau mai multe puncte. Dintr-unul din punctele astfel obţinute, cu deschiderea $P'_{3,4}\,P'_{5,6}$, descriem un arc de cerc în domeniul ocupat de cîmpul (u_{12}, u_{13}); cu deschiderea $P'_{1,2}\,P'_{5,6}$ din $P_{9.10}$, descriem un nou arc de cerc în domeniul aceluiaşi cîmp. Punctul comun al arcelor de cerc din zona cîmpului (u_{12}, u_{13}) are coordonatele curbilinii căutate. În mod analog se găseşte şi punctul din cîmpul (u_{14}, u_{15}) pornind cu deschiderile de compas $P'_{1,2}\,P'_{7,8}$ şi $P'_{3,4}\,P'_{7,8}$ din punctele $P_{9,10}$ şi P_{11}.

5. Să cercetăm cazurile în care se poate simplifica utilizarea transparentului orientat.

În acest scop considerăm că legăturile dintre planele (π') şi (π) sînt un contact dublu cu paralelismul unei drepte, contact de poziţie şi un contact simplu, contact de rezolvare.

Luăm în planul (π') două cîmpuri binare şi în planul (π) un cîmp binar şi o familie de curbă (fig. 7):

$$
\begin{array}{ll}
(\pi') & (\pi) \\[6pt]
(u_1, u_2):\ \begin{cases} x' = f_{1.2}(u_1, u_2) \\ y' = g_{1.2}(u_1, u_2) \end{cases} & (u_5, u_6):\ \begin{cases} x = f_{5.6}(u_5, u_6) \\ y = g_{5.6}(u_5, u_6) \end{cases} \\[10pt]
(u_3, u_4):\ \begin{cases} x' = f_{3.4}(u_3, u_4) \\ y' = y_{3.4}(u_3, u_4) \end{cases} & u_7 : F_7\,[x, y, u_7] = 0.
\end{array}
$$

Formula de structură corespunzătoare fiind:

$$P'_{1,2}\ |{=}|\ P_{5,6} \qquad D'_{0,\infty}\ |{-}|\ D_{0,\infty} \qquad P'_{3,4}\ |{\rightarrow}|\ C_7$$

conduce la ecuaţia:

$$F_7\,[f_{5.6} + f_{3.4} - f_{1.2};\ g_{5.6} + g_{3.4} - g_{1.2};\ u_7] = 0, \tag{8}$$

unde se determină una din variabile, dacă se cunosc celelalte şase.

Pentru reprezentarea acestei ecuaţii putem concepe următoarea nomogramă. Se desenează toate elementele pe un singur plan şi se ia un transparent dreptunghiular pe care se trasează linii paralele necotate şi se marchează punctele $P'_{1,2}$ şi $P'_{3,4}$ pe două laturi neparalele (fig. 8).

Se deplasează apoi transparentul aşa încît $P'_{1,2}$ să coincidă cu $P_{5.6}$, iar dreptele de pe transparent să fie paralele cu $D_{0,\infty}$. Atunci punctul $P'_{3,4}$ ne determină curba u_7 din familie şi deci valoarea necunoscutei ce ne-am propus s-o determinăm.

Pentru cazul cînd contactul de rezolvare este dublu, nomograma rezolvă un sistem de două ecuaţii:

$$\begin{cases} f_{3.4} - f_{1.2} = f_{7.8} - f_{5.6} \\ g_{3.4} - g_{1.2} = g_{7.8} - g_{5.6} \end{cases} \tag{9}$$

şi utilizarea ei este analoagă.

Și în cazul transparentului orientat folosirea a mai mult de două puncte în contact nu mai este simplă, căci al treilea punct cade în interiorul transparentului.

6. Folosim aceste rezultate la reprezentarea unor ecuații și sisteme de ecuații cu ajutorul nomogramelor cu transparent sub forma indicată în cele de mai sus.

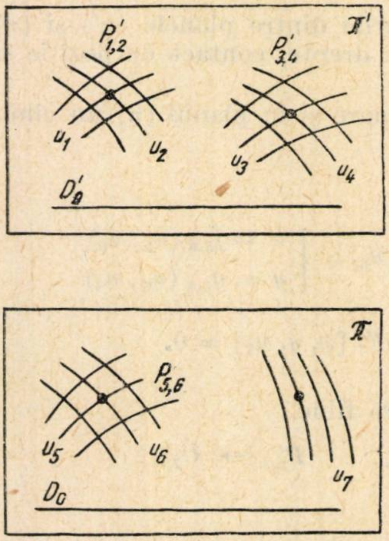


Fig. 7

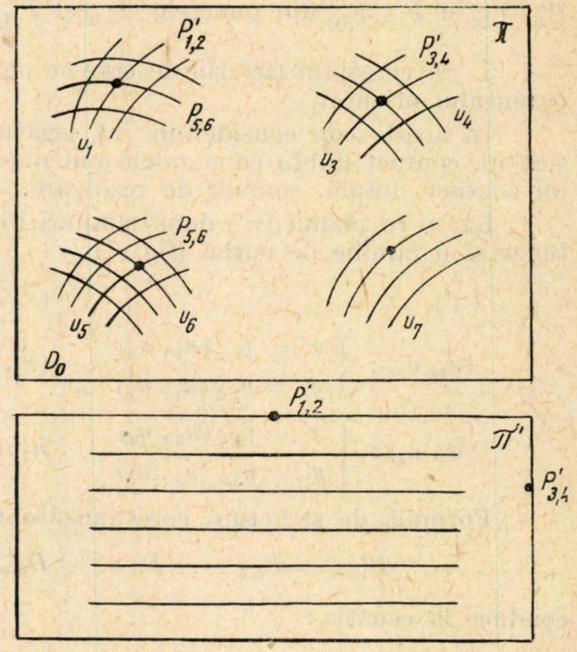


Fig. 8

a. Fie sistemul de ecuații de studiat de forma :

$$(10)\quad \begin{cases} (t-r)^2 + (u-s)^2 = x^2, \\ (v+w-r)\,[x\,(t-r)] + (v-w-s)\,[x(u-s)] = y^2 + z, \\ (v-w-s)\,[x(t-r)] - (v+w-r)\,[x(u-s)] = y + z^2. \end{cases}$$

El se reprezintă cu o nomogramă cu plan mobil de formă dreptunghiulară sau un echer care se utilizează conform indicațiilor date la punctul 3. Se consideră date x, y, z, r, s, t, și se caută u, v, w (fig. 9).

b. Considerăm formulele folosite pentru calculul și dimensionarea tensiunilor în plăci și grinzi simple cu secțiune dreptunghiulară

$$(11)\quad x = \sqrt{\frac{30M}{b\,(\sigma_e + 10\,\sigma_b)}} \qquad F_e = \frac{\sigma_b}{\sigma_e}\sqrt{\frac{7{,}5\,M\,b}{\sigma_e + 10\,\sigma_b}}$$

$$h = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_b} + 15\right)\sqrt{\frac{M}{7{,}5\,b\,(\sigma_e + 10\,\sigma_b)}},$$

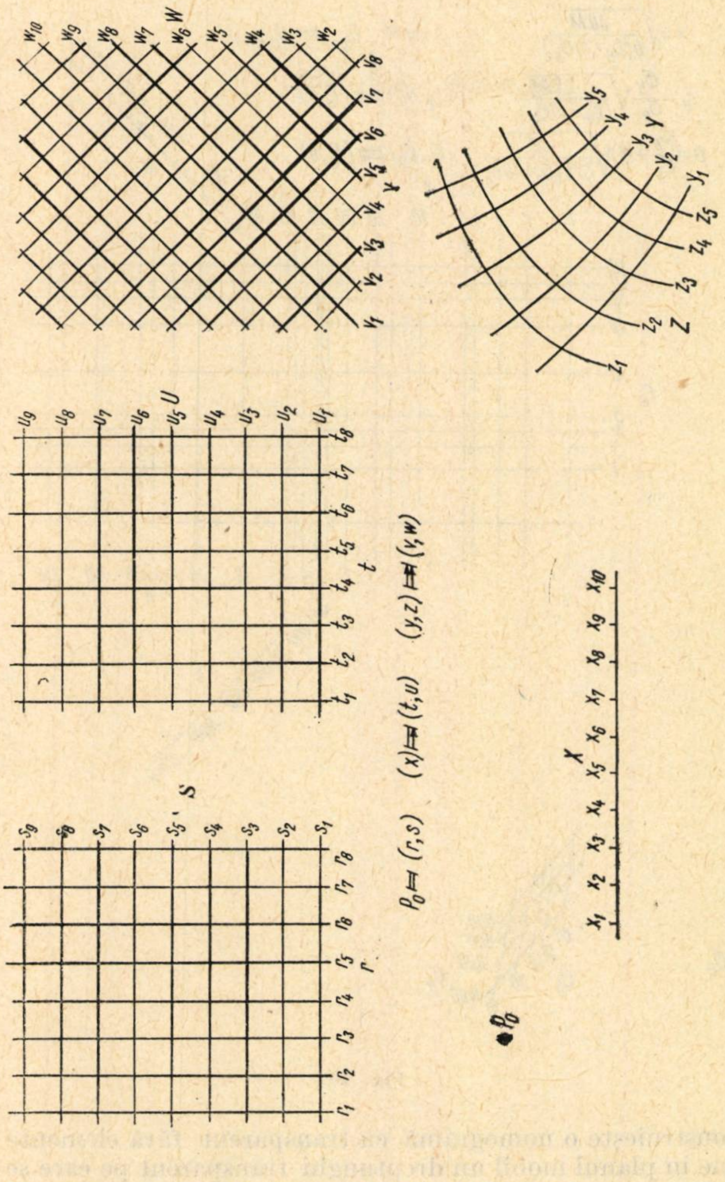

r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8
r
s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9
S
t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8
t
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_9
U
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8
V
w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7 w_8 w_9 w_{10}
W
$P_0 \equiv (r,s)$
$(x) \equiv (t,u)$
$(y,z) \equiv (v,w)$
y_1 y_2 y_3 y_4 y_5
Y
z_1 z_2 z_3 z_4 z_5
Z
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}
X
P_0

Fig. 9

unde F_e, M, h, b, x, σ_e, σ_b sînt diferite mărimi tehnice ce variază în intervale date.

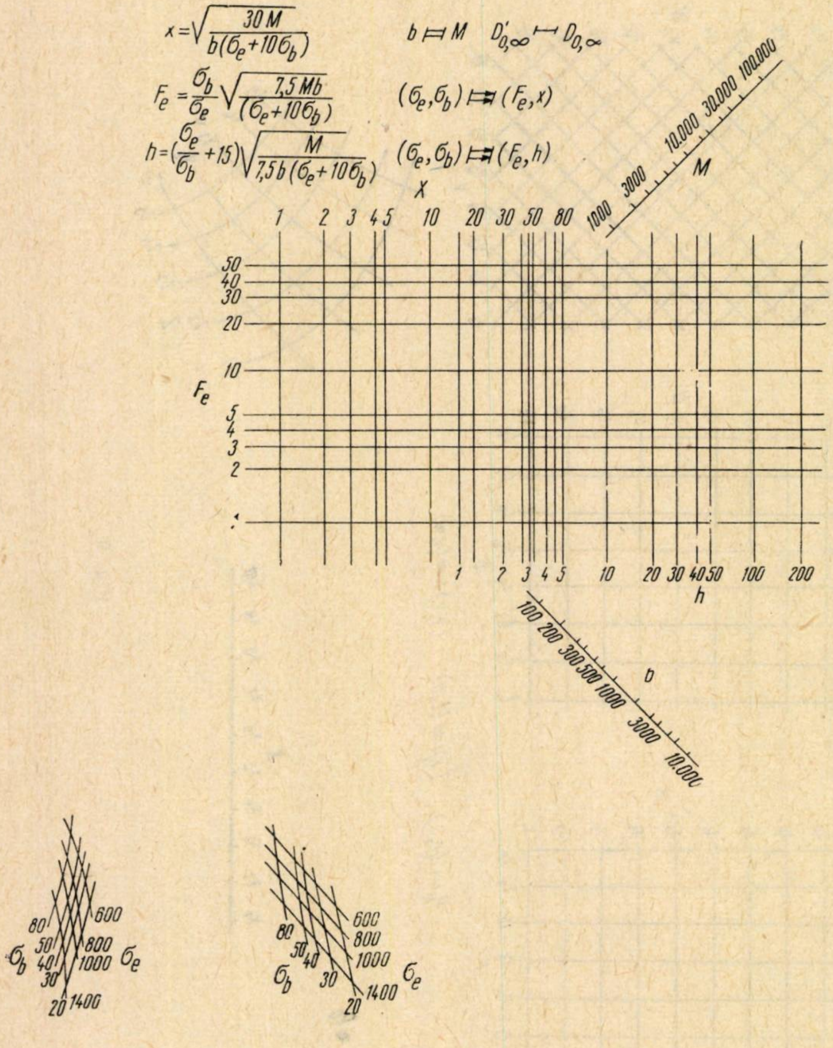

$x=\sqrt{\frac{30M}{b(\sigma_e+10\sigma_b)}}$
$F_e=\frac{\sigma_b}{\sigma_e}\sqrt{\frac{7,5Mb}{(\sigma_e+10\sigma_b)}}$
$h=(\frac{\sigma_e}{\sigma_b}+15)\sqrt{\frac{M}{7,5b(\sigma_e+10\sigma_b)}}$
$b \rightleftarrows M$
$D'_{0,\infty} \mapsto D_{0,\infty}$
$(\sigma_e,\sigma_b) \rightleftarrows (F_e,x)$
$(\sigma_e,\sigma_b) \rightleftarrows (F_e,h)$
X
1 2 3 4 5 10 20 30 50 80
M
1000 3000 10.000 30.000 100.000
F_e
50 40 30 20 10 5 4 3 2 1
h
1 2 3 4 5 10 20 30 40 50 100 200
b
100 200 300 500 1000 3000 10.000
σ_b
80 50 40 30 20
σ_e
600 800 1000 1400

Fig. 10

Se construieşte o nomogramă cu transparent fără elemente gradate, care conţine în planul mobil un dreptunghi transparent pe care se trasează linii paralele şi care se utilizează conform indicaţiilor de la punctul 5, orientarea planului mobil fiind determinată de două puncte date din cîmpul (σ_e, σ_b). Sînt considerate date σ_e, σ_b, b, M, şi se caută x, F_e, h (fig. 10).

Exemplu numeric: $\sigma_b = 50$, $\sigma_e = 1\,000$, $b = 200$, $M = 10\,000$, şi cu ajutorul nomogramei, folosind metoda indicată, se găseşte $x = 1$, $h = 2, 3$, $F_e = 5$.

Primită la redacţie la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul
al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. L. BAL şi F. RADÓ, *Lecţii de nomografie*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
2. L. BAL, *Nomograme cu transparent orientat pentru ecuaţii cu patru şi cinci variabile*, St. cerc. mat. (Cluj), **VIII**, *1—2*, 169—176 (1957).
3. L. BAL, *Cîteva ecuaţii reprezentate cu nomograme cu transparent orientat*. Buletinul Ştiinţific al Institutului Politehnic Cluj, **5** (1952).
4. C. J. BELGRANO, LOPEZ NIETO, J. M. URCELAJ, *Tratado de Nomografia*. Madrid, 1953.
5. Г. С. ХОВАНСКИЙ, *Методика построения номограмм с ориентированным транспарантом*. Вычислительная мтеа. и вычислительная технихa, сб. 2 Изд—во АН. СССР. 1955.
6. P. LUCKEY, *Nomographie*. Leipzig, 1953.
7. W. MARGOULIS, *Les abaques à transparent orienté ou tournant*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
8. V. PLESKOT, *Nomografie*. Statni Nakladatelstvi Techncke Literatury, Praha, 1963.
9. Б. А. СИРЕНКО, *Новый способ пользования номограммами с ориентированным транспарантом*. Номографический сборник, *1*, 92—101, Москва, 1962.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL TOPOLOGIC AL CURBELOR DE ORDINUL CINCI

DE

Prof. Ing. GEORGE BORNEANU

Unele din proprietăţile interesante ale curbelor sînt strîns legate de aşezarea lor în jurul punctelor singulare şi de poziţia tangentelor în aceste puncte. Pentru înţelegerea mai clară a acestor proprietăţi, se precizează noţiunea de traseu şi numărul posibil de traseuri ale unei curbe de gen p, precum şi numărul maxim de puncte singulare.

Cu interpretarea relaţiilor lui Plücker, se stabileşte şi numărul maxim de tangente simple sau duble şi al punctelor de inflexiune. Studiul se face apoi, principial, pe baza metodei lui Hjielman.

După cercetarea în ansamblu a quinticelor în general şi a celor cu puncte singulare, se trece la studierea amănunţită a formelor traseurilor curbei în jurul acestor puncte şi se analizează, pe rînd, cele cu puncte cvadruple şi puncte la infinit, apoi cele cu puncte triple fără, sau cu unul, două, trei puncte duble.

INTRODUCERE

1. Proprietăţile topologice ale unei curbe plane sînt acelea care rămîn invariante faţă de o transformare proiectivă cu coeficienţi reali şi faţă de o deformare continuă. Aceste proprietăţi sînt : numărul, natura şi situaţia reciprocă a traseurilor (züge) curbei ; numărul, natura şi aşezarea reciprocă a ramurilor (zweige) de curbă ; numărul şi natura punctelor singulare şi, în fine, aşezarea punctelor singulare faţă de traseuri şi ramuri.

Tangentele confundate, din punctele duble sau multiple, se vor considera totdeauna ca distincte, fiindcă totdeauna pot fi aduse ca atare, printr-o deformare continuă.

În adevăr, în deformarea continuă, un punct xy se transformă în altul X, Y, legat de cel dintîi prin relaţiile :

$$X = f(x, y), \quad Y = \varphi(x, y),$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 6, p. 863 – 901, BUCUREŞTI, 1965

unde f și φ sînt două funcții continue, în care nu intervine coeficientul unghiular al tangentelor, decît ca să varieze în mod continuu.

În cazul punctelor multiple cu tangente confundate, unui arc de curbă C îi va corespunde un altul C', trecînd prin omologul A' al lui A ; iar arcului B, un altul B', trecînd tot prin A', dar care, în general, nu urmează să fie tangent arcului C'. Deci, în considerații topologice, punctele multiple se păstrează, dar eventuala confundare a tangentelor în punctele multiple, nu se păstrează (fig. 1 și 2).

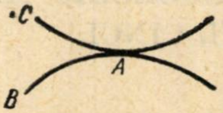


Fig. 1

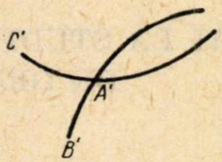


Fig. 2

Pentru a putea fixa mai bine proprietățile de care vom face uz în studiul ce ne preocupă, sîntem siliți a preciza cîteva definiții :

Vom numi *traseu* al unei curbe o parte a ei, care se poate desemna printr-o singură trăsătură, fără a ridica de pe hîrtie creionul și cu o variație continuă a tangentei. De pildă, un oval este un traseu. Traseurile sînt de ordin par sau impar, după cum o dreaptă oarecare le taie într-un număr par sau impar de puncte.

Dacă se consideră ca dreaptă de secțiune chiar dreapta de la infinit, se poate defini un traseu par sau impar prin proprietatea că are un număr par sau impar de puncte la infinit.

Dacă M este numărul maxim de puncte în care o dreaptă oarecare taie un traseu și m numărul minim posibil, diferența $M - m$ este un număr par, cel puțin egal cu 2 [1].

Vom numi, de asemenea, *ramură* de curbă un arc de curbă, care pleacă de la un punct singular, pentru a se termina la primul punct singular pe care-l întîlnește. Un traseu fără nici un punct singular este, prin definiție, și o ramură de curbă. Un oval, deci, poate fi considerat și ca traseu și ca ramură de curbă. Ramurile sînt pare sau impare, după cum o dreaptă oarecare le taie într-un număr par sau impar de puncte. După Rosenblatt [1], distingem două clase de ramuri de curbe cu puncte singulare : *bucle* sînt ramurile care încep într-un punct singular, pentru a se sfîrși în același punct ; *ramuri de legătură* sînt ramurile care unesc două puncte singulare diferite.

Un traseu impar este totdeauna tăiat de o dreaptă, cel puțin într-un punct, pe cînd un traseu par poate să nu aibă nici o intersecție reală cu o dreaptă. De aceea, în analiza topologică a formei unei curbe, traseurile impare ne vor servi, mai ales, ca să determinăm tipurile diferite, căci numai ele dau obligator cel puțin un punct de intersecție cu o dreaptă, pe cînd cele pare pot fi ovale izolate etc.

2. S-au întrebuințat diferite metode pentru studiul topologic al curbelor algebrice.

Una din proprietățile cele mai de seamă ale curbelor algebrice, și foarte utilizată în studiul lor topologic, este aceea că o curbă de gen p are maximum $p + 1$ traseuri. Această proprietate se găsește citată în notă în admirabila carte a lui Salmon [2] la pag. 312. Vom da, mai departe, o demonstrație a acestei proprietăți fundamentale.

Întrebuințînd o metodă dată de Klein, Harnack [3] a reușit chiar să construiască diferite curbe de genul p cu $p + 1$ traseuri. D. Hilbert, printr-o metodă analogă celei date de Klein ,se ocupă de așezarea posibilă a ovalelor curbelor plane [4] și mai ales de cazul cînd unele din ele pot fi interioare altora.

Printr-o metodă nouă, Hilbert a izbutit, în 1910, să dovedească teorema importantă că o curbă de ordinul al șaselea are cel mult zece ovale, rezultat mai precis decît al teoremei generale, referitoare, la relația dintre genul și numărul traseurilor unei curbe, pe care am amintit-o mai sus.

În sfîrșit, Hjelman a dat o metodă foarte eficace pentru clasificarea formelor curbelor algebrice, mai ales cînd au singularități de ordin mai înalt [5].

Aceste metode generale au fost aplicate la diferite cazuri particulare. Astfel, proprietățile și clasificarea conicelor se cunoștea din antichitate. Curbele de gradul al treilea se pot clasifica în cinci tipuri diferite, rezultat cunoscut în urma lucrărilor lui Newton. O clasificare completă a curbelor de ordinul al patrulea se găsește și în volumul citat al lui Salmon. Gentry [6] a făcut o teză despre această clasificare.

Pentru curbele de ordinul al cincilea, P. Field a întrebuințat o metodă particulară de generare a lor cu ajutorul cubicelor și a conicelor și a clasificat astfel toate curbele de ordinul cinci și de grad zero și unu [7].

Pentru ordinul șase, Hjelman a descoperit metoda amintită, iar Rosenblatt, în memoriul citat, face o clasificare completă cu ajutorul, mai ales, al acestei metode.

În fine, cazuri particulare cu singularități date dinainte, ale curbelor de ordinul opt, au fost studiate de E. Buchanan Cowley [8].

3. În lucrarea de față, ne propunem să aplicăm metoda lui Hjelman la curbele de ordinul cinci și anume vom presupune că au :

1° Un punct cvadruplu ;

2° Un punct triplu fără alte puncte duble sau cu unul, două și trei puncte duble.

Ne vom mărgini însă numai la studiul quinticelor cu un singur punct la infinit. Aceasta, cu atît mai mult cu cît se pot găsi proiectări ale curbelor astfel că numărul punctelor lor la infinit să fie minim [1]. Numai cînd o quintică cu mai multe puncte la infinit ar lua o înfățișare mai deosebită, ne vom opri și asupra acestui caz.

CAPITOLUL I

TEOREME GENERALE

NUMĂRUL TRASEURILOR UNEI CURBE DE ORDINUL n

4. O curbă de ordinul n poate avea traseuri pare şi traseuri impare. *Numărul traseurilor impare este de aceeaşi paritate cu ordinul curbei.* În adevăr, să luăm o curbă C_n, de ordinul n şi o dreaptă. Aceasta va întîlni toate, o parte, sau nici unul din traseurile pare ale curbei, avînd cu fiecare un număr par de intersecţii. Va întîlni ,de asemenea, toate traseurile impare, avînd cu fiecare un număr impar de intersecţii. Totalul intersecţiilor dintre dreaptă şi curbă, care este de aceeaşi paritate cu ordinul n, va fi de aceeaşi paritate cu numărul traseurilor impare. Deci afirmaţia este demonstrată.

Nu se poate face o observaţie analogă asupra traseurilor pare, căci baza observaţiei de mai sus este că o dreaptă întîlneşte orice traseu impar. Nu este obligată însă a întîlni şi orice traseu par.

5. *Dacă o curbă are b traseuri impare, ea are cel puţin $\frac{1}{2}b\cdot(b-1)$ puncte duble.* Aceasta rezultă din faptul că un traseu impar trebuie să întîlnească toate celelalte traseuri impare. Fiind b traseuri, pe fiecare din ele vor fi $(b-1)$ puncte duble, cel puţin .În total : $b\,(b-1)$. Fiecare punct dublu este socotit astfel de 2 ori. Rămîn, în realitate, numai $\frac{1}{2}\,b\,(b-1)$ puncte duble.

Pentru ca să nu se descompună curba, trebuie ca acest număr de puncte duble să îndeplinească relaţia :

$$\tfrac{1}{2}b.\,(\mathrm{b}-1) \leqslant \tfrac{1}{2}\,(n-1).(n-2),$$

care, rezolvată în numere întregi, dă : $b \leqslant n-1$. Dar fiindcă b şi n sînt de aceeaşi paritate, rezultă $b \leqslant n-2$. Deci, *numărul traseurilor impare ale unei curbe este cel mult egal cu ordinul său micşorat cu 2.*

Aceasta se poate observa şi pe altă cale. Dacă o curbă de ordinul n ar avea $(n-1)$ traseuri impare, prin 2 puncte de pe un traseu, care nu e o dreaptă, s-ar duce o dreaptă. Aceasta ar tăia acelaşi traseu încă într-un punct — cel puţin — şi de asemenea pe celelalte $(n-2)$ traseuri impare. Ar rezulta $(n+1)$ intersecţii. Deci, nu ar fi nici un traseu pe care luînd 2 puncte, dreapta ce le uneşte să nu se confunde cu el. Curba ar fi formată din n drepte.

6. *O curbă nedecompozabilă de genul p are maximum $(p+1)$ traseuri distincte.*

Vom deosebi 2 cazuri :

I) $n = 2\,k$. Fie a numărul traseurilor pare, b al celor impare şi d al punctelor duble ale curbei C_n. Prin aceste d puncte să facem să treacă o curbă C_{n-2}, de ordinul $(n-2)$. Spre a o determina complet, sînt disponibile încă

$$\beta = \tfrac{1}{2}\,(n+1)\,(n-2) - d$$

puncte. β este totdeauna pozitiv.

Facem presupunerea $\beta > a$.

Luăm din aceste puncte β, cîte unul pe fiecare din cele a traseuri pare. Cele $(\beta - a)$ puncte rămase le luăm pe toate pe un acelaşi traseu par. Între cele 2 curbe C_n şi C_{n-2} vor fi, cel puţin, următoarele intersecţii :

$2d$ în punctele duble ;

$2(a - 1)$ pe traseurile pare pe care s-a luat cîte un punct spre a determina pe C_{n-2} ;

$(\beta - a + 1)$ luate pe celălalt traseu par. Aici sînt chiar $(\beta - a + 2)$ intersecţii, dacă $(\beta - a)$ este par.

b, pe traseurile impare, căci C_{n-2} avînd cel puţin un traseu impar, acesta va întîlni toate cele b traseuri impare ale curbei C_n.

În total, vor fi cel puţin

$$2d + 2(a - 1) + (\beta - a + 1) + b = d + a + b - 1 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n + 1)(n - 2)$$

puncte de intersecţie. Numărul lor va fi cel mult egal cu $n(n - 2)$. Rezultă

$$a + b \leqslant (n - 1)(n - 2) - d + 1,$$
$$\therefore\ a + b \leqslant p + 1.$$

c. c. t. d.

Dacă am presupune

$$\beta \leqslant a,$$
$$\therefore\ \tfrac{1}{2}(n + 1)(n - 2) - d \leqslant a,$$

am determina curba C_{n-2} ca să treacă prin cele d puncte duble şi prin alte puncte, luate cîte unul pe un traseu par. Ar rezulta următoarele intersecţii :

$$2d + 2\beta + b \leqslant n.(n - 2)$$
$$(n + 1)(n - 2) + b \leqslant n(n - 2)$$
$$\therefore\ b \leqslant 2 - n,$$

ceea ce nu are sens pentru curbele de ordin superior. Ipoteza $\beta \leqslant a$ este deci inadmisibilă. Rămîne că

$$\beta > a$$
$$\therefore\ a \leqslant p + n - 2.$$

S-ar putea ca C_n să nu aibă nici un traseu par, adică

$$a = 0.$$

Vom face curba C_{n-2} să treacă prin punctele duble d, iar celelalte puncte disponibile pentru a o determina complet, le vom lua pe toate pe un acelaşi traseu impar. Între cele 2 curbe, vor fi cel puţin următoarele intersecţii :

$2d$ în punctele duble ;

β pe un traseu impar, sau $(\beta + 1)$, dacă β este par ;

$b - 1$ pe celelalte trasee impare.

În total, cel puţin :

$$2\,d + \beta\, b - 1 \leqslant n\,(n-2),$$

$$\therefore b \leqslant \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) - d + 1,$$

$$\therefore b \leqslant p + 1.$$

Obţinem, astfel, aceeaşi concluzie ca în cazul $a \neq 0$, asupra numărului traseurilor.

II) $n = 2\,k$. Vom menţine aceleaşi notaţii ca în cazul anterior şi vom face, de data aceasta, ca o curbă C_{n-1}, de ordin $(n-1)$, să treacă prin punctele duble d. Spre a o determina complet, sînt necesare încă β puncte :

$$\beta = \tfrac{1}{2}\,(n+2)\,(n-1) - d.$$

Luăm, din acestea, cîte unul pe fiecare traseu par şi toate celelalte $(\beta - a)$ puncte pe unul din traseurile pare. Ca şi în primul caz, vor rezulta, între cele două curbe, cel puţin :

$$2d + 2\,(a-1) + \beta - a + 1 + b \leqslant n\,(n-1)$$

intersecţii. Se deduce şi aici :

$$a + b \leqslant \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) - d + 1,$$

$$\therefore a + b \leqslant p + 1.$$

Se înlătură, de asemenea, ipoteza $\beta \leqslant a$, care dă, ca la cazul I),

$$2d + 2\beta + b \leqslant n.(n-1),$$

$$\therefore b \leqslant 2 - n.$$

De asemenea, dacă :

$$a = 0,$$

punctele se iau pe un traseu impar şi concluzia rămîne aceeaşi asupra numărului traseurilor.

Deci, în toate cazurile numărul traseurilor unei curbe este cel mult egal cu genul ei plus unu.

7. *Curbele unicursale* au

$$p = 0,$$

$$\therefore a + b = 1.$$

Deci, o curbă unicursală are un singur traseu, ceea ce îi justifică numele.

PUNCTE SINGULARE

8. *Punctele singulare ale unei curbe ,nu pot fi alese totdeauna arbitrar.* În studiul curbelor de ordin superior, punctele singulare au o importanță deosebită. Este deci necesar să insistăm asupra unora din proprietățile în legătură cu numărul și așezarea lor.

Se știe că o curbă de ordinul n poate avea cel mult $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ puncte singulare, fără a se descompune. *Dacă se descompune, poate avea cel mult* $\frac{1}{2}n(n-1)$ *puncte singulare.*

În adevăr, descompunerea cea mai completă a unei curbe de ordinul n este în n drepte. Fiecare din acestea va întîlni în cîte un punct pe toate celelalte. Rezultă $n(n-1)$ puncte. Fiecare punct de intersecție este socotit astfel de 2 ori. Rămîn deci $\frac{1}{2}n(n-1)$ puncte singulare.

Așezarea lor nu este însă arbitrară.

Aceasta este evident pentru curbele decompozabile. De exemplu, în cazul descompunerii în drepte, ele trebuie să fie cîte $(n-1)$ pe o dreaptă etc. Pentru cazul curbelor nedecompozabile, este necesară însă o demonstrație specială.

Numărul de condiții care determină o curbă de ordinul n este $\frac{1}{2}n(n+3)$. A se da un punct dublu echivalează cu 3 condiții :

A se da maximum de puncte duble ale unei curbe, va echivala cu

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$$

condiții. Ele nu trebuie să întreacă totalul condițiilor care determină curba, deci :

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2) \leqslant \frac{1}{2}n(n+3)$$

sau, în numere întregi :

$$1 < n < 6.$$

Urmează că pentru curbele de ordinul 6 sau mai mare, așezarea punctelor singulare nu este arbitrară.

Se poate face ușor o verificare : O sixtică este determinată de 27 de condiții. Ea poate avea 10 puncte duble fără să se descompună, a căror așezare arbitrară echivalează cu 30 de condiții, mai mult deci decît este admisibil pentru determinarea curbei. Cele 30 condiții nu pot fi distincte. Între ele există unele relații, adică așezarea celor 10 puncte duble nu este arbitrară.

Salmon în volumul citat [2] arată că nici 9 puncte nu pot fi alese arbitrar spre a determina o sixtică.

Dacă punctele duble sînt de întoarcere, posibilitatea de a fi alese arbitrar este și mai redusă. Un astfel de punct reprezintă 4 condiții : cele trei ale punctului dublu, plus încă o condiție datorată suprapunerii celor două tangente din punctul dublu.

Dacă toate punctele duble ar fi de întoarcere, maximul lor pentru a nu se descompune curba este supus relației :

$$\tfrac{4}{2}(n-1)(n-2) \leqslant \tfrac{1}{2}n(n+3),$$

$$\therefore 0 < n < 5.$$

Deci, dacă punctele duble ale unei quintice unicursale sînt toate de întoarcere, așezarea lor nu este arbitrară.

9. Observația aceasta este utilă, mai ales cînd se studiază curbele cu ajutorul tablourilor lui Plücker. Aceste tablouri rezultă din compararea proprietăților unei curbe cu ale reciprocei ei. Se știe că ordinul n al unei curbe este egal cu genul reciprocei sale. De asemenea, notînd cu δ numărul punctelor duble, χ al celor de întoarcere, τ al tangentelor duble, ι al celor staționare și m clasa ei ; n', δ', χ', τ', ι', m' aceleași elemente ale reciprocei, între ele există egalitățile lui Plücker.

Aceste relații sînt stabilite pe baza proprietăților polarelor succesive ale unei curbe, și metoda este cunoscută. Vom preciza numai cîteva elemente.

Se știe că gradul polarei reciproce a unei curbe C este egal cu numărul maxim de tangente ce s-ar putea duce dintr-un punct la această curbă. Prin toate punctele de contact ale tangentelor duse dintr-un punct M la curba C, trece și prima polară a acestui punct față de curba C. Deci, numărul maxim de tangente care se vor putea duce din M, va fi egal cu numărul punctelor de intersecție a celor 2 curbe. Prima polară fiind de ordinul $(n-1)$, numărul maxim de tangente ce se pot duce din M la curbă este deci $n(n-1)$.

Dacă însă C are puncte duble, prin acestea vor trece și primele polare ale tuturor punctelor deci și a lui M. În fiecare din ele, vor fi 2 intersecții între curbă și această primă polară, așa că numărul maxim posibil de puncte de intersecție între cele 2 curbe, se reduce cu 2δ, δ fiind numărul punctelor duble. Dreapta care unește pe M cu un punct dublu nefiind propriu-zis tangentă și gradul polarei reciprocei se va reduce cu același număr, rămînînd :

$$m = n(n-1) - 2\delta.$$

Dacă sînt și χ puncte de întoarcere, fiecare dă 3 intersecții cu primele polare care trec toate prin aceste puncte. Numărul maxim de tangente posibile, deci și gradul polarei reciproce, se reduce la :

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\chi.$$

Dacă se iau 3 puncte A, B, C pe o curbă, conica polară a fiecăruia trece prin punctul respectiv. Dacă B se confundă cu A, ambele puncte fiind și pe conica polară, aceasta va avea 2 puncte confundate pe curbă în punctul A, deci conica polară a unui punct de pe curbă este tangentă la curbă în acest punct. Dacă și C se confundă cu A și B, el fiind pe conica polară și ea va avea 3 puncte confundate cu A. Aceasta nu se poate, decît dacă se descompune conica polară în 2 drepte. Punctul respectiv avînd conica polară descompusă, se află pe hessiană. El este însă un punct de inflexiune pe curbă. Deci hessiana trece prin toate punctele de inflexiune de pe curbă. Cum hessiana este de ordinul $3n\,(n-2)$, maximul de puncte de inflexiune, pe care îl poate avea o curbă, este

$$\iota = 3n\,(n-2).$$

Dacă însă curba are un punct dublu, se arată că hessiana nu numai că trece prin acest punct, dar are acolo și aceleași tangente ca ale curbei. Are astfel 6 intersecții cu curba în punctul respectiv care nu este punct de inflexiune. Numărul maxim de puncte de inflexiune se reduce astfel la

$$\iota = 3n\,(n-2) - 6\delta.$$

În fine, dacă punctul dublu este de întoarcere, cele 2 curbe au acolo 8 puncte confundate și numărul maxim posibil de puncte de inflexiune rămîne :

$$\iota = 3n\,(n-2) - 6\delta - 8\kappa.$$

Din cele 2 relații care dau pe m și ι :

$$m = n\,(n-1) - 2\delta - 3\kappa$$

$$\iota = 3n\,(n-2) - 6\delta - 8\kappa,$$

rezultă, prin proprietățile de reciprocitate, și :

$$n = m\,(m-1) - 2\tau - 3\iota$$

$$\kappa = 3m\,(m-2) - 6\tau - 3\iota$$

Numai 3 din aceste ecuații sînt distincte. Prin transformări și eliminări, asupra acestora, Plücker a obținut ecuațiile care îi poartă numele :

$$m = n\,(n-1) - 2\delta - 3\kappa,$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}\,(m-n)\,(m+n-9),$$

$$\iota = 3\,(n-m) + \kappa.$$

Dîndu-se 3 din elemente, se pot găsi valorile celorlalte 3.

Un studiu mai amănunțit, în această direcție, am făcut în [9].

CAPITOLUL II

QUINTICE ÎN GENERAL ȘI QUINTICE CU UN PUNCT CVADRUPLU

NUMĂRUL TRASEURILOR

10. O quintică poate avea, cel mult, 6 puncte duble fără să se descompună. Genul ei maximum fiind 6, după teorema de la punctul 6, ea va putea avea, cel mult, 7 traseuri. Din acestea, traseurile impare sînt în număr de aceeași paritate cu 5, adică impar, dar inferior lui. Deci, pot fi cel mult 3 traseuri impare. Totdeauna va exista însă, cel puţin 1 traseu impar. Pot fi şi traseuri pare în număr, cel mult, egal cu diferenţa dintre maximum de traseuri admisibile şi numărul celor impare.

Fiecare punct dublu de pe curbă reduce cu 1 numărul maxim de traseuri. O quintică unicursală (de ex. o quintică cu un punct cvadruplu) nu are decît un traseu, şi acela impar.

Pentru un studiu mai amănunţit al numărului traseurilor quinticelor cu un punct triplu, vom face următoarele ipoteze :

I. Quintică cu un punct triplu, fără alte puncte duble

11. Genul curbei fiind 3, ea poate avea 4 traseuri, dintre care 1 sau 3 impare. Vor fi trei ipoteze de studiat :

a. *Punctul triplu T este dat de un singur traseu impar*, care trece de 3 ori prin acest punct. Alt traseu impar nu mai poate exista, căci ar da naştere şi la alte puncte duble, caz care nu este cercetat aici. Curba are deci *un singur traseu impar.* Ar putea fi însă trei alte traseuri pare fără intersecţii între ele sau cu traseul impar.

b. *Punctul triplu este dat de un singur traseu par*, care trece de 3 ori prin T. Traseu impar nu poate fi decît unul, altfel ar da noi puncte duble. Alt traseu par, afară de cel care formează pe T, nu mai poate fi, căci unind un punct A de pe el cu T, dreapta AT va tăia acest traseu încă într-un punct şi tot aşa traseul par care trece prin T. Pe traseurile pare vor fi 6 puncte de intersecţie şi încă unul pe cel impar. În total, 7 puncte de intersecţie, ceea ce nu are sens. Curba va avea, deci, numai *un traseu par şi unul impar.*

c. *Punctul triplu este dat de intersecţia a 2 traseuri.* Ele nu pot fi de aceeaşi paritate. Dacă ar fi impare, s-ar tăia şi în alt punct decît T, ceea ce ar da alte puncte duble. Dacă ar fi pare, unul ar trece de două ori, altul o dată prin T. O dreaptă care ar trece printr-un punct de pe primul şi prin T, l-ar tăia pe acesta în 4 puncte, pe cel de-al doilea în 2 puncte şi traseul impar într-un punct. Ar avea deci 7 puncte de intersecţie cu curba. *Traseul impar poate trece o dată prin T, iar cel par de 2 ori.* Ar mai putea fi 2 alte traseuri pare.

c_1. *Traseul impar poate trece de 2 ori prin T şi cel par o singură dată.* Nu mai poate exista nici un alt punct A al curbei în afară de aceste traseuri, căci dreapta AT va tăia încă o dată atît traseul par, cît şi cel impar care trec prin T, ceea ce, împreună cu intersecţia din A, dă 6 puncte de intersecţie cu curba. Deci, *curba se reduce la cele 2 traseuri.*

d. *Punctul triplu este la intersecţia a 3 traseuri.* Ele nu pot fi decît *impare.* Altfel ar rezulta şi alte puncte duble. Mai poate fi însă încă un traseu par.

II. Quintică cu un punct triplu şi unul dublu

12. Genul curbei este 2. Ea va avea, cel mult, 3 traseuri, dintre care unul impar.

Se observă că punctul dublu D nu poate fi format din intersecţia a 2 traseuri diferite. În adevăr :

Dacă aceste 2 traseuri sînt impare, va exista încă un traseu impar. Toate vor trece prin T, iar 2 din ele prin D. Dreapta TD ar tăia încă o dată cele 2 traseuri care trec prin D, în afara celor 5 puncte de intersecţie din T şi D, dînd 7 puncte de intersecţie între curbă şi dreaptă.

Dacă ambele traseuri ar fi pare, ele s-ar tăia a doua oară în T. S-a arătat însă, în cazul I — c, că în T nu pot fi 2 traseuri pare.

Dacă un traseu ar fi par şi unul impar, ele s-ar tăia de asemenea, încă o dată în T, unde ar mai avea între ele 2 intersecţii. Ar rezulta necesitatea unei a patra intersecţii, ceea ce ar însemna un al doilea punct dublu. Punctul D nu poate fi format, deci, decît de un singur traseu.

Se prezintă următoarele cazuri :

a. *Punctul triplu este format de traseul impar care formează şi punctul dublu.* Punctul T se va prezenta ca în cazul I — a. Mai pot exista *încă 2 traseuri pare.*

a_1. *Punctul triplu este format de un traseu impar, cel dublu de un traseu par.*

Mai poate fi un alt traseu par.

Punctul D nu poate fi format de alt traseu impar decît de cel care trece prin T, căci ar rezulta între cele 2 traseuri impare şi alte puncte duble afară de D.

Nu este posibil nici cazul unui traseu par, care să treacă de 3 ori prin T, căci în D nefiind decît un traseu, dreapta DT trebuie să taie încă o dată traseul par din T în afară de punctul triplu, ceea ce ar da 6 puncte de intersecţie cu curba.

b. *Punctul triplu este format de intersecţia unui traseu impar, care trece o dată prin T, cu un traseu par, care trece de 2 ori prin acest punct.* Punctul triplu se va prezenta ca la cazul I — c. *Punctul D este format de traseul impar*, sau de

b_1. *traseul par, care trece prin T*, sau de

b_2. *un traseu par, care nu întîlneşte primele două traseuri.*

În cazurile b şi b_1, ar mai putea exista un traseu par, care să nu întîlnească pe cele două anterioare.

Nu este posibil ca prin punctul T să treacă de 2 ori un traseu impar şi o dată unul par, căci dreapta TD ar trebui să taie fiecare traseu încăodată afară de cele 5 puncte din T şi D şi ar avea 7 intersecţii cu curba, punctul D neputînd fi intersecţia celor 2 traseuri.

c. *Punctul triplu este format de intersecţia a 3 traseuri impare, unul din ele formînd şi punctul dublu.* Curba se reduce la aceste 3 traseuri.

III. Quintică cu un punct triplu şi două puncte duble

13. Genul curbei fiind 1, ea va avea, cel mult, 2 traseuri, unul fiind totdeauna impar.

Se prezintă următoarele cazuri :

a. *Punctul triplu este format de un traseu impar, care formează cele două puncte duble D şi D_1.* Mai poate fi un traseu par. Acesta nu poate trece însă prin D sau D_1, căci dreapta TD, sau TD_1, ar tăia curba în 7 puncte. Pot exista însă cazurile:

a_1. *Un punct dublu este format de traseul impar, celălalt de un traseu par.*

a_2. *Ambele puncte duble sînt formate de un același traseu par.*

b. *Punctul triplu este format de un traseu par. D și D_1 sînt intersecția acestuia cu traseul impar, sau*

b_1. *Cele două puncte duble sînt formate de traseul impar.*

Nu se poate ca D sau D_1 să fie format de traseul par, căci dreapta TD sau TD_1 ar tăia curba în 7 puncte, cel puțin.

c. *Punctul triplu este intersecția unui traseu impar cu unul par, care trece de 2 ori prin punct. Ambele puncte duble sînt formate de traseul impar.*

c_1. *Un punct dublu este format de traseul impar, altul de cel par.*

c_2. *Ambele puncte duble sînt formate de traseul par.*

Nici unul din punctele duble nu poate fi intersecția celor 2 traseuri, căci dreapta care ar uni acest punct cu cel triplu ar avea mai mult de 5 intersecții cu curba.

d. *Punctul triplu este intersecția traseului impar, care trece de 2 ori prin acest punct cu traseul par.* S-a arătat în § 11 că dacă punctul triplu este astfel format, în nici un caz curba nu are alte puncte în afara celor 2 traseuri. Pentru aceleași motive, nu poate avea nici un punct dublu format numai de un traseu, deci *ambele puncte duble sînt intersecția celor 2 traseuri.*

IV. **Quintice cu un punct triplu și trei puncte duble**

14. Astfel de quintice sînt unicursale. Ele au *un singur traseu*, care este impar și formează toate cele 4 puncte singulare.

PUNCTE LA INFINIT

15. Numărul punctelor la infinit ale unei curbe nu este un invariant din punct de vedere topologic. Prin transformări proiective și deformații continue, acest număr poate fi modificat [1]. În genere, s-au obținut puține rezultate interesante în această direcție. Mai interesante sînt lucrările lui Cayley [10] asupra quarticelor fără puncte singulare, pe care le proiectează în infinit.

Numărul punctelor la infinit pentru o quintică este maximum 5 și minimum 1. Pentru un studiu mai amănunțit, ele pot fi considerate ca intersecția curbei cu dreapta la infinit.

În lucrarea de față, vom considera, în general, quinticele care au *un singur punct la infinit.* Uneori, cînd forma curbei ar fi mai sensibil schimbată, vom considera și cazul a 3 puncte la infinit. Dacă între 2 puncte la infinit, este o porțiune de traseu, care nu trece prin nici un punct singular, această porțiune se numește *arc hiperbolic*. Dacă un arc nu trece prin vreun punct singular și este tangent dreptei la infinit a planului, se numește *arc parabolic*.

Deci : O ramură pară, care trece la infinit, are un număr impar de arce hiperbolice, între punctele sale la infinit, în număr par. În același mod, o ramură impară, care are un număr impar de puncte la infinit, va avea între aceste puncte un număr par de arce hiperbolice.

V. Quintice cu un punct cvadruplu

16. Un punct cvadruplu echivalează cu 6 puncte duble. Curba este unicursală. În virtutea observației anterioare, ea are un singur traseu, care este impar și formează deci punctul cvadruplu. Traseul poate avea 1, 3 sau 5 puncte la infinit.

17. *Traseul are un singur punct la infinit*. Trebuie observat că o dreaptă, care trece prin punctul cvadruplu, va tăia încă o dată traseul. Deci, ducînd din acest punct tangentele la bucle și la ramurile ce pleacă spre infinit, precum și paralelele la asimptotele curbei, trebuie ca în fiecare din unghiurile formate de aceste drepte și opusele lor, să se cuprindă totdeauna o ramură sau o porțiune de ramură de curbă astfel ca o dreaptă dusă prin punctul cvadruplu să o taie numai o dată. Curba se prezintă, în jurul punctului, ca în figura 3.

18. *Traseul are 3 puncte la infinit*. Curba se poate construi ținînd seama de observațiile de mai sus, că ramurile curbei trebuie să fie situate astfel ca, în unghiurile formate de tangentele din punctul cvadruplu la curbă și paralele la asimptote, să fie totdeauna o ramură de curbă sau o porțiune de ramură, care să fie tăiată numai într-un punct de o dreaptă care ar trece prin acest punct. Curba se prezintă ca în figura 4.

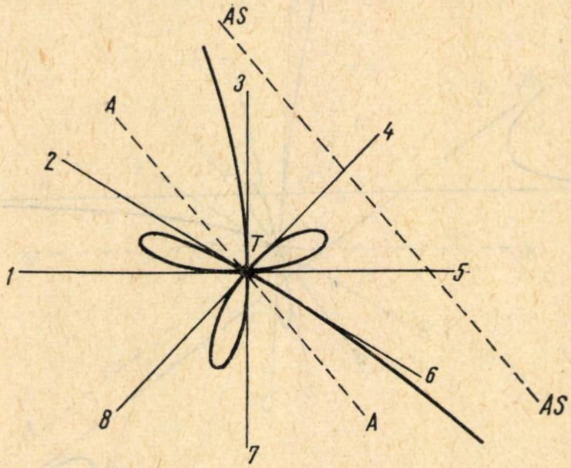


Fig. 3

O altă configurație a curbei, cu 3 puncte la infinit, se obține cînd traseul trece de patru ori prin punctul cvadruplu, fără a trece în interval spre infinit. El are atunci două arce hiperbolice, care vor fi așezate în unghiul asimptotelor AS_2 și AS_3 și al paralelei la ele A_2 și A_3, astfel ca o

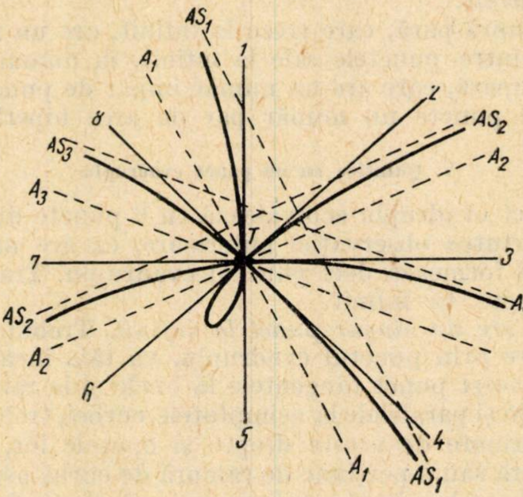

AS1
1
A1
2
AS2
A2
8
AS3
A3
T
7
3
AS3
AS2
A2
6
5
4
A1
AS1

Fig. 4

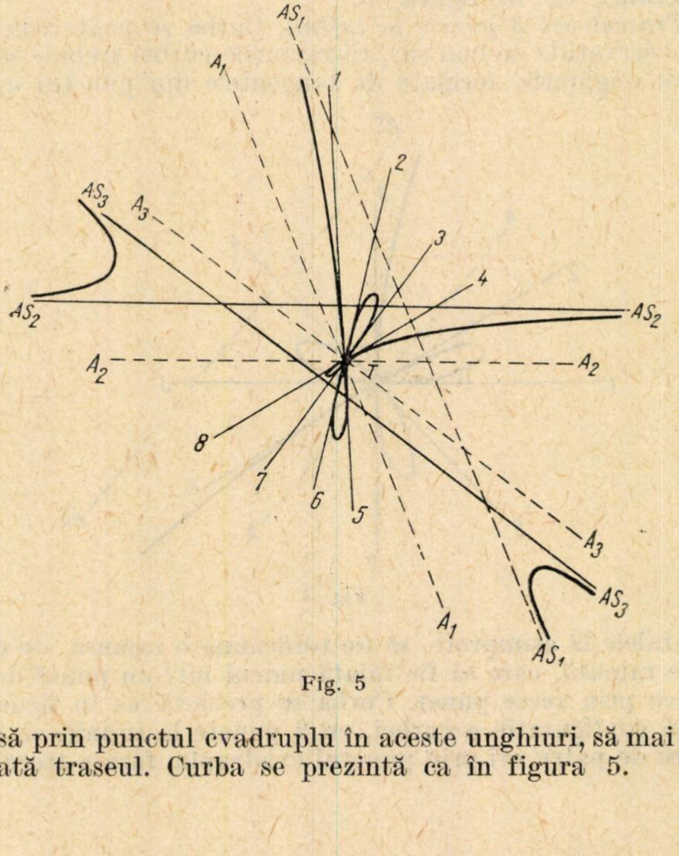

AS1
A1
1
2
AS3
A3
3
4
AS2
AS2
A2
T
A2
8
7
6
5
A3
AS3
A1
AS1

Fig. 5

dreaptă dusă prin punctul cvadruplu în aceste unghiuri, să mai întîlnească numai o dată traseul. Curba se prezintă ca în figura 5.

19. *Traseul are 5 puncte la infinit.* Vom observa că traseul nu poate trece de la un punct la infinit la altul tot la infinit numai prin punctul multiplu, căci acesta ar fi atunci quintuplu.

Traseul nu poate avea decît 2 sau 4 arce hiperbolice. În primul caz, curba are aspectul din figura 6, analog curbei din figura 4 cu 2 arce hiperbolice în plus. În al doilea caz, curba are aspectul din figura 5, însă cu 4 arce hiperbolice așezate astfel ca o dreaptă dusă prin punctul cvadruplu să taie numai încă o dată traseul.

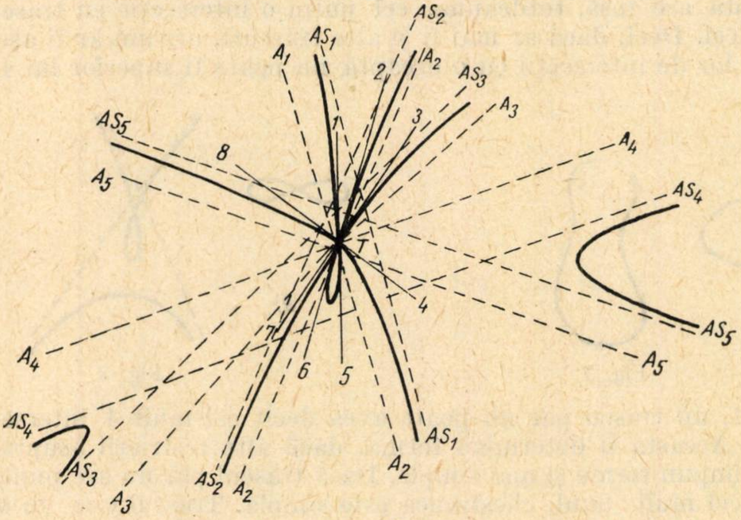


Fig. 6

CAPITOLUL III

QUINTICE CU UN PUNCT TRIPLU, FĂRĂ ALTE PUNCTE DUBLE

20. O quintică nu poate avea două puncte triple, deși ambele echivalează cu 6 puncte duble. Se vede motivul imediat : Dreapta care ar uni cele 2 puncte triple, ar tăia quintica în 6 puncte.

Observația este generală. O curbă nu poate avea un punct de ordinul $(n - 2)$ și un punct triplu, căci dreapta care le unește ar tăia curba în $(n + 1)$ puncte, cel puțin. Pentru quintice, observația este făcută și de Salmon [2] [1]).

În general, o quintică poate avea, pe lîngă punctul triplu, încă 1, 2 sau 3 puncte duble, cum s-a arătat în Cap. II. În capitolul de față, vom studia numai quinticele cu un punct triplu, dar fără puncte duble. Ne vom referi, în linii generale, la concluziile trase în capitolul anterior, la paragraful 11.

Punctul triplu poate fi format de :

1° Un singur traseu impar ;

2° Un singur traseu par ;

---

1) Pag. 45.

3° Intersecţia unui traseu impar cu unul par;
4° Intersecţia a 3 traseuri impare.
Vom examina pe rînd fiecare din aceste cazuri

21. *Observaţie asupra formei traseurilor pare.*

O dreaptă oarecare poate tăia quintica, cel mult, în 5 puncte. Această dreaptă are însă, totdeauna, cel puţin o intersecţie cu traseul impar al quinticei. Deci, dacă ar mai fi şi alte traseuri, oricum ar fi aşezate ele, numărul lor de intersecţii cu o dreaptă nu poate fi superior lui 4. Cu atît mai mult, un traseu par nu poate avea decît cel mult 4 intersecţii cu o dreaptă. Aceasta îi determină forma, dacă alte restricţii asupra poziţiei lui nu-i impun forme şi mai simple. Dacă traseul par nu are punct dublu, sau are cel mult unul, chestiunea este simplă. Traseul este un oval, respectiv o formă apropiată de cifra 8 — o vom numi chiar un opt (fig. 7 şi 8) cu, sau fără, ramuri la infinit, sau de forma din figura 8 b).

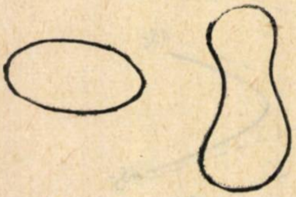


Fig. 7

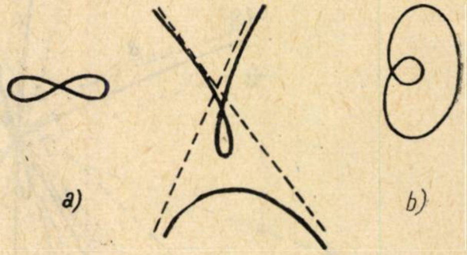


Fig. 8

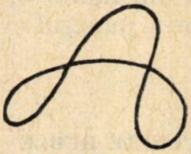


Fig. 9

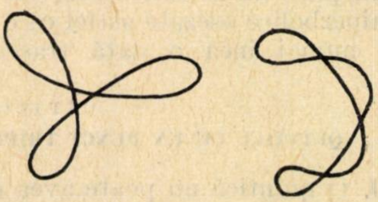


Fig. 10

Dacă traseul par are 2 puncte duble D şi D_1, ele nu pot fi aşezate oricum. Dreapta DD_1 nu va putea întîlni traseul par în alt punct decît acestea. Singura formă, topologic invariantă, va fi cea din fig. 9 (o copcă).

Dacă sînt trei puncte duble pe traseul par, acesta nu va putea avea decît una din cele 2 forme din figura 10 : un triunghi buclat, sau o dublă copcă.

Dacă, în afara traseului par, mai există alte puncte singulare, traseul par nu poate avea forma 8 b), căci prin punctul singular exterior s-ar putea duce drepte care să taie curba în mai mult de 5 puncte.

AŞEZAREA RAMURILOR DE CURBĂ ÎN JURUL PUNCTULUI TRIPLU

22. Fie 1, 2, 3, 4, 5 şi 6 direcţiile celor 6 semitangente la ramurile curbei, în punctul triplu. Din punct de vedere topologic, s-a arătat că aceste direcţii se consideră totdeauna distincte.

Traseul este compus din bucle, căci alte puncte duble nu există. Ele pot avea și puncte la infinit. Dacă un traseu impar trece prin punctul triplu, cel puțin o buclă are puncte la infinit.

Să notăm cu (*i. j*) bucla tangentă la semitangentele *i. j*. La fiecare așezare a buclelor, corespunde o combinare a celor 6 semitangente, luate în 3 grupe de cîte 2. Deci, ca să avem o imagine analitică a așezării posibile a buclelor, vom cerceta în cîte moduri distincte se poate face gruparea celor 6 semitangente în 3 grupe de cîte 2.

Apriori, sînt posibile $\frac{1}{2} C_6^2 \times C_4^2 = 45$ grupări. În adevăr, obținem o grupare fixînd întîi 2 numere *i. j*. Sînt posibile C grupări de acestea. Fiecare din ele este urmată de o grupare în cîte 2 a celor 4 cifre rămase, reprezentînd C_4^2 posibilități. În total : $C_6^2 \times C_4^2$. Jumătate din ele nu sînt însă distincte, așa că numărul grupărilor rămîne $\frac{1}{2} C_6^2 \times C_4^2$.

Din punct de vedere topologic, nici acestea nu sînt toate distincte. Așezarea care începe cu grupul (*1*, *2*), ne dispensează de așezările care încep cu celelalte 5 grupuri de tangente alăturate : (*2*, *3*), (*3*, *4*), (*4*, *5*), (*5*, *6*), (*6*, *1*). De asemenea, așezarea care începe cu grupul (*1*, *3*), nu este distinctă de cele 5 care încep cu grupurile (*2*, *4*), (*3*, *5*), (*4*, *6*), (*5*, *1*), (*6*, *2*). În fine, așezarea care are prim grup (*1*, *4*), este analoagă cu cele 5 care au prim grup (*2*, *5*), (*3*, *6*), (*4*, *1*), (*5*, *2*) sau (*6*, *3*).

Mai este de observat că nu s-a considerat cazul cu prim grup (*1*, *5*) care dă rezultate analoge cu așezările care au ca prim grup pe (*1*, *3*). Pentru același motiv este inutil a se lua ca prim grup (*1*, *6*) care echivalează cu (*1*, *2*).

Din cele $\frac{1}{2} C_6^2 \times C_4^2$ grupări arătate mai sus, rezultă că numai a 5-a parte rămîne de luat în considerare, și anume :

$(1,\ 2)\ (3,\ 4)\ (5,\ 6)$, $\underline{(1,\ 3)\ (2,\ 4)\ (5,\ 6)}$, $\underline{(1,\ 4)\ (2,\ 3)\ (5,\ 6)}$,

$(1,\ 2)\ (3,\ 5)\ (4,\ 6)$, $(1,\ 3)\ (2,\ 5)\ (4,\ 6)$, $(1,\ 4)\ (2,\ 5)\ (3,\ 6)$,

$(1,\ 2)\ (3,\ 6)\ (4,\ 5)$, $\underline{(1,\ 3)\ (2,\ 6)\ (4,\ 6)}$, $\underline{(1,\ 4)\ (2,\ 6)\ (3,\ 5)}$.

Nici acestea însă nu sînt toate distincte din punctul de vedere ce ne interesează. Așa :

$(1,\ 3)\ (2,\ 4)\ (5,\ 6) \cong (1,\ 3)\ (2,\ 6)\ (4,\ 5) \cong (1,\ 2)\ (3,\ 5)\ (4,\ 6)$,

$(1,\ 4)\ (2,\ 3)\ (5,\ 6) \cong (1,\ 2)\ (3,\ 6)\ (4,\ 5)$,

$(1,\ 4)\ (2,\ 6)\ (3,\ 5) \cong (1,\ 3)\ (2,\ 5)\ (4,\ 6)$.

Deci, singurele grupări perfect distincte sînt cele 5 nesubliniate în tabloul de mai sus.

Vom studia pe rînd, pentru toate cazurile găsite în Cap. II, așezarea posibilă a ramurilor quinticei, pe baza grupărilor stabilite a semitangentelor. Vom considera, mai întîi, cazul cînd quintica are un punct triplu, fără alte puncte duble.

1° *Punctul triplu este format de un singur traseu impar*

23. Din cele 3 bucle ale curbei, una cel puțin va avea un punct la infinit. Curba poate avea însă și 3 sau 5 puncte la infinit, acestea putînd fi pe una sau pe mai multe bucle. Pe lîngă traseul impar, curba ar mai putea avea 3 traseuri pare, izolate şi convenabil situate.

24. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *4*) (*5*, *6*). Una dintre bucle, de ex. (*1*, *2*) are un punct la infinit. Curba se prezintă ca în figura 11. Dacă aceeaşi buclă are 3 puncte la infinit, curba se prezintă ca în fig. 12. Nu prezintă un interes special cazul cînd curba ar avea 5 puncte la infinit.

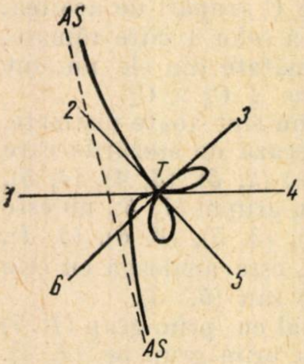


Fig. 11

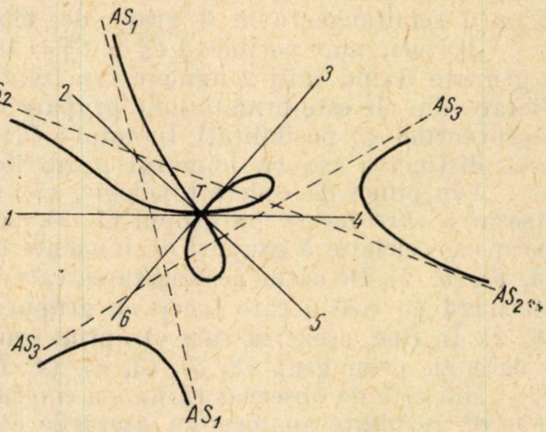


Fig. 12

Cazul (*1*, *2*) (*3*, *5*) (*4*, *6*) prezintă încă un punct dublu pe lîngă punctul *T*, indiferent dacă mai mult de o buclă ar avea puncte la infinit. Este deci exclus, fiind în contrazicere cu ipoteza acestui capitol.

Cazul (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*, *5*) este de asemenea exclus, căci bucla (*3*, *6*) se închide, fără a mai trece prin unghiul celorlalte semitangente, ceea ce înseamnă că în *T* sînt cel puţin 2 traseuri.

Cazurile (*1*, *3*) (*2*, *5*) (*4*, *6*) şi (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3*, *6*) se exclud pentru acelaşi motiv.

Deci, dacă traseul care formează punctul triplu este impar, nu sînt posibile decît 2 grupări ale ramurilor de curbă în punctul *I*, cele studiate în cazul (*1*, *2*) (*3*, *4*) (*5*, *6*).

2° *Punctul triplu este format de un singur traseu par*

25. În acest caz, traseul nu poate avea nici un punct de inflexiune în punctul *T*, căci tangenta de inflexiune ar tăia traseul par de 5 ori în *T*, necesitînd deci încă 2 intersecţii cu curba, una pe traseul par şi una pe cel impar. Raţionamentul nu s-a făcut în cazul aşezării punctului triplu pe un traseu impar pentru că pe lîngă cele 5 intersecţii din *T* ale tangentei de inflexiune cu traseul impar, nu se mai impunea o altă intersecţie. De asemenea, raţionamentul nu este aplicabil, fără restricţii, dacă punctul triplu este format din intersecţia a 2 traseuri.

După cum s-a observat în Cap. II, punctul b, curba nu poate avea decît traseul par, care formează punctul triplu şi traseul impar.

26. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *4*) (*5*, *6*). Buclele (*i*. *j*) sînt tangente interior unghiului ascuţit al tangentelor *i.j*. În adevăr, dacă una sau două din bucle ar fi tangente unghiului obtuz al semitangentelor, ar rezulta inflexiuni în punctul triplu. Dacă toate buclele ar fi tangente în unghiul obtuz, ar rezulta puncte singulare în afara lui *T* sau tangentele din *T* ar întîlni traseul par cu cîte 6 puncte ca în figura 13. Curba va avea, deci, forma din figura 14 a) sau forma din figura 14 b), dacă pe ramuri pare sînt puncte la infinit.

Cazul (*1*, *2*), (*3*, *5*) (*4*, *6*) nu este posibil din cauza punctului dublu care rezultă din intersecţia buclelor (*3*, *5*) şi (*4*, *6*).

Cazul (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*, *5*) se exclude, fiindcă bucla (3,6) formează un traseu separat, adică în *T* ar fi cel puţin 2 traseuri şi noi am presupus numai unul.

Cazurile (*1*, *2*) (*2*, *5*) (*4*, *6*) şi (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3*, *6*) se exclud pe aceleaşi consideraţii.

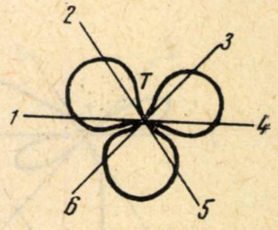


Fig. 13

3° *Punctul triplu T este format de intersecţia a 2 traseuri cel impar trecînd o dată prin el şi cel par de două ori*

27. Traseul impar, trecînd o singură dată prin punct, el va fi tangent numai la 2 semitangente în prelungire. Din diferitele grupări posibile ale semitangentelor, nu vor fi de studiat, în ipoteza aceasta, decît acelea în care figurează ca grup două semitangente în prelungire, adică numai cazurile (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*, *5*); (*1*, *3*) (*2*, *5*) (*4*, *6*) şi (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3*, *6*). Curba ar mai putea avea 2 alte traseuri pare.

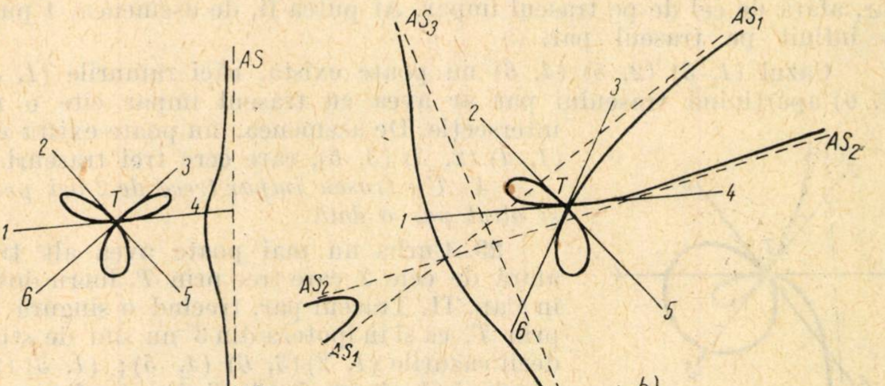


Fig. 14

28. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*, *5*). Traseul impar va fi tangent la semitangentele *3*, *6*. Buclele celui par se vor cuprinde între celelalte 2 grupe de semitangente : (*1*, *2*) şi (*4*, *5*). Dacă traseul par nu are puncte la infinit el va prezenta 2 inflexiuni în punctul triplu : curba se va prezenta, în jurul acestui punct, ca în figura 15 a). În jurul punctului T, curba se poate prezenta şi ca în figura 15 b), cînd are încă 2 puncte la infinit pe traseul

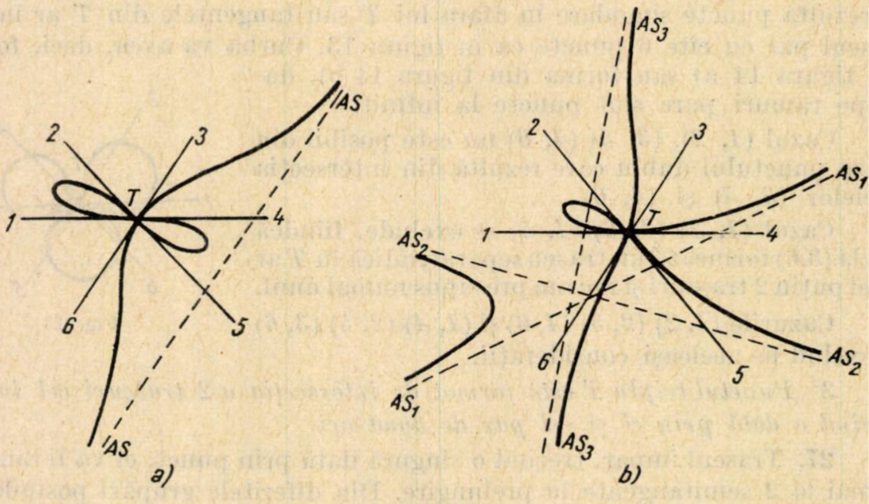


Fig. 15

par, afară de cel de pe traseul impar. Ar putea fi, de asemenea, 4 puncte la infinit pe traseul par.

Cazul (*1*, *3*) (*2*, *5*) (*4*, *6*) nu poate exista, căci ramurile (*1*, *3*) şi (*4*, *6*) aparţinînd traseului par ar avea cu traseul impar cîte o nouă intersecţie. De asemenea, nu poate exista cazul (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3*, *6*), care cere trei traseuri.

4° *Un traseu impar trece de 2 ori prin T şi altul par o dată*

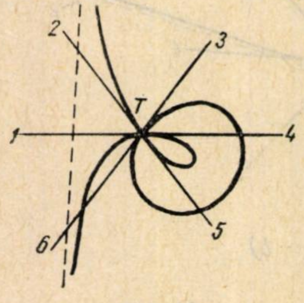


Fig. 16

29. Curba nu mai poate avea alt traseu afară de cele 2 care trec prin T, lucru dovedit în Cap. II. Traseul par, trecînd o singură dată prin T, ca şi în ipoteza din 3° nu sînt de studiat decît cazurile (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*, *5*) ; (*1*, *3*) (*2*, *5*) (*4*, *6*) şi (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3*, *6*), în care figurează 2 semitangente în prelungire la aceeaşi ramură.

30. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*, *5*). Traseul par va fi tangent la cele 2 semitangente *3*, *6*. Una dintre cele 2 bucle ale traseului impar va fi interioară celei a traseului par. Curba se prezintă ca în figura 16, iar cînd are încă 2 sau 4 puncte la infinit, ca în figurile 17 a) şi 17 b).

Cazul (*1*, *3*) (*2*, *5*) (*4*, *6*) nu este posibil, fiindcă dă puncte singulare, afară de T. Nu este posibil nici cazul (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3*, *6*) care, numai cu 2 traseuri, nu poate exista.

5° *Punctul triplu este format de intersecția a trei traseuri impare*

31. S-a arătat în Cap. II că mai poate exista un traseu par, fără puncte comune cu cele 3 impare. Curba are cel puțin 3 puncte la infinit.

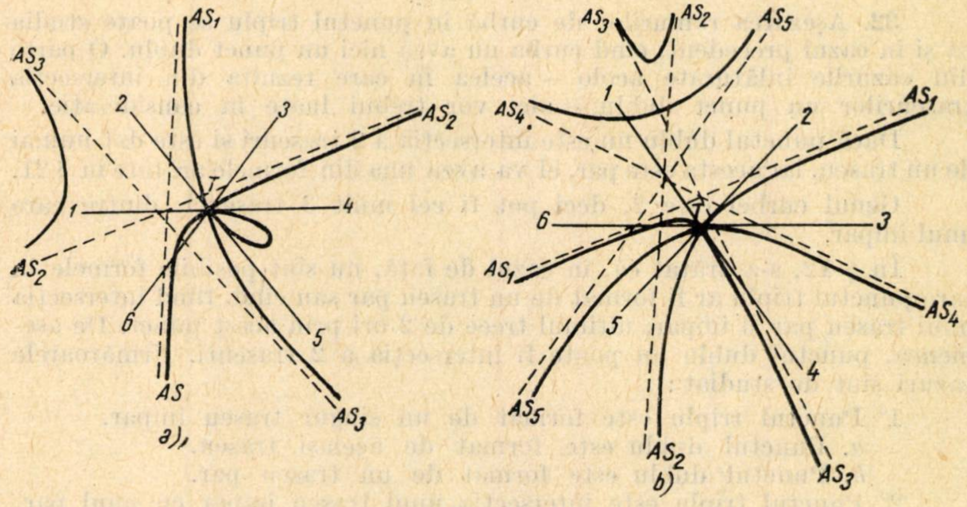

AS1
AS3
2
3
AS2
1
T
4
AS2
6
5
AS
AS3
a)
AS3
AS2
AS5
1
AS4
AS1
2
T
6
3
AS1
AS4
5
4
AS5
AS2
AS3
b)

Fig. 17

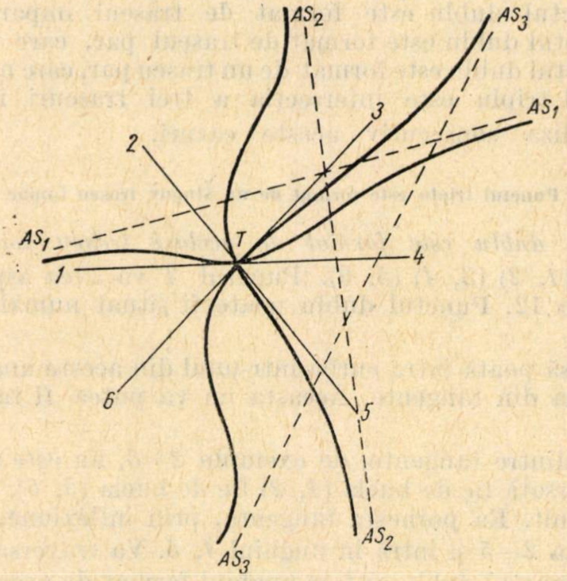

AS2
AS3
3
AS1
2
AS1
T
4
1
6
5
AS2
AS3

Fig. 18

Fiecare traseu, trecînd o singură dată prin punct singurul caz de studiat, este:

Cazul (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3*, *6*). Curba se prezintă ca în figura 18, putînd avea încă 2 puncte la infinit.

CAPITOLUL IV

QUINTICE CU UN PUNCT TRIPLU ŞI UNUL DUBLU

32. Aşezarea ramurilor de curbă în punctul triplu se poate studia ca şi în cazul precedent, cînd curba nu avea nici un punct dublu. O parte din cazurile înlăturate acolo — acelea în care rezulta din intersecţia traseurilor un punct dublu — aici vor trebui luate în consideraţie.

Dacă punctul dublu nu este intersecţia a 2 traseuri şi este dat numai de un traseu, iar acesta este par, el va avea una din formele arătate în § 21.

Genul curbei este 2, deci pot fi cel mult 3 traseuri, dintre care unul impar.

În § 12, s-a arătat că, în cazul de faţă, nu sînt posibile formele în care punctul triplu ar fi format de un traseu par sau cînd, fiind intersecţia unui traseu par şi impar, ultimul trece de 2 ori prin acest punct. De asemenea, punctul dublu nu poate fi intersecţia a 2 traseuri. Următoarele cazuri sînt de studiat :

1° Punctul triplu este format de un singur traseu impar.
a. Punctul dublu este format de acelaşi traseu.
b. Punctul dublu este format de un traseu par.
2° Punctul triplu este intersecţia unui traseu impar cu unul par, acesta trecînd de 2 ori prin *T*.
a. Punctul dublu este format de traseul impar.
b. Punctul dublu este format de traseul par, care trece prin *T*.
c. Punctul dublu este format de un traseu par, care nu trece prin *T*.
3° Punctul triplu este intersecţia a trei traseuri impare.

Vom analiza consecutiv aceste cazuri.

1° Punctul triplu este format de un singur traseu impar

a. *Punctul dublu este format de acelaşi traseu impar*

33. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *4*) (*5*, *6*). Punctul *T* va avea aspectul aproximativ din figura 12. Punctul dublu poate fi situat numai în unghiurile *1*, *2* sau *4*, *5*.

Pentru ca să poată intra curba într-unul din aceste unghiuri, trebuie să traverseze una din tangente. Aceasta nu va putea fi tangentă de inflexiune în *T*.

Dacă una dintre tangente, de exemplu *2—5*, nu este de inflexiune, ea poate fi traversată fie de bucla (*1*, *2*) fie de bucla (*5*, *6*). Cea dintîi are un punct la infinit. Ea porneşte tangentă, prin inflexiune, la *1—4*, traversează tangenta *2—5* şi intră în unghiul *4*, *5*. Va traversa şi asimptota AS_1, căci dacă punctul dublu ar fi în unghiul format de această asimptotă şi *2—5*, s-ar putea duce prin *T* o dreaptă, care să taie curba în mai mult de 5 puncte (traseul punctat în figura 19).

Punctul dublu *D* va fi deci în unghiul format de asimptotă şi tangenta *1—4*, pe care curba nu o poate retroversa. Forma ei este cea din figura 19.

Ducînd din *T* tangenta la bucla care se închide în *D*, în unghiul format de aceasta şi *1—4*, sau opusul lui, pot exista încă două traseuri pare, convenabil aşezate, avînd una din formele din figura 8.

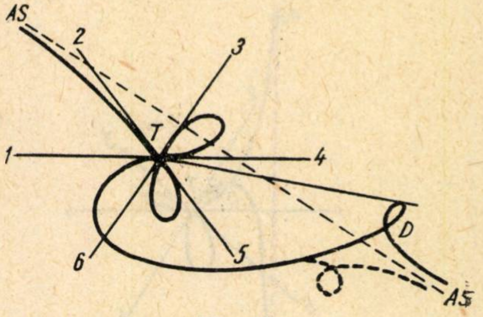


Fig. 19

Dacă cea de-a doua buclă (*5*, *6*), care nu are puncte la infinit traversează tangenta *2 — 5*, curba va avea forma din figura 20, fără a putea traversa tangenta *1—4*. În unghiul format de această dreaptă şi tangenta din *T* la bucla închisă în *D*, sau opusul lui, pot fi situate cele 2 traseuri pare, pe care le poate avea curba.

Cînd, în aceeaşi ipoteză, quintica ar avea 3 puncte la infinit, forma ei este cea din figura 20 b).

Traseurile pare, în număr de cel mult 2, care mai pot fi, sînt situate în acelaşi unghi arătat anterior.

În fine, cînd nici una din tangentele din *T* nu sînt de inflexiune, porţiunile de ramură care merg spre infinit se încrucişează în unghiul *1*, *2*,

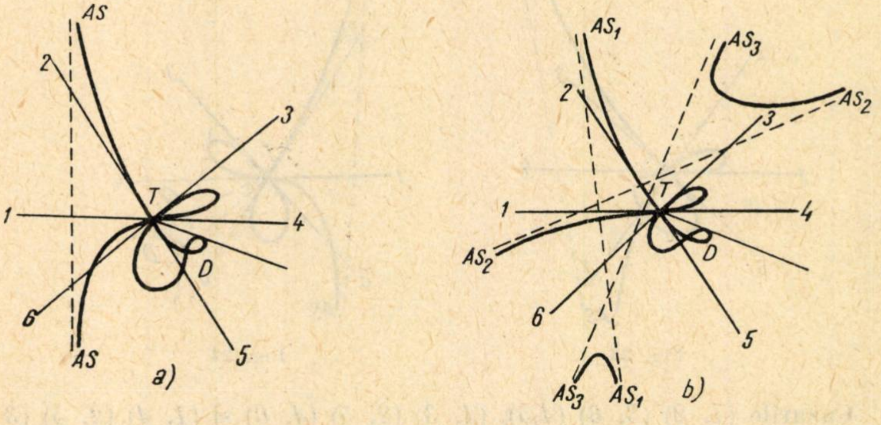


Fig. 20

formînd punctul dublu, de unde trec spre infinit, ca în figura 21. În cazul de faţă, quintica se reduce numai la traseul impar, căci orice dreaptă dusă prin *T*, taie acest traseu în 5 puncte.

34. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *5*) (*4*, *6*), a fost exclus în capitolul precedent, fiindcă da un punct dublu prin intersecţia buclelor (*3*, *5*) cu (*4*, *6*). Aici, tocmai această intersecţie se caută. Ea poate fi în unghiul *4*, *5* şi curba are forma din figura 22. Se reduce numai la traseul impar care trece prin *T*, fiindcă afară de el nici un punct nu mai aparţine curbei, orice dreaptă care trece prin *T*, tăindu-l în 5 puncte.

Punctul dublu poate fi însă și în unghiul *5*, *6*, ca în figura 23. În această ipoteză, curba mai poate avea încă 2 traseuri pare, situate convenabil, în unghiul *1*, *6* și opusul lui.

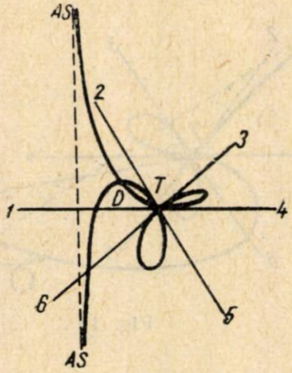


Fig. 21

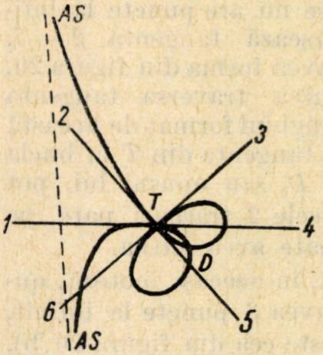


Fig. 22

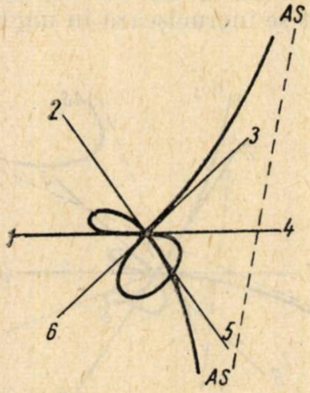


Fig. 23

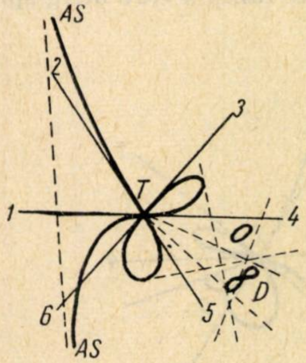


Fig. 24

Cazurile (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*,*5*), (*1*, *3*) (*2*, *5*) (*4*, *6*) și (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3* *6*) nu pot figura aici fiindcă cer ca punctul triplu să fie format de intersecții de traseuri.

b. *Punctul dublu este format de un traseu par.*

35. Punctul triplu va avea una din formele din figura 12, corespunzătoare singurului caz posibil, studiat acolo :

Cazul (*1*, *2*) (*3*, *4*) (*5*, *6*). Traseul par care formează punctul dublu nu poate avea decît o formă de opt, situat în unghiul *1*, *2* sau *4*, *5*. În aceleași unghiuri, dar în afara unghiului tangentelor duse din *T* la traseul care formează punctul dublu și în afara unghiurilor formate la tangentele comune dintre diferitele ovale, poate fi situat un al doilea traseu par, în formă de oval (fig. 24).

2° Punctul triplu este intersecția unui traseu impar cu unul par, acesta trecînd de 2 ori prin T

a. *Punctul dublu este format de traseul impar.*

36. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*, *5*). Punctul triplu se prezintă ca în figura 15. Traseul impar este tangent la *3*, *5*. Afară de tangenta *3*, *5*, se pot duce din *T*, la porțiunile de traseu impar ce pleacă spre infinit, numai 2 tangente, cîte una la fiecare porțiune de traseu, căci dacă ar fi 2, una din ele ar trebui, fatal, să taie încă o dată traseul, avînd astfel cu curba *3* intersecții în *T*, 2 în punctul de tangentă plus încă una, ceea ce este absurd. Fie *TM* și *TN* aceste 2 tangente și *TM'*, *TN'* prelungirile lor. Punctul dublu *D* nu ar putea fi situat, în general, decît în unghiurile *2*, *5* — *M*, *M'* și *1*, *4* — *N*, *N'*, căci în oricare altă parte ar fi situat, dreapta *TD* ar avea mai mult de 5 intersecții cu curba, sau traseul trebuie să fie astfel format ca dreapta *TD* să nu-l taie în afara acestor 2 puncte.

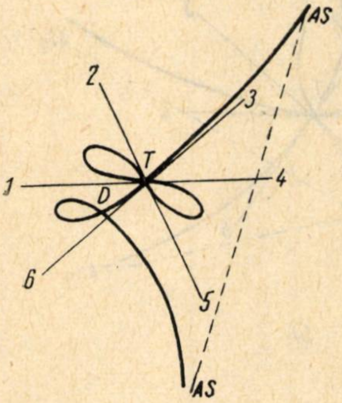


Fig. 25

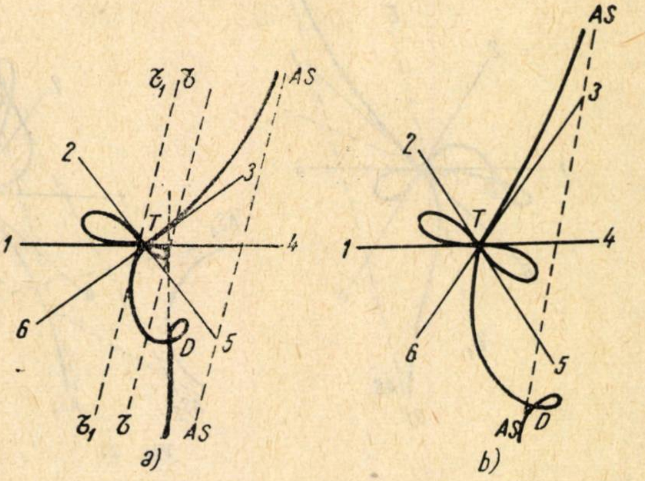


Fig. 26

Dacă bucla (*4*, *5*) nu taie asimptota și τ este tangenta la ea paralelă cu asimptota, iar τ_1 tangenta la traseul impar paralelă, tot cu asimptota, în zona $\tau\tau_1$ nu poate exista un punct dublu, fiindcă o paralelă la τ, dusă prin acest punct, ar tăia curba în mai mult de 5 puncte.

Punctul dublu nu se poate găsi deci decît în unghiurile arătate mai sus, în afara zonei $\tau\tau_1$.

Dacă bucla (*4*, *5*) ar tăia asimptota, punctul dublu nu poate fi în zona formată de τ_1 și asimptotă.

Punctul *D* fiind pe traseul impar, dacă dreapta *TD* nu mai taie curba în afară de *T* și *D*, poate fi situat în unghiul *1*, *6*, ca în figura 25, sau în unghiul *5*, *6*, ca în figura 26 a). Cînd bucla taie asimptota, punctul dublu este de cealaltă parte față de *T* față de asimptotă și curba se prezintă ca în figura 26 b).

În unghiurile numite mai sus, şi aici afara zonei $\tau\tau_1$, mai poate exista, într-o aşezare convenabilă, încă un traseu par.

Cazul (*1*, *3*) (*2*, *5*) (*4*, *6*) dă 2 intersecţii între cele 2 traseuri pe lîngă punctul *T*, deci cazul se exclude. Se exclude, de asemenea, cazul (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*2*, *3*), care presupune 3 traseuri trecînd prin *T*.

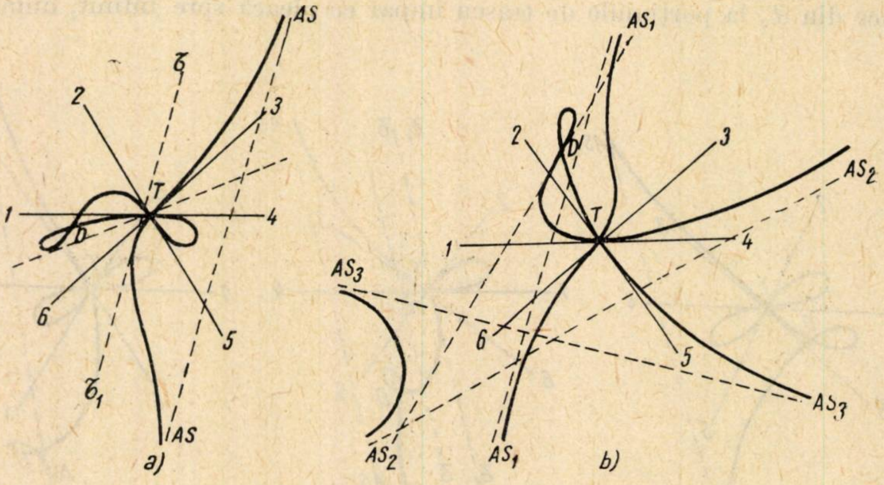


Fig. 27

b. *Punctul dublu este format de traseul par, care trece prin T*

37. Singurul caz posibil, este — ca şi în paragraful anterior — *cazul* (*1*, *2*) (*3*, *6*) (*4*, *5*), căruia îi corespunde aceeaşi formă a curbei, în punctul triplu *T*. Punctul dublu va putea fi situat în aceleaşi regiuni din unghiurile *1*, *6* şi *3*, *4*, arătate în paragraful anterior. Topologic, cazul este acelaşi, fie că punctul dublu este într-unul sau în celălalt dintre cele 2 unghiuri. Traseul par are forma de copcă, arătată în § 21. Curba se prezintă ca în figura 27 a).

Puncte la infinit pot fi pe ambele traseuri. O formă a curbei, cu 2 puncte la infinit pe traseul par şi unul pe cel impar, este în figura 27 b).

În unghiul format de *3*, *6* şi tangenta din *T* la bucla închisă în *D*, sau în parte din unghiul *5*, *6* şi opusul lui (fig. 27 a)) ar mai putea fi situat încă un traseu par. Analog, în figura 27 b).

c. *Punctul dublu este format de un traseu par, care nu trece prin T*

38. Este evident că punctul triplu va avea aceeaşi formă ca atunci cînd curba nu avea alte puncte duble, ca în figura 15 şi singurul caz posibil este *cazul* (*1*, *2*), (*3*, *6*), (*4*, *5*). Tot aşa cum s-a observat în cele 2 paragrafe anterioare, în zona formată de $\tau\tau_1$ şi în unghiul tangentelor *TM*, *TN*, nu mai poate fi nici un punct al curbei. Deci, traseul par izolat, care are şi punctul dublu, nu poate fi situat decît în porţiunile din unghiurile *1*,*6*; *3*, *4*; *2*, *3* şi *5*, *6*, în afara acestor regiuni, ca în figura 28.

3° Punctul triplu este intersecţia a 3 traseuri impare

39. Punctul dublu D, nu poate fi format decît de unul singur dintre traseurile impare. Nu l-ar putea forma 2, prin intersecţia lor, căci ar rezulta şi alte intersecţii între ele, afară de T şi D (numărul de intersecţii a 2 traseuri impare este impar).

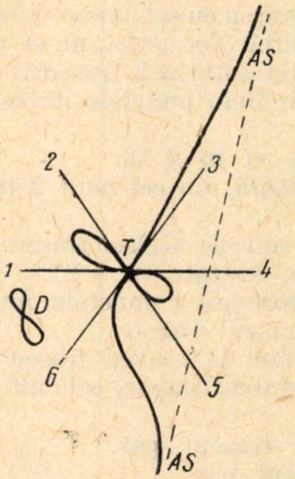


Fig. 28

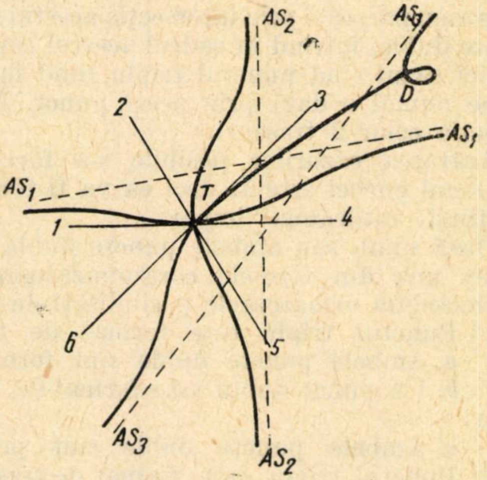


Fig. 29

Singura posibilitate de aşezare a celor 3 traseuri, în punctul T, va fi cea arătată în figura 18, corespunzătoare *cazului* (*1*, *4*) (*2*, *5*) (*3*, *6*). Punctul dublu D este astfel aşezat ca dreapta TD să nu mai întîlnească în nici un punct curba, afară de acestea 2. De asemenea, orice dreaptă ce s-ar putea duce prin D, nu va tăia decît încă o dată fiecare traseu. Deci, din D nu se va putea duce nici o tangentă la vreunul din cele 3 traseuri.

Dacă se consideră unul din cele 3 traseuri impare, de exemplu, cel de asimptotă AS_1, din orice punct, cuprins între asimptotă şi traseu, se poate duce o tangentă la traseu. Dar, dacă traseul nu traversează asimptota din punctele planului situate de cealaltă parte a asimptotei, faţă de traseu nu se pot duce tangente la traseu. Urmează că punctul D, ca din el să nu se poată duce nici o tangentă la un traseu, trebuie să fie situat de cealaltă parte a asimptotelor faţă de fiecare traseu sau — cum este figura — faţă de punctul T. Singura regiune din plan, care corespunde acestei condiţii, este unghiul format de asimptotele AS_1 şi AS_3. Aici va fi situat punctul D, iar curba va avea forma din figura 29.

Evident, curba este formată din cele 3 traseuri şi nu admite vreun alt traseu par.

CAPITOLUL V

QUINTICE CU UN PUNCT TRIPLU ŞI DOUĂ DUBLE

40. Diferitele grupări posibile ale ramurilor de curbă, atît în jurul punctului triplu, cît şi în cele 2 puncte duble, se pot deduce, în general, din cazurile studiate în capitolul anterior.

Aici, însă, nu se va mai înlătura cazul cînd punctul triplu ar fi format de un traseu par, căci prin intersecţia acestui traseu cu cel impar se formează 2 puncte duble, intrînd în cadrul acestui capitol. Tot astfel, nu se va înlătura nici cazul cînd punctul triplu fiind intersecţia a 2 traseuri, cel par ar trece numai o dată prin acest punct. În fine, punctele duble pot fi intersecţia celor 2 traseuri.

Arătarea cazurilor posibile s-a făcut şi în § 13.

Genul curbei este 1, deci ea va fi formată din cel mult 2 traseuri, unul fiind totdeauna impar.

Dacă unul, sau ambele puncte duble sînt pe acelaşi traseu par, el va avea una din formele corespunzătoare, arătate în § 21.

Deosebim următoarele posibilităţi de formare a punctelor multiple :

1° Punctul triplu este format de traseul impar.

a. Ambele puncte duble sînt formate de acelaşi traseu impar.

b. Un punct dublu este format de traseul impar, celălalt de traseul par.

c. Ambele puncte duble sînt pe traseul par.

2° Punctul triplu este format de traseul par.

Cele 2 puncte duble sînt intersecţia traseului par cu cel impar.

3° Punctul triplu este intersecţia unui traseu impar cu unul par, care trece de 2 ori prin punct.

a. Ambele puncte duble sînt formate de traseul impar.

b. Unul din punctele duble este format de traseul impar, celălalt de cel par.

c. Ambele puncte duble sînt formate de traseul par.

4° Punctul triplu este intersecţia traseului impar cu cel par, care trece o singură dată prin punct.

Ambele puncte duble sînt intersecţia celor 2 traseuri.

Vom studia pe rînd, aceste cazuri :

1° Punctul triplu este format de traseul impar

a. *Ambele puncte duble sînt formate de acelaşi traseu impar*

41. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *4*) (*5*, *6*) se deduce din formele studiate în § 33. O primă formă a curbei a fost cea din figura 19. S-a arătat acolo, că pe lîngă traseul impar, mai putea fi unul sau 2 traseuri pare în unghiul format de tangenta dusă din T la bucla închisă în D, cu dreapta $1-4$, sau în opusul lui. În acelaşi unghi, ar putea fi, deci, situat şi al doilea punct dublu format de traseul impar.

Spre a forma acest al doilea punct dublu D_1, traseul impar nu poate trece în unghiul arătat după ce a format punctul D, căci dreapta TD ar întîlni, astfel, încă o dată traseul. Nu se poate forma punctul D_1 decît prin trecerea traseului par o dată prin D, după aceea de 2 ori prin D_1, ca să revie, apoi, prin D, la asimptotă, ca în figura 30 a) sau 30 b). În cazul figurii 30 b), trebuie observat, între altele, că tangenta comună la buclele D_1

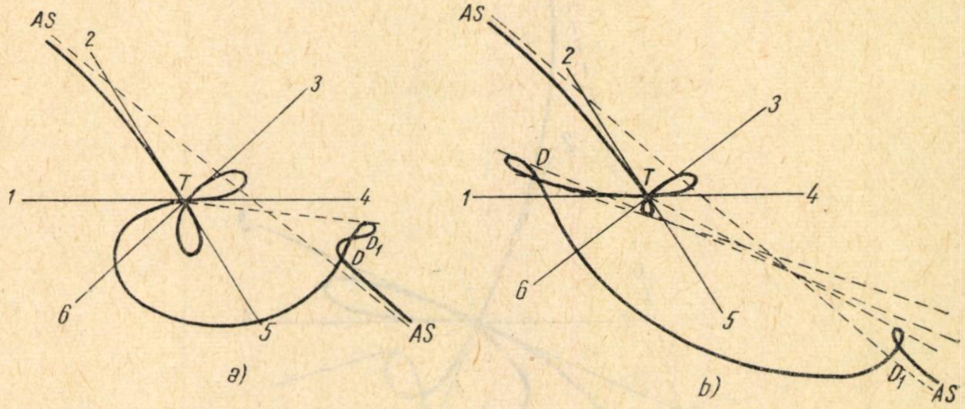


Fig. 30

și (*5*, *6*) nu trebuie să taie bucla D_1. Traseul par, care ar mai aparține curbei, poate fi situat numai în unghiul format de tangenta din T la bucla închisă în D_1 și dreapta *1*—*4*.

Ambele puncte duble sînt, aici, pe porțiunea de traseu, care pleacă din punctul triplu spre infinit.

Se poate însă ca punctele duble să fie situate și pe buclele care se închid în T, fără a trece prin infinit. Din figura 20 se poate obține un al doilea punct dublu pe ramura care pleacă din T spre infinit, ca în figura 31, sau pe a doua buclă închisă în T, ca în figura 32. În cazul figurii 32, trebuie observat că în unghiul tangentelor din cele 2 puncte duble D și D_1, care cuprind între ele bucla închisă în punctul dublu respectiv, să nu fie cuprinsă nici o porțiune din bucla închisă în celălalt punct dublu, nici din ramurile ce leagă acest al doilea punct dublu de cel triplu.

În ambele aceste cazuri, traseul par, care ar aparține curbei, nu poate fi situat decît în unghiul format de tangentele duse din T la buclele închise în D și D_1.

În fine, s-ar mai putea ca ambele puncte duble să fie formate de aceeași buclă, care, fără ele, s-ar închide în T, ca în figura 33, cînd traseul par nu ar putea fi situat decît în unghiul format de tangenta dusă din T la bucla închisă în D_1 și dreapta *1* —*4*.

Nu vom putea obține încă un punct dublu pe traseul impar, în cazul figurii 21, căci — după cum s-a arătat în § 33 — în această figură, orice dreaptă, care trece prin punctul triplu, taie curba în 5 puncte și nu permite deci, existența unui alt punct dublu afară de D.

42. *Cazul* (*1*, *2*) (*3*, *5*) (*4*, *6*) a dat în § 34, 2 figuri posibile ale curbei, cu un singur punct dublu. Din acestea figura 22 nu admitea existența vreunui punct al curbei exterior traseului impar. Deci, această formă nu va admite nici un al doilea punct dublu pe traseul impar.

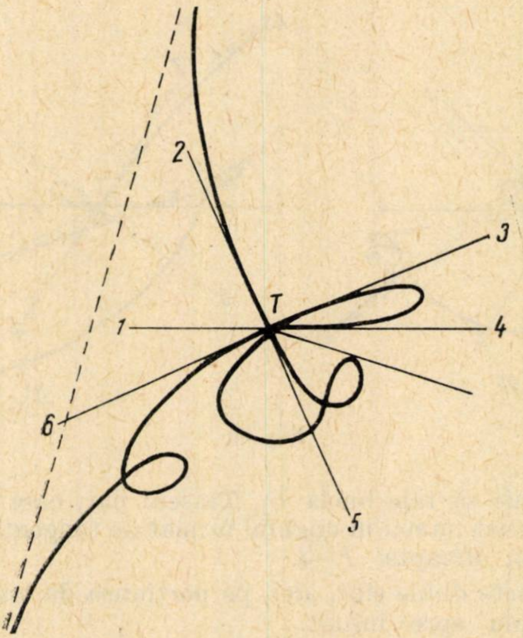


Fig. 31

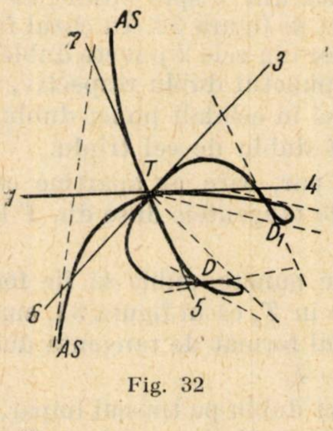


Fig. 32

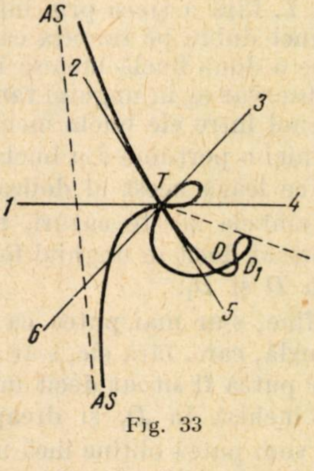


Fig. 33

Din figura 23 se pot deduce însă cazuri cu încă un punct dublu pe traseul impar. El nu poate fi situat însă decît în unghiul *1*—*4*, *3*—*6*, unde, în § 34, se puteau situa traseuri pare. Acest al doilea punct dublu poate fi format, fie de o buclă ce se închide în T, fără a trece prin infinit, ca în figurile 34 și 35 a), sau pe ramura cu puncte la infinit, ca în figura 35 b).

În toate aceste trei cazuri, poate face parte din curbă încă un traseu par, în unghiul format de *1—4* și tangenta la bucla închisă în D.

În punctul triplu, fiind un singur traseu, după cum s-a observat de mai multe ori, nu convin aici cazurile : (1,2) (3,6) (4,5) ; (1,3) (2, 5) (4,6) și (1,4) (2,5) (3,6).

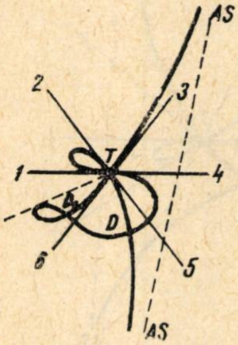
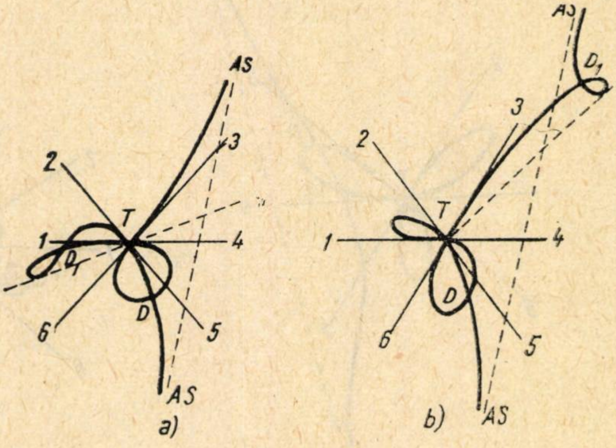


Fig. 34



a) b)

Fig. 35

b. *Un punct dublu este pe traseul impar, altul pe cel par*

43. Posibilitățile din această ipoteză se deduc din cazul cînd punctul triplu este format de un traseu impar cu încă un punct dublu, studiat în paragrafele 33 și 34. Încă un traseu par, cel puțin, era posibil (figurile 19, 20 și 23). De data aceasta, el va avea un punct dublu, prezentîndu-se în forma unui 8 convenabil așezat (§ 21).

c. *Ambele puncte duble sînt pe traseul par*

44. Se deduce singurul caz posibil din forma pe care o are curba cînd traseul impar, care dă punctul triplu, nu are alte puncte duble, caz studiat în § 24. În unghiurile *1, 2* și *4, 5,* poate fi încă un traseu par (fig. 12). Acest traseu va avea, aici, forma de copcă din figura 10. Curba se va prezenta ca în figura 36.

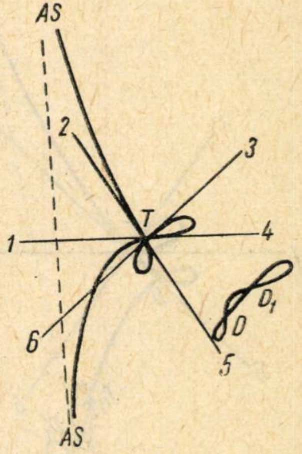


Fig. 36

2° **Punctul triplu este format de traseul par**

Ambele puncte duble sînt intersecția celor două traseuri.

45. Traseul par, care formează punctul triplu, nu poate avea decît forma din figura 14. Orice dreaptă, care trece prin punctul T, taie curba în 5 puncte, dintre care, trei în T, unul pe traseul par și unul pe cel impar. Nu poate fi, deci, nici un punct dublu format numai de același traseu. Punctele duble vor fi astfel, intersecția celor 2 traseuri, acesta fiind singurul caz posibil (figura 37).

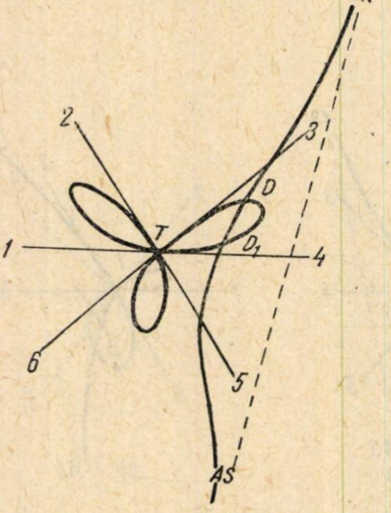


Fig. 37

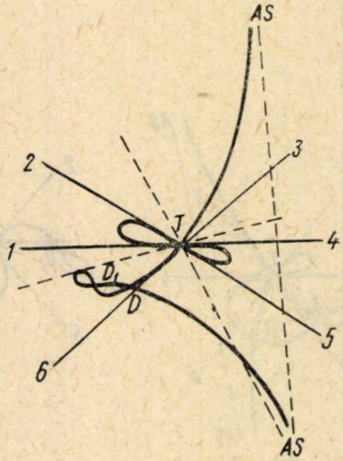


Fig. 38

3° Punctul triplu este intersecția unui traseu impar cu unul par, care trece de 2 ori prin punct

a. Ambele puncte duble sînt formate de traseul impar

46. În jurul punctului triplu, curba va avea forma din figurile 25 și 26, studiate în § 36.

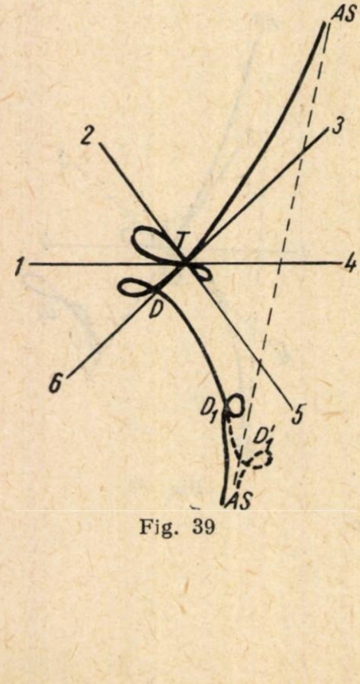


Fig. 39

Plecînd de la figura 25, al doilea punct dublu poate fi situat în unghiul *1, 6*, traseul impar trecînd o dată prin D, apoi de 2 ori prin D_1 și revenind în D (fig. 38).

Punctul D_1 poate fi și în unghiul *5, 6*, cu restricțiile din § 36, de o parte sau alta a asimptotei, și curba se prezintă atunci ca în figura 39 (traseu plin sau punctat).

Punctul D_1 nu poate fi pe traseul impar de cealaltă parte a lui T față de D. Se observă, spre a arăta aceasta, că traseul nu poate ieși din unghiul *2, 3*, fiindcă tangenta *T, 6* taie, de la început, curba în 5 puncte, deci nu poate fi traversată din nou; iar în unghiul *1, 2*, orice dreaptă taie de mai înainte curba în 5 puncte. În acest unghi, *2, 3*, însă, porțiunea de traseu impar nu poate fi tăiată decît o dată de o dreaptă care trece prin T, şi oricum ar fi situat un punct dublu aici, această condiţie nu se poate îndeplini.

Pornind de la figura 26, prin aşezarea noului punct dublu de o parte sau de alta a lui D, se obţin aceleaşi forme ca în figura 39, sau cele din figurile 40 şi 41 ; ultimele cu al doilea punct dublu de aceeaşi parte, sau de parte opusă cu primul, faţă de punctul triplu.

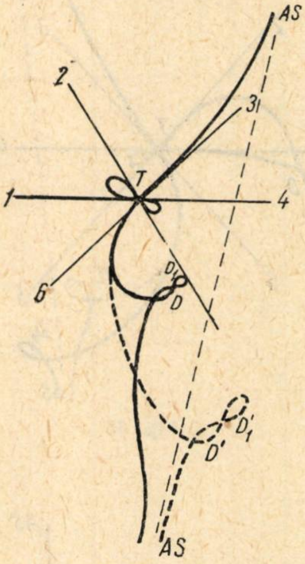


Fig. 40

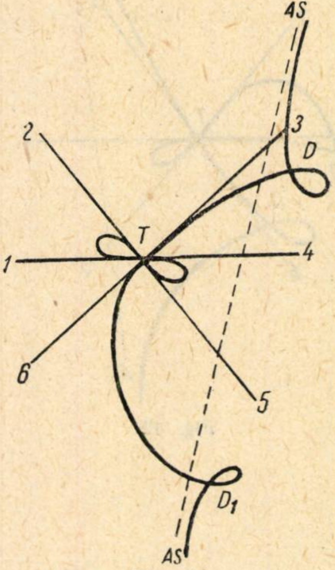


Fig. 41

b. *Un punct dublu este format de traseul impar, al doilea de cel par*

47. Această ipoteză rezultă din combinarea paragrafelor 36 şi 37. Singurul caz posibil, în ambele, era (1,2) (3,4) (5,6). Din figurile 25 şi 27 rezultă conformaţia posibilă din figura 42, iar din figurile 26 şi 27 rezultă figura 43 (traseu plin sau punctat).

c. *Ambele puncte duble sînt formate de traseul par*

48. Se poate porni în studiul acestei ipoteze fie direct, fie de la cele găsite în § 37, fig. 27, unde traseul impar nu avea nici un punct dublu iar cel par avea unul. Gruparea ramurilor de curbă, în jurul punctului triplu, corespundea formei (*1,2*) (*3,6*) (*4,5*). Era posibilă, în paragraful citat, existenţa unui alt traseu par, în unghiul format de dreapta *3,6* şi tangenta din T la bucla închisă în punctul dublu D. De asemenea, mai putea fi un traseu par în unghiul format de dreapta *2,5* şi tangenta din T la traseul impar. În ambele cazuri, traseul par nu putea fi situat în zona formată de paralele τ şi τ_1 la asimptote. În aceste porţiuni de unghiuri, ar putea fi, deci, situat şi al doilea punct dublu.

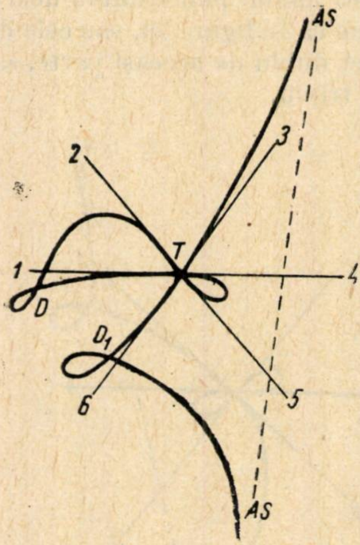

AS
2
3
T
1
4
D
D_1
6
5
AS

Fig. 42

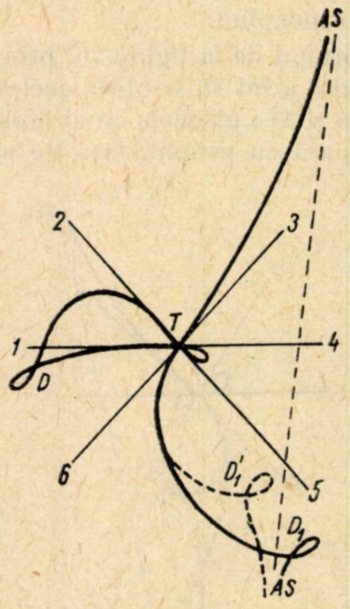

AS
2
3
T
1
4
D
6
5
D_1'
D_1
AS

Fig. 43

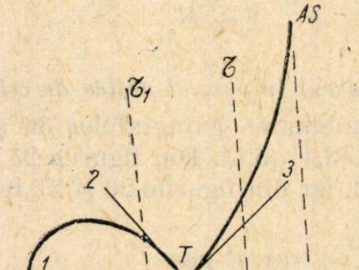

AS
Z_1
Z
2
3
T
1
4
D
D_1
6
5
AS

Fig. 44

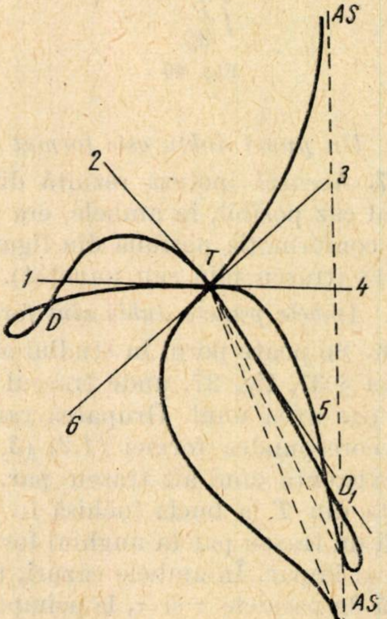

AS
2
3
T
1
4
D
6
5
D_1
AS

Fig. 45

Traseul par, care formează acest punct, avînd 3 puncte duble, în total, cu cel din T, va avea – cum s-a arătat în § 21, forma de dublă copcă, sau de triunghi buclat, ca în figura 11.

Se obțin formele din figurile 44, 45 și 46, după cum al doilea punct este în una sau alta din porțiunile de plan arătate mai sus.

Cele două puncte duble nu pot fi intersecția celor 2 traseuri – ceea ce s-a arătat și anterior.

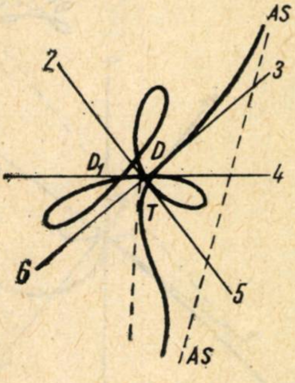


Fig. 46

4° Punctul triplu este intersecția traseului impar cu cel par, care trece o dată prin punct

Ambele puncte duble sînt intersecția celor 2 traseuri

49. Vor fi de studiat cazurile (1,2) (3,6) (4,5) și (1,3) (2,5) (4,6) singurele în care 2 traseuri formează punctul triplu și care pot da soluții și pentru așezarea convenabilă a celor două puncte duble, care, în nici un caz, nu pot fi decît intersecția ambelor traseuri (§ 13).

50. *Cazul* (*1,2*) (*3,6*) (*4,5*). Traseul par va fi tangent la *3,6*, cel impar la celelalte 2 drepte. Rezultă formele din figurile 47 a) și b), după cum punctele duble sînt pe bucla traseului impar care trece, sau nu, prin infinit.

51. *Cazul* (*1,3*) (*2,5*) (*4,6*). Traseul par este tangent la *2,5*. Va traversa, astfel, traseul impar o dată prin ramura (*1,3*) și a doua oară prin ramura (*4,6*).

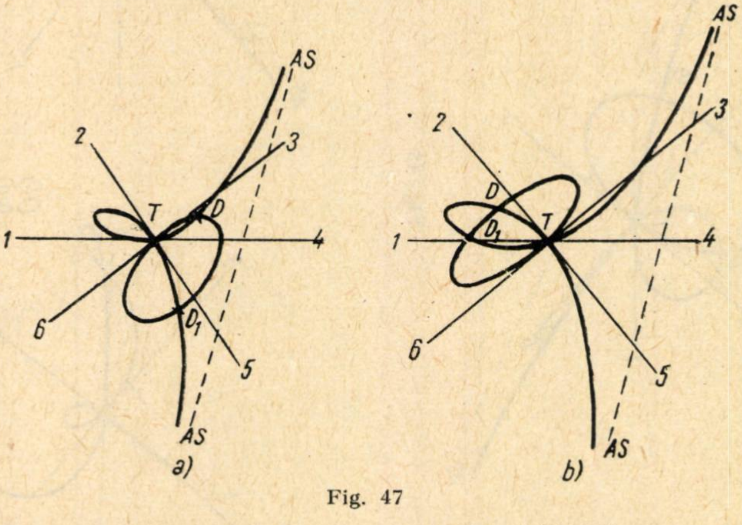


Fig. 47

Este singura formă a curbei, topologic distinctă, în acest caz, și este reprezentată în figura 48.

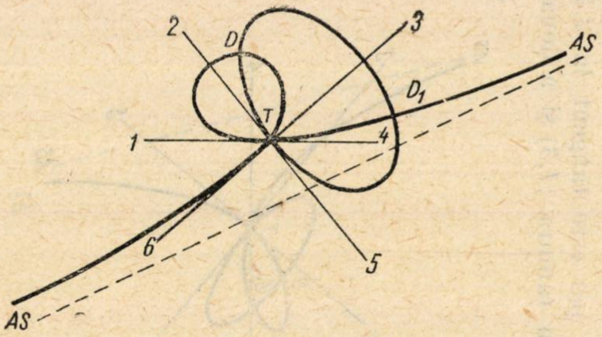

1
2
D
T
3
AS
D_1
4
5
6
AS

Fig. 48

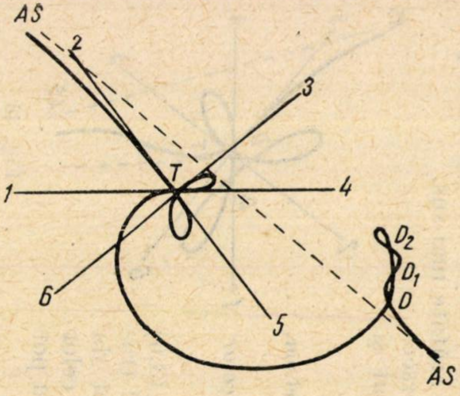

AS
2
3
T
1
4
6
5
D_2
D_1
D
AS

Fig. 49

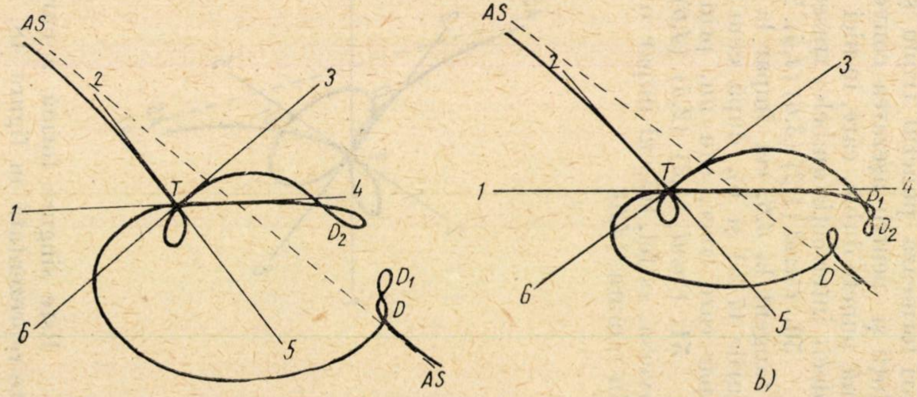

AS
2
3
T
1
4
D_2
6
5
D_1
D
AS
AS
2
3
T
1
4
D_1
D_2
D
6
5
b)

Fig. 50

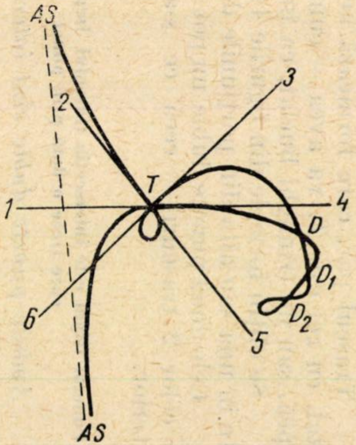

AS
2
3
T
1
4
D
D_1
D_2
6
5
AS

Fig. 51

CAPITOLUL VI

QUINTICE CU UN PUNCT TRIPLU ŞI 3 PUNCTE DUBLE

52. Curba, în această ipoteză, este unicursală, deci are un singur traseu, cel impar. În Cap. V, s-a arătat că, dacă punctul triplu şi ambele puncte duble se găsesc pe acelaşi traseu impar, curba nu are decît următoarele forme posibile (în ipoteza esenţială din toată această lucrare că, pe curbă, există un singur punct la infinit) :

a. Cazul (1,2) (3,4) (5,6), care a dat figurile 30 a) şi b), 31, 32, 33.

b. Cazul (1,2) (3,5) (4,6), care a dat figurile 34, 35 a şi b.

Pornind, pe rînd, de la aceste figuri, vom obţine conformaţiile cu 3 puncte duble, adăugînd cîte un punct dublu, în toate poziţiile posibile.

53. *Cazul* (*1,2*) (*3,4*) (*5,6*). În figura 30 a), s-ar putea aşeza încă un punct dublu, în unghiul format de tangenta din T la D_1 şi dreapta *1,4*. Traseul poate trece întîi, cîte o dată, prin D şi D_1, ca să formeze, apoi, pe D_2, revenind la cele 2 puncte duble. Se obţine figura 49.

În acelaşi unghi, poate fi format punctul D_2 de către bucla (*3,4*), ca în figura 50 a). Pot fi şi 2 puncte duble formate din bucla (*3, 4*), ca în figura 50 b).

În fine, toate cele 3 puncte duble ar putea fi formate din bucla (*3,4*), ca în figura 51.

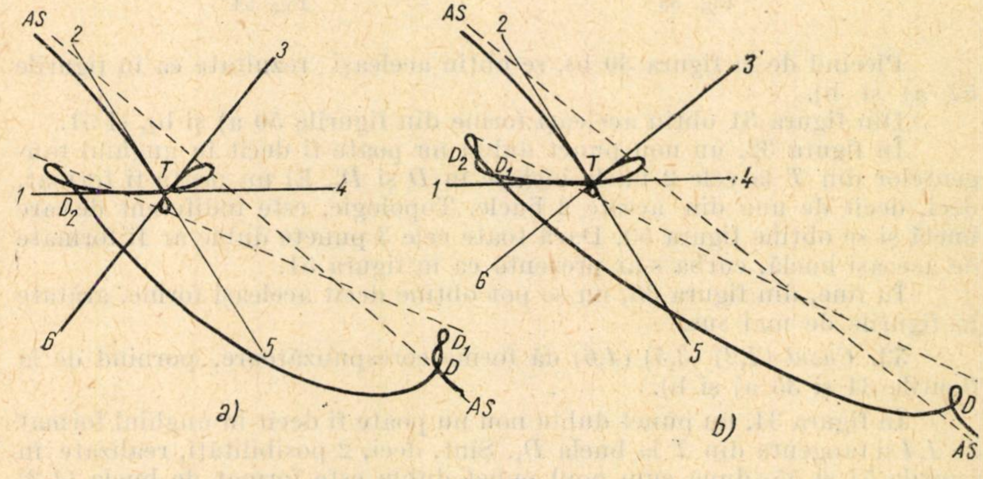


Fig. 52

În opusul unghiului considerat, adică în unghiul format de *1,4* şi prelungirea tangentei din T la bucla D_1, poate fi situat, de asemenea, punctul dublu D_2. El va fi format, atunci, pe ramura de legătură dintre T şi D (figura 52 a)). În acelaşi unghi, pot fi şi 2 puncte duble (fig. 52 b)).

Dacă toate cele 3 puncte duble ar fi formate în unghiul acesta, astfel ca traseul să treacă cîte o dată prin primele 2, să formeze pe al treilea și apoi să revină în cele 2, s-ar obține o figură, topologic, analoagă cu figura 49.

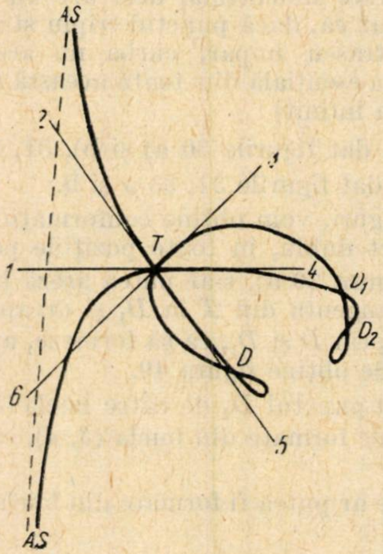


Fig. 53

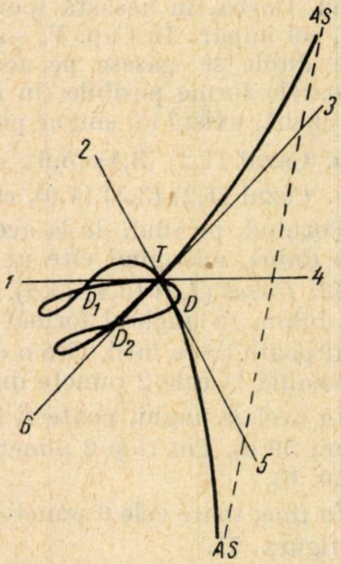


Fig. 54

Plecînd de la figura 30 b), se obțin aceleași rezultate ca în figurile 52 a) și b).

Din figura 31 obțin aceleași forme din figurile 50 a) și b), și 51.

În figura 32, un nou punct dublu nu poate fi decît în unghiul tangentelor din T la cele 2 bucle închise în D și D_1. El nu poate fi format, deci, decît de una din aceste 2 bucle. Topologic, este indiferent de care buclă și se obține figura 53. Dacă toate cele 3 puncte duble ar fi formate de aceeași buclă, curba s-ar prezenta ca în figura 51.

În fine, din figura 33, nu se pot obține decît aceleași forme, arătate în figurile de mai sus.

53. *Cazul* (*1,2*) (*3,5*) (*4,6*) dă forme corespunzătoare, pornind de la figurile 34 și 35 a) și b).

În figura 34, un punct dublu nou nu poate fi decît în unghiul format de *1,4* și tangenta din T la bucla D_1. Sînt, deci, 2 posibilități, realizate în figurile 54 și 55, după cum noul punct dublu este format de bucla (*1,2*) sau D_1. Pe ramura de legătură (T, D), în unghiul format de T *4* și tangenta la bucla D_1, nu poate fi un alt punct dublu D_2, căci dreapta D_1D_2 ar tăia curba în mai mult de 5 puncte.

Pornind de la figura 35 a), punctul dublu D_2 poate fi situat numai în unghiul format de *3,4* și tangenta din T la bucla D_1. Se obțin figurile 54 și 56 după cum punctul D_2 este format între T și D_1 sau după bucla D_1.

Punctul D_2 nu poate fi pe ramura care pleacă spre infinit, în unghiul format de T 3 și tangenta din T la bucla D_1, căci dreapta D_1D_2 ar tăia curba în mai mult de 5 puncte.

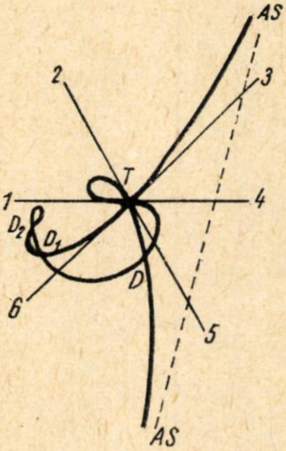


Fig. 55

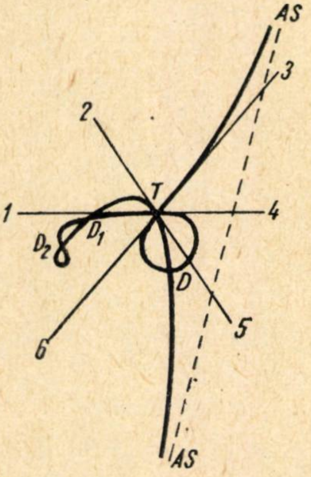


Fig. 56

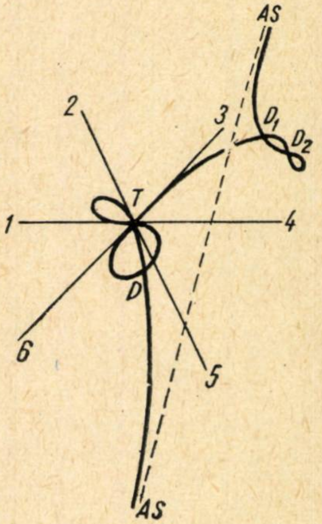


Fig. 57

În cazul figurii 35 b), punctul D_2 nu poate fi situat decît în unghiul format de *1,4* și tangenta din T la D_1. Dar el nu poate fi pe bucla (*1,2*) căci D_1D_2 ar tăia curba în peste 5 puncte. Poate fi, însă, format de traseu, după ce a trecut o dată prin D_1, ca în figura 57.

Primită la redacție la 26 noiembrie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Rosenblatt, *Untersuchungen über die Gestalten der algebraischen Kurven sechster Ordnung*. Bul. Ac. Sc. Cracovia, Dec. 637 (1916).
2. Salmon, *Courbes planes*. Gauthier-Villars Paris, 1884.
3. Harnack, *Über die Vielteiligkeit ebener algebraischer Kurven*. Math. Ann., **10**.
4. D. Hilbert, *Über die reellen Züge algebraischer Kurven*. Math. Ann., **38**.
5. Hylman, *Sur les courbes planes du sixième ordre à deux points triples*. Oversight of Finska Vetenscops Societ, **41**.
6. R. Gentry, *On the forme of plane quartic curves*. 1896.
7. P. Field, *On the form of unicursal quintics*. Amer. Journ. of Math., **26**.
8. E. Buchanan, Cowley, *Plane curses of eight order with two quadruple points*. Teză de doctorat, 1908.
9. George Borneanu, *Quelques observations sur l'étude des courbes algebriques*. Bul. Scientifique de l'École Polytechnique de Timișoara, **3**.
10. Cayley, Collected Works, **V**.

O TOPOLOGIE PE CONUL FUNCŢIILOR SUPERARMONICE NENEGATIVE

DE

C. CONSTANTINESCU

În prezenta lucrare se scufundă conul convex al funcţiilor superarmonice nenegative pe un spaţiu armonic într-un spaţiu vectorial topologic local convex separat şi se dau condiţii suficiente pentru ca acest con să aibă bază compactă (teorema 3.1 şi corolarul 3.2) sau să fie complet (teorema 4.1).

Pentru a obţine o reprezentare de tip Riesz-Martin pentru funcţiile superarmonice nenegative pe un spaţiu armonic se poate proceda în modul următor : se scufundă conul convex al funcţiilor superarmonice nenegative într-un spaţiu vectorial topologic local convex separat, se demonstrează apoi că acest con are o bază compactă şi se aplică teorema de reprezentare a lui Choquet [5]. Acest procedeu a fost utilizat de M. Brelot [3] în cazul unui spaţiu armonic conex cu bază numărabilă satisfăcînd axiomele 1, 2, 3′, 4. R.-M. Hervé [7] a reuşit să îndepărteze axioma 4 din aceste consideraţii. Rezultatele recente ale lui G. Mokobodzki [8] permit înlocuirea în acest enunţ a axiomei 3′ cu axioma 3. În prezenta lucrare se face un pas mai departe în această direcţie prin aceea că se renunţă la baza numărabilă şi prin aceea că se utilizează axiomele mai slabe H_0, H_1, H_2, H_3 [2] în locul axiomelor 1, 2, 3. Locul conexiunii este preluat de o ipoteză suplimentară de natură globală, care rezultă din conexiune în cazul axiomelor 1, 2, 3.

Cazul cînd conul convex al funcţiilor superarmonice nenegative poate fi topologizat astfel încît să aibe o bază compactă, trebuie considerat ca fiind oarecum excepţional. În general acest con nu are nici măcar o bază. Pentru a obţine totuşi o reprezentare de tip Riesz-Martin pare indicat să se facă apel la o variantă mai recentă a teoremei lui Choquet [4], în care se cere conului convex al funcţiilor superarmonice nenegative să fie numai complet. G. Mokobodzki [8] a demonstrat că aceasta se întîmplă cînd spaţiul armonic are bază numărabilă şi sînt satisfăcute axiomele 1, 2, T_+ şi K_D [1]. În prezenta lucrare se extinde acest rezultat la cazul unui

ST. CERC. MAT., TOM 17, NR. 6, P. 903–906, BUCUREŞTI, 1965

spaţiu armonic satisfăcînd axiomele H_0, H_1, H_2, H_3 [2] precum şi o condiţie suplimentară de natură globală. În cazul în care orice mulţime compactă a spaţiului este conţinută în suportul unei măsuri, această ultimă condiţie rezultă din K_D.

1. În cele ce urmează vom utiliza terminologia, notaţiile şi axiomele $H_0 - H_3$ din [2].

LEMA 1.1. *Fie V un deschis regulat şi K o mulţime compactă în V. Există o măsură μ pe K astfel încît pentru orice măsură ν pe K, măsura*

$$\int \omega_x^V \, d\nu(x)$$

este absolut continuă în raport cu măsura

$$\int \omega_x^V \, d\mu(x).$$

TEOREMA 1.1. *Fie U o mulţime deschisă şi $\mathfrak{U}$ un ultrafiltru pe mulţimea funcţiilor armonice nenegative pe U astfel încît pentru orice compact $K \subset U$ să existe un $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ egal mărginit pe K. Funcţia*

$$x \to \lim_{u,\,\mathfrak{U}} u(x)$$

este armonică pe U şi pentru orice măsură ν pe U cu suport compact

$$\lim_{u,\,\mathfrak{U}} \int u(x)\, d\nu(x) = \int \lim_{u,\,\mathfrak{U}} u(x)\, d\nu(x).$$

Teorema rezultă imediat din lema precedentă folosind faptul că pentru orice măsură μ, L_μ^∞ este dualul lui L_μ^1.

2. Fie $\mathfrak{U}$ un ultrafiltru pe mulţimea funcţiilor hiperarmonice nenegative pe X, V o mulţime regulată şi α un număr pozitiv. Din teorema precedentă rezultă că funcţia

$$x \to \lim_{s,\,\mathfrak{U}} \int \min(s, \alpha)\, d\omega_x^V$$

este armonică pe V. Vom nota cu $s_{\mathfrak{U}}$ funcţia pe X definită prin relaţia

$$s_{\mathfrak{U}}(x) = \sup_{\alpha,\,V} \left(\lim_{s,\,\mathfrak{U}} \int \min(s, \alpha)\, d\omega_x^V \right).$$

LEMA 2.1. *Fie I o mulţime, $\mathfrak{F}$ un ultrafiltru pe I, α', α'' două numere pozitive şi $(s'_\iota)_{\iota \in I}$, $(s''_\iota)_{\iota \in I}$ două familii de funcţii hiperarmonice nenegative pe X. Dacă notăm cu $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}''$) imaginea lui $\mathfrak{F}$ prin aplicaţia $\iota \to \alpha' s'_\iota + \alpha'' s''_\iota$ (resp. $\iota \to s'_\iota$, $\iota \to s''_\iota$), atunci*

$$s_{\mathfrak{U}} = \alpha' s_{\mathfrak{U}'} + \alpha'' s_{\mathfrak{U}''}.$$

LEMA 2.2. *Pentru orice ultrafiltru* $\mathfrak{U}$ *pe mulțimea funcțiilor hiperarmonice nenegative pe* X *și pentru orice măsură* μ *cu suport compact,* $s_{\mathfrak{U}}$ *este inferior semicontinuă și*

$$\int^* s_{\mathfrak{U}}\, \mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{\alpha} \left(\lim_{s,\, \mathfrak{U}} \int \min\,(s,\, \alpha)\, \mathrm{d}\mu \right).$$

Ambele leme rezultă folosind definiția lui $s_{\mathfrak{U}}$.

TEOREMA 2.1. $s_{\mathfrak{U}}$ *este hiperarmonică. Dacă* V *este o mulțime regulată de tip* MP *și dacă există un* $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ *astfel încît familia de funcții* $\left(x \to \int^* s\, \mathrm{d}\,\omega_x^V\right)_{s \in \mathcal{U}}$ *este local egal mărginită, atunci funcția* $x \to \int^* s_{\mathfrak{U}}\, \mathrm{d}\,\omega_x^V$ *este armonică pe* V. *Dacă în plus orice funcție a lui* $\mathcal{U}$ *este armonică pe* V, *atunci* $s_{\mathfrak{U}}$ *este armonică pe* V *și pentru orice* $x \in V$

$$s_{\mathfrak{U}}\,(x) = \lim_{s,\, \mathfrak{U}}\; s\,(x).$$

Primele două afirmații se demonstrează cu ajutorul lemei 2.2, iar ultima cu ajutorul teoremei 1.1.

3. *Vom spune că o măsură* μ *pe* X **domină o mulțime deschisă U** *dacă pentru orice mulțime compactă* K *în* U *există un număr pozitiv* α *astfel încît pentru orice funcție hiperarmonică nenegativă* s *pe* X *armonică pe* U *avem*

$$\sup_{x \in K}\; s\,(x) \leqslant \alpha \int^* s\, \mathrm{d}\mu.$$

Spunem că o măsură pe X **absoarbe** *o mulțime deschisă dacă ea îi domină toate submulțimile deschise.*

LEMA 3.1. *Fie* μ *o măsură pe* X *și* F *fie cea mai mică mulțime absorbantă a lui* X *care conține suportul lui* μ. *Dacă axioma* $\mathrm{K_D}$ [6], [1] *este satisfăcută, atunci* μ *absoarbe interiorul lui* F.

COROLARUL 3.1. *Dacă orice funcție hiperarmonică nenegativă pe un domeniu este sau pozitivă sau identic zero, atunci* $\mathrm{K_D} \Rightarrow 3$.

Vom spune că o funcție hiperarmonică s *este* **superarmonică** *dacă pentru orice mulțime regulată* V *de tip* MP *funcția*

$$x \to \int^* s\; \mathrm{d}\omega_x^V$$

este armonică pe V. Această definiție este mai restrictivă decît cea dată în [2], *dar ambele definiții coincid cînd axioma* $\mathrm{K_D}$ *este satisfăcută.*

LEMA 3.2. *Fie* U *o mulțime deschisă,* μ *o măsură care absoarbe pe* U *și* $\mathfrak{U}$ *un ultrafiltru pe mulțimea funcțiilor hiperarmonice nenegative pe* X. *Dacă*

$$\lim_{s,\, \mathfrak{U}} \int^* s\; \mathrm{d}\mu < \infty,$$

atunci $s_{\mathfrak{U}}$ *este superarmonică pe* U.

Fie $\mathcal{S}^+$ mulțimea funcțiilor superarmonice nenegative pe X și $[\mathcal{S}^+]$ spațiul vectorial canonic pentru care $\mathcal{S}^+$ este un con convex generînd pe $[\mathcal{S}^+]$. Fie $\overline{X}$ compactificarea Alexandroff a spațiului X. Pentru orice funcție continuă nenegativă f pe $\overline{X}$ și orice măsură cu suport compact μ pe X astfel încît Supp $f \cap$ Supp $\mu = \emptyset$, aplicația

$$f \to \mu(f \cdot s)$$

este o funcțională liniară; aici $f \cdot s$ reprezintă multiplicarea specifică [7], [2]. Vom nota cu $\mathfrak{T}'$ cea mai puțin fină topologie pe $[\mathcal{S}^+]$ pentru care aceste funcționale sînt continue. Este evident că $[\mathcal{S}^+]$ dotat cu această topologie devine un spațiu vectorial topologic local convex și că topologia $\mathfrak{T}'$ este o topologie slabă.

TEOREMA 3.1. *Dacă există două măsuri pe X cu suporturi compacte și disjuncte care absorb pe X, atunci $\mathcal{S}^+$ posedă o bază compactă.*

Demonstrația utilizează lemele 2.1 și 3.2 și teoremele 2.1 și 1.1.

COROLARUL 3.2. *Dacă axioma 3 este satisfăcută și X este conex, atunci $\mathcal{S}^+$ are bază compactă.*

4. LEMA 4.1. *Fie U o mulțime deschisă și $\mathfrak{F}$ un filtru Cauchy pe $\mathcal{S}^+$ cu proprietatea că există un $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ astfel încît orice funcție a lui $\mathcal{F}$ este armonică pe V. Dacă mulțimile deschise ale lui X care sînt dominate de măsuri cu suportul compact conțin o bază a lui U, atunci pentru orice compact K în U există un $\mathcal{F}_K \in \mathfrak{F}$ egal mărginit pe K.*

Cu ajutorul acestei leme se demonstrează:

TEOREMA 4.1. *Dacă mulțimile deschise, care sînt dominate de măsuri cu suportul compact, formează o bază a lui X, atunci $\mathcal{S}^+$ este complet.*

Primită la redacție la 15 februarie 1965

Institutul de matematică
al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. H. BAUER, *Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische un parabolische Differentialgleichungen.* Math. Ann., **146**, 1—59 (1962).
2. N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA, *Axiomatic theory of harmonic functions. Non-negative superharmonic functions.* Ann. Inst. Fourier, **15**, (1965).
3. M. BRELOT, *Axiomatique des fonctions harmoniques et superharmoniques dans un espace localement compact.* Sém. de Théorie du Potentiel, Paris, **2**, *1* (1959).
4. G. CHOQUET, *Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complet.* Sém. de Théorie du Potentiel, Paris, **6**, *12* (1962).
5. G. CHOQUET, P. A. MEYER, *Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques.* Ann. Inst. Fourier, **13**, 139—154 (1963).
6. J. L. DOOB, *Probability methods applied to the first boundary value problem.* Proc. 3rd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probl., 1954—55, **2**, 49—80 (1956).
7. R. M. HERVÉ, *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel.* Ann. Inst. Fourier, **12**, 415—572 (1962).
8. G. MOKOBODZKI, *Représentations intégrales des fonctions harmoniques et surharmoniques.* Note particulare.

ASUPRA PROPRIETĂŢILOR ASIMPTOTICE ALE SOLUŢIILOR UNUI SISTEM SEMILINIAR DE ECUAŢII DIFERENŢIALE, CARE DEPINDE DE UN PARAMETRU MIC

DE

MARGARETA FRENKEL FERTIG

(Cluj)

Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$
\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(u)\,x, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = U(x, u), \tag{1}
$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_l)$, $U = (U_1, \ldots, U_l)$ sînt vectori, $A(u) = \| a_{ik}(u) \|_n^n$ o matrice cu n linii şi n coloane.

Presupunînd că ecuaţia

$$
| A(u) - \lambda E | = 0
$$

are o pereche de rădăcini pur imaginare, iar toate celelalte au partea reală negativă, pentru orice u dintr-un anumit domeniu, se studiază comportarea soluţiilor sistemului (1) pentru $\varepsilon \to 0$.

Introducere. Prin sisteme de ecuaţii diferenţiale, care depind de un parametru mic ca factor al derivatelor, înţelegem sistemele de forma :

$$
\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, u), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = U(x, u), \tag{1}
$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 6, p. 907–920, BUCUREŞTI, 1965

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_l)$ sînt vectori în spaţiul euclidian cu n respectiv l dimensiuni, iar $f = f(x, u) = (f_1(x, u), \ldots, f_n(x, u))$, $U = U(x, u) = (U_1(x, u), \ldots, U_l(x, u))$ sînt funcţii vectoriale de variabilele $x_1, \ldots, x_n$; $u_1, \ldots, u_l$ în spaţiul cu n respectiv cu l dimensiuni. ε este un parametru mic, pozitiv.

Fie

$$\begin{aligned} x &= x(t, \varepsilon) \\ u &= u(t, \varepsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

o soluţie a sistemului (1). Problema care se pune este de a studia comportarea acestei soluţii cînd $\varepsilon \to 0$ şi de a găsi condiţii în care toate funcţiile (2) sau o parte din ele să aibă limită cînd $\varepsilon \to 0$.

Asemenea probleme au fost studiate de L. S. Pontriaghin, A. N. Tihonov, I. S. Gradstein, E. F. Mişcenko, V. M. Volosov şi G. S. Makaeva. Din lucrările autorilor sus-amintiţi rezultă că comportarea asimptotică a soluţiei (2) este în strînsă legătură cu stabilitatea unor soluţii ale sistemului:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, u) \tag{3}$$

în care u este considerat ca un parametru.

Astfel în lucrările lui A. N. Tihonov [1] şi I. S. Gradstein [2], a fost studiată problema în următoarele ipoteze:

1) $$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$$

deci sistemul de ecuaţii algebrice

$$f(x, u) = 0$$

are o soluţie unică

$$x = \varphi(u).$$

2) Soluţia singulară $x = \varphi(u)$ a sistemului (3) este asimptotic stabilă.

În lucrarea lui L. S. Pontriaghin şi L. V. Rodîghin [3] se studiază aceeaşi problemă, admiţînd însă că sistemul (2) admite o soluţie periodică asimptotic stabilă (un ciclu limită).

Au fost studiate, de asemenea, unele sisteme pentru care sistemul asociat (3) este astfel încît nici soluţia singulară şi nici una din soluţiile periodice nu sînt asimptotic stabile. Astfel este sistemul

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon X(x, y, z) \\ \varepsilon \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon Y(x, y, z) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= Z(x, y, z) \end{aligned}$$

pentru care sistemul asociat (3) este hamiltonian. Acest sistem a fost studiat de G. S. Makaeva [4], [5].

Citirea acestor memorii ne-a sugerat ideea de a pune următoarea problemă :

1) Sistemul (3) să admită o familie de soluţii periodice, ale căror curbe caracteristice să depindă de $p \leqslant n - 1$ parametri.

Fie

$$x = X(\iota, h, u), \qquad h = (h_1, \ldots, h_p) \tag{4}$$

ecuaţia vectorială a acestei familii de curbe caracteristice depinzînd de constantele $h_1, \ldots, h_p$.

2) Oricărei soluţii neperiodice $x = \varphi(\iota, u)$ a sistemului (3) să corespundă un vector $h_0 = (h_1^0, \ldots, h_p^0)$, astfel ca :

$$\lim_{\iota \to +\infty} | \, x(\iota, h_0, u) - \varphi(\iota, u) = 0.$$

Observaţie. Dacă $p = 0$, familia de soluţii (4) se reduce la o soluţie periodică şi în virtutea condiţiei 2), este un ciclu limită.

Dacă $n = 2$ şi $p = 1$, avem un sistem de două ecuaţii, care are o familie de soluţii periodice. Se poate arăta că un asemenea sistem, [6], se reduce la un sistem hamiltonian.

În lucrarea de faţă se studiază această problemă pentru $p = 1$, $n > 2$ şi pentru un sistem de forma particulară :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= A(u)\, x, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= U(x, u), \end{aligned} \tag{5}$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots u_l)$ sînt vectori în spaţiul euclidian cu n respectiv l dimensiuni,

$$A(u) = \begin{Vmatrix} a_{11}(u) \ldots a_{1n}(u) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(u) \ldots a_{nn}(u) \end{Vmatrix}$$

este o funcţie matricială cu n linii şi n coloane, iar

$$U(x, u) = (U_1(x, u), \ldots, U_l(x, u))$$

o funcţie vectorială în spaţiul euclidian cu l dimensiuni.

Se observă că primele n ecuaţii ale sistemului (5) sînt ecuaţii liniare în $(x_1, \ldots, x_n)$, din această cauză numim acest sistem semiliniar.

§ 1. Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= A(u)\, x, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= U(x, u), \end{aligned} \tag{1.1}$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_l)$ sînt vectori în spaţiul cu n respectiv cu l dimensiuni, $A(u)$ este o matrice cu n linii şi n coloane

$$A(u) = \begin{Vmatrix} a_{11}(u) \ldots a_{1n}(u) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(u) \ldots a_{nn}(u) \end{Vmatrix},$$

unde $a_{ik} = a_{ik}(u)$ sînt funcţii continue de u, pentru $u \in U$, U fiind un domeniu în spaţiul variabilelor u :

$$U(x, u) = U_1(x, u), \ldots, U_l(x, u)$$

este o funcţie vectorială în spaţiul cu l dimensiuni, continuă şi cu derivate parţiale de ordinul întîi continue în raport cu toate variabilele, în domeniul

$$\Gamma = \chi \times U,$$

unde $x \in \chi$, χ fiind un domeniu în spaţiul variabilelor x.

Presupunem că pentru orice $u \in U$, ecuaţia caracteristică

$$|A(u) - \lambda E| = 0 \tag{1.2}$$

are o pereche de rădăcini pur imaginare :

$$\lambda_1 = \mu(u)\, i, \qquad \lambda_2 = -\mu(u)\, i,$$

iar celelalte rădăcini $\lambda_3(u), \ldots, \lambda_n(u)$ au partea reală negativă.

Asociem sistemului (1.1) sistemul

$$\frac{d\tilde{x}}{d\theta} = A(u)\, \tilde{x}, \tag{1.3}$$

unde u este un parametru. Deoarece ecuaţia caracteristică corespunzătoare are două rădăcini imaginare :

$$\lambda_1 = \mu(u)\, i, \qquad \lambda_2 = -\mu(u)\, i,$$

sistemul (1.3) admite următoarele două soluţii particulare

$$\begin{aligned} \varphi(\theta, u) &= \beta \cos \mu\theta + \gamma \sin \mu\theta, \\ \varphi_1(\theta, u) &= -\beta \sin \mu\theta + \gamma \cos \mu\theta = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

unde β şi γ sînt vectori, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, care verifică relaţiile :

$$A(u)\, \beta = \mu\gamma,$$

$$A(u)\, \gamma = -\mu\beta.$$

Dacă introducem următoarele notaţii :

$$\beta = \rho \cos \omega, \text{ unde } \rho \cos \omega = (\rho_1 \cos \omega_1, \ldots, \rho_n \cos \omega_n),$$

$$\gamma = - \rho \sin \omega, \text{ unde } \rho \sin \omega = (\rho_1 \sin \omega_1, \ldots, \rho_n \sin \omega_n),$$

$$\rho \cos (\mu\theta + \omega - \delta) = (\rho_1 \cos (\mu\theta + \omega_1 - \delta), \ldots, \rho_n \cos (\mu\theta + \omega_n - \delta)),$$

$$C = \sqrt{h} \cos \delta, \quad C_1 = \sqrt{h} \sin \delta,$$

atunci familia de soluţii, care depinde de constantele arbitrare C, C_1 :

$$\tilde{x} = C \ \varphi(\theta, u) + C_1 \ \varphi_1(\theta, u)$$

se poate scrie sub forma

$$\Phi\left(\frac{\mu\theta - \delta}{2\pi}, h, u\right) = \rho \sqrt{h} \cos (\mu\theta + \omega - \delta) \tag{1.5}$$

sau familia de curbe caracteristice corespunzătoare se scrie :

$$\Phi\left(\frac{\mu\theta}{2\pi}, h, u\right) = \rho \sqrt{h} \cos (\mu\theta + \omega) = (\rho_1 \sqrt{h} \cos (\mu\theta + \omega_1), \ldots \\ \ldots, \rho_n \sqrt{h} \cos (\mu\theta + \omega_n)) \tag{1.6}$$

şi avem

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\theta} = A(u)\,\Phi. \tag{1.7}$$

Deoarece celelalte rădăcini ale ecuaţiei caracteristice (1.2) au partea reală negativă, notînd :

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$$

soluţia generală a sistemului (1.3) va fi de forma :

$$\tilde{x} = \rho \sqrt{h} \cos (\mu\theta + \omega - \delta) + \sum_{k=1}^{q} \mathrm{e}^{\alpha_k\theta} P_k(\theta), \tag{1.8}$$

q fiind numărul rădăcinilor distincte, cu partea reală negativă, ale ecuaţiei caracteristice ; $P_k(\theta)$ fiind nişte polinoame avînd gradul cel mult $l_k = 1$, unde l_k este ordinul de multiplicitate a rădăcinii λ_k, coeficienţii acestor polinoame fiind de forma

$$C_k^{(p)} \mathrm{e}^{\alpha_k\theta} \cdot \theta^p \cdot A \cos \beta_k \theta, \qquad C_k'^{(p)} \mathrm{e}^{\alpha_k\theta} \cdot \theta^p \cdot A' \sin \beta_k \theta,$$

$A = (A_1, \ldots, A_n)$, $A' = (A_1', \ldots, A_n')$ funcţii de u bine determinate, $C_k^{(p)}$, $C_k'^{(p)}$ constante de integrare, care în general depind de u.

Lema 1. *Sistemul (1.3), admite pentru orice $u \in U$, o integrală primă, funcţie continuă şi uniformă de x pentru $-\infty < x_i < +\infty$, $(i = 1, \ldots, n)$ şi de $u \in U$, avînd derivate parţiale continue în raport cu x şi u în acelaşi domeniu.*

Demonstrație. Să considerăm sistemul (1.3). Deoarece ecuația caracteristică (1.2) are două rădăcini pur imaginare

$$\lambda_1 = \mu(u)\, i, \qquad \lambda_2 = -\mu(u)\, i,$$

există o transformare liniară în x, de forma

$$x = Tz, \qquad z = (z_1, \ldots, z_n), \tag{1.9}$$

unde $T = T(u)$ este o matrice nesingulară, continuă de u, pentru $u \in U$, astfel ca sistemul (1.3) să se transforme în

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = B^\star(u)\, z, \tag{1.10}$$

unde

$$B^\star = \begin{Vmatrix} 0 & -\mu & 0 & \ldots & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}(u) & \ldots & b_{3n}(u) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & b_{n3}(u) & \ldots & b_{nn}(u) \end{Vmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{Vmatrix} b_{33}(u) & \ldots & b_{3n}(u) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n3}(u) & \ldots & b_{nn}(u) \end{Vmatrix}$$

Sistemul (1.10) admite integrala primă

$$z_1^2 + z_2^2 = h.$$

Ținînd cont de legătura dintre x și z (1.9), rezultă că sistemul (1.3) admite o integrală primă de forma :

$$H(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}(u)\, x_i\, x_j = h,$$

unde $\gamma_{ij}(u)$ sînt funcții continue de $u \in U$ și lema este demonstrată.

§ 2. Să considerăm familia de curbe caracteristice (1.6), ale sistemului (1.3) și să facem substituția

$$2\pi\tau = \mu\theta,$$

atunci funcția $\Phi\left(\frac{\mu\theta}{2\pi}, h, u\right)$ se scrie :

$$\Phi(\iota, h, u) = \rho\sqrt{h}\cos(2\pi\tau + \omega), \tag{2.1}$$

care este o funcție periodică de ι, avînd perioada egală cu unitatea și avem :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\iota, h, u)}{\mathrm{d}\iota} = \frac{2\pi}{\mu} A(u)\, \Phi(\iota, h, u). \tag{2.2}$$

Dacă în funcţiile $U(x, u) = (U_1, \dots, U_l)$ din sistemul (1.1) înlocuim pe x cu $\Phi(\iota, h, u)$ şi în expresiile $\dfrac{\partial H}{\partial u_i}(x, u), (i = 1, \dots, l)$, facem aceeaşi înlocuire, obţinem :

$$U^{\star} = U(\Phi(\iota, h, u), u) = (U_1(\Phi, u), \dots, U_l(\Phi, u)),$$

$$\frac{\partial H^{\star}}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial u}(\Phi(\iota, h, u), u) = \left(\frac{\partial H}{\partial u_1}(\Phi, u), \dots, \frac{\partial H}{\partial u_l}(\Phi, u)\right)\cdot$$

Considerăm valorile medii :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 U_k(\Phi, u)\, \mathrm{d}\iota = \overline{U}_k(h, u) \\ &\int_0^1 \frac{\partial H^{\star}}{\partial u} U^{\star}\, \mathrm{d}\iota = \overline{H}(h, u). \end{aligned} \tag{2.3}$$

La sistemul (1.1) asociem sistemul valorilor medii

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} &= \overline{U}(\overline{h}, \overline{u}) \\ \frac{\mathrm{d}\overline{h}}{\mathrm{d}t} &= \overline{H}(\overline{h}, \overline{u}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

unde $\overline{U}(\overline{h}, \overline{u}) = (\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_l)$ este un vector iar $\overline{H}(\overline{h}, \overline{u})$ un scalar.

Deoarece $\Phi(\iota, h, u)$ este o funcţie liniară de $\sqrt{h}$, funcţiile $\overline{U}(\overline{h}, \overline{u})$ şi $\overline{H}(\overline{h}, \overline{u})$ vor fi continue şi cu derivate parţiale de ordinul întîi continue în raport cu h şi u, în domeniul :

$$h_1 \leqslant h \leqslant h_2, \qquad \overline{u} \in U,$$

unde intervalul $[h_1, h_2]$ depinde de domeniul χ al variabilelor x.

Lucrarea de faţă are ca scop de a aproxima soluţiile sistemului (1.1) pentru valori mici ale parametrului ε, cu ajutorul soluţiilor sistemului (2.4).

§ 3. Să notăm cu

$$\begin{aligned} x &= x(t, \varepsilon) \\ u &= u(t, \varepsilon) \end{aligned} \tag{3.1}$$

soluţia sistemului (1.1), care verifică condiţiile iniţiale :

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) &= x_0, \qquad x_0 \in \chi, \\ u(0, \varepsilon) &= u_0, \qquad u_0 \in U. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Notăm cu

$$\widetilde{x} = \widetilde{x}(\theta, x_0, u_0) \tag{3.3}$$

soluţia sistemului (1.3), care verifică condiţiile iniţiale

$$\tilde{x}(o, x_0, u_0) = x_0. \tag{3.4}$$

Totodată notăm cu

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \overline{u}(t) \\ \overline{h} &= \overline{h}(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

soluţia sistemului valorilor medii (2.4), care verifcă condiţiile iniţiale :

$$\overline{u}(0) = u_0,$$

$$\overline{h}(0) = h_0 = H(x_0, u_0).$$

Soluţia (3.5) va fi definită într-un interval $[0, L]$, unde L este astfel încît $\overline{u}(t) \in U$, $h_1 \leqslant h(t) \leqslant h_2$.

În sistemul (1.1), facem schimbarea de variabilă $\theta - \dfrac{t}{\varepsilon}$ şi obţinem sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} &= A(u)\,x \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} &= \varepsilon U(x, u) \end{aligned} \tag{1.1}$$

şi fie

$$\begin{aligned} x &= x^\star(\theta, \varepsilon) \\ u &= u^\star(\theta, \varepsilon) \end{aligned}$$

soluţia acestui sistem, care verifică condiţiile iniţiale :

$$\begin{aligned} x^\star(0, \varepsilon) &= x_0 \\ u^\star(0, \varepsilon) &= u_0 \end{aligned}$$

şi avem

$$\left.\begin{aligned} x^\star(\theta, \varepsilon) &= x(t, \varepsilon) \\ u^\star(\theta, \varepsilon) &= u(t, \varepsilon) \end{aligned}\right., \text{ unde } \theta = \frac{t}{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Aplicînd teorema asupra dependenţei soluţiilor de un parametru [8] relativ la sistemele (1.1′) şi (1.3) şi ţinînd seamă de formulele (3.6), găsim că : oricare ar fi numerele $\eta > 0$, $L > 0$, le corespunde un număr ε_0, astfel ca

$$\begin{aligned} &\left| x(t, \varepsilon) - \tilde{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_0, u_0\right) \right| < \eta \\ &\left| u(t, \varepsilon) \qquad - \qquad u_0 \qquad \right| < \eta \end{aligned} \tag{3.7}$$

pentru $\varepsilon < \varepsilon_0$ şi $t \in [0, \varepsilon L]$.

Pe de altă parte, se constată că oricare ar fi η, îi corespunde un număr $L > 0$, astfel ca, pentru $\theta \geqslant 1$, să avem:

$$\left| \tilde{x}(\theta, x_0, u_0) - \Phi\left(\frac{\mu_0\theta - \delta_0}{2\pi}, h_0, u_0\right)\right| < \eta \tag{3.8}$$

deoarece:

$$\tilde{x}(\theta, x_0, u_0) = \Phi\left(\frac{\mu_0\theta - \delta_0}{2\pi}, h_0, u_0\right) + \sum_{k=1}^{q} e^{\alpha_k(u_0)} P_k^0(\theta).$$

Atunci pentru $t = \varepsilon L$, $\theta = L$ din formulele (3.7), (3.8) rezultă

$$\left| x(\varepsilon L, \varepsilon) - \Phi\left(\frac{\mu_0 L - \delta_0}{2\pi}, h_0, u_0\right)\right| < 2\eta,$$

$$| u(\varepsilon L, \varepsilon) - u_0 | < \eta, \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Aceste ultime inegalităţi au următoarea semnificaţie:
Oricare ar fi:

$$x = x(t, \varepsilon),$$
$$u = u(t, \varepsilon),$$

o soluţie particulară a sistemului (1.1), îi corespunde o soluţie particulară, periodică, a sistemului (1.3), astfel ca pentru ε suficient de mic, L suficient de mare şi $t = \varepsilon L$, această soluţie să se găsească într-o vecinătate suficient de mică, a soluţiei particulare, corespunzătoare, pentru $\theta = L - \frac{\delta_0}{\mu_0}$.

§ 4. Considerăm sistemul

$$\frac{d\xi}{d\iota} = \frac{2\pi}{\mu(u)} A(u)\,\xi \tag{4.1}$$

şi observăm că $\frac{\partial\Phi}{\partial\iota}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial h}$ sînt soluţii particulare liniar independente ale sistemului (4.1). Dacă efectuăm transformarea

$$\xi_i = \frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial\iota} v + \frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial h} w + \sum_{r=3}^{n} c_{ir} z_r, \quad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{4.2}$$

unde c_{ik} $(i = 1,2,\ldots,n)$, $(k = 3,4,\ldots,n)$ sînt elementele c_{ik} din matricea T, determinată în § 1, atunci sistemul (4.1) se transformă în:

$$\frac{dv}{d\iota} = 0$$

$$\frac{dw}{d\iota} = 0$$

$$\frac{dz}{d\iota} = \frac{2\pi}{\mu(u)} Bz$$

unde

$$B = \begin{Vmatrix} b_{33} \dots b_{3n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n3} \dots b_{nn} \end{Vmatrix}$$

este matricea considerată în § 1.

Ţinînd seamă de această transformare, în sistemul (1.1), vom efectua următoarea transformare :

$$(4.4) \qquad \begin{aligned} x_i &= \rho_i \sqrt{h} \cos(2\pi\iota + \omega_i) + \sum_{r=3}^{n} c_{ir} z_r, \quad (i = 1,\dots, n), \\ u_k &= u_k, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = 1,\dots, l), \end{aligned}$$

Această transformare este nesingulară pentru :

$$(4.4') \qquad |z| \leqslant M, \quad 0 \leqslant \iota < +\infty, \quad h_1 \leqslant h \leqslant h_2,$$

M fiind suficient de mic, deoarece :

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(\iota, h, z_3, \dots, z_n)} = -\pi \,|\, T \,|\, \neq 0.$$

Prin formulele (4.4) sistemul (1.1) se transformă în :

$$(4.7) \qquad \begin{aligned} &(\text{a}) \qquad \varepsilon \frac{\mathrm{d}\iota}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu}{2\pi} + 0(\varepsilon + |z|), \\ &(\text{b}) \qquad \varepsilon \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = Bz + 0(\varepsilon + |z|^2), \\ &(\text{c}) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = U(\Phi, u) + 0(\varepsilon + |z|), \\ &(\text{d}) \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial H(\Phi, u)}{\partial u_j} U_j(\Phi, u) + 0(\varepsilon + |z|). \end{aligned}$$

§ 5. Să considerăm sistemul (4.3). Deoarece toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\left| \frac{2\pi}{\mu(u)} B(u) - \lambda E \right| = 0$$

au partea reală negativă, pentru orice $u \in U$, putem construi o funcţie Leapunov [9]

$$(5.1) \qquad W(z_3, \dots, z_n) = \sum_{i,j=3}^{n} w_{ij}(u)\, z_i z_j$$

astfel ca

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\iota} = \frac{2\pi}{\mu} \sum_{k=3}^{n} \frac{\partial w}{\partial z_k} \left(\sum_{r=3}^{n} b_{kr} z_r \right) < -\alpha W, \tag{5.2}$$

sau

$$\left. \frac{\mathrm{d}w}{d\iota} \right|_{(4.3)} < -\alpha W,$$

unde $\alpha > 0$ este o constantă pozitivă. Se arată că avem :

$$\left| \frac{\partial w}{\partial u_j} \right| < M_1, \quad \left| \frac{\partial w}{\partial z_k} \right| < M_2 \sqrt{W}, \quad M_3 \sqrt{W} < |z| < M_4 \sqrt{W} \tag{5.3}$$

M_1, M_2, M_3 fiind constante.

Se calculează expresia

$$\varepsilon \left. \frac{dw}{\mathrm{d}t} \right|_{(4.7\ b)} = \sum_{k=3}^{n} \frac{\partial w}{\partial z_k} \left(\sum_{r=3}^{n} b_{kr} z_r + 0\,(\varepsilon + |z|^2) \right)$$

şi ţinînd cont de inegalităţile (5.2) şi (5.3) se deduce lema următoare :

LEMA 2. *Există numerele* $\varepsilon_1 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, *astfel ca, dacă* $\varepsilon < \varepsilon_1$ *şi*

$$C_1\, \varepsilon^2 \leqslant W \leqslant C_2,$$

atunci are loc inegalitatea

$$\varepsilon \left. \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \right|_{(4.7\,\mathrm{b})} < -\alpha_1 W \tag{5.4}$$

α_1 *fiind o constantă pozitivă.*

Fie

$$\iota = \iota\,(t, \varepsilon)$$
$$z = z\,(t, \varepsilon)$$
$$u = u\,(t, \varepsilon)$$
$$h = h\,(t, \varepsilon)$$

soluţia sistemului (4.7), care verifică condiţiile iniţiale :

$$\iota\,(0, \varepsilon) = \iota_0,$$
$$z\,(0, \varepsilon) = z_0,$$
$$u\,(0, \varepsilon) = u_0,$$
$$h\,(0, \varepsilon) = h_0,$$

unde valorile ι_0, z_0, u_0, h_0 se obțin din formulele de transformare (4.4):

$$x_i^0 = \Phi^{(i)}(\iota_0, h_0 u_0) + \sum_{r=3}^{n} c_{ir}(u_0) z_r^0, \qquad u = u_0, \; h_0 = H(x_0, u_0).$$

Dacă pentru $t = t_{1\varepsilon}$ avem

$$W(z(t_{1\varepsilon}, \varepsilon)) = C_2$$

din lema 2 rezultă că pentru $t > t_{1\varepsilon}$ și atîta timp cît $u(t, \varepsilon) \in U$, avem

$$W(z(t, \varepsilon)) < C_2.$$

Arătăm că există o valoare $t_{1\varepsilon}$, pentru care să aibă loc inegalitatea

$$W(z(t_{1\varepsilon}, \varepsilon)) \leqslant C_2. \tag{5.5}$$

Să considerăm forma pătratică

$$W(z) = \sum_{i,j=3}^{n} \gamma_{ij}(u) z_i z_j$$

și formulele de transformare (4.4); atunci funcția $W(z)$ poate fi considerată ca o funcție de x și de u

$$W(z) = W_1(x, u).$$

Punînd $x = \tilde{x}(\theta, x_0, u_0)$ și deoarece $n-2$ rădăcini ale ecuației caracteristice $|A(u) - \lambda E| = 0$ au partea reală negativă, se observă că

$$W_1\left(\tilde{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_0, u_0\right), u_0\right) \leqslant \frac{C_2}{2} \quad \text{pentru } t \geqslant \varepsilon\theta_1.$$

Ținînd seamă de legătura dintre funcțiile $x = \tilde{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_0, u_0\right)$, (3.7) și $x = x(t, \varepsilon)$ și de formulele de transformare (4.4), se găsește că pentru ε_0 suficient de mic, dacă $t_{1\varepsilon} = \varepsilon\theta_1$ și $\varepsilon < \varepsilon_0$, avem

$$W(z(t_{1\varepsilon}, \varepsilon)) \leqslant C_2$$

deci inegalitatea (5.5) este demonstrată.

Dacă $W(z)$ este o formă pătratică de z, din (5.5) se deduce

$$|z(t, \varepsilon)| \leqslant C_3 e^{-\frac{\gamma t}{\varepsilon}} + C_4 \varepsilon \quad \text{pentru } t \geqslant \varepsilon\theta_1 \text{ și } u(t, \varepsilon) \in U. \tag{5.6}$$

Dar în virtutea sistemului (4.7), rezultă că $u(t, \varepsilon) \in U$, pentru $t \in [0, t_\varepsilon]$, unde $t_\varepsilon = 0(1)$, nefiind exclus cazul cînd $t_\varepsilon = \infty$.

Să considerăm acum sistemul valorilor medii (2.4), și $[0, L]$ intervalul în care este definită soluția (3.5). Atunci notăm

$$t_\varepsilon^* = \min(t_\varepsilon, L)$$

şi din (5.6) rezultă

$$| z(t, \varepsilon) | \leqslant C_3 e^{\frac{-\gamma t}{\varepsilon}} + C_4 \varepsilon \text{ pentru } \varepsilon\theta_1 \leqslant t \leqslant t^*_\varepsilon .$$

Se va arăta că pentru ε suficient de mic $t^*_\varepsilon = L$.

§ 6. Evaluarea diferenţelor

$$| u(t, \varepsilon) - \overline{u}(t) |, \qquad u(t, \varepsilon) = u_1, \ldots, u_l),$$

$$| h(t, \varepsilon) - \overline{h}(t) |, \qquad h(t, \varepsilon) \text{ scalar},$$

pentru $\varepsilon\theta_1 \leqslant t \leqslant t^*_\varepsilon$.

În sistemul (4.7) să notăm componentele funcţiei vectoriale $U(\Phi, u)$ cu $U_i (i = 1,2,\ldots, l)$. Funcţiile U_i vor fi funcţii de cos $2\pi\iota$, sin $2\pi\iota$, h şi u, deci scriem

$$U_i = U_i(\cos 2\pi\iota, \sin 2\pi\iota, h, u).$$

Totodată notăm :

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial H}{\partial u_j} (\Phi, u) \, U_j(\Phi, u) = H(\cos 2\pi\iota, \sin 2\pi\iota, h, u)$$

şi

$$I_i = \varepsilon \frac{2\pi}{\mu} \int_0^{\iota} [U_i(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta, \overline{h}, \overline{u}) - \overline{U}_i(\overline{h}, \overline{u})] \, d\theta, \ (i = 1,\ldots, l)$$

$$I_h = \varepsilon \frac{2\pi}{\mu} \int_0^{\iota} [H(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta, \overline{h}, \overline{u}) - \overline{H}(\overline{h}, \overline{u})] \, d\theta$$

unde $\overline{U}_i(\overline{h}, \overline{u})$ este valoarea medie a funcţiei U_i iar $\overline{H}(\overline{h}, \overline{u})$ valoarea medie a funcţiei H (cos $2\pi\theta$, sin $2\pi\theta$, $\overline{h}$, $\overline{u}$) (2.3).

Se constată că pentru : $\varepsilon\theta_1 \leqslant t \leqslant t^*_\varepsilon$ avem

$$I_i = 0(\varepsilon), (i = 1,\ldots, l), \qquad I_h = 0(\varepsilon).$$

Considerăm expresiile

$$\eta_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) - \overline{u}_i(t) - I_i(t, \varepsilon), \qquad (i = 1,2,\ldots, l)$$

$$\eta_h(t, \varepsilon) = h(t, \varepsilon) - \overline{h}(t) - I_h(t, \varepsilon)$$

şi vectorul : $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_l, \eta_h)$. Se găseşte că

$$| \eta(t, \varepsilon) | = 0(\varepsilon) \text{ pentru } t \in [\varepsilon\theta_1, t^*_\varepsilon].$$

Înainte de a deduce concluziile din aceste raţionamente se arată că $t^*_\varepsilon = L$. Să presupunem contrariul. Admitem că pentru $t \in [0, L]$, $u(t)$ se găseşte la distanţă mai mică de frontiera domeniului U decît d, şi fie $t^*_\varepsilon = t_\varepsilon < L$. Atunci pentru ε suficient de mic, vom avea

$$| u(t, \varepsilon) - \overline{u}(t) | < \frac{d}{2}$$

şi ar rezulta că $u(t_\varepsilon, \varepsilon)$ se găseşte în U, la distanţă mai mică de frontieră, decît $\frac{d}{2}$ şi prin urmare $u(t_\varepsilon, \varepsilon)$ nu se găseşte pe frontiera domeniului. Deci $t_\varepsilon = L$.

Rezultă următoarea :

TEOREMĂ. *Există o funcţie* $\iota(t, \varepsilon)$, *astfel încît dacă* $\delta > 0$, *atunci pentru* $\delta \leqslant t \leqslant L$, *au loc inegalităţile :*

$$\left| \varepsilon \frac{d\iota}{dt} - \frac{\mu(\overline{u})}{2\pi} \right| = 0\ (\varepsilon)$$

$$| x(t, \varepsilon) - \Phi(\iota(t, \varepsilon)\, \overline{h}, \overline{u}) | = 0\ (\varepsilon)$$

$$| u(t, \varepsilon) - \overline{u}(t) | = 0\ (\varepsilon)$$

$$| h(t, \varepsilon) - \overline{h}(t) | = 0\ (\varepsilon)$$

uniform în raport cu t, unde

$$\Phi(\iota(t, \varepsilon)\, h, u) = \rho \sqrt{h} \cos 2\pi \cdot (\iota(t, \varepsilon) + \omega).$$

Primită la redacţie la 5 ianuarie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii „Babeş-Bolyai" Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. A. N. TIHONOV, Matem. sborn., **31** (**73**), 574 (1962).
2. I. S. GRADSTEIN, D.A.N., **L XVI**, *5*, 789 (1949).
3. L. S. PONTRIAGHIN şi L. V. RODÎGHIN, D.A.N., **131**, *2*, 255 (1960).
4. G. S. MACAEVA, D.A.N., **121**, *6*, 973 (1958).
5. G. S. MAKAEVA, Izvestia Acad. Nauk SSSR, Seria Matem., **25** (**5**), 685 (1961).
6. M. SĂVEANU, *Lucrare de Diplomă*, Univ. Babeş-Bolyai Cluj, Facultatea de matematică (1964).
7. V. I. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare*. vol. III, partea II, p. 754, Ed. tehnică Bucureşti, 1955.
8. L. S. PONTRIAGHIN, *Obicnovenie diferenţialnie uravneniia*, p. 204, Mosckva, 1961.
9. L. S. PONTRIAGHIN, *Obicnovenie diferenţialnie uravneniia*, p. 214, Moskva, 1961.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE TEORIE SPECTRALĂ

DE

C. FOIAȘ

Se arată că orice operator scalar generalizat al cărui spectru este suficient de subțire este regulat.

În teoria operatorilor liniari mărginiți ai unui spațiu Banach X, un rol important îl joacă măsurile spectrale. Cu ajutorul lor s-a clădit în decurs de 30 — 40 ani (Hilbert, Neumann, Dunford și alții) o teorie spectrală deosebit de coherentă și frumoasă. În ultimii ani însă noțiunea de măsură spectrală s-a dovedit insuficientă pentru studiul operatorilor care intervin în analiza matematică. Astfel dacă considerăm un domeniu mărginit $\Omega \subset R^n$ și spațiul $W_p^r(\Omega)$ al lui *Sobolev* (unde r este un întreg $\geqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$), atunci operatorul

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ (\in W_p^r(\Omega)) \to x_1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ (\in W_p^r(\Omega))$$

nu poate fi descompus spectral prin intermediul unei măsuri spectrale. Dacă însă se înlocuiește măsura cu o distribuție (în sensul lui L. Schwartz), atunci aceasta este cu putință. În acest mod studiul operatorilor care se descompun prin intermediul unei distribuții spectrale se impune de la sine. Acest studiu a fost început într-o formă restrictivă de Fr. Wolf [1] și reluat într-o formă generală și consistentă de către autor [2] și apoi de către mulți alții (F. Y. Maeda, I. Colojoară, G. Tillmann, Y. V. Liantze, G. L. Krabbe etc.). Cu toate acestea una din problemele cele mai importante ale teoriei nu a fost încă rezolvată pînă în ziua de azi și anume, problema unicității distribuțiilor spectrale.

Pentru a vedea în ce constă problema unicității distribuțiilor spectrale să dăm definițiile de bază necesare :

Fie $T \in B(X)$ un operator al lui X. Prin definiție T este scalar generalizat dacă posedă o distribuție spectrală, adică dacă există o aplicație liniară multiplicativă $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C^\infty(R^2)$ în $B(X)$ continuă pentru

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 6, p. 921–923, BUCUREȘTI, 1965

topologia convergenţei uniforme în $B(X)$ şi cea schwartziană în $C^{\infty}(R^2)$ şi care verifică $U_{\lambda} = T$, λ fiind funcţia $(s, t) \to s + it$. Dacă continuitatea are deja loc pentru convergenţa uniformă, distribuţia devine măsură ; în acest caz este clasic că dacă U_{φ} este o măsură ataşată lui T, ea este unică. L. Schwartz a dat un exemplu simplu care arată că distribuţia nu mai este unic determinată. Acest fapt constituie un fenomen nou care ridică probleme originale grele. Autorul a arătat [2] că dacă T este regulat, adică dacă posedă o distribuţie spectrală U_{φ} care comută cu orice operator ce comută cu T, atunci pentru orice altă distribuţie spectrală V_{φ} a lui T avem :

$$(U_{\varphi} - V_{\varphi})^N = 0 \qquad (\varphi \in C^{\infty}(R^2))$$

pentru un anume N fixat. În felul acesta unicitatea distribuţiei spectrale continuă să se păstreze abstracţie făcînd de termeni aditivi nilpotenţi. Deşi rezultatul anterior lămureşte cum trebuie pusă problema unicităţii distribuţiei spectrale a unui operator scalar generalizat, el lasă deschisă problema următoare :

Este orice operator scalar generalizat în plus regulat?

Această problemă pare deosebit de grea. Singurul rezultat care se cunoaşte în această ordine de idei se datoreşte lui J. T. Schwartz [3]. Dacă spectrul $\sigma(T)$ al lui T este situat pe dreapta reală, atunci T este regulat.

Acest rezultat poate fi întărit uşor. Să numim *subţire* o mulţime închisă σ pe care funcţia $\bar{\lambda} = s - it$ este restricţia unei funcţii $f(\lambda)$ analitică în vecinătatea lui σ. De exemplu, segmentele de dreaptă şi cercurile sînt mulţimi subţiri. Aşa că rezultatul care urmează cuprinde pe cel al lui J. T. Schwartz.

Dacă T este scalar generalizat şi $\sigma(T)$ este subţire, atunci T este regulat.

Într-adevăr, fie $\varphi \to V_{\varphi}$ o distribuţie spectrală a lui T şi fie n ordinul acestei distribuţii. Cum $\sigma(T)$ este subţire, există o funcţie $f(\lambda)$ analitică într-o vecinătate a lui $\sigma(T)$ astfel ca pe $\sigma(T)$ să avem $\bar{\lambda} = f(\lambda)$. Distribuţia numerică $\langle V_{\varphi}\, x, x^* \rangle$ este de ordin $\leqslant n$ pentru orice $x \in X$, $x^* \in X^*$. Prin urmare, întrucît funcţia $\varphi(s, t) = (\bar{\lambda} - f(\lambda))^{n+1}$ (unde $\lambda = s + it$) este $= 0$ pe $\sigma(T)$ împreună cu toate derivatele sale parţiale de ordin $\leqslant n$ şi întrucît $\sigma(T)$ este suportul distribuţiei V_{φ}(vezi [2]), rezultă că

$$\langle V_{(\bar{\lambda} - f(\lambda))^{n+1}}\, x,\ x^* \rangle = 0$$

(pentru această concluzie vezi Hörmander [4]). Cum $x \in X$, $x^* \in X$ sînt arbitrare, rezultă $V_{(\bar{\lambda} - f(\lambda))^{n+1}} = 0$, de unde V_{φ} fiind spectrală $(V_{\bar{\lambda}} - f(T))^{n+1} = (V_{\bar{\lambda}} - V_{f(\lambda)})^{n+1} = V_{(\bar{\lambda} - f(\lambda))^{n+1}} = 0$, unde $f(T)$ este operatorul dat de calculul funcţional Riesz-Dunford :

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)\, (\lambda I - T)^{-1}\, d\lambda,$$

Γ fiind un contur convenabil ales ce înconjură pe $\sigma(T)$. Să punem

$$N = V_{\bar\lambda} - f(T).$$

Evident, N comută cu $V_{\bar\lambda}$ și cu $T = V_\lambda$, deci cu V_φ pentru orice $\varphi \in C^\infty(R^2)$. Să punem

$$U_\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} N^k \, V_{\bar D^k \varphi},$$

unde $\bar D$ este derivata areolară

$$\bar D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s} + i\,\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Este evident că $\varphi \to U_\varphi$ este o distribuție vectorială cu valori în $B(X)$ (de ordin $\leqslant 2n$). În plus cum

$$\bar D\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s} + i\,\frac{\partial}{\partial t}\right)(s + it) = 0$$

avem $U_\lambda = V_\lambda = T$ și pentru orice $\varphi, \psi \in C^\infty(R^2)$ avem

$$U_{\varphi\psi} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} N^k \, V_{\bar D^k(\varphi\psi)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} N^k \, V_{\sum\limits_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\bar D^\nu \varphi \, \bar D^{k-\nu}\psi} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} N^k \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} V_{\bar D^\nu \varphi} \, V_{\bar D^{k-\nu} \psi} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} N^\nu \, V_{\bar D^\nu \varphi} \frac{(-1)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} N^{k-\nu} \, V_{\bar D^{k-\nu} \psi} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} V_{\bar D^\nu \varphi} N^\nu \sum_{\mu=0}^{n} \frac{(-1)^\mu}{\mu!} N^\mu \, V_{\bar D^\mu \psi},$$

unde am folosit faptul că

$$N^\nu N^\mu = N^{n+p} = 0$$

pentru $\mu + \nu = n + p \geqslant n + 1$. În acest mod avem și $U_{\varphi\psi} = U_\varphi \, U_\psi$, așa că $\varphi \to U_\varphi$ este o distribuție spectrală atașată lui T. Dacă $Z \in B(X)$ comută cu T, atunci Z comută cu $U_\lambda = T$ și cu $U_{\bar\lambda} = V_{\bar\lambda} - N = f(T)$ și prin urmare și cu orice U_φ, adică T este regulat, ceea ce termină demonstrația asertiunii noastre.

Primită la redacție la 13 martie 1965

Institutul de matematică
al Academiei R.P.R.,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Fr. Wolf, Indagationes Math., **19**, 302–311 (1957).
2. C. Foiaș, Bull. Sc. Math., **84**, 147–158 (1960).
3. J. T. Schwartz, Math. Reviews, **23**, *1 A* (1962), recenzia 522 a lucrării [2].
4. L. Hörmander, *Linear Partial diferențial operator*, Berlin, 1963, Th. 1.5.4.

FUNCŢII UNIVALENTE PE SECTOARE

DE

PETRU T. MOCANU

(Cluj)

Această notă are ca scop o introducere în studiul unor clase speciale de funcţii multivalente în discul unitate, care sînt olomorfe şi univalente pe sectoare. Se notează cu $\sigma(\theta, \varphi)$ sectorul definit de inegalităţile $|z| < 1$, $\theta < \arg z < \varphi$. Fie U clasa funcţiilor olomorfe şi univalente în $|z| < 1$; $U(\theta, \varphi)$ clasa funcţiilor meromorfe în $|z| < 1$, care sînt olomorfe şi univalente pe sectorul $\sigma(\theta, \varphi)$;

$$U(\omega) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi - \omega]} U(\theta, \theta + \omega) \text{ şi } U_m(\theta) = \bigcap_{k=0}^{m-1} U\left(\theta + \frac{2k\pi}{m}, \theta + \frac{2(k+1)\pi}{m}\right).$$

Dacă funcţiile $f(z)$ mai sînt normate cu condiţiile $f(0) = 0$, respectiv $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, atunci clasele de mai sus se notează T, $T(\omega)$, $T_m(\theta)$, respectiv S, $S(\omega)$, $S_m(\theta)$.

În prima parte a lucrării se demonstrează teorema : $S(\omega) = S$ *dacă şi numai dacă* $\omega \geqq \pi$. Se stabilesc apoi cîteva delimitări (9), (10) şi (11) relativ la funcţiile olomorfe şi univalente pe semidiscurile $\sigma(\theta, \theta + \pi)$, $\sigma(\theta + \pi, \theta + 2\pi)$.

1. *Introducere.* Această notă are ca scop o introducere în studiul unor clase speciale de funcţii multivalente în discul unitate, funcţii pe care le vom numi în general ,,funcţii univalente pe sectoare". Exemple simple de funcţii ca z^n sau cos z conduc în mod natural la considerarea unor astfel de clase. Vom insista mai mult asupra cazului particular al funcţiilor univalente pe semidiscuri pentru care vom da cîteva delimitări de tipul teoremelor de contracţie.

2. *Definiţii şi notaţii.* Fie U clasa funcţiilor $f(z)$ olomorfe şi univalente în discul unitate ($|z| < 1$), T clasa funcţiilor $f(z) \in U$ normate cu condiţia $f(0) = 0$ şi S clasa funcţiilor $f(z) \in U$ normate cu condiţiile $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Evident că $S \subset T \subset U$. Vom introduce acum nişte clase de funcţii meromorfe în discul unitate, care în general sînt multi-

ST. CERC., MAT., TOM. 17, NR. 6, P. 925–931, BUCUREŞTI, 1965

valente în acest disc, dar sînt olomorfe și univalente pe anumite sectoare ale acestui disc.

Pentru prescurtare vom nota cu $\sigma(\theta, \varphi)$ sectorul definit de inegalitățile $|z| < 1$, $\theta < \arg z < \varphi$.

Fie $U(\theta, \varphi)$ clasa funcțiilor $f(z)$ meromorfe în $|z| < 1$ care sînt olomorfe și univalente pe sectorul $\sigma(\theta, \varphi)$. Să punem

$$U(\omega) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi - \omega]} U(\theta, \theta + \omega),$$

$$\tilde{U}(\omega) = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi - \omega]} U(\theta, \theta + \omega).$$

Este clar că $U(\omega)$ reprezintă clasa funcțiilor meromorfe în discul unitate (putînd avea pol doar în origine) și univalente pe *orice* sector $\sigma(\theta, \theta + \omega)$, adică pe orice sector de unghi la centru ω; iar $\tilde{U}(\omega)$ reprezintă clasa funcțiilor meromorfe în discul unitate și univalente pe *cel puțin* un sector de unghi la centru ω.

Clasa $U(0)$ o vom numi clasa funcțiilor *radial univalente*, adică a funcțiilor univalente pe fiecare rază a discului unitate. O funcție $f(z) \in U(0)$ transformă orice rază a discului unitate într-un arc simplu.

Să mai notăm

$$U_m(\theta) = \bigcup_{k=0}^{m-1} U\left(\theta + \frac{2k\pi}{m},\ \theta + \frac{2(k+1)\pi}{m}\right).$$

Aceasta reprezintă clasa funcțiilor meromorfe în discul unitate, care sînt olomorfe și univalente (separat) pe fiecare din sectoarele $\sigma\left(\theta + \frac{2k\pi}{m},\ \theta + \frac{2(k+1)\pi}{m}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Un astfel de sistem de sectoare îl vom numi pe scurt un m-sistem și îl vom nota $\sum_m(\theta)$. Vom spune că o funcție $f(z)$ este univalentă pe un m-sistem dacă e univalentă separat pe fiecare sector al acestui m-sistem. Deci $U_m(\theta)$ este clasa funcțiilor meromorfe în discul unitate, olomorfe și univalente pe m-sistemul $\Sigma_m(\theta)$.

În sfîrșit, să mai notăm

$$U_m = \bigcup_{\theta \in \left[0, \frac{2(m-1\pi}{m}\right]} U_m(\theta).$$

Aceasta reprezintă clasa funcțiilor meromorfe în discul unitate, care sînt olomorfe și univalente pe cel puțin un m-sistem de sectoare ale discului unitate.

Făcînd $m \to \infty$ se obține clasa $U_\infty = U(0)$ a funcțiilor radial univalente.

Impunînd funcțiilor de mai sus în plus condițiile $f(0) = 0$, respectiv $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, vom obține clasele, analoage cu cele introduse mai înainte,

$$T(\theta, \varphi),\ T(\omega),\ \widetilde{T}(\omega),\ T_m(\theta),\ T_m$$

respectiv

$$S(\theta, \varphi),\ S(\omega),\ \widetilde{S}(\omega),\ S_m(\theta),\ S_m.$$

Vom mai considera de asemenea clasele de funcţii radial univalente $T(0)$, $S(0)$.

Evident că din condiţiile de normare rezultă că originea, $z = 0$, pentru orice funcţie din clasele de mai sus, este un punct ordinar. În particular funcţiile din $T(\omega)$ sau $S(\omega)$ sînt olomorfe în discul unitate.

3. *Cîteva proprietăţi generale.* Din definiţiile de mai sus rezultă imediat incluziunile

$$U \subset U(\omega) \subset \tilde{U}(\omega)$$

$$T \subset T(\omega) \subset \tilde{T}(\omega)$$

$$S \subset S(\omega) \subset \tilde{S}(\omega)$$

$$S(\omega) \subset T(\omega) \subset U(\omega)$$

$$\tilde{S}(\omega) \subset \tilde{T}(\omega) \subset \tilde{U}(\omega)$$

$$U\left(\frac{2\pi}{m}\right) \subset U_m(\theta) \subset U_m$$

$$T\left(\frac{2\pi}{m}\right) \subset T_m(\theta) \subset T_m$$

$$S\left(\frac{2\pi}{m}\right) \subset S_m(\theta) \subset S_m.$$

Dacă $\omega' > \omega''$, atunci $U(\omega') \subset U(\omega'')$ (analog pentru $T(\omega)$ şi $S(\omega)$). Deci $U(\omega) \subset U(0)$, adică dacă $f(z) \in U(\omega)$, atunci ea este univalentă pe orice rază a discului unitate (analog pentru $T(\omega)$ şi $S(\omega)$).

Dacă $f(z) \in U(\omega)$ şi $\omega \neq 0$, atunci evident $f'(z) \neq 0$, pentru orice $z \neq 0$, $|z| < 1$ (analog pentru $T(\omega)$ şi $S(\omega)$).

Funcţiile din clasele $U(\omega)$, $T(\omega)$ sau $S(\omega)$, pentru $\omega \geqq \frac{2\pi}{m}$, sînt cel mult m-valente în discul unitate.

Se pune în mod natural problema : pentru ce valori ale lui ω univalenţa pe orice sector de unghi la centru ω atrage după sine univalenţa pe întreg discul unitate?

Dacă $\omega > \pi$, atunci evident că această proprietate are loc pentru oricare din clasele $S(\omega)$, $T(\omega)$, $U(\omega)$. Pentru $\omega \leqq \pi$, această proprietate nu mai este adevărată, în general, pentru clasa $T(\omega)$ (deci cu atît mai mult pentru $U(\omega)$), cum arată exemplul $w = z^2$. Aceasta se explică prin faptul că derivata unei funcţii din $T(\omega)$ se poate anula în origine. Dacă însă înlăturăm această posibilitate, normînd funcţiile cu condiţia $f'(0) \neq 0$, de exemplu, considerînd funcţiile din clasa $S(\omega)$, atunci are loc următoarea proprietate :

TEOREMA. $S(\omega) = S$ *dacă şi numai dacă* $\omega \geqq \pi$.

Demonstraţie. Dacă $\omega > \pi$, evident că $S(\omega) = S$. Să arătăm că $S(\pi) = S$. Fie $f(z) \in S(\pi)$. Pentru a arăta că $f(z) \in S$, este suficient să arătăm că este univalentă pe orice diametru al discului unitate. Să presupunem că ar exista un diametru pe care $f(z)$ nu ar fi univalentă. Dar

$f(z)$ este univalentă pe fiecare din cele două semidiscuri astfel formate. Fiecare din cele două raze se transformă în cîte un arc simplu, arce care vor fi componente al frontierei imaginei fiecărui semidisc prin transformarea $w = f(z)$. Aceste arce sînt distincte, deoarece $f'(0) \neq 0$ și deci $f(z)$ este univalentă într-o vecinătate a originii. Dacă $f(z)$ nu e univalentă pe întregul diametru, cele două arce ar avea un punct comun diferit de origine și se va forma în acest fel de o parte a originii un domeniu care ar trebui să fie imaginea unui semidisc dar a cărui frontieră nu e formată decît din componente ale imaginilor celor două raze, ceea ce este imposibil. Această contradicție ne arată că $f(z) \in S$. Deci $S(\pi) \subset S$. Dar cum și $S \subset S(\pi)$, rezultă $S(\pi) = S$.

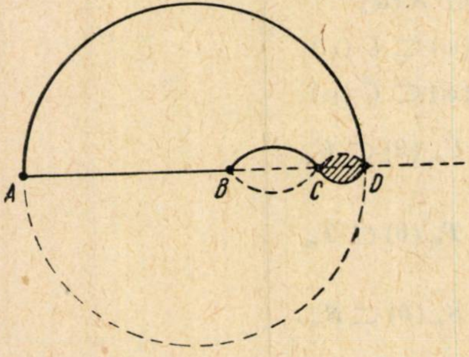


Fig. 1

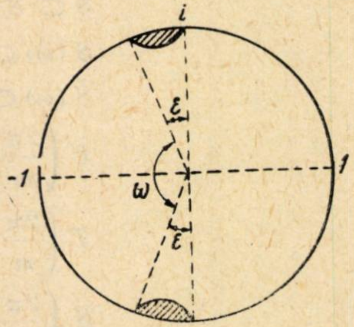


Fig. 2

Să presupunem acum că $S(\omega) = S$ și să arătăm că $\omega \geqq \pi$. Vom arăta anume că se pot construi ușor funcții care nu aparțin clasei S, dar aparțin clasei $S(\omega)$ pentru un $\omega < \pi$, oricît de apropiat de π. Putem construi, de exemplu, o funcție $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, care să transforme discul unitate, $|z| < 1$, într-un domeniu bivalent, care să acopere de două ori numai o regiune a planului de diametru cît voim de mic. Pentru aceasta să considerăm în planul (w) un domeniu cu simplă acoperire Δ mărginit de curba Jordan $ABCDA$, unde AB este un segment de pe axa reală, BC și DA două arce situate în semiplanul superior, iar arcul CD în semiplanul inferior (fig. 1).

Să notăm cu δ porțiunea din domeniul Δ situată în semiplanul inferior. Vom reprezenta conform semidiscul $\sigma(0, \pi)$ pe domeniul Δ în așa fel ca punctele $-1, 1, i$ să se transforme respectiv în punctele A, B, C (fig. 2). Fie $w = f(z)$ funcția de reprezentare conformă. Deoarece segmentul $[-1, 1]$ se transformă în segmentul $[A, B]$, rezultă, conform principiului simetriei, că putem prelungi funcția $f(z)$ în semidiscul $\sigma(\pi, 2\pi)$. Fie Δ', respectiv δ', simetricul lui Δ, respectiv δ față de axa reală. Funcția astfel prelungită va fi olomorfă în discul unitate și va transforma acest disc în domeniul $\Delta^* = \Delta \cup \Delta' \cup (A, B)$. Evident că $f'(0) > 0$. Fără să schimbăm notațiile, putem presupune că $f(0) = 0$ și $f'(0) = 1$ (aceasta revine la o translație și o omotetie aplicate domeniului bivalent Δ^*, ceea ce nu-i schimbă caracterul).

Funcţia $f(z)$ este bivalentă în discul unitate. Fie γ, respectiv γ', porţiunile din discul unitate care se transformă în δ, respectviv δ' (acestea sînt domeniile haşurate în fig 2). Dacă diametrul domeniului δ este suficient de mic, putem face ca unghiul la centru în care este cuprins domeniul γ să fie un număr ε oricît de mic. Este clar că funcţia $f(z)$ va fi univalentă pe orice sector de unghi la centru $\omega = \pi - 2\varepsilon$. Deci $f(z) \in S(\pi - 2\varepsilon)$ şi $f(z) \notin S$, ceea ce completează demonstraţia teoremei.

4. *Funcţii univalente pe semidiscuri. Delimitări.* Să considerăm clasa $U_2(\theta)$, adică clasa funcţiilor meromorfe în discul unitate, care sînt olomorfe şi univalente pe fiecare din semidiscurile $\sigma(\theta, \theta + \pi)$ şi $\sigma(\theta + \pi, \theta + 2\pi)$. Să notăm $k = e^{i\theta}$. Fie z_0 un punct oarecare din semidiscul $\sigma(\theta, \theta + \pi)$. Punînd $\alpha = \arg z_0$, vom avea evident $\theta < \alpha < \theta + \pi$.

Să facem transformarea

$$\zeta = \frac{Z - Z_0}{Z - \overline{Z}_0} = \zeta(z), \tag{1}$$

unde

$$Z = Z(z) = \left(\frac{1 + \overline{k} z}{1 - \overline{k} z}\right)^2, \tag{2}$$

$$Z_0 = Z(z_0).$$

Prin funcţia $\zeta = \zeta(z)$, semidiscul $\sigma(\theta, \theta + \pi)$ se transformă univalent în discul $|\zeta| < 1$ şi $\zeta(z_0) = 0$.

Din (1) şi (2) deducem

$$Z = \frac{Z_0 - \overline{Z}_0 \zeta}{1 - \zeta} \tag{3}$$

şi

$$z = \frac{\sqrt{Z} - 1}{\sqrt{Z} + 1} = \varphi(\zeta), \tag{4}$$

unde pentru $\sqrt{Z}$ alegem determinarea egală cu 1 pentru $Z = 1$. Funcţia $\varphi(\zeta)$ este olomorfă şi univalentă în $|\zeta| < 1$, iar $\varphi(0) = z_0$.

Fie acum o funcţie oarecare $f(z)$ din clasa $U_2(\theta)$. Să punem

$$g(\zeta) = f[\varphi(\zeta)].$$

Această funcţie de asemenea este olomorfă şi univalentă în $|\zeta| < 1$ şi avem

$$g(0) = f(z_0)$$
$$g'(0) = f'(z_0)\,\varphi'(0)$$
$$g''(0) = f''(z_0)\,\varphi'^2(0) + f'(z_0)\,\varphi''(0),$$

deci putem scrie

$$g(\zeta) = f(z_0) + f'(z_0)\,\varphi'(0)\,\zeta + \frac{1}{2}\,[f''(z_0)\,\varphi'^2(0) + f'(z_0)\,\varphi''(0)]\,\zeta^2 + \dots$$

Să considerăm funcţia

$$(5)\qquad F(\zeta)=\frac{g(\zeta)-f(z_0)}{f'(z_0)\,\varphi'(0)}=\zeta+\frac{1}{2}\left[\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\,\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)}\right]\zeta^2+\dots$$

care, evident, aparţine clasei S. O primă delimitare pe care o obţinem imediat este următoarea

$$(6)\qquad \left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\,\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)}\right|\leqq 4.$$

Fie z_1 un alt punct fixat din semidiscul $\sigma(\theta,\ \theta+\pi)$. Să punem

$$\zeta_1=\zeta(z_1)\,.$$

În punctul ζ_1 au loc delimitările exacte

$$(7)\qquad \frac{|\zeta_1|}{(1+|\zeta_1|)^2}\leqq|F(\zeta_1)|\leqq\frac{|\zeta_1|}{(1-|\zeta_1|)^2},$$

$$(8)\qquad \frac{1-|\zeta_1|}{(1+|\zeta_1|)^3}\leqq|F'(\zeta_1)|\leqq\frac{1+|\zeta_1|}{(1-|\zeta_1|)^3}.$$

Pe de altă parte avem

$$\varphi'(\zeta)=\frac{(1-\bar{k}z)^3}{1+\bar{k}z}\,\frac{(1-|z_0|^2)\,(\bar{k}z_0-k\bar{z}_0)}{(1-\bar{k}z_0)^2\,(1-k\bar{z}_0)^2}\,\frac{1}{(1-\zeta)^2}.$$

Ţinînd seama de (7) şi (8), se deduc în clasa $U_2(\theta)$ următoarele delimitări exacte

$$(9)\qquad \frac{|\zeta_1|}{(1+|\zeta_1|)^2}\,|\varphi'(0)|\leqq\left|\frac{f(z_1)-f(z_0)}{f'(z_0)}\right|\leqq\frac{|\zeta_1|}{(1-|\zeta_1|)^2}\,|\varphi'(0)|,$$

$$(10)\qquad \frac{1-|\zeta_1|}{(1+|\zeta_1|)^3}\left|\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(\zeta_1)}\right|\leqq\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_0)}\right|\leqq\frac{1+|\zeta_1|}{(1-|\zeta_1|)^3}\left|\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(\zeta_1)}\right|,$$

unde z_0 şi z_1 sînt două puncte oarecare din semidiscul $\sigma(\theta,\ \theta+\pi)$ iar $\zeta_1=\zeta(z_1)$, funcţiile $\zeta(z)$ şi $\varphi(\zeta)$ fiind definite de (1) şi respectiv (2). De asemenea în formulele de mai sus avem

$$|\zeta_1|=\left|\frac{Z(z_1)-Z(z_0)}{Z(z_1)-\bar{Z}(z_0)}\right|=\left|\frac{z_1-z_0}{1-\bar{z}_0z_1}\right|\left|\frac{1-\bar{k}^2z_0z_1}{\bar{k}z_1-k\bar{z}_0}\right|,$$

$$|\varphi'(0)|=(1-|z_0|^2)\left|\frac{\bar{k}z_0-k\bar{z}_0}{1-k^2\bar{z}_0^2}\right|=$$

$$=2\,|z_0|\,(1-|z_0|^2)\,\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sqrt{1-2\,|z_0|^2\cos 2\,(\theta-\alpha)+|z_0|^4}},$$

$$\left|\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(\zeta_1)}\right|=\left|\frac{1+\bar{k}z_1}{1+\bar{k}z_0}\right|\left|\frac{1-\bar{k}z_0}{1-\bar{k}z_1}\right|^3|1-\zeta_1|^2\qquad(\alpha=\arg z_0)\,.$$

Să presupunem acum că $f(0) = 0$. Făcînd în prima inegalitate din (9) $z_1 \to 0$ și ținînd seama că $|\zeta_1| \to 1$, se obține în definitiv următoarea delimitare în clasa $T_2(\varphi)$:

$$(11) \qquad \left| \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leqq \frac{2}{|z_0|(1 - |z_0|^2)} \, \frac{\sqrt{1 - 2|z_0|^2 \cos 2(\alpha - \theta) + |z_0|^4}}{\sin(\alpha - \theta)}.$$

Se știe că în (7) și (8) egalitățile din partea stîngă, respectiv din partea dreaptă, sînt atinse pentru funcția lui Koebe

$$F(\zeta) = \frac{\zeta}{(1 + \lambda\zeta)^2},$$

unde $\lambda = \frac{|\zeta_1|}{\zeta_1}$, respectiv $\lambda = -\frac{|\zeta_1|}{\zeta_1}$, care reprezintă conform discul $|\zeta| < 1$ pe planul cu o tăietură radială.

Rezultă că funcțiile extremale din clasa $U_2(\theta)$ pentru care sînt atinse egalitățile în (9) și (10) sînt de forma:

$$(12) \qquad f(z) = A + B \frac{(Z - Z_0)(Z - \overline{Z}_0)}{[Z - \overline{Z}_0 + \lambda(Z - Z_0)]^2}, \qquad |\lambda| = 1,$$

unde A și B sînt niște constante arbitrare, iar funcția $Z = Z(z)$ este dată de formula (2).

Aplicînd principiul simetriei, se poate arăta că aceste funcții extremale sînt olomorfe și univalente și în semidiscul $\sigma(\theta + \pi, \theta + 2\pi)$, deci aparțin clasei $U_2(\theta)$.

Primită la redacție la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul
al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

DOUĂ CONDIŢII NECESARE ŞI SUFICIENTE DE EXISTENŢĂ A CODURILOR LINIARE CORECTOARE DE *t* ERORI

DE

MARGARETA MATEESCU

În această lucrare se dau două condiţii necesare şi suficiente de existenţă a codurilor liniare corectoare de *t* erori.

Una din problemele teoriei codurilor este corectarea erorilor. Pe canalul de transmisie intervin zgomote care fac să nu recepţionăm cuvîntul transmis, ci un alt cuvînt. Codurile corectoare de erori sînt construite pentru a detecta şi corecta anumite erori care apar. Codurile corectoare de erori pot fi studiate sub diverse aspecte : al existenţei lor ([1], [3]), al construirii lor ([1], [2], [12]), al numărului maxim de erori pe care-l pot corecta ([8], [9], [11]).

În lucrarea de faţă, folosind reprezentarea matricială a codurilor liniare [11], se dau două condiţii necesare şi suficiente de existenţă a codurilor liniare corectoare de *t* erori.

Prima dintre aceste condiţii a fost enunţată şi demonstrată de Bose—Chaudhuri [1] pentru cazul binar. A. Deleanu [3] generalizează rezultatul lui Bose—Chaudhuri, pentru coduri grupale nebinare. În lucrarea de faţă am generalizat pentru codurile liniare nebinare, rezultatul obţinut de Bose—Chaudhuri (teorema 1).

A doua condiţie necesară şi suficientă de existenţă a codurilor liniare corectoare de *t* erori (pentru cazul binar), am stabilit-o ca un corolar al unui rezultat al lui Demidovici [5], în legătură cu existenţa codurilor liniare binare care au vectorul ponderilor dat (teorema 2).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 6, P. 933–938, BUCUREŞTI, 1965

§ 1. REPREZENTAREA MATRICIALĂ A CODURILOR LINIARE. COD CORECTOR DE t ERORI

Considerăm un canal prin care pot fi transmise succesiuni de n simboluri alese dintre q simboluri diferite, unde q este o putere a unui număr prim. Mulţimea celor q simboluri poate fi organizată ca un corp comutativ C_q. Mulţimea V_n 1) a tuturor şirurilor ordonate de n elemente ale corpului comutativ este un spaţiu vectorial faţă de următoarele operaţii : dacă $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in V_n$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_n) \in V_n$, $a \in C_q$, atunci :

$$\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) \in V_n, \tag{1}$$

$$a \widetilde{\alpha} = (a\alpha_1, \dots, a\alpha_n) \in V_n. \tag{2}$$

În V_n elementul nul este :

$$\widetilde{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

V_n va fi numit *cod*. Se numeşte *cod liniar* orice subspaţiu vectorial al lui V_n. Pentru $q = 2$, adică pentru cazul binar, se foloseşte termenul de *cod grup*. Un vector dintr-un cod liniar va fi numit *vector cod*. Se numeşte *lungime a unui vector*, numărul de componente ale vectorului. Toţi vectorii cod dintr-un subspaţiu vectorial al lui V_n au aceeaşi lungime n. Vom numi *lungime a unui cod liniar*, lungimea unui vector cod. Fiind daţi doi vectori $\widetilde{\alpha}_1$ şi $\widetilde{\alpha}_2$ se numeşte *distanţă* (Hamming) între cei doi vectori, $\mathrm{d}(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2)$, numărul de poziţii în care componentele celor doi vectori diferă. Se verifică uşor că distanţa introdusă e o metrică. Vom numi *pondere* $w(\widetilde{\alpha})$, a unui vector $\widetilde{\alpha}$, numărul de componente nenule ale vectorului. Se verifică imediat că oricare ar fi $\widetilde{\alpha}$ din V_n :

$$w(\widetilde{\alpha}) = \mathrm{d}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{0}). \tag{3}$$

Fie V un cod liniar cu h vectori cod şi $w_1, w_2, \dots, w_h$ ponderile corespunzătoare. Vom numi $(w_1, w_2, \dots, w_h)$ *vectorul ponderilor* codului liniar V. Acest vector e unic determinat, abstracţie făcînd de o permutare.

Un cod liniar de dimensiune k va fi numit *cod liniar* (n, k). Vom nota codurile liniare (n, k) cu $V_{n,k}$. Orice mulţime de vectori cod care formează o bază pentru un cod liniar $V_{n,k}$ poate fi considerată ca linii ale unei matrici G, numită *matrice generatoare* a lui $V_{n,k}$. Spaţiul vectorial generat de liniile lui G se numeşte spaţiu vectorial al lui G. Spaţiul vectorial al lui G este codul liniar $V_{n,k}$ şi un vector este vector cod dacă şi numai dacă este o combinaţie liniară de linii ale lui G. Dacă dimensiunea spaţiului vectorial $V_{n,k}$ este k, atunci numărul liniilor lui G va fi k.

Doi vectori $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ şi $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ sînt *ortogonali*, dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = 0$. Un vector $\widetilde{\alpha}$ din V_n este *ortogonal cu un sistem* oarecare X de vectori din V_n dacă $\widetilde{\alpha}$ este ortogonal cu fiecare vector din X. Fie $V_{n,k}$

---

1) Elementele lui V_n se numesc vectori.

un subspaţiu vectorial al lui V_n. Vom numi *spaţiu ortogonal* al lui $V_{n,k}$ şi-l vom nota $V'_{n,n-k}$, mulţimea tuturor vectorilor din V_n ortogonali cu $V_{n,k}$. Se verifică uşor că $V'_{n,n-k}$ este un subspaţiu vectorial al lui V_n şi că $\dim V'_{n,n-k} = n - k$ [10], ceea ce justifică notaţia introdusă pentru spaţiul ortogonal. Codurile liniare $V_{n,k}$ şi $V'_{n,n-k}$ se numesc *coduri duale*. Notăm cu H o matrice generatoare a codului liniar $V'_{n,n-k}$. Ea va avea $n - k$ linii şi n coloane. Se verifică imediat că $\widetilde{\alpha} \in V_{n,k}$ dacă şi numai dacă $\widetilde{\alpha}$ este ortogonal cu fiecare linie a lui H, ceea ce este acelaşi lucru cu a spune că $\widetilde{\alpha} \cdot H^T = \widetilde{0}$, unde H^T este transpusa matricei H. Matricea H se numeşte *matrice control de paritate* a lui $V_{n,k}$.

Peterson a demonstrat [11] următoarea lemă :

LEMA 1. *Un cod binar care este spaţiul ortogonal al spaţiului vectorial al lui H are toţi vectorii cod de pondere mai mare sau egală cu w_0, dacă şi numai dacă orice sistem de $w_0 - 1$ coloane ale lui H este liniar independent.*

Într-un sistem de comunicaţie se transmit totdeauna numai vectori cod dintr-un cod liniar. Pe canalul de transmisie intervin zgomote care fac să recepţionăm un cuvînt oarecare din V_n, altul decît cel transmis. Pentru detectarea şi corectarea erorilor se construiesc codurile corectoare de erori. Un cod liniar $V_{n,k}$ se numeşte *corector de t erori* dacă oricare ar fi $\widetilde{\alpha}$ şi $\widetilde{\beta}$ din $V_{n,k}$ $(\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta})$, este adevărată inegalitatea :

$$\mathrm{d}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant 2t + 1. \tag{4}$$

Se verifică imediat că un cod liniar corector de t erori, în sensul definiţiei date, corectează un număr de t sau mai puţine erori, ceea ce justifică definiţia dată.

Hamming [9] a demonstrat următoarea lemă :

LEMA 2. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un cod liniar $V_{n,k}$ să fie corector de t erori este ca pentru orice $\widetilde{\alpha} \in V_n$, $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$, să avem :*

$$w(\widetilde{\alpha}) \geqslant 2t + 1. \tag{5}$$

§ 2. O CONDIŢIE NECESARĂ ŞI SUFICIENTĂ DE EXISTENŢĂ A CODURILOR LINIARE (n, k) CORECTOARE DE t ERORI

Vom spune că o matrice are *proprietatea* (P_{2t}) dacă oricare $2t$ coloane ale ei sînt liniar independente.

TEOREMA 1. *O condiţie necesară şi suficientă de existenţă a unui cod liniar (n, k) corector de t erori este existenţa unei matrici H de ordinul $(n - k) \times n$ şi rangul $n - k$, cu elemente din C_q, astfel încît H să aibă proprietatea (P_{2t}).*

Necesitatea. Presupunem că există un cod liniar (n, k) corector de t erori. Fie H matricea control de paritate a codului liniar (n, k). Ea va avea ordinul $(n - k) \times n$ şi rangul $n - k$. Deoarece codul liniar considerat este corector de t erori, ponderea oricărui vector cod nenul este mai mare sau egală cu $2t + 1$ (lema 2). Rezultă, aplicînd lema 1, că orice combinaţie de $2t$ coloane ale lui H este liniar independentă, deci H are proprietatea (P_{2t}). Matricea căutată este H.

Suficiența. Presupunem că există o matrice H de ordinul $(n-k)\times n$ și rangul $n-k$, cu proprietatea (P_{2t}). Putem considera că H este matricea control de paritate a unui cod liniar (n, k) și aplicînd lema 1 rezultă că toți vectorii cod vor avea ponderea mai mare sau egală cu $2t+1$, deci codul liniar (n, k) va fi corector de t erori.

COROLAR. *Existența unui cod liniar (n, k) corector de t erori implică existența unui cod liniar $(n-c, k-c)$, corector de t erori, unde $0 < c < k$.*

Demonstrație. Presupunem că există un cod liniar (n, k) corector de t erori, deci (teorema I) există o matrice H de ordinul $(n-k)\times n$ și rangul $n-k$ cu proprietatea (P_{2t}). Dacă din matricea H tăiem c coloane, matricea H' rămasă are ordinul $[(n-c)-(k-c)]\times(n-c)$, rangul $n-k=(n-c)-(k-c)$ și proprietatea (P_{2t}). Aplicînd teorema 1 rezultă că există un cod liniar $(n-c, k-c)$ corector de t erori.

§ 3. REPREZENTAREA MODULARĂ A CODURILOR LINIARE. FORMULAREA UNEI PROBLEME AUXILIARE

Fie dat un cod liniar $V_{n,k}$ printr-o listă a tuturor celor q^k-1 vectori cod nenuli ai lui, așezați unul sub altul într-o ordine arbitrară, dar fixată:

$$\begin{gathered}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})\\ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (a_{q^k-1,1}, a_{q^k-1,2}, \ldots, a_{q^k-1,n}).\end{gathered} \tag{6}$$

Orice matrice generatoare G a lui $V_{n,k}$ va avea k linii, deci fiecare coloană a ei va fi un vector cu k componente. Există q^k-1 vectori nenuli, distincți, cu k componente (peste C_q). Vom considera o matrice M care are acești vectori drept coloane. Matricea M are ordinul $k\times(q^k-1)$. Observăm că matricea M^TG are ca linii toate combinațiile liniare posibile, nenule, ale liniilor lui G, deci toți vectorii cod ai codului liniar considerat. Fie matricea C de ordinul $(q^k-1)\times(q^k-1)$, definită astfel: $C=M^T\cdot M$. Se vede că matricea C este simetrică și are ca linii (coloane) toate combinațiile liniare posibile, de linii ale lui M, deci toți vectorii posibili, nenuli și diferiți, de lungime q^k-1. Deci orice coloană

$$\begin{pmatrix} a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{q^k-1,i}\end{pmatrix}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

care apare în (6) se va afla printre coloanele lui C. Vom numi *reprezentare modulară* a unui cod liniar $V_{n,k}$, un vector format din q^k-1 numere naturale:

$$N_{q^k-1}=(n_1, n_2, \ldots, n_{q^k-1})$$

astfel încît n_i să arate de cîte ori coloana i din C apare în (6). Se observă că

$$\sum_{i=1}^{q^k-1} n_i = n.$$

Pentru a da o nouă condiţie necesară şi suficientă de existenţă a codurilor grup (n, k) corectoare de t erori, vom expune un rezultat al lui Demidovici cu privire la existenţa codurilor grup de dimensiune k dată, care să admită un vector dat ca vector al ponderilor.

Orice cod liniar de dimensiune k conţine $q^k - 1$ vectori cod nenuli. Fie $w_1, w_2, \ldots, w_{q^k-1}$ ponderile vectorilor cod. Fiecărui cod liniar de dimensiune k îi corespunde un vector al ponderilor W_{q^k-1}. Se pune problema inversă : fiind dat un vector W_{q^k-1}, cu $q^k{}_{-1}$ componente întregi, pozitive, există un cod liniar de dimensiune k, pentru care vectorul dat este vectorul ponderilor?

Demidovici a rezolvat această problemă pentru cazul binar, adică pentru $q = 2$, stabilind următoarele rezultate :

LEMA 3. *Fie un cod grup de dimensiune k, reprezentarea lui modulară N_{2^k-1}, vectorul ponderilor acestui cod grup W_{2^k-1}, şi matricea C definită anterior. Atunci*

$$W_{2^k-1} = N_{2^k-1} \cdot C_{2^k-1}. \tag{7}$$

LEMA 4. *Fiind dat un vector W_{2^k-1} cu $2^k - 1$ componente întregi, pozitive, condiţia necesară şi suficientă ca să existe un cod grup de dimensiune k, astfel încît să admită pe W_{2^k-1} ca vector al ponderilor, este ca sistemul* (7) *să admită cel puţin o soluţie $(n_1, \ldots, n_{2^k-1})$, reprezentînd un ansamblu de numere întregi, nenegative.*

LEMA 5. *Pentru orice vector W_{2^k-1} cu $2^k - 1$ componente, sistemul* (7) *admite soluţia unică*

$$N_{2^k-1} = W_{2^k-1} \cdot C_{2^k-1}^{-1}. \tag{8}$$

În general, nu toate componentele acestei soluţii sînt numere întregi nenegative.

§ 4. ALTĂ CONDIŢIE NECESARĂ ŞI SUFICIENTĂ DE EXISTENŢĂ A CODURILOR GRUP (n, k) CORECTOARE DE t ERORI

Din răspunsul dat de Demidovici problemei expuse anterior, decurge următoarea teoremă, care dă o altă condiţie necesară şi suficientă de existenţă a unui cod grup (n, k) corector de t erori.

Fie daţi n, k şi t, astfel încît $k \leqslant n$, $2t + 1 \leqslant n$. C este matricea definită în § 3.

TEOREMA 2. *O condiţie necesară şi suficientă de existenţă a unui cod grup (n, k) corector de t erori este existenţa unui vector $W_{2^k-1} = (w_1, \ldots, w_{2^k-1})$ cu toate componentele întregi, pozitive, $w_i \geqslant 2t + 1$, $w_i \leqslant n$ pentru orice i, astfel încît componentele vectorului $N_{2^k-1} = W_{2^k-1} \cdot C_{2^k-1}^{-1}$ să fie întregi, nenegative şi $\sum n_i = n$.*

Necesitatea. Presupunem că există un cod grup (n, k) corector de t erori. Fie W_{2^k-1} vectorul ponderilor și N_{2^k-1} reprezentarea modulară a codului grup. Acești doi vectori îndeplinesc condițiile teoremei (lema 5).

Suficiența. Presupunem că există un vector W_{2^k-1} cu $2^k - 1$ componente întregi, pozitive $w_i \geqslant 2t + 1$ și $w \leqslant n$, astfel încît componentele vectorului N_{2^k-1}:

$$N_{2^k-1} = W_{2^k-1} \cdot C_{2^k-1}^{-1}$$

să fie întregi nenegative și $\sum\limits_{i=1}^{2^k-1} n_i = n$. Sînt îndeplinite condiţiile lemei 4 şi deci există un cod grup de dimensiune k, astfel încît W_{2^k-1} este vectorul ponderilor acestui cod grup. Lungimea codului grup este n. Într-adevăr, dacă lungimea ar fi $n' \neq n$, atunci $\sum n_i = n' \neq n$, ceea ce este absurd. Deci codul grup este (n, k). În plus, pentru că $w_i \geqslant 2t + 1$, oricare ar fi i, codul este corector de t erori (lema 2).

Primită la redacţie la 5 februarie 1965

Institutul de construcţii, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Bose, D. K. Chaudhuri, *On a Class of Error Correcting Binary Group Codes.* Inf and Control, **3**, 68—79 (1960).
2. R. C. Bose, D. K. Chaudhuri, *Further Results on Error Correcting Binary Group Codes.* Inf. and Control **3**, 279—290 (1960).
3. A. Deleanu, *Asupra codurilor grupale nebinare corectoare de erori.* Probl. de automatizare (1962).
4. A. Deleanu, *Asupra codurilor autodetectoare și autocorectoare de erori.* Probl. de automatizare (1960).
5. Н. Б. Демидович, *К теории групповых кодов.* Проблемы кибернетики, **5**, 105—123 (1961).
6. D. Gorenstein, W. Peterson, N. Zierler, *Two Error Correcting Bose-Chaudhuri Codes are Quasi-Perfect.* Inf. and Control, **3**, 291—294 (1960).
7. D. Gorenstein, N. Zierler, *A Class of Error Correcting Codes in p^m Symols.* J. Soc. Industr. and Appl. Math, **9**, 207—214 (1961).
8. J. H. Greismer, *A Bound for Error-Correcting Codes* (1960).
9. E. W. Hamming, *Error Detecting and Error Correcting Codes.* The Bell System Tech. J., **26**, 2, 147 (1950).
10. A. Г. Курош, *Курс высшей алгебры.* Москва, 1953, /p. 129—130.
11. W. Peterson, *Error Correcting Codes.* M.I.T. Press and Wiley, New-York, 1961.
12. W. Peterson, *Encoding and Error-Correcting Procedures for the Bose-Chaudhuri Codes* IRE Transf. on Inf. Theory, **6**, 459—470 (1960).
13. I. S. Reed, G. Solomon, *Polynomial Codes over Certain Finite Fields.* J. Soc. Industr. and Appl. Math., **8**, 300—304 (1960).

ASUPRA UNEI ECUAȚII SPINORIALE CU 4 COMPONENTE PENTRU NEUTRINO ÎN PREZENȚA GRAVITAȚIEI, ÎN CAZUL UNEI CONEXIUNI DE SPIN NELOCALE*)

DE

T. TORÓ

Se consideră ecuația neutrinului cu 4 componente în teoria relativității generalizate. Folosind noțiunea de conexiune afină de spin nelocală și parțial locală, introdusă în lucrarea [6], se scrie ecuația neutrinului în cîmp gravitațional cînd există o conexiune de spin nelocală. Ecuațiile obținute, (9) și (11), sînt ecuații integro-diferențiale.

1. INTRODUCERE

În ultimul timp au apărut o serie de lucrări în care se studiază interacțiunea cîmpului gravitațional cu cîmpul neutrinic [1]—[4] și legătura posibilă între structura spațiului-timp la distanțe foarte mici și interacțiunile slabe [5]. În cele mai multe din aceste materiale se folosește ecuația spionorială de tip Dirac fără masă de repaus în cazul unei conexiuni de spin locale. În lucrarea de față vom stabili ecuația cîmpului neutrinic în interacțiune cu cîmpul gravitațional atunci cînd există o conexiune de spin nelocală și parțială locală.

2. ECUAȚIA SPINORIALĂ GENERAL-COVARIANTĂ PENTRU NEUTRINO

Pentru a scrie ecuația neutrinului în prezența cîmpului gravitațional vom folosi derivata covariantă a spinorului în sensul lui Fock-Ivanenko-Weyl [7] în felul următor :

$$\nabla_\mu \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \Gamma_\mu \Psi. \tag{1}$$

Coeficienții de conexiune de spin sau coeficienții lui Fock-Ivanenko

---

*) Apărut în versiune engleză în „Il Nuovo Cimento", 34, 1931 (1964).

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 6, p. 939–942, BUCUREȘTI, 1965

sînt determinați de tensorul metric fundamental al cîmpului gravitațional $q_{\mu\nu}$ și de matricile lui Dirac generalizate γ_μ. Aceste matrici în cazul existenței cîmpului gravitațional nu mai sînt constante, ci sînt funcții de coordonatele 4-dimensionale x_μ, $\gamma_\mu = \gamma_\mu(x_\mu)$.

Prin matricile $\gamma_\mu = \gamma_\mu(x_\mu)$ se exprimă legătura fundamentală dintre spațiu și spin. Ele satisfac în fiecare punct al spațiului următoarea relație de anticomutare :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\, g_{\mu\nu} \cdot 1, \tag{2}$$

unde 1 este matricea unitate.

Relația de legătură între Γ_μ, $g_{\mu\nu}$ și γ_ν se poate scrie astfel [1]

$$\frac{\partial \gamma_\nu}{\partial x_\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\gamma_\lambda + [\Gamma_\mu, \gamma_\nu], \tag{3}$$

cu

$$[\Gamma_\mu, \gamma_\nu] \equiv \Gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\Gamma_\mu$$

și unde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sînt simbolurile lui Christoffel de speța a doua :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right).$$

Folosind relația (3), coeficienții de conexiune de spin Γ_μ se pot determina cu aproximația unui termen aditiv [8], [1]. Dacă de exemplu se folosește formalismul ,,Vierbein'' [7], soluția exactă a ecuației (3) se poate pune sub forma [1], [9]

$$\Gamma_k = \frac{1}{4} g_{\mu\alpha}\left[\frac{\partial b^\beta_\nu}{\partial x^k} a^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\nu k}\right] S^{\mu\nu} + a_k \cdot 1, \tag{4}$$

unde a_k sînt niște constante arbitrare.

Cu ajutorul derivatei covariante a spinorului definită mai sus vom scrie ecuația spinorială pentru neutrino în prezența gravitației în felul următor :

$$\gamma_\mu \nabla_\mu \Psi = \gamma_\mu\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \Gamma_\mu\right)\Psi = 0. \tag{5}$$

În această ecuație coeficienții de conexiune afină de spin Fock-Ivanenko depind de punct, $\Gamma_\mu = \Gamma_\mu(x_\mu)$, deci astfel conexiunea de spin se numește *locală*.

5. DERIVATA COVARIANTĂ A SPINORULUI ÎN CAZUL CONEXIUNII DE SPIN NELOCALE ȘI PARȚIAL-LOCALE

Derivata covariantă a spinorului în cazul conexiunii de spin nelocale a fost introdusă în lucrarea [6] în felul următor :

$$\nabla_\mu \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \int T_\mu(x, \xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

unde $T_\mu(x, \xi)$ generalizează coeficienţii lui Fock-Ivanenko pentru cazul nelocal. Într-adevăr, coeficienţii T_μ depind acum de perechea de puncte x_μ şi ξ_μ, punctul ξ_μ descriind tot spaţiul. Integrala în (6) este extinsă asupra întregului spaţiu.

Dacă coeficienţii T_μ au forma

$$T_\mu(x, \xi) = \Gamma_\mu(x)\, \delta(x - \xi) + K_\mu(x, \xi). \tag{7}$$

unde $\delta(x - \xi)$ este cunoscuta funcţie δ a lui Dirac, conexiunea de spin se numeşte *parţial-locală*. Se vede că acest fel de conexiune este caracterizată prin mărimile $K_\mu(x, \xi)$.

În cazul conexiunii de spin parţial-locale, derivata covariantă a spinorului devine

$$\nabla_\mu \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \Gamma_\mu(x)\, \Psi - \int K_\mu(x, \xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

4. ECUAŢIA RELATIVISTĂ PENTRU NEUTRINO ÎN CAZUL CONEXIUNII DE SPIN NELOCALE ŞI PARŢIAL LOCALE

Vom trece acum la stabilirea ecuaţiei spinoriale cu 4 componente a neutrinului în prezenţa gravitaţiei, în cazul unei conexiuni de spin nelocale. Pentru aceasta vom folosi expresia (6) a derivatei covariante pe care combinînd-o cu (5) vom obţine

$$\gamma_\mu \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \int T_\mu(x, \xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi\right] = 0. \tag{9}$$

Se poate observa că dacă coeficienţii $T_\mu(x, \xi)$ vor fi de forma

$$T_\mu(x, \xi) = \Gamma_\mu(x)\, \delta(x - \xi) \tag{10}$$

şi folosind proprietăţile fundamentale ale funcţiei δ a lui Dirac din (9) se găseşte ecuaţia neutrinului în cazul conexiunii de spin locale (5).

Cînd avem o conexiune de spin parţial-locală pentru ecuaţia neutrinului în interacţiune cu cîmpul gravitaţional, vom obţine expresia

$$\gamma_\mu \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \Gamma_\mu(x)\, \Psi - \int K_\mu(x, \xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi\right] = 0. \tag{11}$$

Dacă $K_\mu(x, \xi) = 0$, din ecuaţia (11) se obţine iarăşi (5).

Se vede că ecuaţiile neutrinului (9) şi (11) în prezenţa gravitaţiei, în cazul conexiunii de spin nelocale şi parţial locale, sînt nişte ecuaţii integro-diferenţiale.

Aceste ecuaţii se pot obţine şi cu ajutorul principiului variaţional dintr-un Langrangean corespunzător ales.

Într-adevăr, ecuaţia (9) va rezulta dintr-un Langrangean nelocal de forma

$$\mathfrak{L}_1 = \overline{\Psi}\, \gamma_\mu \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \int T_\mu(x, \xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi\right]. \tag{12}$$

În cazul conexiunii de spin parţial-locale, ecuaţia (11) se poate deduce din Langrangeanul următor:

$$\mathfrak{L}_2 = \overline{\Psi}\gamma_\mu\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} - \Gamma_\mu(x)\,\Psi - \int K_\mu(x,\xi)\,\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] \tag{13}$$

Primită la redacţie la 20 februarie 1965.

Universitatea din Timişoara
Facultatea de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. D. Brill, J. Wheeler, *Interaction of Neutrino with Gravitational Field*, Rev. Mod. Phys. ,, **29**, 465—479 (1957). J. Wheeler, *Neutrinos Gravitation and Geometry*. Bologna, 1960.
2. T. W. B. Kibble, *Canonical variables for the interacting gravitational and Dirac fields*. Journ. of Math. Phys., **4**, 1433—1437 (1963).
3. A. Peres, *Spinor Field in Generally Covariant Theories*. Suppl. Nuovo Cimento, **24**, *2*, 389—452 (1962).

   A. Peres, *Polynomial Expansion of Gravitational Lagrangian*. Nuovo Cimento, **28**, 865—867 (1963).

   A. Peres, *Gyro-Gravitational Ratio of Dirac* Particles. Nuovo Cimento, **28**, 1091—1092 (1963).
4. A. Lichnerowicz, *Champ de Dirac, champ du neutrino et transformation C, P, T, sur un espace — temps courbe*. Ann. Inst. Henri Poincaré, **I**, *3*, 323—290 (1964).
5. B. A. Arbuzov, *On the Possibility of a Geometrical Interpretation of Weak Lepton Interactions*. Preprint JINR-Dubna P-1392 (1963), JETF **46**, 1285—1294 (1964).
6. T. Toró, *Sur une généralisation de la connexion de spin pour le cas non local*. C.R. Acad. Sci. Paris, **259**, 307—309 (1964).
7. V. Fock, *Sur les équations de Dirac dans la théorie de relativité générale*. C.R. Acad. Sci. Paris, **189**, 25—28 (1929).

   V. Fock, D. D. Iwanenko, *Géométrie quantique linéaire et deplacement parallèle*. C.R. Acad. Sci. Paris, **188**, 1470—1472 (1929).

   V. Fock, *L'equation d'onde de Dirac et la géometrie de Riemann*. Journ de Phys. Radium, **10**, 392—405 (1929).

   H. Weyl, *Elektron und Gravitation*. Zs. f. Phys., **56**, 330—352 (1929).

   H. Weyl, *Gravitation and the Electron*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **15**, 323—334 (1929).
8. Kita H., *Some Considerations on a Nonlinear Field Theory*. Progr. of Theor. Phys. Suppl, **9**, 5—20 (1959).
9. V. Bargmann, *Bemerkungen zur allgemeinrelatiwistischen Fassung der Quantenthorie*. Sitzber. preuss. Acad. Wiss Phys. Math. Klasse, Berlin, 346—354 (1932).

ASUPRA ALGEBRELOR DE FUNCȚII LIPSCHITZIENE. II

DE

VASILE I. ISTRĂȚESCU

Să considerăm algebra $C(\Gamma)$ a funcțiilor continue complexe definite pe cercul $\Gamma = \{z, |z| = 1\}$ și A subalgebra de funcții pentru care

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{in\theta}\, d\theta = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

J. Wermer [1] a demonstrat că A este algebră maximală în sensul că, pentru orice $f \overline{\in} A$, algebra $\{A, f\} = C(\Gamma)$. În cele ce urmează stabilim o teoremă de acest tip pentru funcții analitice care sînt și lipschitziene. Se continuă lucrarea [2].

Vom nota cu $C^{\alpha}(\Gamma)$ algebra funcțiilor continue pe Γ pentru care

$$m(f) = \sup_{\substack{z_1 \neq z_2 \\ z_1, z_2 \in \Gamma}} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_1 - z_2)^{\alpha}} \right| < \infty, \tag{2}$$

normată cu

$$\|f\|_{\alpha} = \max \{\sup_{z \in \Gamma} |f(z)|,\ m(f)\},$$

cu $C_0^{\alpha}(\Gamma)$ subalgebra pentru care

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_1 - z_2)^{\alpha}} \right| \to 0 \qquad \text{pentru } z_1 \to z_2$$

și prin $A_0^{\alpha}(\Gamma)$ subalgebra $A \cap C_0^{\alpha}(\Gamma)$. Are loc următoarea

TEOREMĂ. *Algebra* $A_0^{\alpha}(\Gamma)$ *este maximală în* $C_0^{\alpha}(\Gamma)$.

Demonstrația acestei teoreme va rezulta din cîteva propoziții ajutătoare.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 6, P. 943–946, BUCUREȘTI, 1965

PROPOZIȚIA 1 (analogul teoremei lui Féjer). *Pentru orice funcție* $f \in C_0^\alpha(\Gamma)$ *sumele Césaro satisfac relația*

$$\lim_{n\to\infty} \| \sigma_n(f) - f \|_\alpha = 0.$$

Demonstrație. Ținînd seama de teorema lui Féjer va fi suficient să demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty} m\,(\sigma_n(f) - f) = 0.$$

Cum

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

rezultă că

$$\left|\frac{\sigma_n(f)(x) - \sigma_n(f)(y)}{|x-y|^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x-t) - f(y-t)}{|x-y|^\alpha}\right| K_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant Mf(|x-y|),$$

unde $M(|x-y|) \to 0$ dacă $x \to y$. Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca Mf $(x-y) < \varepsilon$ pentru $|x-y| < \delta(\varepsilon)$. În acest caz avem

$$\left|\frac{\sigma_n(f)(x) - \sigma_n(f)(y) - (f(x) - f(y))}{|x-y|^\alpha}\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

dacă $|x-y| < \delta(\varepsilon)$. În caz contrar,

$$\left|\frac{\sigma_n(f)(x) - \sigma_n(f)(y) - (f(x) - f(y))}{|x-y|^\alpha}\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

pentru $n \geqslant N_\varepsilon$, astfel ca $|\sigma_n(f)(t) - f(t)| < \varepsilon\delta^\alpha_{(\varepsilon)}$ și propoziția este demonstrată.

Propoziția următoare se referă la structura dualului spațiului $C_0^\alpha(\Gamma)$. Pentru a o formula, considerăm spațiul local compact

$$\Gamma \cup \{(x,y)\quad 0 < |x-y| \leqslant 2 \quad x, y \in \Gamma\} = \Gamma \cup \Gamma_1.$$

PROPOZIȚIA 2. *Orice funcțională liniară pe* $C_0^\alpha(\Gamma)$ *este de forma*

$$F(f) = \int_\Gamma f(\theta)\,\mathrm{d}\mu(\theta) + \int_{\Gamma^1}\frac{f(\xi) - f(\eta)}{|\xi - \eta|^\alpha}\,\mathrm{d}\sigma(\xi, \eta)$$

și

$$\widetilde{\mu} = (\mu, \sigma), \quad \|F\| = \mathrm{var}\ \widetilde{\mu}.$$

Demonstrație [3]. Să considerăm spațiul Banach al funcțiilor continue pe $\Gamma \cup \Gamma_1$ de forma următoare:

$$h = h_1(t) \qquad \text{pentru } t \in \Gamma,$$

$$h = h_2(\xi, \eta) \text{ dacă } (\xi, \eta) \in \Gamma^1$$

normat în mod obișnuit. Dacă punem pentru orice $f \in C_0^\alpha(\Gamma)$,

$\tilde{f} = \left\{ f(\theta), \dfrac{f(\xi) - f(\eta)}{|\xi - \eta|^{\alpha}} \right\}$, obţinem faptul că $C_0^{\alpha}(\Gamma)$ este izomorf şi izometric cu un subspaţiu al spaţiului de mai sus. Dacă F este o funcţională liniară pe $C_0^{\alpha}(\Gamma)$, atunci ţinînd seamă de izometria de mai sus, cît şi de teorema lui Hahn-Banach şi teorema lui F. Riesz, rezultă că F este de forma indicată.

Trecem acum la demonstraţia teoremei. Fie B o subalgebră închisă a lui $C_0^{\alpha}(\Gamma)$ care conţine pe $A_0^{\alpha}(\Gamma)$. Definim un omomorfism al algebrei $A_0^{\alpha}(\Gamma)$ punînd

$$h(f) = f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Să presupunem că h nu admite o prelungire la un omomorfism al algebrei B. În acest caz în B nu există un omomorfism care să ducă funcţia z în zero, pentru că h este singurul care are această proprietate. De aici rezultă că z nu este în nici un ideal maximal şi deci $\bar{z} \in B$. Propoziţia 1 ne arată că $B = C_0^{\alpha}(\Gamma)$.

Cazul cînd h admite o prelungire h. Putem prelungi pe h la o funcţională pe $C_0^{\alpha}(\Gamma)$, deci

$$\tilde{h}(f) = \int f\, d\mu(\theta) + \int_{\Gamma^1} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{|\xi - \eta|^{\alpha}}\, d\sigma(\xi, \eta).$$

Însă $1 \in A \subset B$; rezultă că

$$1 = \int d\mu(\theta)$$

şi cum

$$1 = \operatorname{var} \tilde{\mu} = \operatorname{var}(\mu, \sigma) = \operatorname{var} \mu + \operatorname{var} \sigma,$$

rezultă că $\operatorname{var} \sigma = 0$ şi deci $\sigma = 0$. Deci

$$\tilde{h}(f) = \int f\, d\mu.$$

Funcţiile $z^n \in A \subset B$ şi deci pentru $f \in B$ avem

$$\tilde{h}(z^n f) = \tilde{h}(z^n)\, \tilde{h}(f) = h(z^n)\, h(f) = 0 \tag{3}$$

şi deoarece

$$\int e^{in\theta} d\mu(\theta) = \tilde{h}(z^n) = h(z^n) = 0,$$

rezultă că este o măsură analitică. Însă, se ştie că o măsură complexă ca variaţia totală 1 şi integrala 1 este pozitivă. De aici

$$d\mu = \frac{1}{2\pi}\, d\theta.$$

Relaţiile (3) arată că f este o funcţie analitică şi deci $B = A_0^{\alpha}(\Gamma)$ şi teorema e demonstrată.

Pentru a formula corolarul următor dăm următoarea

DEFINIŢIE [4]. *O subalgebră oarecare din* $C_0^{\alpha}(\Gamma)$ *este pervazivă dacă pentru orice submulţime închisă proprie* K *avem*

$$\overline{A}_K = C_0^{\alpha}(K),$$

adică pentru orice $f \in C_0^{\alpha}(K)$ *există* $f_n \in A$ *astfel ca*

$$\max\ \{\|f - f_n\|_K,\ m\,(f - f_n)_K\} \to 0,$$

unde

$$m\,(f)_K = \sup_{\substack{x,\, y \in K \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{(x - y)^{\alpha}} \right|.$$

COROLAR. *Algebra* $A_0^{\alpha}(\Gamma)$ *este pervazivă.*

Demonstraţie. Considerăm subalgebra B a funcţiilor din $C_0^{\alpha}(\Gamma)$, a căror restricţie la K este limită de polinoame în norma $C_0^{\alpha}(K)$; este evident că $B \supset A$ şi cum K este propriu iar $A_0^{\alpha}(\Gamma)$ maximală rezultă $B = C_0^{\alpha}(K)$.

Profesorul J. Wermer a remarcat că maximalitatea algebrei $A_0^{\alpha}(\Gamma)$ poate fi demonstrată cu ajutorul unei teoreme generale asupra algebrelor de funcţii de pe cercul unitate şi anume din lema [5].

În adevăr, propoziţia 1 arată că z şi $\frac{1}{z}$ generează pe $C_0^{\alpha}(\Gamma)$. Însă $C_0^{\alpha}(\Gamma)$ are spaţiul idealelor maximale egal cu Γ. Lema citată arată atunci că $A_0^{\alpha}(\Gamma)$ este maximală în $C_0^{\alpha}(\Gamma)$.

Primită la redacţie la 4 martie 1965

Institutul de matematică
al Academiei R.P.R.
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

J. WERMER, *On algebras of continuous functions.* Proc. AMS., **4** (1953).
V. ISTRĂŢESCU, *Asupra algebrelor de funcţii lipschitziene.* I. St. cerc. mat., **17**, *3* (1965).
K. de LEEUW, *Banach space of lipschitz functions.* Studia math. **XXI**, *1* (1961).
K. HOFFMAN, I. SINGER, *Maximal algebras of continuous functions.* Acta Math., **103** (1960).
J. WERMER, *On a subalgebra of L* (—∞, ∞). Amer. Journ. of Math., LXXXII, *1* (1960).

OBSERVAȚIE ASUPRA UNEI TEOREME A LUI WIELANDT

DE

VASILE I. ISTRĂȚESCU

În lucrare se dă demonstrația unei teoreme a lui D. Kleinecke (care generalizează teorema lui Wielandt) bazată pe proprietățile spectrelor elementelor unei algebre Banach, apoi se dă o generalizare a acestei teoreme.

1. Wielandt [1] a demonstrat următoarea teoremă : *pentru orice operatori liniari și mărginiți pe un spațiu Banach, relația*

$$ab - ba = e$$

(a, b — operatori, e — operatorul identic) nu poate avea loc.

I. Kaplansky a formulat următoarea ipoteză :

Dacă a, b sînt elemente ale unei algebre Banach, atunci elementul

$$q = ab - ba,$$

cînd $aq = qa$, are proprietatea

$$\lim \|q^n\|^{1/n} = 0.$$

D. Kleinecke [2] a arătat că această ipoteză este adevărată. Demonstrația dată de Kleinecke are un caracter pur algebric. În cele ce urmează vom arăta că această teoremă este o consecință simplă a proprietăților spectrelor elementelor unei algebre Banach.

2. Fie B o algebră Banach (în general necomutativă) cu element unitate, iar a și b două elemente ale sale.

Prin comutator al elementelor a și b se înțelege elementul

$$q = ab - ba.$$

Un element l se va numi nilpotent generalizat dacă

$$\lim_{n\to\infty} \|l^n\|^{1/n} = 0.$$

În acest caz teorema de mai sus poate fi formulată şi astfel.

TEOREMĂ. *Pentru oricare două elemente ale unei algebre Banach, dacă comutatorul q satisface relaţia*

$$aq = qa,$$

el este nilpotent generalizat.

Observaţie. Este evident că teorema de mai sus conţine ca un caz particular teorema lui Wielandt. Pentru a demonstra teorema dăm mai întîi o lemă care are şi interes în sine.

LEMĂ. *Dacă a, b, c sînt elemente ale algebrei Banach B şi 1-abc are invers (1 este elementul unitate al algebrei), atunci şi 1-abc are invers cînd $ab = ba$.*

Demonstraţie. Fie $z = (1\text{-}abc)^{-1}$ inversul elementul 1-abc. Vom arăta că inversul elementului (1-acb) este elementul $1+ac\ (1\text{-}abc)^{-1}b$. În adevăr

$$[1 + ac\ (1 - abc)^{-1}\ b]\ [1 - acb] = 1 - acb + ac\ (1 - abc)^{-1}\ b - ac$$
$$(1 - abc)^{-1}\ bacb = 1 - acb + ac\ [(1 - abc)^{-1}\ (1 - bac)\, b] = 1 -$$
$$- acb + acb = 1,$$

şi lema este demonstrată.

Din această lemă vom deduce informaţii asupra spectrelor unor elemente speciale ale algebrei.

Pentru orice element a al algebrei Banach notăm cu $\sigma(a)$ spectrul său.

Fie acum $1 \overline{\in} \sigma(abc)$. Din lemă deducem că $1 \overline{\in} \sigma(acb)$, dacă $ab = ba$. Analog deducem că $\alpha \neq 0$, $\alpha \overline{\in} \sigma(abc)$ ne dă că $\alpha \overline{\in} \sigma(acb)$. Din aceasta rezultă că mulţimile $\sigma(abc)$ şi $\sigma(acb)$ diferă doar cel mult prin numărul zero.

Demonstrăm acum

PROPOZIŢIA 1. *Pentru orice elemente a şi b, comutatorul q nu poate avea invers dacă $aq = qa$.*

Demonstraţie. Să presupunem că q are invers. Deci

$$aq^{-1} = q^{-1}\ a$$

şi avem relaţia

$$q^{-1}ab - q^{-1}ba = 1,$$

care ne dă

$$(q^{-1}ab) = (q^{-1}ba) + 1.$$

Dar după observaţia de mai sus, cele două mulţimi diferă cel mult prin numărul zero, şi am obţinut astfel o contradicţie şi propoziţia este demonstrată.

Putem presupune în cele ce urmează că $\|q\| < 1$. Este clar că aceasta nu restrînge generalitatea şi că pentru orice $\lambda_0 \neq 0$, elementul

$$(\lambda_0 - q)$$

are invers.

Din propoziţia de mai sus deducem că spectrul lui q este concentrat în punctul $z = 0$. Dar aceasta înseamnă că q este nilpotent generalizat şi teorema lui Kleinecke este demonstrată.

Observaţii. Definim comutatorul de ordin p (p întreg $\geqslant 1$) ca fiind elementul

$$q_p = ab^p - b^p a.$$

Dacă presupunem că $aq_p = q_p a$, atunci urmînd aceeaşi cale de demonstraţii ca în propoziţia 1 avem

PROPOZIŢIA 2. *Elementul* q_p *nu poate avea invers.*

Raţionînd mai departe deducem următoarea

TEOREMĂ. *Elementul* q_p *este nilpotent generalizat.*

Apare astfel naturală problema de a caracteriza elementele din algebra Banach B care sînt comutatori pentru o anumită pereche de elemente.

Primită la redacţie la 26 martie 1965

Institutul de matematică
al Academiei R.P.R.
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. K. HOFFMAN, *Fundamentals of Banach algebras.* Curitiba, 1962.
2. D. KLEINECKE, Proc. Amer. Math. Soc., **8**, *3* (1957).

CATEGORII CÎT

DE

C. BĂNICĂ şi N. POPESCU

Se prezintă una din cele mai importante noţiuni din teoria categoriilor şi anume cea de categorie cît. În capitolul I se dau cîteva noţiuni privind punctul de vedere al lui Ch. Ehresmann relativ la definiţia unei categorii. Capitolul II se ocupă cu ceea ce în esenţă este conceptul de categorie cît; aici se dau rezultatele generale, insistînd în special asupra adjuncţiei. Capitolul III redă destul de fidel unele rezultate recente din teoria categoriilor de fracţii, rezultate datorate în cea mai mare parte lui Pierre Gabriel. În sfîrşit, în capitolul IV se dă o formulă globală care tinde să cuprindă într-un tot unitar conceptele de bază din capitolele precedente. Deşi în acest domeniu se impune un studiu profund, ne-am mărginit să arătăm cum pe un concept general se reproduc fapte îndeobşte cunoscute.

CAPITOLUL I

CATEGORII. GENERALITĂŢI

1. Fie U un univers Grothendieck, suficient de larg. Toate categoriile cu care lucrăm sînt U-categorii sau U-categorii mici; acelaşi lucru se va presupune şi despre sistemele multiplicative, precategoriile etc. care apar în expunerea de faţă.

DEFINIŢIA 1. *Numim U-schemă, următorul concept: două clase M, O şi o aplicaţie $d : M \to O \times O$ astfel că $d^{-1}(A, B)$ este, pentru orice $(A, B) \in O \times O$, un element al lui U. Prin schemă vom înţelege o U-schemă.*

Notăm prin $\sum = (M, d, O)$ o schemă. Un morfism de scheme este prin definiţie un cuplu (f, g) format din două funcţii :

$$(f, g) : (M, d, O) \to (M', d', O')$$

$$f : M \to M', \quad g : O \to O',$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 6, P. 951–985, BUCUREŞTI, 1965

astfel că diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"'] & O \times O \arrow[d, "g \times g"] \\ M' \arrow[r, "d'"'] & O' \times O' \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Vom nota prin U^{Σ} categoria U-schemelor sau „categoria universală". Un rol important îl joacă aşa-zisele scheme U-mici, adică schemele pentru care O este un element al lui U. Vom nota prin U_{I}^{Σ} categoria lor.

DEFINIŢIA 2. *Fie C o clasă; numim lege de compoziţie (nu peste tot definită) pe C o aplicaţie k definită pe o subclasă $C \ast C$ a lui $C \times C$ cu valori în C. Tripletul $(C, C \ast C, k)$ se va numi o clasă multiplicativă. Morfismele de clase multiplicative se definesc în mod evident. Un element $e \in C$ se zice unitate, dacă din (f, e) $(e, g) \in C \ast C$, deducem $k(f, e) = f$, $k(e, g) = g$. Elementul $h \in C$ se zice idempotent, dacă $(h, h) \in C \ast C$ şi $k(h, h) = h \circ h = h$ (vom nota uneori $k(f, g) = f \circ g$ şi vom citi: f compus cu g; faptul că $(f, g) \in C \ast C$ se citeşte: f este compozabil cu g).*

Prin „subclasă multiplicativă" a unei clase multiplicative $(C, C \ast C, k)$ vom înţelege o subclasă $C_1 \subset C$, şi o submulţime $C_1 \ast C_1 \subset C_1 \times C_1$ cu $C_1 \ast C_1 = C_1 \times C_1 \cap C \ast C$ şi astfel că restricţia $k|_{C_1 \ast C_1}$ are imaginea în C_1.

Evident, putem vorbi de categoria claselor multiplicative şi de unele „operaţii" cu clase multiplicative, dar aceste fapte nu sînt importante pentru scopurile noastre.

DEFINIŢIA 3. *Fie $(C, C \ast C, k)$ o clasă multiplicativă; ea se numeşte graf multiplicativ dacă verifică următoarele axiome:*

G_1: Pentru orice $f \in C$ există două unităţi $\alpha(f)$, $\beta(f)$, cu $(f, \alpha(f))$, $(\beta(f), f) \in C \ast C$; $\alpha(f)$ se numeşte sursa lui f, iar $\beta(f)$ cosursa sau adresa lui f.

G_2: Dacă $g \circ f$ este definit, atunci $\alpha(g) = \beta(f)$, $\alpha(g \circ f) = \alpha(f)$, $\beta(g \circ f) = \beta(g)$.

PROPOZIŢIA 1.1. *Fie $(M, M \ast M, k)$ un graf. Atunci notînd cu O clasa unităţilor lui M şi cu eMe' toate elementele lui M cu $\alpha(f) = e$, $(\beta(f) = e'$, $e, e' \in O$, atunci există o schemă $\sum = (M, d, O)$ cu M, O astfel definite. Această schemă este unică*[1]).

Demonstraţie. Pentru demonstraţie este suficient să definim funcţia d, or acest fapt este imediat, deoarece $\bigcup\limits_{(e, e') \in O \times O} eMe' = M$ şi $d(f) = (\alpha(f)), (\beta(f))$.

Mai mult, se observă că schema pe care am definit-o are particularitatea că pentru orice element e, $\mathrm{d}^{-1}(e, e) \neq \emptyset$.

DEFINIŢIA 4. *Un graf multiplicativ $(M, M \ast M, k)$ se numeşte precategorie, dacă pentru orice 3 elemente $f, g, h \in M$ pentru care $h \circ (f \circ g)$ şi $(h \circ g) \circ f$ sînt definite, atunci ele sînt şi egale.*

---

[1]) Această schemă nu este neapărat o U-schemă.

Acest fapt exprimă asociativitatea „compunerii".

În sfîrşit, o precategorie este o categorie dacă şi numai dacă pentru orice g, f pentru care $\alpha(g) = \beta(f)$, $g \circ f$ este definită.

Dacă $(M, M \ast M, k)$, $(M', M' \ast M', k')$ sînt două grafuri multiplicative, atunci un morfism de grafuri multiplicative constă din următoarele : se dă o funcţie $\varphi : M \to M'$ astfel că $\varphi(f, g) \in M' \ast M'$, dacă $(f, g) \in M \ast \ast M$, şi în plus

a) diagrama

$$\begin{tikzcd}
M * M \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
M' * M' \arrow[r, "k'"] & M'
\end{tikzcd}$$

este comutativă ;

b) dacă $e \in M$ este unitate, atunci $\varphi(e)$ este unitate.

Dacă $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ sînt precategorii (categorii), atunci un morfism de „grafuri multiplicative" de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}'$ se numeşte prefunctor (respectiv functor).

Fie $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ precategorii (categorii) şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un prefunctor (functor). Notăm cu $T(\mathcal{C})$ „imaginea" lui T, care se defineşte în mod evident ca imaginea unei funcţii. $T(\mathcal{C})$ are în mod canonic structură de precategorie. Dacă $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ sînt categorii, nu neapărat şi $T(\mathcal{C})$ este. Aceasta se întîmplă cînd spre exemplu T este discernabil, adică dacă e, e' sînt două unităţi ale lui $\mathcal{C}$, astfel că $T(e) = T(e')$, se deduce $e = e'$.

Fie acum $\Sigma = (M, d, O)$ o schemă ; ca de obicei, vom nota cu O mulţimea vîrfurilor lui Σ, iar cu M ansamblul săgeţilor. Admitem că $d^{-1}(i, i)$ este nevidă pentru orice vîrf al schemei şi fie e_i un element fix în această mulţime. Vom construi pentru schema dată o categorie notată Σ^* şi numită categoria liberă generată de Σ. Pentru elementul $f \in M$ (sau săgeata f) notăm $d(f) = (i, j)$ şi vom numi cuplul (i, j) orientarea săgeţii f. Punem $i = \alpha(f)$, $j = \beta(f)$ şi le vom numi respectiv sursa şi cosursa săgeţii f. Fie acum $f_1, f_2, \ldots, f_n$ săgeţi din Σ, astfel că $\alpha(f_{i+1}) = \beta(f_i)$, $1 \leqslant \leqslant i \leqslant n - 1$. Spunem în acest caz că săgeţile date sînt „compozabile" şi ele generează un „lacet" sau o săgeată compusă. Vom nota $f_n f_{n-1} \ldots \ldots f_1$ această săgeată compusă. Numim compozabile două săgeţi compuse $f_n \ldots f_1$ şi $g_m \ldots g_1$ dacă $\alpha(f_1) = \beta(g_m)$. Notăm cu $f_n \ldots f_1 \cdot g_m \ldots g_1$ compunerea lor, care în mod evident este încă o săgeată compusă. Compunerea „lacet"-urilor este asociativă, fapt uşor de verificat. Vom nota cu $L(\Sigma)$ clasa multiplicativă ale cărei elemente sînt „lacet"-urile peste Σ şi pentru care „multiplicarea" (nu peste tot definită) este compunerea „lacet"-urilor. Pentru $f_n f_{n-1} \ldots f_1$ săgeată compusă peste Σ, vom numi pe $f_1, \ldots \ldots, f_n$ săgeţile „simple" din $f_n \ldots f_1$. O săgeată simplă f pentru care $\alpha(f) = \beta(f)$ se zice veritabilă dacă $f \neq e_{\alpha(f)}$. Orice săgeată f cu $\alpha(f) \neq \beta(f)$ este veritabilă. Numim scheletul unei săgeţi compuse $f \ldots f_1$ toate săgeţile simple $\{f_{i_1} \ldots f_{i_n}\}$ veritabile, care intră în constituirea lui $f_n \ldots f_1$. Introducem în clasa $L(\Sigma)$ următoarea relaţie : spunem că două săgeţi $f_n \ldots f_1$ şi $g_m \ldots g_1$ sînt echivalente, dacă ele au acelaşi schelet.

Relaţia introdusă este evident de echivalenţă. Dacă $f_n \ldots f_1 \sim g_n \ldots g_1$ şi $f'_{n_1} \ldots f'_1 \sim g'_{m_1} \ldots g'_1$ şi dacă $f_n \ldots f_1$ este compozabilă cu $f'_n, \ldots f'_1$, iar $g_m \ldots g_1$ cu $g'_{m_1}, \ldots g'_1$, atunci $f_n \ldots f_1 \circ f'_{n_1} \ldots f_1 \sim g_m \ldots g_1 \circ g'_{m_1} \ldots g'_1$, ceea ce ne spune că relaţia introdusă este compatibilă cu compunerea săgeţilor. Vom nota cu Σ^* clasa multiplicativă ,,cît'' ce se obţine din $L(\Sigma)$, factorizînd-o prin relaţia de echivalenţă introdusă. Vom numi elementele lui Σ^* săgeţi compuse pure. Evident, compunerea săgeţilor compuse pure este asociativă. Mai mult, e_i, pentru orice $i \in O$, este o unitate în $\sum$ şi orice săgeată simplă $f \in M$ este o săgeată pură pentru care $\alpha(f)$ şi $\beta(f)$ sînt unităţi. În sfîrşit putem uşor verifica că $\sum^*$ este o categorie.

Dacă $\Sigma = (M, d, O)$ este o schemă pentru care în general $d^{-1}(i, i)$ nu este nevid, atunci putem constitui o nouă schemă, adăugînd clasei M clasa M', formată din elemente e_i, indexate de vîrfurile i ale lui Σ pentru care $d^{-1}(i, i) = \theta$. Extinzînd un mod corespunzător funcţia d la $M \sqcup M'$, obţinem o nouă schemă $\Sigma_1 = (M_1, \mathrm{d}_1, O)$ cu proprietatea că $d_1^{-1}(i, i) \neq \emptyset$ pentru orice i. Σ_1 se zice completata lui Σ. Fără să restrîngem generalitatea, putem admite că lucrăm doar cu scheme ,,complete'', adică scheme care coincid cu completatele lor.

Admitem deci că toate schemele cu care lucrăm sînt complete şi că am marcat pentru orice vîrf i al schemei $\sum = (M, d, o)$ o săgeată e_i numită pseudounitate ; mai mult, admitem că morfismele de scheme complete sînt acelea care păstrează săgeţilor marcate, adică dacă $(f, g) : \sum \to \sum' = (M', d', O')$, atunci $f(e_i) = e_{g(i)}$. Pentru morfismul (f, g) de scheme complete deducem un morfism unic $L(f, g) : L(\Sigma) \to L(\Sigma')$ de clase multiplicative construite în mod canonic. Dacă $f_n \ldots f_1$ şi $g_m \ldots g_1$ sînt două săgeţi compuse din $L(\Sigma)$ ce au acelaşi schelet, atunci $L(f, g)(f_n \ldots f_1)$ şi $L(f, g)(g_m, \ldots, g_1)$ au încă acelaşi schelet. În concluzie, obţinem un functor $(f, g)^* : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ numit functorul asociat cu morfismul (f, g).

Evident, orice categorie $\mathcal{C}$ este şi o schemă ; unităţile ei sînt vîrfurile schemei ; morfismele categoriei joacă rolul de săgeţi ,,simple''. Pentru o schemă completă $\Sigma = (M, d, O)$ există un morfism de scheme complete $(u, v) : \Sigma \to \Sigma^*$ definit în mod canonic $V(i) = e_i$, pentru $i \in O$, şi $u(f) = f^*$, pentru orice săgeată $f \in M$. Fie $(f, g) : \Sigma = (M, d, O) \to \mathcal{C}$ un morfism de la schema Σ la schema subiacentă a categoriei $\mathcal{C}$. Definim un functor $(f, g)^* : \Sigma^* \to \mathcal{C}$ astfel : pentru săgeata compusă $f_n \ldots f_1$ din Σ^*, punem $(f, g)^*(f_n \ldots f_1) = f(f_n) \ldots f(f_1)$. E clar că pentru orice săgeată $f_i \in \Sigma$, $f(f_i)$ este un morfism în $\mathcal{C}$ şi deci $f(f_n) \ldots f(f_1)$ este un morfism în categoria $\mathcal{C}$ bine definit. $(f, g)^*$ păstrează în mod evident compunerea săgeţilor şi unităţile, deci este un functor. Mai mult, el este singurul functor ce face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[rr, "{(u,v)}"] \arrow[dr, "{(f,g)}"'] & & \Sigma^* \arrow[dl, "{(f,g)^*}"] \\
& \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

În sfîrşit am demonstrat

PROPOZIŢIA 2.1. *Fie* Σ *o schemă completă. Există o categorie* Σ^* *şi un morfism* $(u, v) : \Sigma \to \Sigma^*$ *de scheme marcate, astfel că pentru ori ce categorie* $\mathcal{C}$ *şi orice morfism* $(f, g) : \Sigma \to \mathcal{C}$ *de scheme marcate, există un unic functor* $(f, g)^* : \Sigma^* \to \mathcal{C}$, *cu* $(f, g)^* \circ (u, v) = (f, g)$.

Σ^* se va numi categoria liberă generată de Σ. Propoziţia de mai sus are următoarea interpretare : dacă notăm cu Cat (U) categoria U-categoriilor, atunci ,,functorul'' incluziune α : Cat $U \to U^{\Sigma}$ (categoria tuturor U-schemelor marcate şi morfism de scheme marcate) are un adjunct la stînga notat β, şi care asociază oricărei scheme categoria liberă Σ^*. Se poate uşor dovedi că functorul β este deplin fidel.

CAPITOLUL II

RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ SIMPLE ÎN CATEGORII

1. Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie. Admitem că pentru orice două obiecte (unităţi) X, Y ale lui C, s-a definit o relaţie de echivalenţă ${}_XR_Y$ pe mulţimea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Mai admitem că pentru $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, cu $f \sim g$ $({}_XR_Y)$ şi pentru $h : Z \to X$ $(h' : Y \to Z')$, $fh \sim gh$ $({}_ZR_Y)$ $h'f \sim h'g$ $({}_XR_{Z'})$. Vom spune în cazul acesta că pe $\mathcal{C}$ s-a dat o relaţie de echivalenţă simplă notată R. Vom scrie (dacă nu este pericol de confuzie) $f \sim g(R)$. Vom numi ,,pereche'' un cuplu format dintr-o categorie $\mathcal{C}$ şi o relaţie de echivalenţă R pe $\mathcal{C}$, simplă ; notăm cu $(\mathcal{C}, R)$ o pereche. Un morfism de la perechea : $(\mathcal{C}, R)$ la perechea $(\mathcal{C}', R')$ este prin definiţie un functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, astfel că dacă $f \sim g(R)$, atunci $T(f) \sim T(g)$ (R'). Notăm $\overline{(\text{Cat } U)}$ categoria perechilor de U-categorii şi relaţii de echivalenţă simple în care morfismele sînt cele mai sus definite. Există un functor h : Cat $U \to \overline{\text{Cat } U}$ ce asociază oricărei categorii $\mathcal{C}$, perechea $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, unde $\mathcal{J}$ reste relaţia de echivalenţă identică pe $\mathcal{C}$ $(f \sim g$ $(\mathcal{J})$, dacă şi numai dacă $f = g)$.

PROPOZIŢIA 2.1. *Functorul* h *admite un adjunct la stînga notat* k.

Demonstraţie. Fie $(\mathcal{C}, R)$ o pereche ; construim o nouă categorie notată $\mathcal{C}_R$ şi un functor $T_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_R$, astfel că pentru orice categorie $\mathcal{C}'$ şi orice functor $F : (\mathcal{C}, R) \to (\mathcal{C}', \mathcal{J})$ există un functor unic $F_R : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}'$ cu $F_R \circ T_R = F$. Obiectele lui $\mathcal{C}_R$ sînt prin definiţie obiectele lui $\mathcal{C}$. Dacă X este un obiect din $\mathcal{C}$, $T_R(X)$ este acelaşi obiect privit în $\mathcal{C}_R$. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_R}(T_R(X), T_R(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/{}_XR_Y$. Din cele presupuse despre R deducem că putem defini ,,compunerea morfismelor din $\mathcal{C}_R$ şi putem verifica că ea este categorie. Restul propoziţiei rezultă imediat. $\mathcal{C}_R$ se zice categorie ,,cît'' a lui $\mathcal{C}$ prin relaţie R.

În matematică există multe exemple de categorii şi relaţii de echivalenţă simple pe ele. Uneori trecînd la categoria cît obţinem o simplificare a lucrurilor. Iată cîteva exemple de categorii cît :

a) Fie U-(Top) sau simplu (Top) categoria spaţiilor topologice pentru care ansamblul subiacent este un element al lui U. Notăm cu

R relaţia de echivalentă dată de ,,omotopia'' aplicaţiilor continue. Este bine ştiut că R este o relaţie de echivalenţă simplă pe (Top). Categoria cît se notează cu $\mathcal{H}$ şi se zice categorie omotopică.

b) Fie $\mathcal{C}$ o categorie aditivă şi $\mathcal{C}_1$ categoria perechilor ; $\mathcal{C}_1$ este prin definiţie categorie ale cărei obiecte sînt triplete (X, f, Y) cu $f : X \to Y$ un morfism în categoria $\mathcal{C}$. Un morfism $(\alpha, \beta) : (X, f, Y) \to (X', f', Y')$ în $\mathcal{C}_1$ este o pereche de morfism $\alpha : X \to X'$ $\beta : Y \to Y'$ din categoria $\mathcal{C}$ astfel că $\beta f = f'\alpha$.

Vom spune că două morfisme (α, β) şi $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathrm{Hom}\, \mathcal{C}_1 ((X, f, Y), (X', f', Y'))$ sînt echivalente dacă există un morfism $\gamma : Y \to X'$ în $\mathcal{C}$ astfel ca diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha - \alpha_1"'] & Y \arrow[d, "\beta - \beta_1"] \arrow[dl, "\gamma"'] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Se verifică imediat că această relaţie este într-adevăr de echivalenţă ; ea se notează cu R_1. Categoria $\mathcal{C}_{R_1}$ se numeşte prima categorie derivată a lui $\mathcal{C}$; se mai notează $\mathcal{C}^1$. Se poate dovedi că dacă $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană, atunci şi $\mathcal{C}_1$ este. Analog, putem defini categoria $\mathcal{C}^2 \ldots \mathcal{C}^n \ldots$ printr-un procedeu de iterare, observînd că $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}^1$ sînt încă aditive.

c) Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi S un sistem multiplicativ de morfisme din $\mathcal{C}$ care conţine toate unităţile lui $\mathcal{C}$ (S se zice multiplicativ, dacă din $s_1\, s_2 \in S$, şi $s_1 \circ s_2$ există în $\mathcal{C}$, atunci $s_1 \circ s_2 \in S$). Mai admitem că S satisface şi următoarea condiţie :

✱) Pentru orice diagramă $A \xleftarrow{f} X \xrightarrow{s} B$ cu $s \in S$ există diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\
A \arrow[r, "s'"] & Y
\end{tikzcd}$$

cu $s' \in S$.

Introducem atunci în $\mathcal{C}$ relaţia de echivalenţă simplă $R : f \sim g\,(R)$ (evident $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (X, Y)$), dacă şi numai dacă există $s \in S$, cu $sf = sg$. Verificarea faptului că relaţia introdusă este de echivalenţă este imediată. Dacă notăm ca mai sus cu $T_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_R$ functorul canonic, atunci pentru orice $s \in S$, $T_R(s)$ este un monomorfism în $\mathcal{C}_R$.

Observaţie. Admitem că $\mathcal{C}$ este o categorie aditivă ; atunci relaţia R este compatibilă cu ,,adunarea'' morfismelor ; într-adevăr, fie $f \sim f'$

$g \sim g'$ (R), (morfisme de aceeași sursă și cosursă). Fie s, $s_1 \in S$ cu $sf = sf'$, $s_1 g = s_1 g'$. Există s', α cu $s' \in S$ și $\alpha s = s' s_1$. Atunci avem

$$s' s_1 (f + g) = s' s_1 f + s' s_1 g = \alpha s f + s' s_1 g = \alpha s f' + s' s_1 g' =$$
$$= s' s_1 (f' + g').$$

Concludem deci că categoria $\mathcal{C}_R$ este încă aditivă.

Exemplu. Fie A un inel cu unitate și S un sistem multiplicativ închis, care conține unitatea; dacă S satisface condiția a) de mai sus (sau A este comutativ, sau S este din centrul lui A), atunci relația R, definită de S, este chiar relația de echivalență dată de idealul format din elementele $a \in A$, pentru care există $s \in S$, cu $sa = 0$. Acest ideal $\mathfrak{n}$ este bilateral și $A_R = A/\mathfrak{n}$. În $A/\mathfrak{n}$ elementele din S devin regulate la dreapta.

d) Fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor; el definește în $\mathcal{C}$ următoarea relație de echivalență R : pentru f, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $f \sim g$ (R) dacă și numai dacă $F(f) = F(g)$. Dacă $T_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_R$ este functorul canonic, atunci există un functor unic $F_1 : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}'$ cu $F_1 \circ T_R = F \cdot F_1$ este un functor unic $F_1 : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}'$, cu $F_1 \circ T_R = F$; F_1 este un functor fidel.

e) Fie $\mathcal{C}$ o categorie și A un obiect al său; introducem în $\mathcal{C}$ următoarea relație de echivalență R : două morfisme f, $g : B \to C$ sînt echivalente dacă și numai dacă există două morfisme α, $\beta : B \to A$ și un morfism $\varphi : A \to C$ cu $\varphi\alpha = f$, $\varphi\beta = g$. Se vede imediat că R este relația de echivalență și că obiectul $T_R(A)$ este un obiect final al lui $\mathcal{C}_R$.

2. Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $\overline{\mathcal{C}}$ schema subiacentă a sa construită în mod canonic. Fie $\overline{\mathcal{C}}^*$ categoria liberă generată de $\overline{\mathcal{C}}$. Functorul identic al lui $\mathcal{C}$ definește un morfism de scheme marcate de la $\overline{\mathcal{C}}$ în categoria $\mathcal{C}$, care din cele anterioare se factorizează în mod unic printr-un functor $F : \overline{\mathcal{C}}^* \to \mathcal{C}$ (notăm cu $(u, v) : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}^*$ morfismul canonic de scheme marcate). Evident, notînd cu R relația de echivalență definită de F în $\overline{\mathcal{C}}^*$, se constată imediat că $\mathcal{C}$ este izomorfă cu $\overline{\mathcal{C}}^*_R$. În concluzie

PROPOZIȚIA 2.2 *Orice categorie este o categorie cît a unei categorii libere, printr-o relație de echivalență (pe care o vom numi canonică, cînd ne vom referi exact la* $\overline{\mathcal{C}}^*$*).*

Observație. Dacă categoria $\mathcal{C}$ este aditivă, atunci putem concepe că categoria $\overline{\mathcal{C}}^*$ este aditivă; mai precis, pentru orice X, $Y \in \mathrm{Ob}\, \overline{\mathcal{C}}^*$, notăm cu $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}_1^*}(X, Y)$ grupul abelian liber generat de $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}^*}(X, Y)$. Obținem o nouă categorie $\mathcal{C}_1$ aditivă. Există un functor $F_1 : \mathcal{C}_1^* \to \mathcal{C}$ care definește pe $\mathcal{C}$ ca o categorie cît a categoriei aditive $\overline{\mathcal{C}}_1^*$. Verificarea este simplă.

Fie din nou $\mathcal{C}$ o categorie și $\overline{\mathcal{C}}$ schema subiacentă; admitem că pentru orice vîrfuri X, Y ale lui $\overline{\mathcal{C}}$, adăugăm mulțimii $d^{-1}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ o nouă mulțime $P(X, Y)$, element al universului U. Obținem o nouă schemă pe care o vom nota $\overline{\mathcal{C}}(P)$. Considerăm morfismul $(f, g) : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}(P)$ de scheme definit în mod canonic și cu $(\alpha, \beta) : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$

morfismul de scheme marcate definit de functorul identic al lui $\mathcal{C}$($\mathcal{C}$ o privim simultan ca schemă şi ca o categorie). (f, g) induce un functor $(f, g)^* : \overline{\mathcal{C}}^* \to \overline{\mathcal{C}}(P)^*$. Considerăm acum perechile $(\overline{\mathcal{C}}^*, R_F)$ şi $(\overline{\mathcal{C}}(P)^*, R)$, unde R_F este relaţia de echivalenţă pe $\mathcal{C}^*$, indusă de functorul $F : \overline{\mathcal{C}}^* \to \mathcal{C}$, definit mai sus şi care defineşte pe $\mathcal{C}$ ca o categorie cît a lui $\overline{\mathcal{C}}^*$. Admitem că R a fost astfel aleasă pe $\overline{\mathcal{C}}(P)^*$, încît $(f, g)^*$ să fie un morfism de perechi. Atunci $(f, g)^*$ induce un functor canonic $P : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}(P)^*_R$, astfel că diagrama de categorii şi functori să fie comutativă :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{C}}^* \arrow[r, "(f,g)^*"] \arrow[d, "F"'] & \overline{\mathcal{C}}(P)^* \arrow[d, "T_R"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C}(P)^*_R
\end{tikzcd}$$

Considerăm pe categoria $\mathcal{C}$ o familie $\{R_i\}_{i \in I}$, unde I este un element al lui U, de relaţii de echivalenţă ; notăm $R = \bigcap R_i$ „intersecţia" relaţiilor de echivalenţă date ; două morfisme $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ se zic în relaţia R, dacă şi numai dacă $f \sim g\ (R_i)$ pentru orice $i \in I$. Putem deci vorbi de cea mai mică relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{C}$ care conţine anumite „relaţii" date între morfisme din $\mathcal{C}$. Mai precis, fie, pentru orice două obiecte X, Y din $\mathcal{C}$, date perechile de morfisme $f_\alpha, g_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\alpha \in T(X, Y)$. Există atunci o cea mai mică relaţie de echivalenţă R, astfel că $f_\alpha \sim g_\alpha\ (R)$. Mai întîi observăm că mulţimea relaţiilor de echivalenţă R', pentru care $f_\alpha \sim g_\alpha\ (R')$, nu este vidă, deoarece conţine cel puţin relaţia de echivalenţă „trivială" pentru care orice două morfisme sînt echivalente. R se va calcula deci ca intersecţia relaţiilor de echivalenţă R_i pentru care $f_\alpha \sim g_\alpha\ (R_i)$ pentru orice i şi α.

Ca o aplicaţie a acestor chestiuni şi a celor anterioare lor, considerăm următoarea situaţie : categoria $\mathcal{C}$ şi o familie P de morfisme ale sale $P = \bigcup_{X, Y \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}} P(X, Y)$, $P(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Fie o nouă mulţime P' echipotentă cu P şi definită de mulţimile $P'(X, Y) = P(X, Y)$. Considerăm schemele $\overline{\mathcal{C}}$, şi $\overline{\mathcal{C}}(P')$ şi morfismul canonic de scheme $(f, g) : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}(P')$. El induce functorul : $(f, g)^* : \overline{\mathcal{C}}^* \to \overline{\mathcal{C}}(P')^*$. Definim în $\overline{\mathcal{C}}^*$ relaţia de echivalenţă R, indusă de functorul canonic $F : \overline{\mathcal{C}}^* \to \mathcal{C}$ (F defineşte pe $\mathcal{C}$ ca o categorie cît prin această relaţie de echivalenţă). Notăm cu R_P relaţia de echivalenţă din $\overline{\mathcal{C}}(P')^*$ care este definită ca cea mai mică relaţie de echivalenţă pentru care avem

a) pentru orice două morfisme $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*}(X, Y)$, $(f, h)^*(\alpha) \sim (f, g)^*(\beta)\ (R_P)$, dacă $\alpha \sim \beta\ (R)$;

b) pentru orice $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ şi $u \in P(X, Y)$, $u' \in P(X, Y)$ (există evident $u' \in P'(Y, X)$ şi unic asociat cu el) cerem ca $uu' \sim 1_Y$, $u'u \sim 1_X\ (R_P)$.

În aceste condiții $(f, g)^*$ este un morfism între perechile $(\overline{\mathcal{C}}^*, R)$ și $(\overline{\mathcal{C}}(P')^*, R_P)$. În concluzie, avem diagrama comutativă unde $\overline{\mathcal{C}}_P$ este

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^* \arrow[r, "(f,g)^*"] \arrow[d, "F"'] & \overline{\mathcal{C}}(P')^* \arrow[d, "T_{R_P}"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "H_P"] & \mathcal{C}_P
\end{tikzcd}$$

categoria cît $\overline{\mathcal{C}}(P')^*/R_P$. Evident, că în categoria $\overline{\mathcal{C}}_P$ avem $T_{R_P}(u) \circ T_{R_P}(u') = 1_{T_{R_P}}(Y)$, $T_{R_P}(u') \circ T_{R_P}(u) = 1_{T_{R_P}}(X)$, ceea ce ne spune că $H_P(u)$ este inversabil pentru orice $u \in P$.

Am construit în felul acesta pentru un sistem P de morfisme din $\mathcal{C}$ o categorie notată $\mathcal{C}_P$ și un functor $H_P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_P$, astfel că pentru orice morfism $u \in P$, $H_P(u)$ este inversabil. Mai mult, fie $\mathcal{D}$ o categorie și $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor astfel că pentru orice $u \in P$, $S(u)$ este inversabil în $\mathcal{D}$. Notăm cu $\overline{\mathcal{D}}^*$ categoria liberă asociată lui $\mathcal{D}$ și $G : \overline{\mathcal{D}}^* \to \mathcal{D}$ functorul canonic ce definește pe $\mathcal{D}$ ca o categorie cît a lui $\mathcal{D}^*$. Functorul S induce un morfism de perechi S^* $(\overline{\mathcal{C}}^*, R) \to (\overline{\mathcal{D}}^*, R')$, unde R, R' sînt relațiile de echivalență definite pe $\overline{\mathcal{C}}^*$ și $\overline{\mathcal{D}}^*$ respectiv, de functorii canonici $F : \overline{\mathcal{C}}^* \to \mathcal{C}$, $G : \overline{\mathcal{D}}^* \to \mathcal{D}$. Definim și functorul

$$T^* : (\overline{\mathcal{C}}(P')^*, R_P) \to (\overline{\mathcal{D}}^*, R'),$$

astfel că $T^*(\alpha) = S^*(\alpha)$, dacă $\alpha = (f, g)^*(\beta)$, pentru α, β săgeți simple din $\overline{\mathcal{C}}$, $\overline{\mathcal{C}}(P')$ și $T(u') = S(u)^{-1}$, unde $u' \in P'$ și $u \in P$ este ,,asociata" ei prin regula de mai sus. Se deduce imediat că T^* este bine definit și unic cu proprietatea că $T^* \circ (f, g)^* = S^*$. T^* induce, trecînd la categoriile cît, un functor $T : \overline{\mathcal{C}}_P \to \mathcal{D}$, cu $S = T \circ H_P$. Evident T este unic. Fie $\mathcal{S}$ categoria formată din perechi $(\mathcal{C}, P)$ cu $\mathcal{C}$ categorie și P un sistem arbitrar de morfisme ale sale. Fie u : Cat $U \to \mathcal{S}$ functorul incluziune; u asociază oricărei categorii $\mathcal{C}$ perechea $(\mathcal{C}, I)$, unde I este formată din toate izomorfismele lui $\mathcal{C}$. Cele de mai sus arată că:

PROPOZIŢIA 2.3. *Functorul u are un adjunct la stînga notat v. Pentru orice obiect $(\mathcal{C}, P)$ din $\mathcal{S}$, notăm cu $\overline{\mathcal{C}}_P = v(\mathcal{C}, P)$ și vom numi această categorie, categoria de fracții a lui $\mathcal{C}$ relativ la sistemul de morfisme P.*

Matematica actuală pune multe probleme în care intervin categoriile de fracții; construcția de mai sus este însă prea rigidă și uneori neaplicabilă. Trebuie deci căutate criterii necesare și suficiente pentru a pune în evidență categoriile de fracții. Urmînd în deaproape ideile lui Pierre Gabriel, în capitolul III vom dezvolta chestiuni de această natură.

3. Fie $(\mathcal{C}', R')$ o pereche și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor. Notăm cu R'_T relația de echivalență indusă de R' și T pe $\mathcal{C}$; mai precis, pentru f, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ avem $f \sim g$ (R'_T), dacă și numai dacă $T(f) \sim T(g)$

(R'). T induce atunci un functor $T_1 : \mathcal{C}_{R'_T} \to \mathcal{C}'_{R'}$ definit în mod canonic, încît diagrama din Cat U

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_{R'_T}"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "T_{R'}"] \\
\mathcal{C}_{R'_T} \arrow[r, "T_1"] & \mathcal{C}'_R
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Admitem acum că T are un adjunct la dreapta notat S. El induce pe $\mathcal{C}'$ o relaţie de echivalenţă (graţie faptului că pe $\mathcal{C}$ avem relaţia de echivalenţă R'_T) notată R'_{TS}. Dacă $f', g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y')$, atunci $f' \sim g'$ (R_{TS}), dacă şi numai dacă $S(f') \sim S(g')$ (R'_T). Vom spune că R' este o relaţie de adjuncţie dacă şi numai dacă $R' \equiv R'_S$. În aceste condiţii avem

PROPOZIŢIA 2.4. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor şi S un adjunct al său la dreapta. Fie dată pe $\mathcal{C}'$ relaţia de echivalenţă R', care este o relaţie de adjuncţie. Dacă R_T este indusa ei pe $\mathcal{C}$, atunci functorul canonic T_1:* $\mathcal{C}_{R_T} \to \mathcal{C}'_{R'}$ are ca adjunct la dreapta $S_1 : \mathcal{C}'_{R'} \to \mathcal{C}_{R_T}$.

Invers, dacă $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to ST$, $\Phi : TS \to 1_{\mathcal{C}'}$ sînt două săgeţi de adjuncţie ale lui T cu S şi dacă $T_{R_T}(\Psi)$, $T_{R'}, (\Phi)$ sînt săgeţi de adjuncţie ale lui T_1 cu S_1, atunci R' este o relaţie de adjuncţie.

Demonstraţie. Pentru prima parte a propoziţiei observăm că dacă $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ şi $f \sim g\ (R'_T)$, atunci $T(f) \sim T(g)$ (R') şi deci $ST(f) \sim T(g)\ (R'_T)$, deci $T_{R'_T} \Psi$ este încă o săgeată de adjuncţie a lui T_1 cu S_1 etc.

Invers, fie $T_{R'_T}(\Psi)$ şi $T_{R'}(\Phi)$ săgeţi de adjuncţie ale lui T_1 cu S_1. Dacă $f', g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ şi dacă $f' \sim g'\ (R')$, atunci $TS(f') \sim TS(g')$ (R') şi deci $S(f') \sim S(g')\ (R'_T)$, deci $f' \sim g'\ (R'_{TS})$. Dacă $f' \sim g'\ (R'_{TS})$, atunci $S(f') \sim S(g')\ (R'_{TS})$. Dacă $f' \sim g'\ (R'_{TS})$, atunci $S(f') \sim S(g')\ (R'_T)$ şi deci $TS(f') \sim TS(g')$ (R'), adică $f' \sim g'\ (R')$. Deci cele două relaţii de echivalenţă coincid.

Dacă relaţia R' satisface condiţiile propoziţiei de mai sus, atunci ea se numeşte relaţie de adjuncţie. În aceste condiţii, functorii S şi T sînt compatibili cu relaţiile R' şi R_T (atunci $R' \equiv R'_{TS}$). Dar în acest caz (notînd în general R_{ST} relaţia pe $\mathcal{C}$ indusă de R'_{TS}) $R_{ST} = R_T$ şi deci R_T este de adjuncţie. Invers, dacă R_T este de adjuncţie, atunci $R_T = R_{ST}$ şi deci $R' \equiv R'_{TS}$. În concluzie,

PROPOZIŢIA 2.5. *Relaţia R' este de adjuncţie dacă şi numai dacă indusa sa R_T pe $\mathcal{C}$ este de adjuncţie.*

Observaţie. Acest criteriu de a pune în evidenţă dacă doi functori adjuncţie rămîn încă adjuncţi trecînd la categoriile cît respective ca mai sus, este foarte comod în practică.

Exemplu. Fie $\mathcal{C}'$ categoria spaţiilor topologice care au tipul de omotopie a unui C. W. complex şi $\mathcal{C}$ categoria complexelor semisimpliciale. Fie R' relaţia de echivalenţă omotopia şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ functorul realizare geometrică, iar S un adjunct la stînga al său (functorul complex singular). Se poate verifica că relaţia R' de omotopie, din $\mathcal{C}'$ este o relaţie de adjuncţie; într-adevăr, dacă f', $g' : X' \to Y'$ sînt două morfisme în $\mathcal{C}'$ şi dacă $f' \sim g'(R')$, atunci $TS(f') \sim TS\,(g')$ şi invers.

Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor şi S un adjunct al său la dreapta. Considerăm pe $\mathcal{C}$ dată o relaţie de echivalenţă R şi fie $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/_R$ functorul canonic. Ne interesează în ce condiţii functorul $H \circ S$ are un adjunct. Pentru aceasta fie $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to ST$ o săgeată de libertate (adjuncţie) a lui S cu T. Admitem că $H(\Psi) : 1_{\mathcal{C}/_R} \to HST$ rămîne încă o săgeată de libertate; aceasta se reduce la aceea că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi $g, f : X \to SY'$ din $g \sim f(R)$ deducem $Sf' \sim Sg'$ cu $Sf' \circ \Psi_X = f$, $Sg' \circ \Psi_X = g$. Cu alte cuvinte, dacă săgeata de libertate Ψ este compatibilă cu relaţia R, atunci functorul $H \circ S$ are adjunct la stînga.

Dacă $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, S, T sînt ca mai sus şi Ψ este o săgeată de pseudolibertate (adică pentru orice $f : X \to SY'$ există cel puţin un morfism: $f' : TX \to Y'$ cu $Sf' \circ \Psi_X = f$), iar R este o relaţie pe $\mathcal{C}$ cu proprietatea că dacă $Sf \circ \Psi_X = Sg' \circ \Psi_X$, atunci neapărat $Sf' \sim Sg'$; deci $H\,(\Psi)$ este în categoria $\mathcal{C}_R$ o săgeată de adjuncţie. Vom spune în cazul acesta că Ψ este o R-săgeată de libertate.

Exemplu. Dacă $\mathcal{C}'$ este o categorie de diagrame peste $\mathcal{C}$ şi $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un functor ($T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ functorul canonic de incluziune, care asociază oricărui obiect X din $\mathcal{C}$ diagrama constantă al cărei orice vîrf este X, şi orice săgeată este 1_X), iar $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to ST$ o R-săgeată de libertate, atunci deducem că C_R are Σ-conuri finale.

Fie R o relaţie simplă pe $\mathcal{C}$ şi $T_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_R$ functorul canonic:

PROPOZIŢIA 2.6. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

a) T_R *admite un adjunct la dreapta* S_R;

b) *pentru orice obiect* $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ *există un obiect* $Y' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_R$, $Y = T_R(Y')$ *astfel că* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X, Y)/_R \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_R}(T_R(X), Y)$, *unde* $\approx$ *înseamnă de fapt un izomorfism functorial*;

c) *pentru orice obiect* $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_R$, *există un obiect* $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ *şi un morfism* $\Psi_X : T_R X \to Y$ *de colibertate pentru* T_R (*adică pentru orice obiect* $T_R(Z)$ *şi orice morfism* $f : T_R(Z) \to Y$ *există un morfism unic*: $\alpha : Z \to X$ *cu* $\Psi_X \circ T_R(\alpha) = f$).

Demonstraţia acestor echivalenţe este imediată.

Exemple şi aplicaţii. Notăm cu (Top) categoria spaţiilor topologice al căror ansamblu subiacent este un element al lui U. Considerăm şi categoria P a „perechilor" peste (Top). Vom admite că lucrăm cu spaţii cu punct bază şi aplicaţiile sînt cele care păstrează punctul bază. Pentru $X \in \mathrm{Ob}$ (Top) notăm cu EX spaţiul $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(I, X)$, cu topologia compact-deschisă, I fiind segmentul [0, 1]. (Universul U se consideră suficient de larg, pentru a conţine puterea continuumului). Acest functor admite un adjunct la stînga, functorul C, care asociază oricărui spaţiu Y, conul

CY (în care generatoarea bază este strînsă la un punct). Adjuncţia acestor functori se stabileşte imediat. Dacă notăm cu $T : (\mathrm{Top}) \to \mathcal{P}$ functorul care asociază oricărui spaţiu X aplicaţia $P : EX \to X$, definită în mod canonic, $p_X(\alpha) = \alpha(1)$, unde $\alpha : I \to X$ ($\alpha(0) = x_0$, punctul bază al lui X). Acest functor are un adjunct la stînga notat C şi care asociază oricărui obiect $f : A \to B$ din $\mathcal{P}$, obiectul C_f(conul lui f) din (Top). Observăm că relaţia de omotopie este în categoria (Top) o relaţie de adjuncţie pentru functorii C şi E. Într-adevăr, dacă $f, g : A \to B$ şi, $f \sim g$ ($\sim$ înseamnă omotopia), atunci $C(f) \sim C(g)$, ceea ce rezultă imediat. De asemenea, $E(f) \to E(g)$ trecînd deci în categoria omotopică, vom avea $\pi(CX, Y) = \pi(X, EY)$[2].

Dacă notăm cu Ω, respectiv Σ functorii ,,lacet'' şi suspensie, definiţi în mod obişnuit, atunci incluziunea $\Omega \to E$ (care este de fapt functorială) şi surjecţia $C \overset{\beta}{\to} \Sigma$, de asemenea functorială, definesc izomorfismul functorial:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Sigma, ?) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(?, \Omega) \quad (*)$$

Cei doi functori Σ şi Ω sînt compatibili cu relaţia de omotopie şi izomorfismul functorial (*) induce în categoria omotopică izomorfismul functorial

$$\pi(\Sigma, ?) = \pi(?, \Omega).$$

Se poate dovedi că introducînd în $\mathcal{P}$ relaţia de omotopie în mod evident : (două aplicaţii (α, β), (α', β') $f \to g$ sînt omotope dacă şi numai dacă există o familie $(\alpha_i, \beta_i)_{i \in [0.1]}$ ce depinde continuu de i, în categoria $\mathcal{P}$ (adică $f\alpha_i = \beta_i g$ pentru orice i) astfel că $(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha, \beta)$ şi $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha', \beta')$) functorii T şi C sînt compatibili cu relaţiile de omotopie din cele două categorii, cu alte cuvinte

$$\pi(C_f, X) = \pi(f, PX).$$

Acest fapt justifică definirea grupurilor de omotopie ale aplicaţiei f, relativ la un spaţiu X, ca fiind grupurile de omotopie ale perechei (C_f, X).

4. Considerăm din nou o relaţie de echivalenţă simplă sau locală pe $\mathcal{C}$ şi $T_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_R$ functorul canonic. Atunci pentru orice categorie $\mathcal{X}$, T_R induce functorul $\overline{T}_R$: Fonct $(\mathcal{C}_R, \mathcal{X}) \to$ Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{X})$, obţinut prin compunerea cu T_R.

PROPOZIŢIA 2.7. *Functorul T_R este deplin fidel.*

Demonstraţie. Aceasta revine la a dovedi că pentru doi functori $F_1, F_2 : \mathcal{C}_R \to \mathcal{X}$ şi pentru orice două morfisme functoriale α, $\beta : F_1 \to F_2$ din $\alpha_{T_R} = \beta_{T_R}$ se deduce $\alpha = \beta$ şi încă, dacă $\gamma : F_1 \circ T_R \to F_2 \circ T_R$, atunci $\gamma = \alpha_{T_R}$, cu $\alpha : F_1 \to F_2$. Aceste fapte se obţin imediat ţinînd cont de aceea că orice obiect $\overline{X}$ din $\mathcal{C}_R$ este de forma $T_R X$ cu $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$.

---

[2] Cele două mulţimi sînt formate din cîte un punct.

Considerăm în particular cazul $\mathcal{X} = U$-Ens. Atunci T_R are un adjunct la stînga notat S_R. Dacă S_R comută cu limitele proiective finite, atunci R se numește o relație de echivalență plată. Deducem în acest caz că categoria Fonct $(\mathcal{C}_R^\circ$, Ens) (categoria de prefascicule) este o categorie de fascicule peste $\mathcal{C}$. Fie că în $\mathcal{C}$ produsele fibrate sînt reprezentabile și fie τ_R topologia pe $\mathcal{C}$ pentru care obiectele lui Fonct $(\mathcal{C}_R^\circ$, Ens) sînt fascicule. Dacă $C \to X$ este un ciur acoperitor în τ_R, atunci avem

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(C, F \circ T_R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F \circ T_R) = F \circ T_R(X)^3.$$

Aceasta revine la aceea că fasciculul asociat prefasciculului X cît și subprefasciculului C sînt unul și același, și anume un functor definit pe $\mathcal{C}_R$ cu valori în Ens.

Notînd $h : \mathcal{C} \to$ Fonct $(\mathcal{C}^\circ$, Ens) functorul canonic, se găsește că diagrama de categorii și functori

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "T_R"] \arrow[d] & \mathcal{C}_R \arrow[d] \\
\text{Fonct}(\mathcal{C}^\circ, \text{Ens}) \arrow[r, "\bar{S}_R"] & \text{Fonct}(\mathcal{C}_R^\circ, \text{Ens})
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

Cu alte cuvinte, pentru orice obiect $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, T_R(X)) = S_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, X)) = S_R(C).$$

Construcția functorului $S_R(C)$ este următoarea : fie $C = \varinjlim hX_i$; atunci notînd cu I_C diagrama asociată limitei inductive, și cu $P^C : I_C \to \mathcal{C}$ functorul, care asociază oricărui vîrf al diagramei reprezentantul său în $\mathcal{C}$, obținem o diagramă peste $\mathcal{C}$. Considerăm diagrama peste $\mathcal{C}_R^\wedge$, ale cărei vîrfuri sînt $h_{\mathcal{C}_R} \circ T_R \circ P^C \circ (I_C)$. Așadar, pentru orice obiect $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ avem

$$S_R(C)(Y) = \varinjlim (h_{\mathcal{C}_R}\, T_R \cdot P^C\, I_C)(T_R\, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_R}(T_R\, Y,\ T_R\, X).$$

Acest fapt arată că pentru orice obiect $Z \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și orice morfism $\alpha : Z \to X$, există un morfism $\beta : Z \to X$, care trece prin ciurul C și este echivalent cu α față de relația R.

---

[3] Notăm Fonct $(\mathcal{C}^\circ$, Ens) $= \mathcal{C}^\wedge$.

CAPITOLUL III

CATEGORII DE FRACŢII

Acest capitol este dedicat unei noţiuni foarte importante şi anume aceleia de categorie de fracţii.

1. În capitolul II am tranşat următoarea problemă. Dîndu-se o categorie $\mathcal{C}$ şi o familie S de morfisme din $\mathcal{C}$, am pus în evidenţă o categorie $\mathcal{C}_S$ şi un functor $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$, cu proprietatea că pentru orice categorie $\mathcal{D}$ şi orice functor $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, astfel că $H(s)$ este invertibilă pentru orice $s \in S$, există un functor unic $T : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ cu $H = T \circ P_S$. În cele ce urmează vom examina această problemă în unele cazuri particulare uşor de manevrat în aplicaţii.

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie* $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor adjunct la dreapta functorului* $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$; *fie* $\Phi : GD \to 1_{\mathcal{D}}$ *o săgeată de adjuncţie a lui* D *cu* G. *Fie* S *ansamblul săgeţilor* f *ale lui* $\mathcal{C}$ *pentru care* Gf *este invertibilă. Afirmaţiile următoare sînt echivalente*:

a) D *este deplin fidel*;

b) Φ *este un izomorfism*;

c) *functorul* $H : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$, *construit astfel că* $G = H \circ P_S$, *este o echivalenţă*;

d) *Pentru orice categorie* $\mathcal{X}$, *functorul* $\mathrm{Hom}\,(G, \mathcal{X}) : \mathrm{Hom}\,(\mathcal{D}, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ *este deplin fidel.*

Demonstraţie. Echivalenţa *a*) $\Leftrightarrow$ *b*) este clasică. Pentru demonstraţia ei folosim diagrama comutativă cu ajutorul căreia se construieşte funcţia

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, X') \arrow[r, "D(X,X')"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}\,(\Phi_X, X')"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(DX, DX') \arrow[d, "G(DX,DX')"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GDX, X') & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GDX, GDX') \arrow[l, "\mathrm{Hom}(GDX,\Phi_{X'})"']
\end{tikzcd}$$

de adjuncţie $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(?, D?) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(G?, ?)$, asociată cu Φ. Evident că $\mathrm{Hom}\,(GDX, \Phi_{X'}) \circ G(DX, DX') = \varphi\,(DX, X') : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(DX, DX') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(GDX, X')$ este bijectivă; deci $D(X, X')$ este bijecţie dacă şi numai dacă $\mathrm{Hom}\,(\Phi_X, X')$ este.

b) $\Rightarrow$ *c*). Considerăm în (Cat U) diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, shift left, "G"] \arrow[dr, "P_S"'] & & \mathcal{D} \arrow[ll, shift left, "D"] \\
& \mathcal{C}_S \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

Evident: $H \circ P_S = G$, deci $H \circ P_S \circ D \approx 1_{\mathcal{D}}$; rămîne să dovedim că $P_S \circ D \circ H$ este echivalent cu $1_{\mathcal{C}_S}$. Pentru demonstrație, dovedim că $(P_S D) H$. P_S este izomorf cu P_S și atunci, va rezulta, din faptul că în diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "P_S"] \arrow[dr, "P_S"'] & & \mathcal{C}_S \arrow[dl, "1_{\mathcal{C}}"] \\
& \mathcal{C}_S &
\end{tikzcd}$$

functorii $P_S \circ D \circ H$ și $1_{\mathcal{C}}$ fac același serviciu și deci, din cele demonstrate în capitolul II, ei sînt neapărat izomorfi.

Pentru a sfîrși însă demonstrația începută considerăm morfismul de adjuncție

$$\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to DG$$

cvasiinvers cu Φ. Din aceea că săgeata compusă

$$G \xrightarrow{G\Psi} GDG \xrightarrow{\Phi G} G$$

este săgeata identică a lui G, deducem, deoarece Φ_G este inversibilă, că $G\Psi$ este, și deci

$$(HP_S)\Psi : HP_S \to HP_S DHP_S$$

este izomorfism; dar H fiind deplin fidel se deduce că: $P_S \Psi : P_S \to P_S DHP_S$ este un izomorfism, ceea ce termină implicația $b) \Rightarrow c)$.

$c) \Rightarrow d)$ fapt care rezultă imediat, deoarece

$$\mathrm{Hom}\,(P_S, \mathcal{X}) : \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}_S, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}, \mathcal{X})$$

este deplin fidel și $\mathrm{Hom}\,(H, \mathcal{X}) : \mathrm{Hom}\,(\mathcal{D}, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}_S, \mathcal{X})$ este deplin fidel (deoarece H este echivalență) și deci și

$$\mathrm{Hom}\,(H \circ P_S, \mathcal{X}) : \mathrm{Hom}\,(\mathcal{D}, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}, \mathcal{X})$$

este deplin fidel.

În sfîrșit, pentru a dovedi incluziunea $d) \Rightarrow b)$ folosim următoarea

LEMĂ. *Considerăm în Cat U diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D}' \arrow[ll, "D"'] \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "P"'] &
\end{tikzcd}$$

și fie $\Phi : (FG)\, D \to 1_{\mathcal{D}'}$ *o săgeată de adjuncție a lui* D *cu* FG. *Dacă pentru orice categorie* $\mathcal{X}$, *functorul* $\mathrm{Hom}\,(G, \mathcal{X}) : \mathrm{Hom}\,(\mathcal{D}, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}, \mathcal{X})$ *este deplin fidel, atunci* Φ *este o săgeată de adjuncție a lui* GD *cu* F.

Demonstrație. Fie $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to D(FG)$ o săgeată de adjuncție cvasiinversă cu Φ. Avem și $G \xrightarrow{G\Psi} GD(FG)$. Dar functorul Hom $(G, ?)$ este deplin fidel (adică pentru orice doi functori $U, V : \mathcal{D} \to ?$ și orice morfism functorial $\alpha : U \circ G \to V \circ G$ există un morfism functorial unic $\beta : U \to V$ cu $\beta_G = \alpha$), deci există un morfism unic $\Psi' : 1_{\mathcal{D}} \to GDF$, cu $\Psi'_G = G\Psi$. Pentru a termina demonstrația, este suficient să dovedim că Ψ' și Φ sînt cvasiinverse una celeilalte. Pentru aceasta observăm că săgeata compusă

$$D \xrightarrow{\Psi D} DFGD \xrightarrow{D\Phi} D$$

dă prin multiplicare la stînga cu G, săgeata compusă

$$GD \xrightarrow{G\Psi_D} GDFGD \xrightarrow{GD\Phi} GD$$

Cum $D\Phi \circ \Psi_D = 1_D$, și deoarece $G\Psi = \Psi'_G$, deducem că $GD\Phi \circ G\Psi_D = G(D\Phi \circ \Psi_D) = GD\Phi \circ \Psi'_{GD} = 1_G$. Mai rămîne să dovedim că săgeata compusă

$$F \xrightarrow{F\Psi'} FGDF \xrightarrow{\Phi F} F$$

este săgeata identică a lui F și pentru aceasta este suficient de dovedit că săgeata compusă

$$FG \xrightarrow{F\Psi'_G} FGDFG \xrightarrow{\Phi FG} FG$$

este săgeata identică a lui FG. Dar avem $\Phi FG \circ F\Psi'_G = \Phi_{FG} \circ \Psi_{FG} = 1_{FG}$ Din aceea că Hom $(G, ?)$ este deplin fidel, deducem că $\Phi F \circ F\Psi' = 1_F$. Lema e demonstrată.

Pentru a sfîrși demonstrația propoziției 3.1, considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \arrow[ll, "D"'] \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "1_{\mathcal{D}}"'] &
\end{tikzcd}$$

în care $1_{\mathcal{D}} \circ G$ este adjunct cu D; din lema de mai sus se deduce că $G.D$ este adjunct cu $1_{\mathcal{D}}$,deci $GD \approx 1_{\mathcal{D}}$.

2. *Exemple și aplicații.* *a*) Notăm cu $\mathcal{E}$ categoria U-Ens și cu (Top) categoria U-(Top), adică categoria spațiilor topologice pentru care ansamblul subiacent este în U-Ens. Fie S : (Top) $\to \mathcal{E}$ functorul „subiacență”, adică cel care asociază oricărui spațiu topologic mulțimea subiacentă. Functorul S are un adjunct la stînga notat T și care asociază oricărei mulțimi spațiu topologic discret. Evident că $ST \approx 1$ și o săgeată de adjuncție a lui S cu T este chiar aplicația identică $\Psi_X : X \to STX$

pentru orice mulțime X ; săgeata cvasiinversă este dată pentru un spațiu topologic (X, τ) de aplicația identică $X \to (X, \tau)$ (prin (X, τ) se înțelege „mulțimea X cu topologia τ respectivă"). Din propoziția demonstrată se deduce că $\mathcal{E}$ este o categorie de fracții a lui (Top). Evident, un morfism $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ devine prin S inversibil, dacă și numai dacă f este biunivocă ca „funcție". Deducem încă de aici că un monomorfism în categoria (Top) este neapărat un monomorfism în $\mathcal{E}$.

b) Fie $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ o categorie și D un functor deplin fidel, adică D identifică pe $\mathcal{C}'$ cu o subcategorie plină din $\mathcal{C}$. Dacă D admite un adjunct la stînga (dreapta) G, atunci $\mathcal{C}'$ se zice „reflectivă" (coreflectivă). În aceste condiții $\mathcal{C}'$ se identifică cu o categorie de fracții a lui $\mathcal{C}$.

În această situație se află spre exemplu categoria spațiilor topologice separate (Tops) față de (Top), D : (Tops) → (Top) fiind functorul incluziune. De asemenea, dacă notăm cu $\mathcal{C}$ categoria spațiilor topologice separate și cu $\mathcal{C}'$ categoria spațiilor Kelley (un spațiu Kelley este un spațiu topologic separat K, în care o submulțime F este închisă dacă și numai dacă F intersectează orice compact al lui K după un închis), iar cu S : $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ functorul incluziune, atunci S admite un adjunct la dreapta notat T și care asociază oricărui spațiu topologic separat un spațiu topologic avînd același ansamblu subiacent și ai cărui închiși sînt toți închișii F ai lui X care intersectează orice compact al lui X după un închis.

c) Fie acum $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, D, G ca în propoziția 3.1. Fie $H : \sum \to \mathcal{D}$ o diagramă de schemă $\sum$ peste $\mathcal{D}$. Admitem că există conul inițial $\underleftarrow{\lim}\, H$ al diagramei H. În aceste condiții $D \circ H$ este o diagramă peste $\mathcal{C}$ și are con inițial, care este tocmai $D(\underleftarrow{\lim}\, H)$.

Invers, dacă D este și deplin fidel și dacă $\underleftarrow{\lim}\, DH$ există și este de forma DX cu $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}$, atunci X este un con inițial pentru diagrama H, fapt care rezultă imediat.

Drept aplicație observăm că dacă $\mathcal{C}$ este categoria (Top), iar $\mathcal{D} =$ $=$ (Tops), atunci limitele proiective în (Tops), coincid cu limitele proiective în (Top). De asemenea, tot de aici deducem că limitele proiective în $\mathcal{E}$ coincid cu cele din (Top).

Fie H ca mai sus ; observăm că $\Phi_H : GDH \to H$ este un izomorfism de diagrame ; așa dar $\underrightarrow{\lim}\, H$ există dacă și numai dacă $\underrightarrow{\lim}\, GDH$ există. Cum G este adjunct la stînga lui D, deducem că existența lui $\underrightarrow{\lim}\, DH$ implică existența lui $\underrightarrow{\lim}\, H$. Spre exemplu, deducem de aici că limitele inductive în Ens și (Top) coincid (adică putem foarte bine calcula o limită inductivă de mulțimi în (Top)).

Pentru a încheia acest punct considerăm încă un exemplu : *d*) Fie $\mathcal{C}'$ categoria spațiilor topologice modulo omotopia, adică categoria omotopică și $\mathcal{D}'$ categoria complexelor Kan modulo omotopia semisimplicială. Notăm prin $G' : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ functorul indus de functorul „complex singular", adică cel ce asociază oricărui spațiu topologic X complexul lanțurilor singulare ; G' are ca adjunct la stînga functorul D' ce asociază oricărui complex Kan realizarea sa geometrică. Dintr-un rezultat demonstrat de

Milnor rezultă că $G'D'$ este izomorf cu functorul identic al lui $\mathcal{D}$; deducem că categoria $\mathcal{D}'$ este echivalentă cu o categorie de fracţii a lui $\mathcal{C}'$, numită „categoria spaţiilor topologice slab -homotopic echivalente".

În încheiere, considerăm categoria $\mathcal{K}$ a complexelor Kan şi $\mathcal{M}$ subcategoria plină a sa, formată din complexele Kan minimale. Functorul $D : \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ de incluziune, care este deci deplin fidel, are un adjunct la stînga G, care asociază oricărui complex Kan X un complex cît minimal al său.

3. *Calculul fracţiilor.* În paragraful de faţă vom arăta cum se construieşte categoria $\mathcal{C}_S$ pentru un anumit „tip" de familii S de morfisme.

Fie $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor şi D un adjunct al său la dreapta. Fie $\Phi : GD \to 1_{\mathcal{D}}$ un morfism de adjuncţie şi $\Psi' : 1_{\mathcal{C}} \to DG$ un cvasiinvers al său. Admitem că Φ este izomorfism, ceea ce echivalează cu aceea că D este deplin fidel. În aceste condiţii $G\Psi'_X$, fiind un invers al lui Φ_{GX} care este izomorfism, este izomorfism (pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, C$). Deoarece functorul H (din propoziţia 3.1) stabileşte o echivalenţă între $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{C}_S$, deducem că $P_S(\Psi'_X)$ (functorul canonic $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$) este un izomorfism pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$. Pentru două obiecte $X, X' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi orice morfism $\gamma : X \to DGX'$ avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\gamma"'] & X' \arrow[d, "\Psi'_{X'}"] \\
 & DGX'
\end{tikzcd}$$

căreia aplicîndu-i functorul P_S obţinem aplicaţia

$$\gamma \rightsquigarrow (P_S \Psi'_{X'})^{-1} \circ P_S(\gamma) = \gamma_* \tag{1}$$

de la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DGX')$ la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S X, P_S X')$.

Relativ la aplicaţia (1) avem următorul rezultat:

PROPOZIŢIA 3.2. *Aplicaţia* $\gamma \rightsquigarrow \gamma_*$ *este o bijecţie a lui* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DGX')$ *pe* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S X, P_S X')$.

Demonstraţie. Considerăm morfismul compus

$$\mathrm{Hom}\,(P_S X, P_S X') \xrightarrow[\sim]{H(P_S X,\, P_S X')} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(HP_S X, HP_S X') =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GX, GX') \xrightarrow{\Psi'(X,\, GX')} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DGX'),$$

unde Ψ' este un izomorfism de adjuncţie asociat cu Ψ'. Aceste izomorfisme compuse lucrează astfel

$$H(\gamma_*) = H(P_S \Psi'_{X'})^{-1} \circ HP_S \gamma = (HP_S \Psi'_{X'})^{-1} \circ HP_S = (G\Psi'_{X'})^{-1} \circ G\gamma =$$

$$= \Phi_{GX'} \circ G\gamma \cdot \text{ Apoi } \Psi'(X, GX')\,(\Phi_{GX'} \circ G\gamma) = D\,(\Phi_{GX'}\, G\gamma) \circ \Psi'_X =$$

$$= D\,\Phi_{GX'} \circ DG\gamma \circ D\Psi'_X. \text{ Dar } D\,\Phi_{GX'} = (\Psi'_{DGX'})^{-1}$$

şi din diagrama comutativă deducem $D\Phi_{GX'} \circ DG\gamma \circ D\Psi = \gamma$, adică apli-

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\psi_X"'] & DGX' \arrow[d, "\psi_{DGX'}"] \\
DGX \arrow[r, "DG\gamma"] & DGDGX'
\end{tikzcd}$$

caţia $\Psi(X, GX') \circ H(P_S X, P_S X')$ este o inversă a aplicaţiei $\gamma \rightsquigarrow \gamma_*$.

Din propoziţia demonstrată se deduce că putem identifica ansamblul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S X, P_S X')$ cu ansamblul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, DGX')$. Mai mult, aplicaţia $\gamma \rightsquigarrow \gamma_*$ este functorială; într-adevăr, fie $\gamma : X \to DGX'$; $\gamma' : X' \to DGX''$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\gamma"] & X' \arrow[d, "\psi_{X'}"] \arrow[dr, "\gamma'"] & X'' \arrow[d, "\psi_{X''}"] \\
 & DGX' \arrow[dr, "DG\gamma'"] & DGX'' \arrow[d, "\psi_{DGX''}"] \\
 & & DGDGX''
\end{tikzcd}$$

Avem atunci diagrama comutativă din care deducem

$$\gamma'_* \circ \gamma_* = P(\Psi_{X''})^{-1} \circ P_S \gamma' \circ (P_S \circ \Psi_{X'})^{-1} \circ P_S \gamma =$$
$$= (P_S \Psi_{X''})^{-1} \circ (P_S \Psi_{DGX''})^{-1} \circ P_S\ DG\ \gamma' \circ P_S \gamma = P_S \Psi_{X''} \circ (P_S [\Psi_{DGX'})^{-1} \circ$$
$\circ DG\gamma' \circ \gamma$, ceea ce arată că $\gamma'_* \circ \gamma_*$ este tot de forma γ_*.

Fie acum S familia săgeţilor din $\mathcal{C}$ care prin G devin inversibile; printre ele intră în mod evident toate morfismele Ψ_X, cu $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Mai mult, S conţine toate unităţile lui $\mathcal{C}$ şi în plus, compunerea a două morfisme din S este încă un morfism din S. Dacă avem în $\mathcal{C}$ o diagramă de tipul

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \\
X'
\end{tikzcd} \tag{a}$$

atunci deducem diagrama comutativă în care ambele pătrate sînt comu-

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\psi_X"] & & Y \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\
X' \arrow[dr, "\psi_{X'}"'] & & DGX \arrow[rr, "DGf"] \arrow[dl, "DGs"] & & DGY \\
 & DGX' & & &
\end{tikzcd}$$

tative şi în plus $\Psi_Y \in S$; avem deci diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "\psi_Y"] \\
X' \arrow[r, "DGf\circ(DGs)^{-1}\circ\psi_{X'}"] & DGY
\end{tikzcd}$$

în care $\Psi_Y \in S$. Concluzia este că orice diagramă de tipul (a) se poate scufunda în o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "s'"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Z
\end{tikzcd}$$

în care $s' \in S$.

Fie acum diagrama

$$X' \xrightarrow{s} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \tag{b}$$

în care $fs = gs$. Din ea deducem diagrama comutativă.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\psi_{X'}"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\psi_X"] & Y \arrow[d, "\psi_Y"] \\
DGX' \arrow[r, "DGs"] & DGX \arrow[r, shift left, "DGf"] \arrow[r, shift right, "DGg"'] & DGY
\end{tikzcd}$$

Din $fs = gs$, deducem evident $DGf \circ DGs = DGg \circ DGs$ şi deoarece DGs este izomorfism, rezultă că $DGf = DGg$, deci $\Psi_Y \circ f = DGf \circ \Psi_X = DGg \circ \Psi_X = \Psi_Y \circ g$ şi concluzia este că pentru orice diagramă de tipul (b) există un morfism $s' \in S$, $s' : Y \to Z$, cu $s'f = s'g$.

Fie acum S un sistem multiplicativ din $\mathcal{C}$ care satisface următoarele condiţii :

a) Unităţile lui $\mathcal{C}$ intră în S.

b) S este un sistem multiplicativ închis, adică pentru orice două morfisme s_1, s_2, $\in S$, pentru care $s_1 \circ s_2$ are sens, deducem că $s_1 \circ s_2 \in S$.

c) Orice diagramă $X' \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} Y$ din $\mathcal{C}$ cu $s \in S$, se poate scufunda într-o diagramă comutativă :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "s'"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

cu $s' \in S$.

d) Dacă $f, g : X \rightrightarrows Y$ sînt două săgeți din $\mathcal{C}$ și dacă $s : X' \to X$ este o săgeată din S, pentru care $fs = gs$, atunci există o săgeată $s' : Y \to Y'$ din S, cu $s' \cdot f = s' \cdot g$.

Dacă condițiile *a*) — *d*) sînt verificate de către sistemul de morfisme S se zice că S permite calculul fracțiilor la stînga. În aceste condiții categoria $\mathcal{C}_S$ se construiește ușor și în mod canonic, fără a mai face apel la categoria liberă asociată lui $\mathcal{C}$ și S. Mai mult, după cum vom verifica ulterior, cele mai importante probleme relative la $\mathcal{C}$ se pot trece asupra lui $\mathcal{C}_S$.

Fie pentru $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, X/S subcategoria plină a lui $X/\mathcal{C}$, formată din perechile (s, Y) cu $s \in S$, $s : X \to Y$. (Categoria $X/\mathcal{C}$ are ca obiecte săgețile de sursă X și adresă arbitrară, adică perechi (f, Y), cu $f : X \to Y$; un morfism $(f, Y) \to (g, Z)$ este prin definiție un morfism $\alpha : Y \to Z$ cu $\alpha \cdot f = g$). Pentru a construi categoria $\mathcal{C}_s$, vom defini $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, X') = \varinjlim \mathrm{Hom}\,(X', Bs)$, unde Bs este adresa unui morfism din S ce pleacă din X. Această limită inductivă se poate descrie în termeni de relații de echivalență în modul următor:

Mai întîi observăm că limita inductivă de mai sus se calculează astfel: dacă $s : X \to Y$, și $f : Y \to Z$ cu $f \circ s \in S$, atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Z)$.

În familia perechilor (s, f), $s : X \to Y$, $f : X' \to Y$ definim următoarea relație „de echivalență": $(s, f) \sim (s', f')$ dacă există o diagramă

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "f'"] & & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "s'"] & \\
& Y \arrow[dr, "a"'] & & Z \arrow[dl, "b"] \\
& & W &
\end{tikzcd}$$

cu $as = bs' \in S$, și $af = bf'$. Or, acest fapt înseamnă că f și f' vor avea în limita inductivă de mai sus aceeași imagine. Mai mult, condițiile *a*) — *d*) de mai sus impuse lui S arată că această relație este „de echivalență" și limita inductivă este de fapt „dirijată" și, în sfîrșit, această relație de echivalență coincide în mod evident cu cea definită în mulțimea $\bigcup_{s \in X/S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Bs)$ pentru a defini limita inductivă. În cele ce urmează, vom folosi după caz una sau alta din definițiile lui $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}_S}(X', X)$.

Trebuie să dovedim că $\bar{\mathcal{C}}_S$, ale cărei obiecte sînt obiectele lui $\mathcal{C}$ și ale cărei morfisme sînt cele de mai sus (adică $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}_S}(X', X) = \varinjlim_{s \in X/S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Bs)$, este într-adevăr o categorie. Vom nota prin s/f imaginea canonică a elementului (s, f) în $\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Bs)$ $(X \xrightarrow{s} Y \xleftarrow{f} X')$. Vom defini pentru trei obiecte, X, Y, Z din $\bar{\mathcal{C}}_S$ aplicația de compunere

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}_S}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}_S}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}_S}(X, Z)$$

astfel : fie $(s \mid f) \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}_S}(X, Y)$, $(t \mid g) \in \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}_S}(Y, Z)$, atunci avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "s"'] & & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "t"] & & Z \arrow[dl, "g"] \\
& X' \arrow[dr, dashed, "s'"'] & & Y' \arrow[dl, dashed, "h"] & \\
& & Z' & &
\end{tikzcd}$$

săgețile punctate fiind completate (diagrama este comutativă) în baza proprietății $c)$ a lui S. Definim $(t \mid g) \circ (s \mid f) = (s's \mid hg)$. Manevrînd destul de ușor condițiile $a) - d)$ ce le satisface S, deducem că „compunerea" din $\bar{\mathcal{C}}_S$ este bine definită, adică nu depinde de reprezentanți și $\bar{\mathcal{C}}_S$ este într-adevăr categorie. Vom arăta acum că $\bar{\mathcal{C}}_S$ este categoria de fracții $\mathcal{C}_S$ și aceasta se reduce la a dovedi că $\bar{\mathcal{C}}_S$ satisface la problema de universalitate pe care o satisface $\mathcal{C}$; de aici va rezulta echivalența lor.

Definim $\mathcal{C} \to \bar{\mathcal{C}}_S$ functorul $\bar{P}_S$ astfel : $P_S(X) = X$ și $P_S(f) = (1_Y \mid f)$, $f : X \to Y$. Evident, asocierea $X \rightsquigarrow P_S(X)$ este functorială.

Mai întîi, pentru $s : X \to Y$, avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "1_Y"] \\
X \arrow[r, "s"] & Y
\end{tikzcd}$$

Dacă $(t\,|\,g)G\,\mathrm{Hom}\overline{\mathcal{C}}_S\,(Y,\ Z)$, atunci diagrama comutativă de unde

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "s"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \arrow[dr, "1_Y"'] & & X \arrow[dl, "s"] \\
& Y \arrow[dr, "1_Y"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] & \\
& & Y & &
\end{tikzcd}$$

deducem $(s\,|\,1_Y)\circ(1_Y\,|\,s)=(s\,|\,s)=(1_Y\,|\,1_Y)$, adică orice element din S devine inversibil la stînga (și deci și la dreapta) în categoria $\overline{\mathcal{C}}_S$.

Fie acum $T:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ un functor care inversează orice săgeată din S, adică pentru orice $s\in S$, $T(s)$ este inversibilă. Definim un functor $H:\overline{\mathcal{C}}_S\to\mathcal{D}$ astfel:

$$H(X)=H(\overline{P}_S\,(X))=T(X),$$
$$H(s\,|\,f)=T(s)^{-1}\ T(f).$$

Să dovedim că pentru morfisme functorul H este bine definit; fie deci diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & Y \arrow[ddl, "s"'] \arrow[dr, "s'"] & \\
X \arrow[rrr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & & X'' \arrow[ddl, "a"] \\
& X' \arrow[dr, "b"'] & & \\
& & X''' &
\end{tikzcd}$$

unde $bs=as'$, $bf=af'$, din care, conform cu cele anterioare, deducem că $(s\,|\,f)=(s'\,|\,f')$. Dar atunci $H(s\,|\,f)=T(s)^{-1}\circ T(f)$ și $T(a)\circ T(s')=T(b).\ T(s)$; $T(b)\,T(f)=T(a)\,T(f')$ de unde deducem $T(b)=T(a).\ T(s').\ T(s)^{-1}$; deci

$$T(b)\circ T(f)=T(a)\circ T(s')\circ T(s^{-1})\circ T(f)=T(a)\circ T(s')\circ H(s\,|\,f).$$

Deoarece $as'\in S$, deducem că

$$H(s\,|\,f)=T(as')^{-1}\ T(bf)=T(as')^{-1}\circ T(af'),$$

$$H(s'\,|\,f')=T(s')^{-1}\circ T(f'\,)=T(as')^{-1}\circ T(af')=H(s\,|\,f).$$

Deci functorul H este „bine definit" și în plus păstrează compunerea morfismelor. Mai mult, $H\circ\overline{P}_S=T$. Unicitatea lui H rezultă cu uşurinţă din aceea că H este definit de T. În concluzie am demonstrat.

PROPOZIŢIA 3.3. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi S o parte a lui $Fl\mathcal{C}$ (săgeţile lui $\mathcal{C}$) care admite calculul fracţiilor la stînga. Atunci categoria $\mathcal{C}_S$ există şi este echivalentă cu $\bar{\mathcal{C}}_S$; construcţia ei se face în mod canonic şi ca mai sus.*

Exemple. *a*) Am văzut mai sus că dacă $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un functor şi D un adjunct al său la dreapta deplin fidel, atunci toate morfismele s ale lui $Fl\mathcal{C}$ inversate de G formează un sistem S ce permite calculul fracţiilor la stînga. Mai mult, ne putem limita doar la sistemul S' format din toate izomorfismele lui $\mathcal{C}$ şi săgeţile de adjuncţie : $\Psi_X \to DG$, precum şi la compuneri de asemenea săgeţi. Sistemul S' permite calculul fracţiilor la stînga. Demonstraţia este analoagă cu cea de mai sus.

b) Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor şi Ψ Id $\mathcal{C} \to T$ o săgeată functorială astfel că $\Psi_T = T\Psi_T$. Considerăm sistemul S al tuturor morfismelor lui $\mathcal{C}$ generat de toate săgeţile compuse de tipul

$$X \xrightarrow{\Psi_x} TX \xrightarrow{\Psi_{Tx}} TX \xrightarrow{\Psi_{T^2x}} T^3X \ldots \longrightarrow T^{n-1}X \xrightarrow{\Psi_{T^n}} T^n X.$$

Verificarea condiţiilor *a*) — *d*) pentru acest sistem S se poate cu uşurinţă.

Un exemplu practic este dat de (Top), în care T este functorul suspensie, iar $\Psi_x : X \to TX$ este funcţia continuă ce duce pe X în „ecuatorul" suspensiei. Se verifică imediat că $\Psi_T = T\Psi$. Categoria de fracţii a lui (Top) relativ la acest sistem de fracţii se defineşte astfel : Obiectele ei sînt cele ale lui (Top); pentru două obiecte X, Y, avem

$$\mathrm{Hom}\,\mathcal{C}_s(X, Y) = \varinjlim \mathrm{Hom}\,(X, T^nY) = \varinjlim \mathrm{Hom}\,(T^m, X, T^nY).$$

Observaţie. Prezintă interes studiul legăturii dintre această categorie şi categoria suspensiei.

c) Fie o categorie abeliană şi B o subcategorie deasă a sa, adică o subcategorie plină cu proprietatea că dacă în şirul exact :

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

$A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, atunci $A', A'' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ şi invers. Notăm prin S toate morfismele din $\mathrm{Fl}\mathcal{C}$ pentru care nucleul şi conucleul intră în $\mathcal{B}$. Un calcul destul de simplu arată că S permite calculul fracţiilor la stînga. După cum vom vedea ulterior, categoria A_S se identifică cu categoria cît $\mathcal{C}/\mathcal{B}$.

d) Fie $T : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un functor şi S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ ce admite calculul fracţiilor la stînga. Notăm prin S' toate săgeţile s' din $\mathcal{C}$ pentru care $Ts' \in S$. Functorul T se zice S — compatibil, dacă S' permite calculul fracţiilor la stînga. Dacă $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}$ sînt abeliene, iar S este definit ca în exemplul *c*), atunci T este totdeauna S — compatibil, dacă T este exact.

4. Fie S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$, admiţînd calculul la stînga al fracţiilor ; fie $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ functorul canonic. În ce condiţii P_S admite un adjunct la dreapta? Avem pentru aceasta :

PROPOZIŢIA 3.4. *Fie S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$, permiţînd calculul fracţiilor la stînga. Pentru un obiect Y din $\mathcal{C}_S$ următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

a) *categoria $(\mathcal{C}, P_S)/Y$ are un obiect iniţial* (γ, X) ; $\gamma : P_SX \to Y$;

b) γ *este inversibilă și* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s, X)$ *este bijecție pentru orice* $s \in S$;

c) γ *este inversibilă și aplicația* $P_s(Z, X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_SZ, P_SX)$ *este bijectivă pentru orice obiect* Z *din* $\mathcal{C}$.

Demonstrație. Condiția *a*) este echivalentă cu aceea că functorul

$$Z \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_SZ, Y)$$

este reprezentabil și X este un reprezentant al său. Dar atunci $Y = P_SY'$ și deci, pentru $\gamma : P_SX \to P_SY'$, există un morfism $s : Y' \to X$, cu $\gamma P_Ss = 1_Y$. Evident $P_Ss \cdot \gamma = 1_{P_SX}$, ceea ce arată că γ este inversibilă.

Fie acum $s : A \to B$ un morfism în $\mathcal{C}$. Atunci aplicația

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_SB, P_SX) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_SA, P_SX),$$

indusă de $P_S(s)$, este bijectivă și deci, din cele de mai sus, aplicația

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X),$$

indusă de s, este bijectivă. Am demonstrat în felul acesta că *a*) $\Rightarrow$ *b*).

b) $\Rightarrow$ *c*) într-adevăr pentru orice săgeată $s : X \to X'$, $s \in S$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s, X)$ este surjecție, astfel că s admite o retracție $p : X' \to X$, cu $ps = 1_X$. Deci s este monomorfism și aplicația canonică

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \varinjlim_{s} \mathrm{Hom}(Z, X')$$

ca limită inductivă de monomorfisme este încă monomorfism. Avem însă o diagramă de tipul

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] & X' \arrow[r, shift left, "1X'"] \arrow[r, shift right, "sp"'] & X' \end{tikzcd}$$

cu $sps = 1_{X'} \cdot s = s$; există deci $t : X' \to X''$ cu $t = tsp$. Pentru orice $f : Z \to X'$, avem deci egalitatea $(s \mid f) = (ts \mid tf) = (ts \mid tspf) = (1_X|pf)$ și deci aplicația $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_SZ, P_SX)$ este surjectivă; în final este bijecție.

c) $\Rightarrow$ *a*) este evidentă.

Dacă pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_S$, categoria $(\mathcal{C}, P_S)/Y$ are obiect inițial, atunci evident P_S are un adjunct la dreapta.

5. Vom studia în aliniatul de față mai îndeaproape functorul P_S și natura categoriei $\mathcal{C}_S$, în cazul cînd sistemul S permite calculul la stînga al fracțiilor.

PROPOZIȚIA 3.5. *Fie o categorie și* S *o parte multiplicativă a sa, permițînd calculul fracțiilor la stînga. Atunci functorul canonic* $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ *comută cu limitele inductive finite.*

Demonstrație. Fie $\sum$ o schemă finită (adică ansamblul vîrfurilor și săgeților este finit și $T : \sum \to \mathcal{C}$ o diagramă de schemă $\sum$ peste $\mathcal{C}$. Admitem că $\varinjlim T = A$ există. Considerăm diagrama $P_S \circ T : \Sigma \to \mathcal{C}_S$ şi morfismul canonic $P_S(\alpha_i) : P_S T(i) \to P_S(A)$; ($\alpha_i : T_i \to A$ definesc pe A ca limită inductivă a diagramei T).

Noi admitem că $\varinjlim P_S T = A'$ există. Atunci există şi morfismul canonic

$$\varinjlim P_S\, T = A' \xrightarrow{\alpha} P_S A,$$

indus de $P_S(\alpha_i)$. Pentru a dovedi că acest morfism este inversabil, este suficient să dovedim că pentru orice obiect $X' \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}_S$ avem izomorfismul, indus de α :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S \varinjlim_i T(i), X') \xrightarrow{\sim} \underset{\substack{\longleftrightarrow\\ i}}{\lim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S T(i), X').$$

Dar atunci trebuie ca

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S(\varinjlim_i T), X') = \varinjlim_{s \in X/S} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\varinjlim_i T, B_S) =$$

$$= \varprojlim_i \varinjlim_{s \in X/S} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T(i), Bs); \; (P_S X = X').$$

Însă

$$\varprojlim_i \varinjlim_{s \in X/S} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T(i), B_S) = \varinjlim_s \underset{\substack{\longleftrightarrow\\ i}}{\lim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T(i)\; B_S) =$$

$$= \varinjlim_s \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_i T(i), B_S) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S A, X'),$$

de unde deducem că α este într-adevăr izomorfism.

Aici am folosit faptul foarte important că în Ens limitele inductive cvasifiltrante comută cu limitele proiective finite (categoria S/X este cvasifiltrantă).

PROPOZIŢIA 3.6. *Dacă orice diagramă de schemă finită peste $\mathcal{C}$ admite con final, atunci acelaşi lucru este valabil şi pentru $\mathcal{C}_S$.*

Demonstraţie. Trebuie să dovedim că în $\mathcal{C}_S$ există sume directe, finite şi conucleu de săgeată dublă.

Fie $\{X'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ o familie finită de obiecte $\mathcal{C}$ cu $X'_\alpha = P_S X_\alpha$; considerăm suma directă $(\coprod_\alpha X_\alpha, i_\alpha)$ (unde $i_\alpha : X_\alpha \to \coprod_\alpha X_\alpha$ sînt injecţiile canonice ce definesc pe $\coprod X_\alpha$ ca sumă directă a obiectelor X_α), obiectul $P_S(\coprod_\alpha X_\alpha)$ şi morfismele $P_S(i_\alpha) : X'_\alpha \to P_S(\coprod_\alpha X_\alpha)$. Avem

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S(\coprod X), Y') = \varinjlim_{s \in Y/S} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod X_\alpha, Y) =$$

$$= \prod_\alpha \varinjlim_s \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \prod_\alpha \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S(X), Y')$$

($Y' = P_S Y'$), ceea ce arată că $P_S(\amalg X)$ este suma directă a obiectelor $P_S X_\alpha$.

Dacă $f', g' : X' \rightrightarrows Y'$ sînt două săgeţi din $\mathcal{C}_S$, atunci $f' = (s \mid f)$, $g' = (t \mid g)$, şi din diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dd, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X_2 \\
& X_1 &
\end{tikzcd}$$

deducem diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "s"'] & X_2 \arrow[dr, "a"] & & Z \arrow[d, "1_Z"] \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X_1 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r, "h"] & Z
\end{tikzcd}$$

în care $at = bs \in S$, iar h este conucleul săgeţii duble (bf, ag). Evident $(s \mid f) = (bs \mid bf)$ şi $(t \mid g) = (at \mid ag)$. Atunci $hat = hbs$, şi 1_Z dau un morfism de la Y în Z, care va fi conucleul săgeţii duble sus-numite. Verificarea rezultă din propoziţia precedentă şi de asemenea se poate face direct.

PROPOZIŢIA 3.7. *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie aditivă, atunci şi $\mathcal{C}_S$ este.*

Demonstraţie. Evident, pentru orice două obiecte X', Y' ale lui $\mathcal{C}_S$, Hom $\mathcal{C}_S(X', Y')$ are în mod canonic structură de grup abelian. Mai mult, în $\mathcal{C}_S$ există sume directe finite; pentru a termina trebuie dovedit că în $\mathcal{C}_S$ există obiect nul şi compunerea morfismelor este biliniară. Fie pentru aceasta O un obiect nul din $\mathcal{C}$; atunci $P_S O$ este obiect nul pentru $\mathcal{C}_S$, căci avem diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& O \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Şi evident $(s \mid f) = (1_O \mid O_Y)$, cu $O_Y : Y \to 0$. Deoarece diagrama $O \to Y \overset{s.0_Y}{\underset{1_Y}{\rightrightarrows}} Y$ este comutativă, deducem existenţa lui $t : Y \to Y_1$ cu $t \in S$ ($s \in S$), astfel că $t = t \cdot 1_Y = tsO_Y = 0$. Deci $(s \mid t) = (ts \mid tf) = (1_0 \mid O_Y)$.

Faptul că compunerea este biliniară rezultă din aceea că este în $\mathcal{C}$.

Aplicaţie. Fie A un inel oarecare cu identitate. Atunci A se poate interpreta ca o categorie ,,preaditivă''. Un sistem de morfism din A ce verifică calculul fracţiilor la stînga este prin definiţie un sistem multiplicativ S ce conţine unitatea şi satisface condiţiile a) — d) de mai sus. Atunci ,,categoria de fracţii'' este de fapt inelul de fracţii A_S. Din cele de mai sus rezultă că

$$A_S = \mathrm{Hom}_{A_S}(A_S, A_S) = \varinjlim_{s\in S/A} \mathrm{Hom}_A(A, A_s).$$

Cu alte cuvinte se consideră sistemul dirijat de inele : (izomorfe cu A) A_α, cu $\varphi^\alpha_\beta A_\alpha \to A_\beta$ un morfism pentru care diagrama

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[dd, "\varphi^\alpha_\beta"'] & \\ & A \arrow[ul, "s"'] \arrow[dl, "t"] \\ A_\beta & \end{tikzcd} \qquad s,\ t \in S$$

este comutativă. Atunci $\varphi^\alpha_\beta : \mathrm{Hom}_A(A, A_\alpha) \to \mathrm{Hom}_A(A, A_\beta)$ şi A_S este limită inductivă a acestui sistem dirijat.

Ca exemplu concret, considerăm inelul Z al numerelor întregi şi S sistemul multiplicativ al tuturor elementelor sale nenule. Atunci S permite calculul fracţiilor la stînga şi inelul de fracţii A_S este evident corpul cîturilor sale, Q. Mai mult, Q se obţine din cele de mai sus, considerînd sistemul dirijat

$$(Z_\alpha, \varphi^\alpha_\beta),$$

cu $\varphi^\alpha_\beta : Z_\alpha \to Z_\beta$ fiind multiplicarea cu un anumit element n, nenul.

Am obţinut în felul acesta un nou mod de a defini inelele de fracţii.

PROPOZIŢIA 3.8. *Fie $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor ce comută cu limitele inductive şi S o parte a lui $Fl\ \mathcal{C}$ formată din săgeţile s pentru care Gs este izomorfism. Dacă în $\mathcal{C}$ există limite inductive finite, atunci S permite calculul fracţiilor la stînga. În plus, functorul $H : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ dedus din condiţia $G = HP_S$, este conservativ şi comută cu limitele inductive finite.*

Demonstraţie. Condiţiile a) şi b) pe care trebuie să le satisfacă un sistem S de morfisme, pentru a permite calculul fracţiilor la stînga, sînt satisfăcute de S. Pentru a verifica c) observăm că din diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "s'"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y \amalg_X X' \end{tikzcd}$$

obținem diagrama

$$\begin{tikzcd}
GX \arrow[r, "Gf"] \arrow[d, "Gs"'] & GY \arrow[d, "Gs'"] \\
GX' \arrow[r, "Gf'"] & G(X' \amalg_X Y)
\end{tikzcd}$$

în care Gs este izomorfism și atunci din cele presupuse despre f, și Gs' este.

Fie $f, g : X \to Y$ și $s : Z \to X$ un morfism din S cu $fs = gs$. Dacă $t : Y \to Z'$ este un conucleu al lui (f, g), atunci Gt este conucleu al lui (Gf, Gg) și din $(Gf, Gs) = (Gg, Gs)$ deducem $Gf = Gg$, căci Gs este izomorfism, deci Gf este izomorfism, adică $t \in S$.

Fie u o săgeată din $\mathcal{C}_S$ cu $H(u)$ inversibilă în $\mathcal{D}$. Atunci $u = (s \mid f)$, cu $s \in S$. Evident că $H(u) = G(s)^{-1}$. $G(f)$ și deci $G(f)$ este inversibilă, deci $f \in S$, u este inversibilă.

Pentru a termina, este suficient să observăm că P_S comută cu sumele directe și deci H comută. Faptul că H comută cu conucleul de săgeată dublă este simplu.

Iată o aplicație a rezultatului precedent. Fie S' o parte a lui Fl $\mathcal{C}$ care permite calculul fracțiilor la stînga, $G = P_{S'}$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{S'}$. În acest caz S este saturata lui S' și categoriile $\mathcal{C}_S$ și $\mathcal{C}_{S'}$ se identifică cu ajutorul lui H. De altfel, S este partea lui Fl $\mathcal{C}$, formată din toate săgețile $u : X \to Y$ care se pot insera într-o diagramă comutativă, de forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "t"] \arrow[dl, "v"'] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y'
\end{tikzcd} \qquad \text{cu } s, t \in S'.$$

Deducem de aici că dacă $\mathcal{C}$ posedă limite inductive finite, saturata unei părți a lui Fl$\mathcal{C}$, ce admite calculul fracțiilor la stînga, posedă aceeași proprietate. Putem deci să ne mărginim, în acest caz, la părțile saturale S ale lui Fl$\mathcal{C}$, care permit calculul fracțiilor la stînga și să numim *categorie de fracții la* stînga a lui $\mathcal{C}$ categoria de fracție pentru un astfel de sistem.

Se vede de asemenea că categoriile de fracții la stînga ale lui $\mathcal{C}$ clasifică într-un fel functorii de sursă $\mathcal{C}$ care comută cu limitele inductive finite.

Admitem acum că $\mathcal{C}$ este o categorie cu limite inductive și proiective finite și că S este o parte a lui Fl $\mathcal{C}$ care permite calculul fracțiilor la stînga și la dreapta. Atunci $\mathcal{C}_S$ are limite inductive și proiective finite și functorul $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ este exact, adică comută cu astfel de limite (inductive și proiective). În acest caz multe din proprietățile de exactitate din $\mathcal{C}$ se transmit lui $\mathcal{C}_S$. Spre exemplu

PROPOZIŢIA 3.9. *Dacă $\mathcal{C}$ este abeliană şi S permite calculul fracţiilor la stînga şi la dreapta, atunci $\mathcal{C}_S$ este abeliană.*

Demonstraţie. Evident că în $\mathcal{C}_S$ există nucleu şi conucleu, şi $\mathcal{C}_S$ este aditivă. Fie $f: X \to Y$ un morfism din $\mathcal{C}_S$. Atunci $f = P_S(s)^{-1} P_S(g)$ şi problema se reduce la a considera pe f de forma $P_S(g)$; dar dacă θ : coim $f \to$ Im f şi h : coim $g \to$ Im g, atunci evident $P_S(h) = \theta$. De aici rezultă că θ este izomorfism.

Fie $\mathcal{C}$ abeliană şi S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ care admite calculul fracţiilor la stînga şi la dreapta. Atunci subcategoria plină $\mathcal{A}$, a lui $\mathcal{C}$, formată din toate obiectele X, pentru care $P_S(X) = 0$, este o subcategorie deasă, fapt evident din aceea că P_S este un functor exact. Proprietăţile lui P_S arată că $\mathcal{C}_S$ este echivalentă cu $\mathcal{C}/\mathcal{A}$, (unde $\mathcal{A}$ este subcategoria deasă a lui $\mathcal{C}$ mai sus amintită, (numită şi nucleul lui P_S). Mai mult, tot din cele de mai sus rezultă că S este un sistem saturat. În concluzie, sistemele de morfisme din $\mathcal{C}$ ce permit calculul fracţiilor la stînga şi la dreapta şi saturate sînt în corespondenţă biunivocă cu subcategoriile dese din $\mathcal{C}$.

Relativ la categoriile de fracţii, mai avem următorul rezultat:

PROPOZIŢIE 3.10. *Admitem că $\mathcal{C}$ este o categorie pentru care orice bimorfism este izomorfism, adică este o categorie perfectă şi fie S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ care permite calculul fracţiilor la stînga şi la dreapta. Atunci $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ este un functor ce păstrează epimorfismele şi monomorfismele. Dacă P_S are un adjunct la dreapta (stînga) S, şi dacă $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to SP_S$ este epimorfism sau monomorfism, atunci $\mathcal{C}_S$ este perfectă.*

Demonstraţie. Fie $f : X \to Y$ un morfism din $\mathcal{C}$ care este epimorfism. Atunci $P_S(f)$ este prin definiţie imaginea perechii $(1_Y | f)$ în $\underset{\overrightarrow{\;s\;}}{\lim}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B_S)$.

Dacă $\overline{u}, \overline{v} : P_S Y \to Z$ sînt două morfisme din $\mathcal{C}_S$ cu $\overline{u} \circ P_S(f) = \overline{v} \circ P_S(f)$ atunci, notînd $(s \mid u)$, $(t \mid v)$ doi reprezentanţi ai lor, deducem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u\circ f"] \arrow[ddrr, "v\circ f"'] & & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dd, "t"] \\
& Z_1 \arrow[dl, dashed, "s'"] & \\
A & & Z_2 \arrow[ll, dashed, "t'"']
\end{tikzcd}$$

Dar avem $t'vf = s'uf$ şi deci $t'v = s'u$. În concluzie $\overline{u} = \overline{v}$, adică $P(f)$ este epimorfism (aici nu am folosit nicăieri faptul că S permite calculul fracţiilor şi la dreapta).

Fie acum S un adjunct la dreapta pentru P_S; S este deplin fidel. Dacă $\alpha : \overline{X} \to \overline{Y}$ este un bimorfism din $\mathcal{C}_S$, atunci $S(\alpha)$ este încă bimorfism şi deci izomorfism, ceea ce arată că α este izomorfism. Într-adevăr, dacă

$u, v : S\overline{Y} \to Z$, cu $uS(\alpha) = vS(\alpha)$, atunci avem $P_S(u) \circ \alpha = P_S(v) \circ \alpha$; adică $P_S(u) = P_S(v)$. Avem deci diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} S(Y) \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Z \arrow[r, shift left, "t"] \arrow[r, shift right, "s"'] & Z' \end{tikzcd}$$

$$t = s \in S$$

cu $tu = tv$. Există deci $s' \in S$ cu $us = vs'$. Avem deci diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "\Psi_{Y'}"'] & SY \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y \\ SP_S(Y') \arrow[ur, "SP_S(s')"'] & & \end{tikzcd}$$

în care $\Psi_{Y'}$ și $SP_S(s')$ sînt epimorfisme, deci $u = v$. În mod cu totul analog se dovedește că $S(\alpha)$ este și monomorfism.

CAPITOLUL IV

RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ GLOBALE

1. Admitem (fără însă a restrînge generalitatea) că $\mathcal{C}$ este o U-categorie mică. Notăm cu Morf $\mathcal{C}$ mulțimea $\bigcup_{(X,Y)\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. O relație de echivalență R pe Morf $\mathcal{C}$ se zice o relație de echivalență globală pe $\mathcal{C}$. În acest caz, pe mulțimea Ob $\mathcal{C}$ introducem următoarea relație notată R': Vom spune că $X \sim Y\ (R')$, dacă există $f, g \in \mathrm{Morf}_{\mathcal{C}}$ astfel că (folosim notații din capitolul I : $\alpha(f)$ este sursa lui f și $\beta(f)$ cosursa sa) $\alpha(f) = X$ și $\alpha(g) = Y$ și în plus $f \sim g\ (R)$ sau încă $\beta(f) = Y$, $\beta(g) = Y, f \sim g\ (R)$. Această relație este evident reflexivă și simetrică. Dacă în plus R satisface și condiția

$$f \sim f', \quad g \sim g'\ (R),$$

precum și una din condițiile

1) $\alpha(f') = \alpha(g')$
2) $\beta(f') = \beta(g')$
3) $\alpha(f') = \beta(g')$
4) $\beta(f') = \alpha(g')$

și dacă pentru fiecare caz în parte 1) ... 4) există φ, ψ cu $\varphi \sim \psi\,(R)$ și astfel că pentru cazul i) este valabil i') :

$$1' \quad \begin{cases} \alpha(\varphi) = \beta(f) & \text{și} \quad \beta(\psi) = \alpha(g) \\ \beta(\varphi) = \alpha(f) & \text{și} \quad \beta(\psi) = \alpha(g) \end{cases} \qquad \text{sau}$$

$$2' \quad \begin{cases} \alpha(\varphi) = \beta(f) & \text{și} \quad \alpha(\psi) = \beta(g) \\ \beta(\varphi) = \beta(f) & \text{și} \quad \beta(\psi) = \beta(g) \end{cases} \qquad \text{sau}$$

$$3' \quad \begin{cases} \alpha(\varphi) = \alpha(f) & \text{și} \quad \alpha(\psi) = \beta(g) \\ \beta(\varphi) = \alpha(f) & \text{și} \quad \beta(\psi) = \beta(g) \end{cases} \qquad \text{sau}$$

$$4' \quad \begin{cases} \alpha(\varphi) = \beta(f) & \text{și} \quad \alpha(\psi) = \alpha(g) \\ \beta(\varphi) = \beta(f) & \text{și} \quad \beta(\psi) = \alpha(g) \end{cases} \qquad \text{sau}$$

Dacă R satisface una din condițiile mai sus impuse, atunci R' este o relație de echivalență și invers.

Notăm pentru $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ cu $\overline{X}$ clasa de echivalență a obiectului X, prin relația R' (care admitem că este de echivalență). Punem de asemenea :

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{X}, \overline{Y}) = \bigcup_{\substack{X' \in \overline{X} \\ Y' \in \overline{Y}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')/R. \qquad (*)$$

Evident relația R induce pe mulțimea în cauză a relației de echivalență. Bineînțeles, putem concepe o schemă $\overline{\mathcal{C}}$ ale cărei vîrfuri să fie clasele $\overline{X}$ și ale cărei săgeți între două vîrfuri (săgeți ordonate) să fie mulțimea (*).

Exemple. a) Fie $\mathcal{C}$ o categorie și S un sistem de morfisme care permite calculul fracțiilor la stînga ; admitem S saturat (vezi cap. III). Definim în Morf $\mathcal{C}$ următoarea relație : $f \sim g\,(R)$, dacă și numai dacă $\alpha(f) = \alpha(g)$ și există $s, s' \in S$ astfel că diagrama să fie comutativă.

$$\begin{tikzcd} & \beta(f) \arrow[dr, "s"] & \\ \alpha(f) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & X \\ & \beta(g) \arrow[ur, "s'"'] & \end{tikzcd}$$

Atunci se constată imediat că relația introdusă este de echivalență. R induce pe Ob $\mathcal{C}$ relația R' de echivalență $X \sim Y\,(R')$, dacă și numai dacă există s, $s' \in S$ cu $\alpha(S) = X$, $\alpha(s') = Y$ și $\beta(s) = \beta(s')$. Se dovedește imediat că R' este o relație de echivalență (manevrînd condițiile ce le satisface S, precum și faptul că este un sistem saturat). Vom defini o aplicație

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{X}, \overline{Y}) \times \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{Y}, \overline{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{X}, \overline{Z})\,;$$

fie pentru aceasta $X' \in X$, Y', $Y'' \in \overline{\mathrm{Y}}$ şi $Z' \in \overline{\mathrm{Z}}$ şi $f : X' \to Y'$, $g : Y'' \to Z'$. Avem atunci diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f"] & Y' \arrow[dr, "s"] & & \\
& & U \arrow[r, "g'"] & Z'' \\
& Y'' \arrow[ur, "s'"] \arrow[r, "g"] & Z' \arrow[ur, "s''"] &
\end{tikzcd}$$

în care Z'' este astfel că $s'' \in S$ şi $s'' \circ g = g' \circ s'$. Evident $Z'' \in \overline{\mathrm{Z}}$. Dacă notăm cu $\bar{\mathrm{f}}, \bar{\mathrm{g}}$ ... clasa elementului f, g ... în mulţimea cît $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathrm{Y}})$ etc., atunci definim $\bar{\mathrm{g}} \circ \bar{\mathrm{f}} = \overline{g'sf}$. Definind astfel multiplicarea între morfismele schemei $\mathcal{C}$, se constată în final că $\bar{\mathcal{C}}$ este de fapt o categorie pe care o vom nota $\mathcal{C}_R$. Vom dovedi că ea este echivalentă cu categoria $\mathcal{C}_S$ de fracţii a lui $\mathcal{C}$ relativ la sistemul multiplicativ S_1 construită în capitolul III. Notăm pentru aceasta cu $T_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_R$ functorul canonic $T_R(X) = X$; $T_R(f) = \mathrm{f}$. Evident, pentru orice $s \in S$, $s \sim 1_{\alpha(s)}$ (R). Deci $T_R(s) = T_R(1_{\alpha(s)}) = 1T_{R(\alpha(s))}$. Cu alte cuvinte, în categoria $\mathcal{C}$ orice element din S devine inversibil. Există deci un functor unic, $H : \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}_R$ cu $H \circ P_S = P_R$, unde $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ este functorul canonic. Construim un functor $T : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$ astfel : $T(X) = P_S(X)$, unde $X \in \overline{\mathrm{X}}$. Dacă $X' \in \overline{\mathrm{X}}$ este un alt element al clasei, atunci $P_S(X)$ şi $P_S(X')$ sînt izomorfe. Putem deci să ne alegem în fiecare clasă $\overline{\mathrm{X}}$ cîte un reprezentant fix. Dacă $f \in \bar{\mathrm{f}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_R}(\overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathrm{Y}})$, atunci fie $f'' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ cu $X' \sim X$, $Y' \sim Y$ (R') (X, Y sînt cei fixaţi în clasele respective. Avem deci diagramele din $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "s"] & & Y' \arrow[dr, "s''"] & & \\
& U & & V & s, s', s'', s''' \in S \\
X \arrow[ur, "s'"'] & & Y \arrow[ur, "s'''"'] & &
\end{tikzcd}$$

Aplicînd functorul P_S găsim diagrama din $\mathcal{C}_S$:

$$\begin{tikzcd}
P_S(X') \arrow[r, "P_S(f')"] \arrow[d, "P_S(s)"'] & P_S(Y') \arrow[d, "P_S(s'')"] \\
P_S(U) & P_S(V) \\
P_S(X) \arrow[u, "P_S(s')"] \arrow[r, dashed, "\alpha"] & P_S(Y) \arrow[u, "P_S(s''')"']
\end{tikzcd}$$

Notăm cu $T(\bar{f}) = \alpha$, un morfism unic din $\mathcal{C}_S$ ce face diagrama comutativă. Un calcul elementar arată că $T(\bar{f})$ este bine definit şi T este un functor. Verificarea că $T \circ H \approx 1_{\mathcal{C}_S}$ şi $H \circ T \approx 1_{\mathcal{C}_R}$ este imediată. Am indicat deci un procedeu global de a descrie o categorie de fracţii pornind de la o categorie dată şi un sistem de morfisme ce satisface calculul fracţiilor la stînga.

b) Fie $\mathcal{C}$ o U categorie abeliană mică şi $\mathcal{A}$ o subcategorie deasă a sa. Notăm cu S toate morfismele f ale lui $\mathcal{C}$ care satisfac condiţia Ker f şi coker $f \in$ Ob $\mathcal{A}$. E bine ştiut (cap. III) că S permite calculul fracţiilor la stînga şi la dreapta. Vom construi acum categoria $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ (categoria cît, în contextul lui Pierre Gabriel) prin procedeele de mai sus. Introducem pentru aceasta în Morf $\mathcal{C}$ următoarea relaţie de echivalenţă : $f \sim g\ (R)$, dacă şi numai dacă ele se pot insera în următoarea diagramă :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "f"] & C \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
A \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha'_1"'] & & & A' \\
 & B' \arrow[r, "g"] & C' \arrow[ur, "\alpha'_2"'] &
\end{tikzcd}$$

cu $\alpha_i, \alpha'_i \in S$, $i=1,2$

Un calcul simplu arată că relaţia introdusă este de echivalenţă ; ea este evident simetrică şi reflexivă. Faptul că este tranzitivă se dovedeşte prin calcul. (Notăm cu R această relaţie). Ea induce pe mulţimea Ob $\mathcal{C}$ următoarea relaţie de echivalenţă notată R' : $X \sim Y\ (R')$, dacă şi numai dacă avem diagrama $X \xrightarrow{s} Z \xleftarrow{s'} Y$, cu $s, s' \in S$, sau $X \xleftarrow{s''} Z \xrightarrow{s'''} Y$, cu s'', $s''' \in S$. Proprietăţile ce le satisface S arată că R' este într-adevăr o relaţie de echivalenţă.

Notăm ca mai sus cu $\bar{f}, \bar{g}, \ldots$ clase de echivalenţe de morfisme din $\mathcal{C}$ relativ la R şi cu $\bar{X}, \bar{Y}, \ldots$ clase de echivalenţă de obiecte din $\mathcal{C}$ relativ la R'. Pentru două elemente X, Y, notăm ca mai sus cu $\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\bar{X}, \bar{Y}) = $

$$= \bigcup_{(X',Y') \in \bar{X} \times \bar{Y}} \mathrm{Hom}\,(X', Y')/R.$$

Definim o aplicaţie

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\bar{X}, \bar{Y}) \times \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\bar{Y}, \bar{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\bar{X}, \bar{Z})$$

astfel : fie $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y'', Z')$ cu $X' \in \bar{X}$, Y', $Y'' \in \bar{Y}$, $Z' \in \bar{Z}$. Avem atunci diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Y' \arrow[drr, "s''"] & & & Z'' \\
 & X' \arrow[ur, "f"] & & & V \arrow[ur, "g'"] & \\
 & & U \arrow[uu, "s"] \arrow[dr, "s'"] & & & Z' \arrow[uu, "\bar{\bar{s}}"'] \\
X'' \arrow[uur, "\bar{s}"] \arrow[urr, "f'"] & & & Y'' \arrow[uur, "s'''"] \arrow[urr, "g"] & &
\end{tikzcd}$$

$\bar{s}$, $\bar{\bar{s}}$, s, s', s'', $s''' \in S$.

în care f, g sînt cele date, iar s, s', s'', s''', $\overline{\overline{s}}$ se construiesc în mod canonic din cele presupuse despre obiectele X', Y', Y'', Z' şi din aceea că S permite calculul fracţiilor la stînga şi la dreapta. Vom defini $\overline{g} \circ \overline{f} = \overline{(g \circ s' \circ f')}$. Construcţia „compunerii" astfel făcută este bună, adică nu depinde de reprezentanţii aleşi. Se verifică ca şi în cazul precedent că $\overline{\mathcal{C}}$ categoria astfel obţinută este echivalentă cu $\mathcal{C}/\mathcal{A}$. Direct se poate dovedi însă că este abeliană şi satisface condiţia de universalitate ce o satisface $\mathcal{C}/\mathcal{A}$, şi deci este echivalentă cu aceasta.

Primită la redacţie la 27 martie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică a
Universităţii din Bucureşti
Institutul de matematică al Academiei R.P.R.
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Pierre Gabriel, *Seminaire Homotopique*. Université de Strasbourg, 1964.
2. Ehresmann, Ch., *Catégories et fonctions*. Paris, 1964.

RECENZII

S. GUIAȘU, R. THEODORESCU, *Matematica și informația*. Editura științifică, București 1965, 243 p.

Această carte oferă o expunere concisă a unora dintre ideile de bază ale teoriei informației. Scopul autorilor a fost de a realiza pentru cititorii interesați în matematica aplicată atît o expunere elementară cît și un text matematic riguros. Dintre multiplele probleme importante care ar fi putut fi incluse într-o astfel de carte, autorii au selectat un număr redus, care se pretează la o bună înțelegere, și anume cazul fără memorie. Ei au analizat aceste concepte suficient de adînc pentru a stîrni interesul cititorului și a explica idei abstracte și practice într-un mod accesibil fără sacrificarea preciziei.

Cartea este împărțită în șapte capitole.

Capitolul 1 prezintă o scurtă istorie a teoriei informației în legătură cu dezvoltarea ciberneticii. Capitolul 2 are un caracter introductiv și este consacrat unor noțiuni de teoria probabilităților care vor fi utilizate în restul lucrării. Capitolul 3 se ocupă de entropie și de proprietățile sale ca o măsură a nedeterminării ; mai departe, se examinează noțiunea de informație și de cantitate de informație ca și legătura dintre entropia fizică și cea informațională. Capitolele 4 și 5 constituie partea centrală a cărții, conținînd o descriere riguroasă a noțiunilor de bază care apar în transmiterea informației din punct de vedere al modelării matematice corespunzătoare ; aici se dau teoreme de codificare pentru cazul particular al canalelor discrete fără memorie, ilustrate apoi prin exemple efective în capitolul 6 se dau cîteva aplicații ale teoriei informației la lingvistică, muzică, genetică, psihologie, pedagogie. Capitolul 7 se ocupă de automate aleatoare. Cartea se încheie cu un apendice consacrat inegalității lui Jensen și cu tabele pentru $p \log p$.

Destinată să fie folosită de cei care se interesează de matematica aplicată, cartea constituie o introducere accesibilă și totodată riguroasă în teoria informației.

M. Iosifescu

VIAŢA ŞTIINŢIFICĂ

UNIUNEA INTERBALCANICĂ A MATEMATICIENILOR (U. I. B. M.)

Reprezentanţii matematicienilor din : Albania, Bulgaria, Grecia, Turcia şi Iugoslavia s-au întîlnit la Bucureşti, între 7—11 iulie 1965, cu colegii lor români, pentru a decide împreună reluarea vechei lor colaborări cunoscute sub numele de Uniunea Interbalcanică a Matematicienilor, ale cărei Congrese de la Atena (1934) şi de la Bucureşti (1937) s-au bucurat de succese remarcabile.

Avînd în faţă scopurile lor nobile, discuţiile privind modalitatea de a relua activitatea Uniunii Interbalcanice a Matematicienilor, au fost de o înaltă ţinută, sub semnul unei perfecte încrederi şi înţelegeri reciproce.

Protocolul care a fost semnat la 8 iulie 1965, cu adeziunea unanimă a delegaţilor, a creat premizele desfăşurării viitoare a activităţilor Uniunii. El prevede, ca prim act important al acestei reluări, organizarea în România, în 1966, a celui de-al 3-lea Congres Interbalcanic al Matematicienilor.

Reproducem mai jos alocuţiunea ţinută de academician Octav Onicescu, preşedintele Comitetului român de iniţiativă, la deschiderea lucrărilor, precum şi textul Protocolului.

Stimaţi colegi şi prieteni,

La 9 septembrie 1934, la Delfi, se despărţeau, purtînd încă în mînă ramurile de măslin, savanţii pelerini ai ţărilor balcanice la încheierea primului lor congres de matematici. Încheiaseră aici cu toţii un pact nescris de prietenie ştiinţifică, pact care, început în atmosfera de caldă colegialitate a lucrărilor congresului de la Atena, avea să se întărească apoi în cadrul celor ale congresului de la Bucureşti, din 1937. Am întîlnit şi am ascultat la Atena, matematicieni de prestigiu, care în viaţa ştiinţifică internaţională şi în cea a ţărilor respective, în special, ocupau şi aveau să ocupe, şi mai departe, locurile cele mai de vază.

În primul rînd Paul Zervos şi Nicolas Hatzidakis, cei doi preşedinţi ai congresului, spirite analitice şi rafinate, Zervos continua să aducă contribuţii importante la studiul sistemelor diferenţiale, în timp ce Hatzidakis se preocupa, la acea epocă, ca şi mai tîrziu în perioada congresului de la Bucureşti, de problemele filozofice ale matematicii. C. Papaioannou, eminent specialist în mecanică, pe atunci secretar general al congresului şi actualul rector al Universităţii din Atena, avea să pună în evidenţă noua orientare a învăţămîntului matematic din această universitate, organizînd un laborator de mecanică. De altfel, prezenţa unei pleiade de savanţi tehnicieni — C. Georgicopoulos şi Ph. Theodorides, specialistul în analiză N. Kriticos reprezentanţi ai politehnicii — dădeau un caracter de largă universalitate preocupărilor înseşi ale congresului, concretizînd astfel vastul său program. Acest program prevedea 8 secţii :

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 6, p. 989–994, BUCUREŞTI, 1965

I. Teoria numerelor şi Algebră ; II. Analiză ; III. Geometrie ; IV. Mecanică, Fizică Matematică, Astronomie ; V. Mecanică aplicată ; VI. Calculul probabilităţilor, Asigurare, Statistică ; VII. Filozofie, Istorie, Probleme didactice ; VIII. Probleme profesionale.

În cadrul acestui congres, am ascultat cîteva expuneri de sinteză remarcabile, începînd cu acea a lui E. Vessiot *Asupra studiului sistemelor diferenţiale cu ajutorul grupurilor de transformări ale lui Lié*, expunere prezentată de către Paul Zervos şi terminînd cu conferinţa lui Paul Zervos însuşi *Asupra integrării sistemelor nedeterminate*.

Delegaţii iugoslavi ne-au dat expuneri remarcabile. N. Saltykow a prezentat un rezumat al *Teoriei integrării ecuaţiilor cu derivate parţiale de prim ordin*, despre care publicase recent două importante cărţi la Gauthier-Villars ; A. Billimovitch ne-a vorbit *Despre mişcarea unui solid pe o suprafaţă fixă* şi M. Milankovich, nedespărţitul prieten al lui Michel Petrovich, pe care aveam să-l reîntîlnim la Bucureşti, ne-a vorbit despre *Depunerile de praf* în studiul aerului şi în astronautică.

Congresul de la Atena a fost acela care a prilejuit primele contacte ale românilor cu acela care va deveni una din gloriile analizei bulgare, neobositul N. Obrechkoff, care ne-a ţinut o expunere bine documentată asupra însumării seriilor divergente.

Una din atracţiile acestui congres a fost prezenţa grupului de profesori temporari ai Universităţii din Istambul, probabilistul şi aerodinamistul von Mises, astronomul E. Fraundlich, fostul director al Observatorului din Postdam şi cel care a semnat primele verificări ale teoriei lui Einstein, cel care ne-a vorbit despre impulsul luminii ; H. Reichenbach, autorul unei cărţi foarte discutate asupra bazelor probabilităţii şi aplicaţiile sale. Personalitatea complexă a lui von Mises, care din cabinetul său de la Seminarul Universităţii din Berlin, exercitase o adîncă influenţă asupra dezvoltării teoriei probabilităţii — în epoca în care aceasta renăştea — adică în anii treizeci ai secolului nostru, la care se adaugă farmecul lui personal, bogata sa bibliotecă personală de la Istambul, pe care ne-a arătat-o el însuşi, toate acestea au constituit o încheiere prestigioasă a congresului de la care ne întoarcem şi la care şi-au adus, de asemenea, contribuţia substanţială matematicienii români.

Expunerea lui G. Ţiţeica asupra *Reţelelor şi congruenţelor* a constituit o strălucită istorie a noţiunilor şi ideilor respective, care însă, cu toată autoritatea incontestabilă a lui Darboux, ar fi fost dată uitării, dacă Ţiţeica nu i-ar fi imprimat un nou avînt pe baza noilor orientări ale geometriei. S. Stoilov, în expunerea *Topologia funcţiilor de variabilă complexă*, a dezvoltat unele idei care aveau să-l impună ca cercetător fundamental al unui domeniu nou. Constantin Popovici, la acea dată profesor la Iaşi, cercetător neobosit şi cunoscut prin remarcabilele sale comunicări, profunde şi uimitoare în acelaşi timp, a vorbit despre aplicarea metodelor sale funcţionale la unele probleme ridicate în fizică şi astronomie. C. C. Teodorescu şi-a expus unele metode statistice aplicate la studiul deformării materialelor. Subsemnatul a prezentat congresului cîteva contribuţii la studiul transformărilor topologice în spaţiile cu două sau trei dimensiuni.

N-aş vrea să închei evocarea acestor amintiri fără să amintesc primirea călduroasă pe care ne-au făcut-o colegii noştri greci şi încîntătoarele lor familii, autorităţile greceşti şi întreg poporul.

De asemenea, n-aş vrea să las să se irosească minunatele imagini adunate în memorie fără să subliniez cît de vii erau speranţele unei colaborări viitoare între popoarele balcanice, colaborare care nu era decît la începuturile ei şi pe care P. Zervos, în discursul de încheiere, o numea deja : Uniunea interbalcanică a matematicienilor.

Apa limpede a fîntînii Castalie, din care ne-am împărtăşit cu toţii, n-a constituit numai un chezaş de pace, de strînsă colaborare, dar şi de întoarcere periodică în acete locuri unde regăsim forţa inspiraţiei din realităţile lumii noastre, simbol al experienţei de care ştiinţa noastră are nevoie fără încetare.

Credincioşi angajamentelor luate, ne-am reîntîlnit în 1937 la Bucureşti.

Aici participarea tuturor ţărilor a fost strălucită. Mai e oare nevoie să vă citez în acest sens titlurile expunerilor şi numele autorilor? Ar fi poate necesar pentru faptul că acel septembrie 1937 e acum departe în timp şi am rămas prea puţini dintre cei prezenţi atunci.

Să amintim în primul rînd expunerea lui M. Petrovich, preşedintele Academiei de Ştiinţe din Belgrad, personalitate multilaterală, organizator şi explorator, specialist în algebră, aritmetică, analiză, mecanică, muzician şi umanist. D-sa ne-a prezentat particularităţile de ordin aritmetic legate de ecuaţiile diferenţiale algberice, deschizînd în felul acesta căi încă prea puţin cunoscute în studiul acestei teorii în care totuşi progresele au fost imense.

Am avut apoi ocazia să ascultăm expunerea lui Kyril Popov ilustru specialist în matematică şi mecanică de la Sofia, şi el, ca şi Pompeiu şi Petrovich, elev al lui Poincaré; toţi trei au urmat eforturile multilaterale ale maestrului lor de a da o interpretare matematică fenomenelor fizice celor mai complexe. Expunerea lui Popov trata despre problema balisticii exterioare în lumina matematicii actuale; autorul era un izvor nesecat de ştiinţă şi gîndire matematică, o personalitate care face cinste ţării sale, secolului nostru.

M. Obrechkoff, savant deja renumit, ne-a vorbit despre procedee de însumare cu măiestria pe care i-o ştiam din totdeauna şi care ne făcea să-l invidiem pentru cercetările efectuate în această ramură a matematicii pe care nu am putut s-o introducem la noi.

Ph. Théodoridés, marele specialist care avea să aducă Aeronauticii contribuţii de mare preţ, a prezentat comunicarea „Navigaţia aeriană pe timp cu vînt variabil".

G. Ţiţeica a trasat, în expunerea sa, liniile directoare ale propriei sale concepţii asupra geometriei mişcărilor cu un parametru ale unui corp solid. El continua astfel o idee care, emisă fiind de Poinsot, fusese reluată de Study în a sa *Geometrie der Dynamen* şi apoi reformulată într-o manieră modernă de către E. Cartan.

Turcia n-a mai fost reprezentată prin ilustra pleiadă care a participat la Congresul de la Atena; în schimb, Universitatea din Istambul ne-a trimis un tînăr savant, originar din ţara noastră, W. Prager, astăzi unul dintre marii specialişti de prestigiu internaţional în problemele actuale ale elasticităţii. Aceasta este încă o dovadă că străvechiul nostru pămînt pe care se ridică şcoala modernă, rodeşte talente deosebite.

Am urmărit cu toţii — nu mai e nevoie să subliniez cu cît interes — expunerile maeştrilor şcolii greceşti prezenţi la congres: P. Zervos şi N. Hatzidakis, N. Kriticos şi C. Georgicopoulos sau N. Sakelarion, Sp. Voutzinas şi D. Kotsakis, regretînd în acelaşi timp lipsa lui C. Papaioannou, secretarul primului congres, care însă s-a ocupat în mod activ de *Revista Interbalcanică a Matematicienilor*, organul efectiv al uniunii noastre.

Matematicienii noştri s-au simţit cu deosebire privilegiaţi să aibă printre ei savanţi ca L. Tchakaloff, cu care aveam deja relaţii ştiinţifice strînse, sau J. Karamata, bun prieten cu mulţi dintre noi, discipolul preferat, dacă nu ne înşelăm, al lui M. Petrovich, astăzi unul dintre marii specialişti în problemele tauberiene, sau V. Avakumorič, cercetător sistematic al problemelor integralei lui Laplace.

Toţi eram curioşi şi mai ales M. Petrovich — cum a spus el însuşi — de comunicarea pe care avea s-o prezinte congresului maestrul nostru D. Pompeiu. Aceasta a fost o adevărată bijuterie, ca multe din comunicările pe care le făcea la acea dată, o ţesătură de consideraţii subtile asupra grupurilor de transformări aplicate ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi. Răsplata a venit din partea lui M. Petrovich însuşi care, în cea de-a doua comunicare a sa, dădea o demonstraţie geometrică a frumoasei şi neaşteptatei teoreme a lui Pompeiu, despre triunghiul echilateral.

Urmînd pe maeştri bătrîni, toţi matematicienii noştri, sau aproape toţi, au fost prezenţi la congres, dacă nu cu comunicări — pentru a nu da o notă prea naţională congresului — cel puțin printr-o participare activă la schimbul de idei în această mică lume internațională a congresului.

S. Stoilov a prezentat o aplicație și o generalizare a teoremei lui Hurwitz în cadrul teoriei sale, astfel foarte inteligibilă, V. Vâlcovici ne-a vorbit despre cercetările d-sale asupra teoremelor generale ale mişcării a căror aprofundare urma să o continue, C. Popovici a reluat criticile aduse celor care utilizează concepte funcționale în cercetarea soluțiilor ecuațiilor de diferite spețe, O. Mayer, savantul geometru de la Iași, a relevat măiestria la care ajunsese școala de geometrie de la Universitatea sa printr-o lucrare asupra geometriei biaxiale diferențiale a curbelor, Th. Angheluță de la Cluj a prezentat o elegantă reciprocă a unei teoreme a lui Țițeica asupra transformărilor conforme, subsemnatul a prezentat cercetarea în cadrul generalizării tridimensionale a teoremei lui Poisson-Jensen, a unei relații cantitative pe care să se sprijine o teorie a funcțiilor holotope în E_3; politehnicienii, dintre care o parte fuseseră la Atena, C. C. Teodorescu, C. Budeanu, Cristea Mateescu, Pl. Andronescu au continuat să-și arate dorința activă de a menține cea mai strînsă legătură cu știința noastră și de a păstra, prin prezența lor la cel de-al doilea congres, caracterul de generalitate pe care îl avusese cel de la Atena.

Apoi, pleiada de matematicieni, personalități importante care și-au pus amprenta asupra matematicii românești din epoca respectivă : Al. Pantazi, subtil specialist în geometrie, discipol al lui E. Cartan, a prezentat congresului o comunicare privind proprietatea proiectivă a suprafeței lui Bol; Dan Barbilian, personalitate viguroasă, geometru, axiomatizant, specialist în algebră, aritmetică și poet; Al. Ghika, care deja începea să-și dovedească măiestria în materie de analiză funcțională ; Al. Froda cu teoremele sale neverosimile, însă perfect exacte asupra funcțiilor reale cele mai generale; G. Sudan, elev și asistent al lui David Hilbert, specialist în aritmetică și algebră, spirit de o acuitate geometrică ; Miron Nicolescu, a cărui cercetare sistematică asupra teoriei funcțiilor poliarmonice, calorice și policalorice găsise un puternic ecou între savanții epocii ; Elie Carafoli, aerodinamist, creatorul aripilor care-i poartă faima în toate colțurile lumii ; N. Ciorănescu, specialist multilateral și subtil în analiză și algoritmie ; Tiberiu Popoviciu care s-a dedicat ulterior cu mare succes studierii și aplicării funcțiilor convexe ; G. Călugăreanu, fin descoperitor de invarianți, în special de prelungiri ale funcțiilor ; M. Haimovici, cunoscut deja datorită studiilor sale asupra formelor diferențiale ; Gh. Mihoc, geometru și probabilist, al cărui nume și operă inovatoare în domeniul teoriei lanțurilor de probabilități erau încă de pe atunci cunoscute de către toți probabiliștii ; Grigore C. Moisil, promotorul metodelor funcționale moderne în mecanică, spirit pătrunzător, specialist în algebră și logician de avangardă ; N. Teodorescu, teoreticianul derivatei areolare ca operator funcțional, cercetător rafinat și cunoscător al substratului geometric al ecuațiilor cu derivate parțiale și al teoriei despre spații a lui Finsler ; Caius Iacob, savant încă tînăr, specialist în problemele reprezentării, conforme și ale dinamicei jeturilor.

Am putut schița acest tablou — incomplet de altfel — al cercurilor de matematicieni români reprezentate la Congresul din 1937, deoarece este cel mai limpede în memoria noastră. Dar matematicienii de prestigiu din țările noastre, ale căror figuri le-am evocat aici, sînt pentru noi dovada incontestabilă a faptului că bătrînul pămînt al Balcanilor rodește talente mari — care se pot afirma, sprijinite acum de școli și de instituții moderne, și cu condiția ca să fie favorizate de vremuri pașnice și înțelegere.

Nu vom putea uita niciodată atmosfera entuziastă, de un înalt nivel intelectual, favorizată de timpul minunat ca și de manifestațiile de înțelegere frățească dintre participanți. Eram conștienți de faptul că în aceste zile de muncă și destinderi „academice" dar plăcute s-au pus bazele unor legături definitive. Și ne verificăm această impresie acum, în aceste zile cînd se reiau relațiile dintre noi, pe baza aceleiași bunăvoințe reciproce, la același grad de intensitate, așa cum eram la încheierea congresului din 1937.

Împreună cu P. Zervos am urmărit cîtva timp, prin corespondență, un schimb de vederi în scopul organizării definitive a Uniunii Interbalcanice a Matematicienilor.

Dar istoria a hotărît altfel, a tăiat, prin războiul dezlănțuit de fasciști, o graniță brutală care însă n-a sfărîmat buna înțelegere reciprocă, sufletească și științifică pe care deja o realizasem, deoarece aceasta se statornicise pe afinitățile profunde dintre popoarele noastre, dintre culturile noastre în poziția noastră geografică.

Astăzi reînnodăm firul, acolo unde a fost rupt, pentru a realiza colaborarea în domeniul matematicienilor, și facem acest gest cu aceeași voință de a crea, prin eforturile noastre reunite, atmosfera prielnică dezvoltării fiecăruia dintre popoarele noastre.

Matematicienii nu sînt singurii în realizarea acestei aspirații. Le-au luat-o înainte medicii. Organizația lor internațională și-a reluat activitatea care a fost, ca și a noastră, întreruptă timp de mai bine de douăzeci de ani; ea se dezvoltă sub cele mai bune auspicii.

Sînt și alte instituții cu caracter mai general care urmăresc aceleași scopuri : de a organiza și de a favoriza colaborarea interbalcanică. Activitatea noastră se poate desfășura în condiții mai favorabile decît în trecut. Țările noastre posedă acum fiecare o universitate înfloritoare, în plin avînt, iar operele științifice ale cadrelor acestor universități chezășuiesc un viitor strălucit.

S-au creat pentru tinerii matematicieni institute de cercetări, unde ei se pot consacra exclusiv acestei munci, dotate cu biblioteci tot mai complete, numeroase reviste și edituri unde li se publică lucrările. Tot mai numeroși, tot mai bine pregătiți, tinerii noștri matematicieni cuceresc în fiecare zi noi domenii ale acestei științe care are o nesecată forță de dezvoltare; ei abordează și aprofundează mereu subiecte noi, își cuceresc un loc tot mai larg în cercurile creației matematice. Știința aceasta este azi, în ansamblul ei, modificată radical. Chiar și marile ramuri clasice prezintă o structură foarte diferită față de care se prezenta în cazul unei încercări de sistematizare acum treizeci de ani, datorită intervenției algebrei, topologiei și logicii matematice.

Probabilitatea cu teoria măsurii și statistica matematică, avînd în slujba sa analiza funcțională, au căpătat în zilele noastre o importanță care nu ne mai permite să le neglijăm în discuțiile Uniunii. Organizatorul care ar omite să prevadă o ramură sau alta a matematicienilor ar fi vinovat nu față de vreo necesitate pur teoretică de simetrie, ci față de societatea care ne creează obligații, față de armonia generală, de fizicianul, chimistul sau biologul care pe zi ce trece cheamă tot mai mult matematica în ajutor, față de inginerul care trebuie să-și organizeze munca în fabrică, de conducătorii din industrie care-și alcătuiesc programul conform regulilor impuse de metodele matematice, chiar față de mașini, de mașinile de control automat care se nasc direct din calculul și știința matematică.

Rămînînd abstractă, știința noastră constituie totuși, azi, una din uneltele de care oamenii nu se mai pot lipsi pentru ca toate să meargă bine, să fie îndreptate în folosul lor.

Ea trebuie să fie folositoare. Și pentru aceasta trebuie să fie bine organizată. Ne-am întîlnit aici pentru a ne sfătui asupra celor mai nimerite procedee de organizare, și astfel să putem fi de folos popoarelor noastre, lumii întregi.

Sîntem încredințați cu toții că reluarea activității Uniunii Interbalcanice a Matematicienilor reprezintă unul dintre cele mai bune mijloace de realizare a acestei organizări.

Pe deplin convinși de justețea acestui crez comun, matematicienii din regiunea Balcanilor au traversat marea, Pindul și valurile Dunării mărețe, pentru a reprezenta la această reuniune cele șapte țări balcanice, pentru a ne înțelege asupra mijloacelor prin care vom putea realiza ceea ce dorim.

Considerăm că, așa cum am spus mai înainte, Uniunea Interbalcanică a Matematicienilor reprezintă una din formele cele mai concrete, cele mai rodnice de cooperare științifică și umană. În cazul în care împărtășiți această idee și credeți că este util ca să ne reluăm activitatea într-un astfel de cadru, sînt autorizat să vă propun reunirea unei Uniuni Interbalcanice a Matematicienilor la București în 1966 sau 1967, ținînd cont de conveiențele tehnice. Realizînd un punct de vedere comun asupra acestor probleme vom fi făcut un pas hotărîtor către țelul nostru măreț, de a fi de folos popoarelor noastre, științei, întregii omeniri.

PROTOCOLUL

reuniunii delegaților matematicienilor din cele șase țări balcanice: Albania, Bulgaria, Grecia, România, Turcia și Iugoslavia, ținută la București, în 8 iulie 1965

În vederea reluării activității Uniunii Interbalcanice a Matematicienilor, inițiată la Congresul din 1934 de la Atena și continuată prin lucrările Congresului din 1937 de la București, subsemnații delegați ai matematicienilor celor șase națiuni au luat în unanimitate deciziile următoare:

1. De a relua activitatea Uniunii Interbalcanice a Matematicienilor prin toate mijloacele compatibile cu scopurile unei asemenea organizații.

2. Matematicienii fiecărei țări vor participa la U.I.B.M. prin intermediul Comitetului național al matematicienilor.

3. Fiecare Comitet va delega, în termen de trei luni, doi membri, pentru a constitui un Comitet provizoriu al Uniunii, care va avea de scop:

— De a redacta un proiect de Statut al Uniunii, care va trebui să fie supus Congresului, prentru a fi discutat și aprobat.

— Comitetul va trebui să se întîlnească de mai multe ori, după necesități.

4. Al 3-lea Congres Interbalcanic al Matematicienilor va fi organizat în România, în anul 1966, cu concursul tuturor celorlalte Comitete naționale.

(ss) — Petraq Pilika, Prof. Univ. din Tirana
— Demetrios A. Kappos, Prof. Univ. din Atena
— Osman Kraja, Prof. Univ. din Tirana
— Acad. Ljubomir Iliev, Secretar al Academiei Bulgare de Științe
— Saffet Süray, Prof. Univ. din Ankara
— Boyan Petkantschin, Prof. Univ. Sofia
— Acad. Tatomir P. Andjelić, Prof. Univ. din Belgrad
— Ernest Stepanić, Prof. Univ. din Belgrad
— Academician Octav Onicescu, Președintele Comitetului român de inițiativă
— Acad. N. Teodorescu, secretar general al Comitetului român, Decanul Facultății de Matematică și Mecanică
— Acad. Gh. Mihoc, Rectorul Universității București
— Acad. Miron Nicolescu, Directorul Institutului de Matematică al Academiei R.P.R.
— Acad. Gr. C. Moisil, Președintele Comitetului național de Matematică, Președintele Societății de Științe matematice din R.P.R.
— Acad. Mendel Haimovici, Directorul Institutului de Matematică al Academiei R.P.R. — Filiala Iași.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

20

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
383

ЮRk ПКТ 1[illegible]

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

CABIRIA ANDREIAN – CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systémes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 6, P. 829—994, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informaţia" – c. 2059

43831

Lei 12. —

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

7

TOMUL 17
1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU, — membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

În ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti. Revista apare de 10 ori pe an.

TOM. 17, Nr. 7
1965

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

SUMAR

Pag.

RADU ROŞCA, Asupra unei clase de congruenţe Vincensini . . . 997

ELENA MURGULESCU, Asupra devierii unui jet gazos subsonic, de lărgime finită, printr-un obstacol diedric 1007

CORNELIU CONSTANTINESCU, O teorie axiomatică pentru problema Dirichlet neliniară 1021

MARIUS I. STOKA, Conexiuni afine invariante pe un spaţiu riemannian V_3 (II) 1027

WILHELM KECS, Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor privind încovoierea barelor drepte 1035

MARIANA COROI-NEDELCU, Asupra soluţiei unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de tip eliptic în E_m, analog ecuaţiei lui Beltrami în complex 1049

EFTIMIE GRECU, Asupra spaţiilor Riemann V_4 cu conexiune constantă de genul doi 1059

N. RADU, Asupra functorului de completare 1077

LIVIU SOFONEA, Asupra concepţiei cuantice relativiste a gravitaţiei 1089

ION TOMESCU, Metoda pentru determinarea conductibilităţilor totale ale unui multipol 1109

MIHAI ŞERBAN şi CANTEMIR RIŞCUŢIA, Indicatorii de stabilitate, model matematic pentru structura nucleului celular . . . 1117

ELEMÉR ROSINGER, Structuri pseudotopologice (III) 1133

LUCIAN BĂDESCU, Functori adjuncţi contravarianţi 1145

GH. PETRESCU, Asupra mişcării apelor arteziene într-un domeniu concav 1153

S. IANUŞ, Asupra spaţiului-timp De Sitter 1161

DAN SOCOLESCU, Asupra mişcării subsonice în jurul unui cilindru circular 1169

RECENZIE 1177

CRONICA ŞTIINŢIFICĂ 1179

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 995–1180, BUCUREŞTI, 1965

ASUPRA UNEI CLASE DE CONGRUENȚE VINCENSINI

DE

RADU ROȘCA

Se studiază congruențele Vincensini de unghi variabil cărora li se impune condiția ca *liniile caracteristice* să coincidă cu rețelele focale.
Se obține astfel o clasă de congruențe (congruențe (ω)) pentru care problema reprezentării sferice se reduce la o problemă de cvadraturi și ale cărei proprietăți geometrice sînt puse în evidență.

O *congruență Vincensini* (sau congruență (ω)) este o *congruență Ribaucour*, ale cărei plane focale asociate fac același unghi ω, *constant* sau *variabil*.

Chiar în ipoteza mai simplă a unui unghi ω constant, integrarea sistemului de două ecuații cu derivate parțiale care definește reprezentarea sferică a unui asemenea tip de congruență, este o problemă a cărei rezolvare nu se cunoaște. Totuși aceste congruențe posedă proprietăți remarcabile [1], [2], în fiecare din cele două ipoteze care se pot face privitor la unghiul ω. Situîndu-ne în cazul general (al unui unghi ω variabil), ne propunem în acest articol să studiem congruențele (ω) pentru care rețelele focale pe cele două pînze focale să coincidă cu *liniile caracteristice*.

I. Vom presupune congruența în chestiune raportată la desfășurabilele sale u^1, u^2 și fie $\Sigma_{\mu|}$ ($\mu = 1, 2$) cele două pînze focale corespunzătoare.

Desemnînd cu $G_{\alpha\beta}$ *tensorul metric* al reprezentării sferice și prin $g_{\mu|\alpha\beta}$ și $b_{\mu|\alpha\beta}$ *tensori fundamentali primi și secunzi ai* suprafețelor $\Sigma_{\mu|}$, avem formulele generale

$$g_{1|11} = 4\left(\frac{\partial \rho}{\partial u^1} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}\rho\right)^2$$

$$g_{1|12} = -4\rho\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u^1} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}\rho\right)$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 7, P. 997–1005, BUCUREȘTI, 1965

$$(1)\qquad \begin{aligned}
g_{1|22} &= 4\rho^2\left(G_{22}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}^2\right)\\
g_{1|} &= 4\rho\sqrt{G_{22}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^1}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\rho\right)\\
g_{2|11} &= 4\rho^2\left(G_{11}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}^2\right),\\
g_{2|12} &= -4\rho\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^2}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\rho\right),\\
g_{2|22} &= 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^2}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\rho\right)^2,\\
\sqrt{g_{2|}} &= 4\rho\sqrt{G_{11}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^2}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\rho\right),
\end{aligned}$$

şi

$$(2)\qquad \begin{aligned}
b_{1|11} &= -2\sqrt{\frac{G}{G_{22}}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^1}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\rho\right),\\
b_{1|12} &= 0,\\
b_{1|22} &= -2\sqrt{\frac{G}{G_{22}}}\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\rho,\\
b_{2|11} &= 2\sqrt{\frac{G}{G_{11}}}\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}\rho,\\
b_{2|12} &= 0,\\
b_{2|22} &= 2\sqrt{\frac{G}{G_{11}}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u^2}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\rho\right).
\end{aligned}$$

Simbolurile lui Christoffel $\{\ \}$ care figurează în (1) şi (2) corespunzînd reprezentări sferice; 2ρ este distanţa focală şi $g_{\mu|}$, G *discriminanţii* primelor forme ale suprafeţelor $\Sigma_{\mu|}$ şi ale reprezentării sferice.

Aceasta fiind o congruenţă (ω), este caracterizată prin

$$(3)\qquad G_{11}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\right)^2,\qquad G_{22}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\right)^2$$

de unde se deduce cu Vincensini

$$(4)\qquad \begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}=\operatorname{cotg}\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\qquad \begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}=\operatorname{cotg}\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}$$

ω fiind o *funcție oarecare* de funcția necunoscută $\varphi(u^1, u^2)$. Dacă θ este unghiul planelor focale, cele două ecuații care definesc reprezentarea sferică a congruenței (cu aproximația unui paralelism [2]) sînt :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^1 \partial u^2} - 2m\cos^2\frac{\theta}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^2} = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^1 \partial u^2} &+ 2m\sin\theta\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^1 \partial u^2} + \\ &+ \left(1 + 2\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}\right)\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^2} + m(\Pi\,\theta)\cos\theta = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Am notat $m = \operatorname{cotg}\omega$, și desemnat cu Π operatorul :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\,\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\,\frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Remarcăm că Π este un *invariant* al transformării lui Sophus Lie

$$\varphi_1 = \varphi\left(ku^1, \frac{u^2}{k}\right), \quad \xi_1 = \xi\left(ku^1, \frac{u^2}{k}\right),$$

unde ξ este o funcție oarecare introdusă în Π și k o constantă arbitrară.

Aceasta explică proprietatea congruențelor (ω) de a fi definite cu aproximația unui paralelism. În fine, ecuațiilor (5) și (6) (ecuația (6) este de fapt [2] formula lui Gauss pentru forma $\mathrm{d}\sigma^2 = G_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta$) să le adăugăm ecuația lui Laplace la care satisface ρ și care se poate scrie, ținînd seama de (5),

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u^1 \partial u^2} &+ m(\Pi \lg\rho) + \left(\cos\theta + 4m^2\cos^2\frac{\theta}{2} + \right. \\ &\left. + 2\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^2} = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Dacă introducem acum cele patru funcții

$$s_\mu = \frac{\partial \lg\rho}{\partial u^\mu} + m\frac{\partial\varphi}{\partial u^\mu}, \tag{8}$$

$$r_\mu = \frac{\partial \lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\partial u^\mu} + m\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^\mu}, \quad (\mu=1,2) \tag{9}$$

se obţine cu ajutorul lui (3) şi (4) următoarele expresii pentru formulele generale (1) şi (2)

$$\tag{10} \begin{aligned} g_{1|11} &= 4\,\rho^2 s_1^2, & b_{1|11} &= -2\,\rho s_1 \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial u^1}, \\ g_{1|12} &= -4m\,\rho^2 s_1 \frac{\partial\varphi}{\partial u^2}, & b_{1|12} &= 0, \\ g_{1|22} &= 4(1+m^2)\,\rho^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\right)^2, & b_{1|22} &= 2\,\rho r_2 \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial u^2} \\ \sqrt{g_{1|}} &= 4\,\rho^2 s_1 \frac{\partial\varphi}{\partial u^2}, \end{aligned}$$

şi

$$\tag{11} \begin{aligned} g_{2|11} &= 4(1+m^2)\,\rho^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\right)^2, & b_{2|11} &= -2\rho r_1 \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial u^1}, \\ g_{2|12} &= -4m\,\rho^2 s_2 \frac{\partial\varphi}{\partial u^1}, & b_{2|12} &= 0, \\ g_{2|22} &= 4\,\rho^2 s_2^2, & b_{2|22} &= 2\rho s_2 \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial u^2}. \\ \sqrt{g_{2|}} &= 4\,\rho^2 s_2 \frac{\partial\varphi}{\partial u^1}, \end{aligned}$$

De asemenea desemnînd cu $\frac{b_{1|}}{g_{1|}}$ şi $\frac{b_{2|}}{g_{2|}}$ *curburile gaussiene* ($b_{\mu|} =$ $= \det(b_{\mu|\alpha\beta})$) al celor două suprafeţe $\Sigma_{\mu|}$ se găseşte respectiv

$$\tag{12} \frac{b_{1|}}{g_{1|}} = -\frac{\sin^2\theta}{4\rho^2} \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^2}} \frac{r_2}{s_1}, \qquad \frac{b_{2|}}{g_{2|}} = -\frac{\sin^2\theta}{4\rho^2} \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}} \frac{r_1}{s_2}.$$

Este vizibil că se poate scrie

$$s_\mu = \frac{\partial s}{\partial u^\mu} \text{ şi } r_\mu = \frac{\partial r}{\partial u^\mu}$$

r şi s *fiind două funcţii necunoscute*, şi astfel cu ajutorul lui (5) ecuaţiile (6) şi (7) iau respectiv formele mai simple

$$\tag{13} \frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial r}{\partial u^1} \frac{\partial r}{\partial u^2} \cos\theta + \left(1 + m^2 + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial u^1} \frac{\partial\varphi}{\partial u^2} = 0,$$

$$\tag{14} \frac{\partial^2 s}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial s}{\partial u^1} \frac{\partial s}{\partial u^2} + \left[(1+m^2)\cos\theta + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}\right] \frac{\partial\varphi}{\partial u^1} \frac{\partial\varphi}{\partial u^2} = 0.$$

II. Acestea fiind, plecînd de la ecuaţia generală [3] a reţelei conjugate formate de *liniile caracteristice*, condiţia geometrică impusă congruenţei care ne interesează se scrie :

$$g_{\mu|22}\, b_{\mu|11} - g_{\mu|11}\, b_{\mu|22} = 0, \quad (\mu = 1,\ 2). \tag{1}$$

Raportîndu-ne la formulele (**I**.10) şi (**I**.11), condiţia (1) ne dă ecuaţiile

$$\begin{aligned} &(1+m^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial s}{\partial u^1}\frac{\partial r}{\partial u^2} = 0 \\ &(1+m^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial s}{\partial u^2}\frac{\partial r}{\partial u^1} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

care împreună cu (**I**. 5), (**I**. 13) şi (**I**. 14) definesc o congruenţă (ω) de tipul considerat, şi pe care o vom nota (ω_r).

În primul rînd rezultă imediat din (2) că *putem scrie* $r = r(s)$, r *fiind o funcţie arbitrară.*

Acestea fiind, eliminarea lui $\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2}$ $\left(\text{presupunem } \frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2} \neq 0\right)$ şi a expresiilor $\frac{\partial r}{\partial u^1}\,\frac{\partial r}{\partial u^2}$ şi $\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}$ dintr-una din ecuaţiile (2) şi din (**I**. 13), (**I**.14), ne dă ecuaţia :

$$\begin{aligned} &(1+m^2)\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} + 2\left[(1+m^2)\cos\theta + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}\right]\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \\ &\quad -\left(2 + 2m^2 + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Făcînd schimbarea de funcţie $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\lambda}$ şi ţinînd seama de semnificaţia lui m, ecuaţia de mai sus devine :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} + \left(2 - \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\right)\lambda + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi} - 2\cos\theta = 0. \tag{4}$$

Derivînd acum pe (4) respectiv în raport cu u^1 şi u^2, se deduce din cele două ecuaţii obţinute următoarele două :

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}\varphi^2}\frac{D(\varphi,\ s)}{D(u^1, u^2)} + 2\sin\theta\,\frac{D(\theta,\ s)}{D(u^1, u^2)} = 0. \\ &\left[-\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi} - 2\right)\right]\frac{D(\varphi,\ s)}{D(u^1,\ u^2)} + 2\ \sin\theta\,\frac{D(\theta,\ \varphi)}{D(u^1,\ u^2)} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Pe de altă parte din relaţiile (**I**. 9) care devin în cazul de faţă

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u^1} + m\frac{\partial\varphi}{\partial u^1} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\partial s}{\partial u^1} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u^2} + m\frac{\partial\varphi}{\partial u^2} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\partial s}{\partial u^2} \end{aligned}$$

obţinem

$$(7)\qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{D(\theta,\varphi)}{D(u^1,u^2)} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{D(\varphi,s)}{D(u^1,u^2)} = 0.$$

Rezultă aşadar, din simpla inspecţie a ecuaţiilor (5) şi (7), faptul important *că cele trei funcţii* φ, θ *şi* ω *care determină reprezentarea sferică a unei congruenţe* (ω_r) *depind de funcţia* $s(u^1, u^2)$.

III. Aceste preliminarii ne vor permite acum să căpătăm *ecuaţiile diferenţiale* care definesc această reprezentare sferică.

Ecuaţiile (**I**. 5), (**I**. 13) şi (**I**. 14) fiind omogene în raport cu $\frac{\partial^2 s}{\partial u^1 \partial u^2}$ şi $\frac{\partial s}{\partial u^1}\frac{\partial s}{\partial u^2}$, obţinem prin eliminarea lor următoarele două ecuaţii distincte :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\varphi'\left(-\lambda' + \cos\theta + \frac{\lambda^2\varphi'^2}{\sin^2\omega} - \frac{\omega'\varphi'\lambda^2}{\sin^2\omega}\right) = \lambda\left(\varphi'' - 2\operatorname{cotg}\omega\cos^2\frac{\theta}{2}\varphi'^2\right) \\ &\varphi'\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin^2\omega}\varphi'^2 - \frac{\omega'\varphi'}{\sin^2\omega}\right) = \varphi'' - 2\operatorname{cotg}\omega\cos^2\frac{\theta}{2}\varphi'^2 \end{aligned}$$

(accentele indicînd derivarea în raport cu *s*).

Cu ajutorul uneia dintre ecuaţiile (**II**.2) care se poate scrie

$$(2)\qquad \varphi'^2\lambda + \sin^2\omega = 0$$

şi introducînd o nouă funcţie $\eta = \frac{1}{\varphi'}$, obţinem prin eliminarea lui λ şi λ'

$$(3)\qquad \omega' = \frac{2\sin 2\omega\cos^2\frac{\theta}{2}}{1 + \eta\sin 2\omega - \eta^2\sin^2\omega}.$$

$$(4)\qquad \eta' = \frac{\sin 2\omega\cos^2\frac{\theta}{2}\,(1 - \eta\sin 2\omega + \eta^2\sin^2\omega)}{\sin^2\omega\,(1 + \eta\sin 2\omega - \eta^2\sin^2\omega)} - \frac{\cos\theta + \eta^2\sin^2\omega}{\eta\sin^2\omega}.$$

Ca verificare se poate constata că ecuaţia (**II**. 4), în care prealabil s-a înlocuit λ şi λ' dedus din (2), este suma ecuaţiilor (3) şi (4).

În fine, cu introducerea funcției η și ținînd seama de (2), ecuațiile (**II**. 6) devin

$$\theta' = -\frac{\sin\theta}{\eta}\left(\operatorname{cotg}\omega + \frac{1}{\eta^2\sin^2\omega}\right). \tag{5}$$

Rezultă astfel din studiul care precede *că reprezentarea sferică a unei congruențe* (ω_r) *este definită de un sistem sub formă normală a lui Cauchy, de trei ecuații diferențiale.*

Cele trei funcții η, ω și θ o dată determinate, atunci φ se capătă printr-o cvadratură, astfel încît reprezentarea sferică a unei congruențe (ω_r) conține în final *patru constante arbitrare.*

Pentru determinarea explicită a acestei congruențe mai rămîne de determinat ρ prin integrarea ecuației (**I**. 14) care devine

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u^1\partial u^2} + \left(1 + \frac{\cos\theta}{\eta^2\sin^2\omega} - \frac{\omega'}{\eta\sin^2\omega}\right)\frac{\partial s}{\partial u^1}\frac{\partial s}{\partial u^2} = 0 \tag{6}$$

și apoi sistemul complet integrabil

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} = \rho\left(1 + \frac{\operatorname{cotg}\omega}{\eta}\right)\frac{\partial s}{\partial u^1}\mathbf{N} - \rho\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^1},$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^2} = -\rho\left(1 + \frac{\operatorname{cotg}\omega}{\eta}\right)\frac{\partial s}{\partial u^2}\mathbf{N} + \rho\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^2},$$

unde **M** este vectorul de poziție a punctului care descrie suprafața mijlocie și **N** vectorul unitar al congruenței.

IV. Putem acum să dezvoltăm cîteva proprietăți geometrice remarcabile ale tipului de congruență (ω) pe care l-am pus în evidență. În primul rînd însemnînd cu $\frac{1}{\rho_{u^1}}$ și $\frac{1}{\rho_{u^2}}$ *curburile geodezice* ale liniilor de coordonate u^1 și u^2 pe sfera reprezentativă a unei congruențe Vincensini generale, se găsesc formulele simetrice

$$\frac{1}{\rho_{u^1}} = \frac{1}{G_{22}G^{11}}\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\} = -\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^2}} - \operatorname{cotg}\omega\sin\theta,$$

$$\frac{1}{\rho_{u^2}} = \frac{1}{G_{11}\sqrt{G^{22}}}\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\} = -\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial u^1}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}} - \operatorname{cotg}\omega\sin\theta.$$

Dar în cazul de faţă θ şi φ fiind funcţii de singurul argument $s(u^1, u^2)$ şi ţinînd seama şi de ecuaţia (**III**. 5), deducem formula

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho_{u^1}} = \frac{\sin\theta}{\eta^2 \sin^2\omega} = \frac{1}{\rho_{u^2}}.$$

În al doilea rînd, ţinînd seama că $r' = \frac{1}{\lambda}$ şi de (**III**. 2), se găseşte rezultatul important următor : curburile gaussiene ale suprafeţelor $\Sigma_{\mu|}$ exprimate de formulele (**I**. 12) *sînt egale în punctele omoloage şi au ca valoare*

$$(2)\qquad \frac{b_{1|}}{g_{1|}} = \frac{\sin^2\theta}{4\rho^2\eta^2\sin^2\omega} = \frac{b_{2|}}{g_{2|}}.$$

Observăm cu această ocazie relaţia simplă care leagă aceste curburi de curburile geodezice de mai sus.

În fine, vom stabili o a treia proprietate a congruenţelor (ω_r), care arată că într-un caz particular, aceste congruenţe fac parte dintr-o clasă de congruenţe studiată de B. Gambier [4].

În acest scop să calculăm curburile geodezice ale curbelor ce constituie reţelele focale pe fiecare suprafaţă $\Sigma_{\mu|}$.

Formulele generale cu notaţia utilizată sînt

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho_{\mu|u^1}} = \frac{1}{g_{\mu|22}\sqrt{g^{\mu|11}}}\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}_{\mu}, \quad \frac{1}{\rho_{\mu|u^2}} = \frac{1}{g_{\mu|11}\sqrt{g^{\mu|22}}}\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}_{\mu}.$$

Parantezele $\{\ \}_{\mu}$ şi $g^{\mu|\alpha\beta}$ $(\mu = 1,2)$ fiind simbolurile lui Christoffel şi *tensori metrici contravarianţi* corespunzători suprafeţelor $\Sigma_{\mu|}$.

În dezvoltarea calculelor, şi ţinînd seama de ecuaţia (**III**. 6) şi observînd că $\frac{\partial \lg\rho}{\partial u^{\mu}} = (1-\varphi'\operatorname{cotg}\omega)\frac{\partial s}{\partial u^{\mu}}$ se găseşte următorul fapt remarcabil:

În punctele omoloage pe cele două pînze focale $\Sigma_{\mu|}$ *sînt egale atît curburile geodezice ale coamelor de întoarcere cît şi curburile geodezice ale conjugatelor lor.* Aceste curburi au ca expresii respectiv

$$(4)\qquad \frac{1}{\rho_{1|u^2}} = \frac{\cos\theta}{2\eta\rho} = \frac{1}{\rho_{2|u^1}};$$

$$(5)\qquad \frac{1}{\rho_{1|u^1}} = \frac{\sin\omega}{s\rho}\,(\eta\omega'-1) = \frac{1}{\rho_{2|u^2}}.$$

Dacă impunem condiţia $\eta\omega' = 1$ (sau $\omega = \varphi + \text{const.}$), congruenţa (ω_r) face parte din clasa studiată de B. Gambier, de care am vorbit mai sus şi anume : *congruenţe pentru care unghiurile focale sînt egale în punctele omoloage şi în plus astfel încît curbele conjugate coamelor de întoarcere să fie geodezice.*

Este evident că acest caz particular uşurează rezolvarea sistemului format de ecuaţiile (**III**. 3), (**III**. 4) şi (**III**. 5) dar nu vom intra în detaliul acestei discuţii.

În final deci putem enunța următorul rezultat : *Reprezentarea sferică a unei congruențe Vincensini pentru care rețelele focale pe cele două pînze coincid cu liniile caracteristice* (congruență pe care am numit-o congruență (ω_r)) *este determinată de un sistem sub forma normală a lui Cauchy de trei ecuații diferențiale.* O congruență (ω_r) posedă următoarele proprietăți :

1°. *Curburile geodezice ale curbelor sferice ce corespund desfășurabilelor congruenței sînt egale.*

2°. *Curburile Gaussiene în punctele omoloage pe cele două pînze focale sînt egale între ele și egale cu cele precedente înmulțite cu* $\frac{\sin\theta}{4\rho^2}$ (2ρ și θ însemnînd respectiv distanța focală în unghiul focal).

3°. *Curburile geodezice în punctele omoloage pe cele două pînze focale, atît a coamelor de întoarcere cît și a conjugatelor lor sînt egale.*

Primită la redacție la 26 februarie 1965

Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47
București

BIBLIOGRAFIE

1. P. Vincensini, *Sur les réseaux et les congruences* (ω). Colloq. de Géométrie Diff. Louvin (1951).
2. — *Sur les généralisations de quelques problèmes de Géométrie différentielle et sur certains, cercles de congruences.* Acta Math., (1939).
3. L.P. Eisenhart, *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces.*
4. M. Gambier, *Congruences de cercles, points focaux.* Annales de Toulouse, (1933).

ASUPRA DEVIERII UNUI JET GAZOS SUBSONIC, DE LĂRGIME FINITĂ, PRINTR-UN OBSTACOL DIEDRIC

DE

ELENA MURGULESCU

Se consideră problema devierii unui jet gazos subsonic,de lărgime finită, printr-un obstacol diedric, în ipoteza că în spatele obstacolului se formează o zonă de fluid în repaus. De asemenea se admite că în fața obstacolului, care este concav spre jet, se formează o zonă de fluid în stagnare. Soluția problemei este dată folosind metoda hodografică a lui Ciaplîghin.

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat problema devierii unui jet de fluid incompresibil de lărgime finită, printr-un obstacol diedric. Ne propunem acum să reluăm aceeași problemă în cazul în care fluidul considerat este compresibil și în mișcare subsonică. Vom utiliza aceleași notații ca în lucrarea menționată.

1. *Ecuația cu derivate parțiale a problemei.* Mișcarea studiată este plană, permanentă și irotațională. Ea este raportată la un sistem de coordonate Oxy, axa Ox fiind axa de simetrie a configurației. Jetul este limitat lateral de liniile libere AE și $A'E'$ avînd în amonte lărgimea L. El este deviat printr-un obstacol diedric reprezentat prin segmentele OD și OD', simetrice față de axa Ox, făcînd unghiurile μ și $-\mu$ $(0 < \mu < \pi)$ cu această axă. Admitem ipoteza că în fața obstacolului se formează o regiune de fluid în repaus care este limitată de curba CBC', simetrică față de Ox. În fine, din punctele D și D' se detașează liniile libere DE și $D'E'$. Vom însemna prin m $(0 < m < \mu)$ unghiul cu axa Ox al direcției asimptotice comune liniilor libere AE și DE în aval. Liniilor libere $A'E'$ și $D'E'$ le vor corespunde în aval unghiul direcției asimptotice $-m$ (fig. 1).

Să considerăm potențialul vitezelor $\varphi(x, y)$ și funcția de curent $\psi(x, y)$. Fie u, v proiecțiile ortogonale ale vitezei pe axele Ox și Oy.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 7, P. 1007–1019, BUCUREȘTI, 1965

Avem sistemul fundamental [2], (p. 817 şi 842),

$$(1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\rho_0}{\rho}\dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\[2ex] v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\rho_0}{\rho}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases}$$

unde ρ este densitatea şi ρ_0 valoarea ei în punctul de viteză nulă.

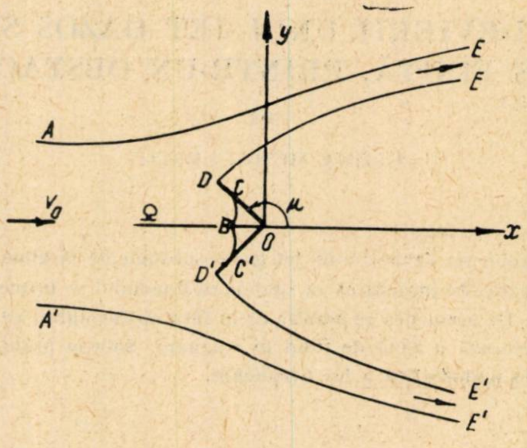


Fig. 1.

Alături de sistemul (1) se va considera ecuaţia lui Bernoulli

$$(2)\quad \frac{1}{2}V^2 + \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = 0,$$

unde $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ este modulul vitezei, iar p_0 valoarea presiunii p în punctul de viteză nulă.

În fine avem o lege de compresibilitate

$$(3)\quad \rho = \rho(p).$$

Viteza de propagare c a sunetului este dată de

$$(4)\quad c^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}.$$

Din (2), (3) şi (4) rezultă că p, ρ şi c^2 sînt funcţii de V^2. Vom însemna prin c_0 valoarea lui c în punctul de viteză nulă.

Fie θ unghiul vectorului viteză cu axa Ox. Se ştie că dacă se trece la variabilele hodografice V, θ, punînd

$$u = V\cos\theta, \qquad v = V\sin\theta$$

sistemul (1) devine

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \dfrac{\rho_0}{\rho} V \dfrac{\partial \psi}{\partial V}, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial V} = V \left(\dfrac{\rho_0}{\rho V} \right)'_V \dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Vom admite în continuare că avem legea de compresibilitate adiabatică

$$(6)\qquad \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

din care se deduce

$$(7)\qquad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V^2}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Eliminînd pe φ din (5) se deduce ecuaţia lui Ciaplîghin

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\rho_0}{\rho} V \frac{\partial \psi}{\partial V} \right) - V \left(\frac{\rho_0}{\rho V} \right)'_V \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0,$$

care în cazul legii de compresibilitate (6), ţinînd seama de (7), devine [3]

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{2}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right] + \frac{1 - (2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0,$$

unde

$$(10)\qquad \tau = \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{c_0^2}, \quad \beta = \frac{1}{\gamma-1}.$$

În cazul mişcării subsonice avem

$$0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2\beta+1}.$$

Prin trecerea la planul hodografic Ouv în care V şi θ sînt coordonatele polare, imaginea mişcării va fi un sector de coroană circulară Ω^* cu razele V_0 şi V_1 şi deschiderea 2μ, avînd ca axă de simetrie Ou (fig. 2).

Am notat prin V_0 valoarea constantă a vitezei V pe liniile libere AE şi $A'E'$ şi pe liniile libere DE şi $D'E'$ în lungul cărora presiunea este constantă. La fel, V_1 este valoarea constantă pe care o ia viteza V pe linia liberă CBC'. Avem $0 < V_1 < V_0$. Vom scrie $V_1 = qV_0 (0 < q < 1)$.

2. *Problema la limită.* Condiţiile la limită ale problemei se stabilesc în mod analog ca şi în cazul incompresibil. Va trebui să găsim o soluţie $\psi(\tau, \theta)$ a ecuaţiei (9), care să fie mărginită şi continuă împreună cu deriva-

tele de ordinul întîi şi doi în Ω^* şi să verifice condiţiile

$$(11)\quad \begin{cases} \psi = \frac{h}{2} \text{ pentru } V = V_0, & 0 < \theta < m, \\ \psi = 0 \quad \text{"} \quad V = V_0, & m < \theta < \mu, \\ \psi = 0 \quad \text{"} \quad V_1 < V < V_0, & \theta = \mu, \\ \psi = 0 \quad \text{"} \quad V = V_1, & 0 < \theta < \mu, \end{cases}$$

unde $h > 0$ este o constantă ce urmează să fie determinată. Din motive de simetrie va trebui să avem $\psi = 0$ pentru $V_1 < V < V_0$, $\theta = 0$.

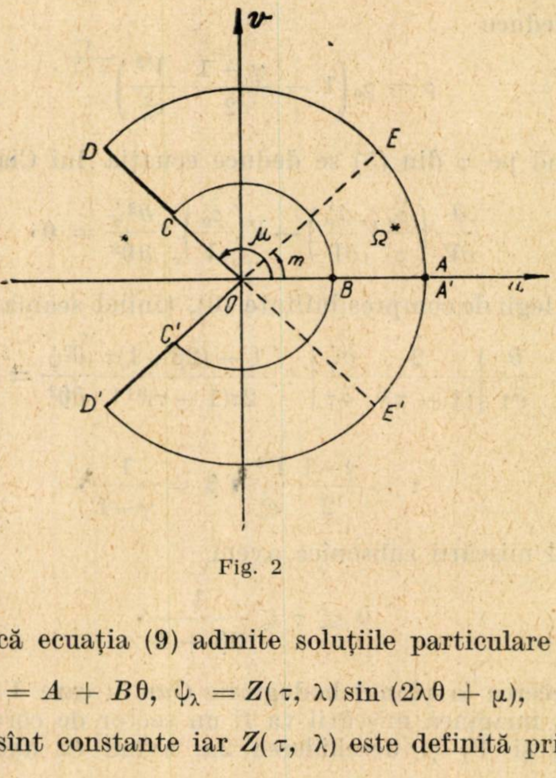


Fig. 2

Se ştie [4] că ecuaţia (9) admite soluţiile particulare

$$(12)\quad \psi_0 = A + B\theta, \quad \psi_\lambda = Z(\tau, \lambda) \sin (2\lambda\theta + \mu),$$

unde A, B, λ, μ sînt constante iar $Z(\tau, \lambda)$ este definită prin

$$(13)\quad Z(\tau, \lambda) = \tau^\lambda Y(\tau, \lambda)$$

introducînd seria hipergeometrică a lui Gauss

$$(14)\quad Y(\tau, \lambda) = F(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda, \tau) = 1 + \frac{a_\lambda b_\lambda}{1 \cdot c_\lambda} \tau + \frac{a_\lambda (a_\lambda + 1) b_\lambda (b_\lambda + 1)}{1 \cdot 2 c_\lambda (c_\lambda + 1)} \tau^2 + \dots$$

Se presupune că $\lambda \neq$ întreg negativ.

Numerele a_λ, b_λ, c_λ sînt date de

$$(15)\quad \begin{cases} a_\lambda = \dfrac{1}{2}\left[(2\lambda+\beta)+\sqrt{(8\beta+4)\lambda^2+\beta^2}\right], \\ b_\lambda = \dfrac{1}{2}\left[[(2\lambda+\beta)-\sqrt{(8\beta+4)\lambda^2+\beta^2}\right], \\ c_\lambda = 2\lambda+1. \end{cases}$$

Pentru rezolvarea problemei la limită astfel puse şi prin analogie cu cazul incompresibil deja tratat vom încerca o soluţie de forma

$$(16)\quad \psi = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n Z(\tau, \lambda_n)\sin 2\lambda_n\theta + B_n Z(\tau, -\lambda_n)\sin 2\lambda_n\theta\right]$$

luînd

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2\mu},\ \mu = \mu_n = 0, \quad (\lambda_n \neq \text{întreg pozitiv}),$$

iar constantele A, B, A_n şi B_n urmînd să fie determinate prin condiţiile (11). Să notăm prin τ_0 valoarea lui τ corespunzătoare lui V_0, adică

$$(18)\quad \tau_0 = \frac{\gamma-1}{2}\frac{V_0^2}{c_0^2}$$

şi să punem de asemenea

$$(19)\quad \tau_1 = \frac{\gamma-1}{2}\frac{V_1^2}{c_0^2} = q^2\tau_0,\ (0 < \tau_1 < \tau_0).$$

Condiţia $\psi = 0$ pentru $\theta = \pm\mu$, $\tau_1 < \tau < \tau_0$ va fi satisfăcută dacă luăm $A = B = 0$. Va trebui apoi să avem $\psi = 0$ pentru $\tau = \tau_1$, $-\mu < \theta < \mu$, deci

$$A_n Z(\tau_1, \lambda_n) + B_n Z(\tau_1, -\lambda_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

de unde

$$B_n = -\frac{Z(\tau_1, \lambda_n)}{Z(\tau_1, -\lambda_n)}A_n.$$

Vom avea astfel

$$(20)\quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z(\tau, \lambda_n)\sin\frac{n\pi}{\mu}\theta,$$

unde

$$(21)\quad z(\tau, \lambda_n) = Z(\tau, \lambda_n) - \frac{Z(\tau_1, \lambda_n)}{Z(\tau_1, -\lambda_n)}Z(\tau, -\lambda_n).$$

Funcţia $z\ (\tau,\ \lambda_n)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$(22)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\ \tau(1-\tau)^{-\beta}\, z'_{\tau}\,(\tau,\ \lambda_n)\right]-\ \lambda_n^2\,\frac{1-(2\beta+1)\,\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\,z(\tau,\lambda_n)=0.$$

Avem, conform lui (21), $z(\tau_1,\ \lambda_n)=0$. Nu putem avea $z'_{\tau}(\tau_1,\ \lambda_n)=0$ căci astfel am avea $z(\tau,\ \lambda_n)\equiv 0$, or se ştie că $Z(\tau,\ \lambda_n)$ şi $Z(\tau,\ -\lambda_n)$ sînt liniar distincte pentru $\lambda_n\neq$ întreg pozitiv.

Putem deci presupune pentru simplificarea calculelor ulterioare şi modificînd valoarea coeficientului A_n, că avem

$$(23)\qquad z'_{\tau}(\tau_1,\ \lambda_n)=1.$$

Vom scrie deci

$$(20')\qquad \psi=h\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,z(\tau,\ \lambda_n)\sin 2\lambda_n\theta=h\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,z(\tau,\lambda_n)\sin n\ \theta',$$

unde $\theta'=\frac{\pi}{\mu}\,\theta$, aducînd astfel soluţia la o formă propusă de L.N.Sretenski [5] într-un caz particular.

Prin acest fel de definire a lui $z(\tau,\ \lambda_n)$ ca o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (22), care satisface condiţiile iniţiale

$$z(\tau_1,\ \lambda_n)=0,\quad z'_{\tau}(\tau_1,\ \lambda_n)=1$$

va dispărea evident şi restricţia ca $\lambda_n\neq$ întreg pozitiv, care era necesară doar pentru o reprezentare a acestei soluţii cu ajutorul funcţiilor lui Ciaplîghin de speţa I-a şi a II-a. În cazul cînd $\lambda_n=$ întreg pozitiv, locul funcţiei $Z(\tau,\ -\lambda_n)$ va fi luat de funcţia lui Cherry.

Conform lui (11) avem acum condiţia

$$(24)\qquad h\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,z(\tau_0,\ \lambda_n)\sin n\theta'=g(\theta'),\qquad(-\pi<\theta'<\pi),$$

unde funcţia $g(\theta')$ este definită astfel

$$g(\theta')=\frac{h}{2}\ \text{ pentru } 0<\theta'<\frac{\pi m}{\mu},$$

$$g(\theta')=0\quad\text{,,}\quad \frac{\pi m}{\mu}<\theta'<\pi\ .$$

În plus

$$g(-\theta')=-\,g(\theta').$$

Rezultă din (24) că

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\,\frac{1-\cos\dfrac{m\,n\,\pi}{\mu}}{z(\tau_0,\ \lambda_n)}.$$

Expresia lui $\psi(\theta, \tau)$ fiind determinată, pentru a avea pe $\varphi(\theta, \tau)$ vom transcrie sistemul (5) în variabilele τ şi θ. Avem

$$(5') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\tau(1-\tau)^{-\beta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\dfrac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}. \end{cases}$$

Soluţiei $\psi_n = z(\tau, \lambda_n)\sin 2\lambda_n\theta$ îi corespunde un $\varphi_n(\theta, \tau)$ care conform relaţiei (5′) are expresia

$$\varphi_n(\theta, \tau) = -\frac{\tau(1-\tau)^{-\beta} z'_\tau(\tau, \lambda_n)}{\lambda_n}\cos 2\lambda_n\theta + g_n(\tau).$$

Ţinînd seama de a doua relaţie (5′) precum şi de ecuaţia diferenţială (22) se vede că putem lua $g_n(\tau) = \text{const.} = 0$.

Rezultă deci că

$$(26) \quad \varphi(\theta, \tau) = -h\tau(1-\tau)^{-\beta}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z'_\tau(\tau, \lambda_n)}{\lambda_n}\cos 2\lambda_n\theta + \text{const}.$$

3. *Trecerea la planul fizic.* Vom pleca de la formula cunoscută

$$\mathrm{d}(x + \mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{V}\left(\mathrm{d}\varphi + \mathrm{i}\frac{\rho_0}{\rho}\mathrm{d}\psi\right).$$

Prin urmare

$$(27) \quad \begin{cases} \mathrm{d}x = \dfrac{\cos\theta}{c_0\sqrt{\dfrac{2\tau}{\gamma-1}}}\mathrm{d}\varphi - (1-\tau)^{-\beta}\dfrac{\sin\theta}{c_0\sqrt{\dfrac{2\tau}{\gamma-1}}}\mathrm{d}\psi, \\ \mathrm{d}y = \dfrac{\sin\theta}{c_0\sqrt{\dfrac{2\tau}{\gamma-1}}}\mathrm{d}\varphi + (1-\tau)^{-\beta}\dfrac{\cos\theta}{c_0\sqrt{\dfrac{2\tau}{\gamma-1}}}\mathrm{d}\psi. \end{cases}$$

Va fi suficient să înlocuim aici pe ψ şi φ, scoşi din dezvoltările (20′) şi (26), pentru a avea pe $x(\theta, \tau)$ şi $y(\theta, \tau)$.

Vom calcula pe $y(\theta, \tau)$ plecînd de la a doua relaţie (27) din care deducem

$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{2(1-\tau)^{-\beta}h}{c_0\sqrt{\dfrac{2\tau}{\gamma-1}}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\tau z'_\tau(\tau, \lambda_n)\sin 2\lambda_n\theta\sin\theta + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n z(\tau, \lambda_n)\cos 2\lambda_n\theta\cos\theta)\right\}.$$

Prin integrare față de θ, avem

$$y(\theta, \tau) = \frac{h(1-\tau)^{-\beta}}{c_0\sqrt{\frac{2\tau}{\gamma - 1}}}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\tau)\sin(2\lambda_n - 1)\theta + \right. \tag{28}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\tau)\sin(2\lambda_n + 1)\theta \right\}\cdot$$

Funcția de τ care ar fi trebuit adăugată acestei expresii este identic nulă din cauză că trebuie să avem $y(0, \tau) \equiv 0$. S-a notat mai jos

$$\begin{cases} C_n(\tau) = \dfrac{a_n}{2\lambda_n - 1}\left[\tau z'_\tau(\tau, \lambda_n) + \lambda_n z(\tau, \lambda_n)\right], \\ D_n(\tau) = \dfrac{a_n}{2\lambda_n + 1}\left[-\tau z'_\tau(\tau, \lambda_n) + \lambda_n z(\tau, \lambda_n)\right]\cdot \end{cases} \tag{29}$$

Pentru a găsi ordonata punctului D va trebui să facem $\tau = \tau_0$, $\theta = \mu$ în expresia (28). Se găsește

$$y_D = y(\mu, \tau_0) = \frac{(1-\tau_0)^{-\beta}}{V_0} h\mu \sin\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 - \mu^2} a_n \times \tag{30}$$

$$\times \left[2\tau_0 z'_\tau(\tau_0, \lambda_n) - z(\tau_0, \lambda_n)\right].$$

În mod analog se calculează ordonata punctului C, $y_C = y(\mu, \tau_1)$. Ținînd seama de (23) se găsește

$$y_C = y(\mu, \tau_1) = 2\tau_1 \frac{(1-\tau_1)^{-\beta}}{V_1} h\mu \sin\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 - \mu^2} a_n \tag{31}$$

din cauză că $z(\tau_1, \lambda_n) = 0$.

4. *Determinarea lui h.* Să notăm cu L lărgimea curentului în amonte. Fluxul Q printr-o secțiune normală la axa Ox se evaluează în două moduri distincte prin

$$Q = \int \rho u \mathrm{d}y = \rho_0 \int \frac{\partial\psi}{\partial y} \mathrm{d}y$$

integrala fiind luată pe o secțiune normală la axa Ox definită prin $x = x_0$. Pentru $x_0 \to -\infty$ rezultă

$$\rho_\infty V_0 L = \rho_0 h.$$

Deci, h este determinat de relația

$$h = \frac{\rho_\infty}{\rho_0} V_0 L = (1-\tau_0)^\beta V_0 L \tag{32}$$

dacă lărgimea jetului este dată în amonte.

Să notăm prin l lungimea segmentului OD şi prin l' lungimea segmentului OC. Ţinînd seama de relaţiile

$$l \sin \mu = y_D, \quad l' \sin \mu = y_C,$$

avem

$$(33) \qquad \frac{l}{L} = \pi\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2\pi^2-\mu^2} a_n \, [2\tau_0 z'_\tau(\tau_0, \lambda_n) + z(\tau_0, \lambda_n)].$$

Ţinînd seama de (25), această expresie capătă forma finală

$$\frac{l}{L} = \mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-\cos\dfrac{mn\pi}{\mu}}{z(\tau_0, \lambda_n)} \cdot \frac{1}{n^2\pi^2-\mu^2} [2\tau_0 z'_\tau(\tau_0, \lambda_n) + z(\tau_0, \lambda_n)]$$

sau încă

$$\frac{l}{L} = \mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-\cos\dfrac{mn\pi}{\mu}}{n^2\pi^2-\mu^2} \left[2\tau_0 \frac{z'_\tau(\tau_0, \lambda_n)}{z(\tau_0, \lambda_n)} + 1\right].$$

Din relaţiile [2], p. 887,

$$\frac{1}{\sin\mu} = \frac{1}{\mu} + 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2\pi^2-\mu^2}$$

$$\frac{\cos m}{\sin\mu} = \frac{1}{\mu} + 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos\dfrac{mn\pi}{\mu}}{n^2\pi^2-\mu^2}$$

avem

$$\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-\cos\dfrac{mn\pi}{\mu}}{n^2\pi^2-\mu^2} = \frac{1-\cos m}{2\sin\mu}$$

şi deci

$$(34) \qquad \frac{l}{L} = \frac{1-\cos m}{2\sin\mu} + 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-\cos\dfrac{mn\pi}{\mu}}{n^2\pi^2-\mu^2} \, \frac{\tau_0 z'_\tau(\tau_0, \lambda_n)}{z(\tau_0, \lambda_n)}.$$

Calculînd raportul $\dfrac{l'}{L}$ avem

$$(35) \qquad \frac{l'}{L} = 2\left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1}\right)^{\beta} \sqrt{\tau_0\tau_1}\, \mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-\cos\dfrac{mn\pi}{\mu}}{z(\tau_0, \lambda_n)}.$$

Dezvoltările în serie considerate mai sus sînt valabile ţinînd seama de proprietăţile asimptotice ale lui $z(\tau, \lambda_n)$ stabilite de L. I. Sretenski în lucrarea citată. De asemenea în cazul $\mu = \dfrac{\pi}{2}$ ele se reduc la dezvoltările lui Sretenski [5].

5. *Cazul limită al fluidului incompresibil.* Dacă fluidul considerat este incompresibil, atunci $\rho = \rho_0$. Acest caz se poate obține și din formula (7) pentru $\beta = 0$. În aceste condiții ecuația (22) devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\tau z'_\tau(\tau, \lambda_n)] - \lambda_n^2 \frac{z(\tau, \lambda_n)}{\tau} = 0$$

adică

$$\tau^2 z'' + \tau z' - \lambda_n^2 z = 0.$$

Soluția ei generală este

$$z = C_1 \tau^{\lambda_n} + C_2 \tau^{-\lambda_n}$$

Soluția care îndeplinește condițiile

$$z(\tau_1, \lambda_n) = 0, \quad z'_\tau(\tau_1, \lambda_n) = 1$$

este

$$z(\tau, \lambda_n) = \frac{\tau_1}{2\lambda_n}\left[\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{\lambda_n}\right].$$

Avem

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{V^2}{V_1^2}, \quad \frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{V_0^2}{V_1^2} = q^2,$$

de unde

$$z(\tau_0, \lambda_n) = \frac{\tau_1}{2\lambda_n}(q^{-2\lambda_n} - q^{2\lambda_n})$$

Avem pe de altă parte

$$z'_\tau(\tau, \lambda_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{\lambda_n - 1} + \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{\lambda_n + 1}\right].$$

Deci

$$\frac{\tau_0 z'_\tau(\tau_0, \lambda_n)}{z(\tau_0, \lambda_n)} = \lambda_n \frac{1 + q^{4\lambda_n}}{1 - q^{4\lambda_n}}.$$

Prin urmare în cazul fluidului incompresibil avem

$$\frac{l}{L} = \frac{1 - \cos m}{2 \sin\mu} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin^2 \dfrac{mn\pi}{\mu}}{n^2\pi^2 - \mu^2} \cdot \frac{1 + q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}{1 - q^{\frac{2n\pi}{\mu}}}$$

expresie care coincide cu cea dată în lucrarea anterioară [1].

6. *Presiunea asupra obstacolului.* Calculul presiunii asupra obstacolului se face aplicînd teorema impulsului. Să considerăm masa de fluid cuprinsă între o secţiune S_0 normală jetului, corespunzătoare abscisei $x = -a^2$ la mare distanţă în amonte, precum şi secţiunile S şi S' normale jeturilor bifurcate şi situate la mare distanţă în aval.

Să notăm prin Γ conturul care limitează masa fluidă cuprinsă între aceste secţiuni.

Avem

$$-\int_\Gamma \rho\vec{v}\,(\vec{v}\vec{n}_i)\,\mathrm{d}s = \int_\Gamma p\,\vec{n}_i\,\mathrm{d}s$$

unde $\vec{n}_i$ este versorul normalei la conturul Γ orientat pozitiv spre interiorul său. Însă pe liniile libere şi pe pereţii solizi CD şi $C'D'$ avem $\vec{v}\vec{n}_i = 0$. Pe de altă parte pe liniile libere AE, ED, $D'E'$, $E'A'$ avem $p = p_0$, iar pe $C'BC$ avem $p = p_1$, p_0 şi p_1 fiind presiunile constante care corespund vitezelor V_0 şi V_1. În fine, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p = p_0$, în amonte şi în aval. Este clar că

$$\lim_{a^2\to\infty} \int_{S_0} \rho\vec{v}\,(\vec{v}\vec{n}_i)\,\mathrm{d}s = \rho_0 V_0 h\,\vec{i}, \tag{37}$$

$\vec{i}$ fiind versorul axei Ox.

La fel

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{S} \rho\vec{v}\,(\vec{v}\vec{n}_i)\,\mathrm{d}s = -\rho_\infty L_1 V_0^2\,\vec{u}, \tag{38}$$

unde $\vec{u}$ este versorul direcţiei asimptotice a liniei libere AE la infinit în aval. De asemenea avem

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{S'} \rho\vec{v}\,(\vec{v}\vec{n}_i)\,\mathrm{d}s = -\rho_\infty L_1 V_0^2\,\vec{u}' \tag{39}$$

unde $\vec{u}'$ este versorul direcţiei asimptotice a liniei libere $A'E'$ la infinit în aval.

Avem

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos m\vec{i} + \sin m\vec{j}, \\ \vec{u}' = \cos m\vec{i} - \sin m\vec{j}. \end{cases} \tag{40}$$

Din (36) rezultă

$$\int_{\Gamma-CD-C'D'} p\,\vec{n}_i\,\mathrm{d}s + \int_{CD+C'D'} p\,\vec{n}_i\,\mathrm{d}s = -\int_{S_0} \rho\vec{v}\,(\vec{v}\vec{n}_i)\,\mathrm{d}s - \int_{S+S'} \rho\vec{v}\,(\vec{v}\vec{n}_i)\,\mathrm{d}s.$$

Să notăm prin R_1 rezultanta presiunilor exercitată de fluidul în mişcare pe segmentele CD şi $C'D'$ ale obstacolului.

Avem evident

$$\vec{R}_1 = -\int_{CD+C'D'} p\,\vec{n}_i\,\mathrm{d}s.$$

Astfel, trecînd la limită, relația precedentă ne dă

$$(41)\qquad \vec{R}_1 = \rho_0 h V_0 \vec{i} - \rho_\infty L_1 V_0^2 (\vec{u} + \vec{u}') + \lim \int_{\Gamma - CD - C'D'} p\vec{n}_i \, ds.$$

Dar observînd că

$$\oint \vec{n}_i \, ds = 0$$

pe orice contur închis, avem

$$\int_{AEDD'E'A'A} \vec{n}_i \, ds + \int_{DO} \vec{n}_0 \, ds + \int_{OD'} \vec{n}_0' \, ds = 0,$$

unde $\vec{n}_0$ este versorul normalei la segmentul *OD* orientat spre fluidul în mişcare, iar $\vec{n}_0{}'$ este la fel versorul normalei la segmentul *OD'* orientat spre fluidul în mişcare.

Prin urmare

$$\int_{AEDD'E'A'A} \vec{n}_i \, ds = - l \, (\vec{n}_0 + \vec{n}_0') .$$

Avem la fel

$$\int_{C'BC} \vec{n}_i \, ds + \int_{CO} (-\vec{n}_0) ds + \int_{OC'} (-\vec{n}_0') \, ds = 0$$

de unde

$$\int_{C'BC} \vec{n}_i \, ds = l' (\vec{n}_0 + \vec{n}_0{}').$$

În aceste condiții relația (41) devine

$$\vec{R}_1 = \rho_0 h V_0 \vec{i} - \rho_\infty L_1 V_o^2 (\vec{u} + \vec{u}') + p_0 (-l) (\vec{n}_0 + \vec{n}_0') + p_1 l' (\vec{n}_0 + \vec{n}_0'),$$

unde

$$\begin{cases} \vec{n}_0 + \vec{n}_0' = -2 \sin \mu \vec{i} \\ \vec{u} + \vec{u}' = 2 \cos m \vec{i} \end{cases}$$

Să notăm prin $\vec{R}_2$ acțiunea fluidului în repaus, situat în spatele diedrului considerat. Este clar că

$$\vec{R}_2 = p_0 \int_{OD} \vec{n}_0 \, ds + p_0 \int_{OD'} \vec{n}_0' \, ds = p_0 l (\vec{n}_0 + \vec{n}_0') = -2 p_0 l \sin \mu \vec{i} .$$

Fie $\vec{R}_3$ presiunea exercitată de fluidul în stagnare aflat în fața diedrului în zona $OCBC'O$ asupra segmentului OC și OC' ale obstacolului. Avem

$$\vec{R}_3 = p_1 \int_{OC} (-\vec{n}_0)\,\mathrm{d}s + p_1 \int_{OC'} (-\vec{n}'_0)\,\mathrm{d}s = -p_1(\vec{n}_0 + \vec{n}'_0)\,l' = 2\,p_1\,l' \sin\mu\,\vec{i}\,.$$

Presiunea totală exercitată de fluid asupra obstacolului este deci

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = (\rho_\infty V_0^2 L - 2\,\rho_\infty L_1 V_0^2 \cos m)\,\vec{i}\,.$$

Pe de altă parte ecuația de continuitate ne dă prin evaluarea fluxului în amonte și în aval

$$\int_{S_0} \rho\,(\vec{v}\,\vec{n})\,\mathrm{d}s = \int_{S} \rho\,(\vec{v}\,\vec{n})\,\mathrm{d}s + \int_{S'} \rho\,(\vec{v}\,\vec{n})\,\mathrm{d}s\,,$$

unde $\vec{n}$ este orientat în sensul mișcării. Avem

$$\rho_\infty V_0 L = \rho_\infty V_0 L_1 + \rho_\infty V_0 L_1$$

deci

$$L = 2\,L_1\,.$$

Astfel

$$\vec{R} = \rho_\infty\,V_0^2\,L\,(1 - \cos m)\,\vec{i} = \rho_0\,V_0^2\,L\,(1 - \tau_0)^\beta\,(1 - \cos m)\,\vec{i}\,. \tag{42}$$

În aplicații poate să prezinte importanță considerarea configurației situate deasupra axei Ox, porțiunea negativă a acestei axe fiind considerată ca un perete solid. În acest caz presiunea totală asupra peretelui CD este egală în mărime cu

$$P = \frac{\rho_0\,V_0^2\,L\,(1 - \tau_0)^\beta\,(1 - \cos m)}{2 \sin\mu} \tag{43}$$

după cum rezultă ușor din (42).

Primită la redacție la 22 aprilie 1965

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. Elena Murgulescu, *Asupra devierii unui jet de lărgime finită printr-un obstacol diedric*, Șt. cerc. mat., **15**, *3*, 417—427 (1964).
2. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mecanique des fluides*, Bucarest-Paris, 1959.
3. С. А. Чаплыгин, *К вопросу о струях в несжимаемой жидкости*, 1899. Собр. соч., т. II, ОГИЗ, 1948, p. 5—18.
4. C. Iacob, *Mișcări subsonice cu suprafețe libere*. Sesiunea științifică jubiliară I.M.A. 1960, p. 175—197.
5. П. И. Сретенский, *К теории газовых струй*. ПММ, **23**, 305—332 (1959).

O TEORIE AXIOMATICĂ PENTRU PROBLEMA DIRICHLET NELINIARĂ¹)

DE

CORNELIU CONSTANTINESCU

Diversele axiomatizări ale problemei Dirichlet construite recent se aplică numai la ecuaţii cu derivate parţiale *lineare*. În prezenta lucrare se construieşte o teorie axiomatică care se aplică şi la anumite ecuaţii cu derivate parţiale *nelineare* şi chiar la *sisteme* de astfel de ecuaţii.

Fie G un domeniu relativ compact într-un spaţiu euclidean şi f fie o funcţie reală continuă pe frontiera lui G. Pentru a demonstra că f este rezolutivă pentru problema Dirichlet (în formularea lui Perron), se pot utiliza trei metode. Prima constă în a arăta că mulţimea punctelor neregulate pentru problema Dirichlet este polară ; cea de-a doua utilizează teorema lui Stone şi faptul că restricţia la frontiera lui G a unei funcţii superarmonice continue este rezolutivă ; la a treia metodă se demonstrează că mulţimea ultrafiltrelor neregulate este de măsură armonică nulă. Fiecare din aceste metode îşi are avantajele şi dezavantajele sale. Prima metodă, de exemplu, conduce la o demonstraţie foarte lungă pe parcursul căreia se utilizează proprietăţi speciale ale potenţialului newtonian, în timp ce cea de-a doua oferă o demonstraţie rapidă şi elegantă. Din acest punct de vedere cea de-a treia metodă de demonstraţie ocupă o poziţie intermediară. Dacă ne întrebăm ce informaţii suplimentare ne oferă aceste demonstraţii, constatăm că poziţiile se inversează în favoarea primei metode şi în defavoarea celei de-a doua. Şi aici metoda a treia ocupă o poziţie intermediară. Trebuie să adăugăm că prima şi a treia metodă se pot aplica şi la deschise nerelativ compacte şi că ele dau o demonstraţie directă pentru f inferior semicontinuă. Acest ultim fapt nu prezintă interes în cazul de faţă, întrucît mulţimea funcţiilor rezolutive este mono-

---

[1] Versiunea în l. franceză a acestei lucrări a apărut în Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **10**, *6* (1965).

ST. CERC. MAT. TOM. 17. NR. 7. P. 1021–1026. BUCUREŞTI 1965

tonă, dar cînd aceste metode se aplică la o teorie axiomatică pe un spaţiu fără bază numărabilă deosebirea devine reală.

Există încă un punct de vedere din care putem compara mai multe demonstraţii diferite ale unui aceluiaşi fapt matematic. El este în legătură cu întrebarea : ce proprietăţi ale obiectelor matematice folosite au fost efectiv utilizate? În răspunsul la această întrebare, oarecum neprecis formulată, se pot întrevedea generalizările posibile ale metodei în discuţie. Este clar, de exemplu, că cea de-a doua metodă, utilizînd teorema lui Stone, foloseşte liniaritatea ecuaţiei lui Laplace şi faptul că avem de-a face cu funcţii. Din cauza aceasta, pare improbabil ca ea să poată fi exploatată în studiul ecuaţiilor neliniare sau în studiul sistemelor de ecuaţii. Prima demonstraţie are, din acest punct de vedere, o soartă şi mai precară. Într-adevăr, cea de-a doua metodă a putut fi aplicată la recentele axiomatici ale funcţiilor armonice [4], [1], în timp ce prima nu este aplicabilă la aceste teorii, întrucît există exemple de domenii pentru care mulţimea punctelor neregulate este nepolară. Cea de-a treia metodă a fost de asemenea aplicată la aceste axiomatici [2], dar, întrucît ea nu utilizează teorema lui Stone, pare probabil că ea să fie aplicabilă şi la anumite ecuaţii neliniare şi chiar la sisteme de ecuaţii.

Scopul prezentei lucrări este de a face o tentativă în această direcţie. Metoda se aplică la o teorie axiomatică construită în spiritul teoriei axiomatice a lui Brelot [3]. Această teorie axiomatică poate fi aplicată de exemplu la studiul ecuaţiilor eliptice de forma

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j} + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(u) = 0,$$

unde u este nenegativă şi f este nepozitivă şi subaditivă (de exemplu $f(u) = -u^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$), dar, în prezenta lucrare, nu ne-am ocupat de problema precizării clasei de ecuaţii cu derivate parţiale şi cu atît mai puţin de a clasei de sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale care intră în această teorie axiomatică.

1. Definiţii. Vom nota cu Λ o mulţime finită, cu M mulţimea $[0,\infty]^\Lambda$ şi, pentru orice $\lambda \in \Lambda$, cu π_λ λ-proiecţia lui M pe $[0,\infty]$. Pentru orice $\alpha \in [0,\infty]$ vom nota cu $\overline{\alpha}$ elementul lui M cu toate coordonatele egale cu α. Considerăm pe M ordonat cu ordinea lui naturală şi anume

$$a \leqslant b, \textit{ dacă } \pi_\lambda(a) \leqslant \pi_\lambda(b) \textit{ pentru orice } \lambda \in \Lambda.$$

În toată lucrarea vom înţelege prin funcţie o aplicaţie în M. Folosind proiecţiile π_λ se poate extinde la aceste funcţii terminologia adoptată pentru funcţiile reale. De exemplu, vom spune că o funcţie f pe un spaţiu topologic este inferior semicontinuă dacă funcţiile reale $\pi_\lambda \circ f$ sînt inferior semicontinue pentru toţi $\lambda \in \Lambda$. Sau dacă f este o funcţie şi $\mathfrak{F}$ un filtru, vom nota cu $\liminf_{\mathfrak{F}} f$ elementul lui M definit prin relaţiile

$$\pi_\lambda(\liminf_{\mathfrak{F}} f) = \liminf_{\mathfrak{F}} \pi_\lambda \circ f \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Şi aşa mai departe.

Relaţia

$$\pi_\lambda(a) < \pi_\lambda(b) \qquad \textit{pentru orice } \lambda \in \Lambda$$

între două elemente ale lui M va fi scrisă prescurtat sub forma $a < b$. Vom spune că un element a al lui M este finit dacă $a < \overline{\infty}$.

Fie a, $b \in M$. Vom nota cu $a + b$ elementul lui M astfel încît

$$\pi_\lambda(a + b) = \pi_\lambda(a) + \pi_\lambda(b)$$

pentru orice $\lambda \in \Lambda$ şi cu $a - b$ marginea inferioară a elementelor $c \in M$ pentru care

$$a \leqslant b + c.$$

Fie X un spaţiu local compact cu bază numărabilă şi $\mathcal{H}$ un fascicul de funcţii continue finite pe X. Vom nota cu $\mathfrak{G}$ mulţimea mulţimilor deschise nevide ale lui X şi cu ∂G frontiera lui $G \in \mathfrak{G}$. Fie $G \in \mathfrak{G}$ şi f o funcţie definită pe o mulţime care conţine pe G; *dacă restricţia lui f la G aparţine lui $\mathcal{H}$ (G) vom spune că f este* armonică pe G. Pentru orice funcţie inferior semicontinuă f, definită pe o submulţime A a lui X ce conţine pe ∂G, vom nota cu f_G funcţia pe $A \cup G$ egală cu f pe $A - G$ şi egală pe G cu înfăşurătoarea superioară a funcţiilor armonice pe G, care posedă o prelungire continuă finită pe $\overline{G}$ majorată de f pe ∂G; f_G este inferior semicontinuă pe G.

O mulţime $V \in \mathfrak{G}$ se numeşte regulată *dacă*:

a) *este relativ compactă şi are frontiera nevidă*;

b) *orice funcţie continuă finită pe ∂V posedă o prelungire continuă la $\overline{V}$, armonică pe V*;

c) *dacă f, g sînt continue finite pe ∂V, atunci*

$$(f + g)_V \leqslant f_V + g_V;$$

d) *dacă (f_n) este un şir descrescător de funcţii inferior semicontinue mărginite pe ∂V convergent la $\overline{0}$, atunci $(f_{nV})_n$ converge la $\overline{0}$ uniform pe orice submulţime compactă a lui V.*

O mulţime regulată V se numeşte complet regulată *dacă posedă proprietatea următoare : fie f o funcţie continuă finită pe $\overline{V}$, armonică pe V, U fie o mulţime regulată şi g fie o funcţie continuă finită pe $\overline{U}$, armonică pe U. Dacă $f \leqslant g$ pe $\partial(U \cap V)$, atunci $f \leqslant g$ pe $U \cap V$. Vom spune că V este* complet regulată în *$G \in \mathfrak{G}$ dacă V este complet regulată şi $\overline{V} \subset G$.*

Fie V o mulţime complet regulată. Dacă f este o funcţie continuă finită pe ∂V, atunci f_V este unica prelungire continuă a lui f la $\overline{V}$ care să fie armonică pe V. Dacă f este inferior semicontinuă şi mărginită pe ∂V, atunci f_V este continuă pe V.

LEMA 1.1. *Fie V (resp. U) o mulţime complet regulată (resp. regulată) şi f (resp. g) fie o funcţie inferior semicontinuă pe ∂V (resp. ∂U). Dacă $f_V \leqslant g_U$ pe $\partial(U \cap V)$, atunci $f_V \leqslant g_U$ pe $U \cap V$.*

Fie $G \in \mathfrak{G}$ și $\mathfrak{G}_0$ fie o acoperire a lui G cu submulțimi deschise. *O funcție s pe G se numește* $\mathfrak{G}_0$-hiperarmonică, *dacă este inferior semicontinuă și dacă pentru orice $G_0 \in \mathfrak{G}_0$ și orice mulțime complet regulată V în G_0 avem $s_V \leqslant s$. Prin* funcție hiperarmonică *vom înțelege o funcție pentru care există un $\mathfrak{G}_0$ astfel încît funcția să fie $\mathfrak{G}_0$-hiperarmonică.*

LEMA 1.2. *Fie $G, G' \in \mathfrak{G}$, $G' \subset G$, s (resp. s') fie o funcție hiperarmonică pe G (resp. G') astfel încît pentru orice $x \in G \cap \partial G'$*

$$\limsup_{G' \ni y \to x} s(y) < \liminf_{G' \ni y \to x} s'(y).$$

Funcția s^* pe G egală cu s pe $G-G'$ și egală cu inf (s, s') pe G' este hiperarmonică.

LEMA 1.3. *Dacă s este o funcție $\mathfrak{G}_0$ - hiperarmonică pe G și V este o mulțime complet regulată într-un $G_0 \in \mathfrak{G}_0$ atunci s_V este $\mathfrak{G}_0$ - hiperarmonică și $s_V \leqslant s$.*

2. Axiome. *Vom presupune că sînt satisfăcute următoarele axiome.*

AXIOMA 1. *Pentru orice $x \in X$ și orice $a, b, \in M$, $a < b$, există o funcție hiperarmonică continuă s pe o vecinătate a lui x astfel încît*

$$a \leqslant s(x) \leqslant b.$$

AXIOMA 2. *Mulțimile complet regulate formează o bază a lui X.*

LEMA 2.1. *Fie u o funcție continuă finită pe $G \in \mathfrak{G}$. Dacă pentru orice mulțime regulată V în G avem $u = u_V$, atunci u este armonică.*

COROLARUL 2.1. *Dacă V este o mulțime complet regulată și f este o funcție mărginită inferior semicontinuă pe ∂V, atunci f_V este armonică pe V.*

COROLARUL 2.2. $\overline{0}$ *este armonică.*

TEOREMA 2.1. *Înfășurătoarea inferioară (resp. superioară) a unei familii filtrante descrescătoare (resp. filtrante crescător și local egal mărginită) de funcții armonice este de asemenea armonică.*

LEMA 2.2. *Fie s o funcție $\mathfrak{G}_0$ -hiperarmonică local mărginită pe G, (V_n) un șir finit sau infinit de mulțimi complet regulate neacumulîndu-se în G și astfel încît pentru orice n există un $G_0 \in \mathfrak{G}_0$ care conține pe V_n. Dacă definim inductiv $s_1 = s_{V_1}$, $s_{n+1} = s_{nV_{n+1}}$ atunci lim s_n este de asemenea o funcție $\mathfrak{G}_0$ - hiperarmonică continuă pe $\bigcup V_n$.*

O familie $(s_\iota)_{\iota \in I}$ filtrantă descrescător de funcții hiperarmonice pe G se numește familie Perron *dacă orice punct $x \in G$ posedă o vecinătate deschisă U astfel încît pentru orice $\iota \in I$ există un $\varkappa \in I$ astfel încît $s_\varkappa$ este armonică pe U și $s_\varkappa \leqslant s_\iota$.*

TEOREMA 2.2. *Înfășurătoarea inferioară a unei familii Perron este armonică.*

Fie s o funcție local mărginită $\mathfrak{G}_0$ - hiperarmonică pe G și $\mathfrak{V}$ fie o acoperire a lui G cu mulțimi complet regulate astfel încît pentru orice $V \in \mathfrak{V}$ există un $G_0 \in \mathfrak{G}_0$ conținînd pe $\overline{V}$. Fie (V_n) un șir în $\mathfrak{V}$ astfel încît orice element al lui $\mathfrak{B}$ să apară de o infinite de ori în acest şir şi fie (s_n) şirul definit inductiv prin $s_0 = s$, $s_{n+1} = s_{nV_{n+1}}$. Este evident că (s_n) este o familie Perron și că toate funcţiile s_n sînt $\mathfrak{G}_0$ - hiperarmonice. *Vom numi* (V_n) şir normal de mulţimi complet regulate asociat lui $\mathfrak{G}_0$ *şi* (s_n) şirul normal asociat lui s şi (V_n).

COROLARUL 2.3. *Orice funcţie hiperarmonică s local mărginită posedă o cea mai mare minorantă armonică, care este înfăşurătoarea inferioară a oricărui şir normal asociat lui s.*

COROLARUL 2.4. *Fie (s_n) un şir de funcţii $\mathfrak{G}_0$ - hiperarmonice local mărginite astfel încît $s_0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} s_n$. Dacă pentru orice n notăm cu u_n pe cea mai mare minorantă armonică a lui s_n, atunci $u_0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.*

TEOREMA 2.3. *Fie s o funcţie local mărginită $\mathfrak{G}_0$ - hiperarmonică pe G şi $G' \in \mathfrak{G}$, $G' \subset G$. Funcţia s' pe G egală cu s pe $G - G'$, egală cu cea mai mare minorantă armonică a lui s pe G' şi egală cu*

$$x \to \liminf_{G - \partial G' \ni y \to x} s'(y)$$

pe $G \cap \partial G'$ este $\mathfrak{G}_0$ - hiperarmonică.

Un potenţial *este o funcţie hiperarmonică local mărginită pentru care cea mai mare minorantă armonică este* $\overline{0}$. Fie p un potenţial pe $G \in \mathfrak{G}$; *prin* funcţie Evans asociată lui *p se înţelege o funcţie hiperarmonică s pe G astfel încît pentru orice ultrafiltru $\mathfrak{U}$ pe G neconvergent la un punct al lui G şi orice $\lambda \in \Lambda$ sau*

$$\lim_{\mathfrak{U}} \pi_\lambda \circ p = 0$$

sau

$$\lim_{\mathfrak{U}} \pi_\lambda \circ s = \infty.$$

LEMA 2.3. *Pentru orice potenţial p pe $G \in \mathfrak{G}$, pentru orice $x \in G$ şi pentru orice număr pozitiv ε există o funcţie Evans s asociată lui p* şi *astfel încît $s(x) \leqslant \overline{\varepsilon}$.*

3. Problema Dirichlet. Fie $G \in \mathfrak{G}$ şi f fie o funcţie pe ∂G. Notăm cu $\mathcal{S}_f^G$ mulţimea funcţiilor hiperarmonice s pe G astfel încît

$$\liminf_{G \ni y \to x} s(y) \geqslant (f(x)$$

pentru orice $x \in \partial G$, cu H_f^G înfăşurătoarea inferioară a lui $\mathcal{S}_f^G$ şi cu $\mathcal{T}_f^G$ mulţimea funcţiilor hiperarmonice t pe G astfel încît pentru orice $x \in \partial G$

$$\limsup_{G \ni y \to x} (H_f^G(y) - t(y)) \leqslant f(x).$$

f se numeşte rezolutivă *dacă H_f^G este armonică şi dacă înfăşurătoarea inferioară a mulţimii $\mathcal{T}_f^G$ este* $\overline{0}$. Dacă definim funcţiile hipoarmonice

în mod natural, atunci se poate vedea uşor că $H_f^G - t$ este hipoarmonică pentru orice $t \in \mathfrak{T}_f^G$, dacă H_f^G este armonică, şi astfel definiţia dată mai sus coincide cu cea uzuală (adică $\overline{H}_f^G \leqslant \underline{H}_f^G$), dacă G este relativ compactă.

TEOREMA 3.1. *Dacă $\mathfrak{S}_f^G$ conține o funcție local mărginită, atunci H_f^G este armonică. Dacă (G_n) este un șir de mulțimi deschise relativ compacte, $\overline{G}_n \subset G$, atunci există un șir descrescător (s_n) în $\mathfrak{S}_f^G$ convergent uniform la H_f^G pe orice submulțime compactă a lui G și astfel încît s_n este armonică pe G_n.*

LEMA 3.1. *Fie $G \in \mathfrak{G}$, f fie o funcție pe ∂G astfel încît $\mathfrak{S}_f^G$ conține o funcție mărginită, V fie o mulțime regulată, $V \cap G \neq \emptyset$, și g fie funcția pe $\partial(V \cap G)$ egală cu f pe $\partial G \cap \partial(V \cap G)$ și egală cu H_f^G pe $G \cap \partial(V \cap G)$. Atunci $H_f^G = H_g^{G \cap V}$ pe $G \cap V$.*

LEMA 3.2. *Fie $G \in \mathfrak{G}$, f, fie o funcție pe ∂G astfel încît $\mathfrak{S}_f^G$ conțin o funcție mărginită, $x \in \partial G$, $\mathfrak{F}$ fie un filtru pe G convergînd la x și s fie o funcție hiperarmonică pe G astfel încît $0 < s$ pe o vecinătate a lui x. Dacă pentru un $\lambda \in \Lambda$ avem*

$$\lim_{\mathfrak{F}} \pi_\lambda \circ s = 0,$$

atunci

$$\limsup_{\mathfrak{F}} \pi_\lambda \circ H_f^G \leqslant \limsup_{\partial G \ni y \to x} f(y).$$

TEOREMA 3.2. *Dacă există un potențial p pe G astfel încît $\bar{0} < p(x)$ pentru orice $x \in G$, atunci orice funcție superior semicontinuă f pe ∂G pentru care $\mathfrak{S}_f^G$ conține o funcție mărginită este rezolutivă.*

Primită la redacţie la 1 decembrie 1964

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Bucureşti, str. M. Eminescu nr. 47

BIBLIOGRAFIE

1. H. BAUER, *Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen*. Math. Ann., **146**, 1—59 (1962).
2. N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA, *On the Dirichlet problem in the axiomatic theory of harmonic functions*. Nagoya Math. Journ., **23**, 73—96 (1963).
3. M. BRELOT, *Lectures on potential theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.
4. R.-M. HERVÉ, *Développements sur une théorie axiomatique des fonctions surharmoniques*. Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris), **248**, 179—181 (1959).

CONEXIUNI AFINE INVARIANTE PE UN SPAŢIU RIEMANNIAN V_3 (II[1])

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină conexiunile afine invariante pe un spaţiu riemannian V_3 care are ca grup total de mişcări un grup intranzitiv G_3, arătînd că, în general, aceste conexiuni nu sînt compatibile cu un spaţiu V_3 compact şi orientabil.

Într-o lucrare anterioară [2] am demonstrat că, conexiunile afine invariante pe un spaţiu riemannian V_3, care admite ca grup total de mişcări un grup tranzitiv G_3, depind de 27 de constante arbitrare. De asemenea, ţinînd seama de o teoremă a lui Tallini [3] referitoare la spaţiile V_n compacte şi orientabile, am arătat că, în general, aceste conexiuni nu sînt compatibile cu un spaţiu V_3 compact şi orientabil.

În această lucrare vom determina conexiunile afine invariante pe un spaţiu riemannian V_3 care are ca grup total de mişcări un grup intranzitiv G_3, arătînd că, în general, aceste conexiuni nu sînt compatibile cu un spaţiu V_3 compact şi orientabil.

L. Bianchi a demonstrat [1] [2] că spaţiile V_3 care au ca grup total de mişcări un grup intranzitiv G_3 au metricile de forma

$$(1)\qquad \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + \varphi^2(x^1)\,[(\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2], \qquad (\varphi \neq k_1 e^{k_2 x^1}),$$

$$(2)\qquad \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + \varphi^2(x^1)\,[(\mathrm{d}x^2)^2 + \sin^2 x^2\,(\mathrm{d}x^3)^2], \qquad (\varphi \neq \text{const.}),$$

$$(3)\qquad \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + \varphi^2(x^1)\,[(\mathrm{d}x^2)^2 + \mathrm{e}^{2x^2}(\mathrm{d}x^3)^2], \qquad (\varphi \neq \text{const.}).$$

---

[1] Versiunea în l. franceză a acestei lucrări apare şi în Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **10**, *8* (1965).

[2] p. 550.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 2, P. 1027–1034, BUCUREŞTI, 1965

Grupurile de mişcări ale acestor spaţii sînt definite, respectiv, de operatorii

$$(1') \qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \; X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^3}, \; X_3 f = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$(2') \quad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^3}, \; X_2 f = \sin x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \operatorname{cotg} x^2 \cos x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \; X_3 f = \cos x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} - $$
$$- \operatorname{cotg} x^2 \sin x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$(3') \quad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^3}, \; X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \; X_3 f = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} [\mathrm{e}^{-2x^2} - (x^3)^2] \frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

Componentele Γ^i_{jk} ale unei conexiuni afine invariante faţă de un grup G_r sînt soluţiile sistemului

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^r} \xi^r + \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} \Gamma^i_{js} + \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} \Gamma^i_{sk} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^r},$$

unde ξ^r sînt coeficienţii transformărilor infinitezimale ale grupului.

Sistemul (4) corespunzător transformărilor $X_1 f$ şi $X_2 f$ ale grupului (1′) se scrie

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0,$$

de unde rezultă

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1).$$

În cazul transformărilor $X_3 f$, sistemul (4) devine

$$\delta^3_k \Gamma^i_{j2} - \delta^2_k \Gamma^i_{j3} + \delta^3_j \Gamma^i_{2k} - \delta^2_j \Gamma^i_{3k} + \delta^i_3 \Gamma^2_{jk} - \delta^i_2 \Gamma^3_{jk} = 0.$$

De aici rezultă

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33}, \Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32}, \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13}, \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31}, \Gamma^2_{13} = -\Gamma^3_{12}, \Gamma^2_{31} = -\Gamma^3_{21},$$
$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{32} = \Gamma_{32} = \Gamma^2_{33} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{33} = 0.$$

Deci, conexiunea afină invariantă la grupul (1′) are componentele

$$(5) \quad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \alpha(x^1), \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = \beta(x^1), \Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = \gamma(x^1), \Gamma^2_{13} = -\Gamma^3_{12} = \delta(x^1), \\ &\Gamma^2_{31} = -\Gamma^3_{21} = \lambda(x^1), \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \mu(x^1), \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \nu(x^1), \end{aligned}$$

componentele nescrise fiind nule.

Componentele nenule $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ale conexiunii lui Levi-Civita ataşată spaţiului (1) sînt

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = \overline{\Gamma}^1_{33} = \varphi(x^1)\varphi'(x^1), \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{\varphi'(x^1)}{\varphi(x^1)}.$$

Notînd

$$R = a^{ij} P_{ij}, \overline{R} = a^{ij} \overline{P}_{ij}, T = a^{ij} (T_l T^l_{ij} - T_{ij}),$$

unde a^{ij} sînt reciprocii elementelor a_{ij} şi

$$P_{ij} = \frac{\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}}{2}, \ (\Gamma_{ij} = \Gamma^l_{ilj}),$$

Γ^i_{jkl} fiind tensorul de curbură al conexiunii Γ^i_{jk}, iar

$$T_l = T^i_{li}, T_{ij} = T^l_{kj} T^k_{il},$$

unde am notat $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \overline{\Gamma}^i_{jk}$, invariantul lui Tallini al spaţiului V_3 este

$$R - \overline{R} - T.$$

În cazul de mai sus avem

$$R = \overline{R} - T = \frac{2}{\varphi^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^1} (\varphi^2 \mu + 2 \varphi\varphi' - 2 \beta).$$

În baza teoremei lui Tallini, conexiunea (5) este compatibilă cu un spaţiu V_3 compact şi orientabil numai dacă $R - \overline{R} - T = 0$, adică dacă

$$\varphi^2 \mu + 2 \varphi\varphi' - 2 \beta = k, \qquad (k = \text{const.}).$$

Avem deci următoarea

TEOREMĂ. *Conexiunile afine invariante pe spaţiul* V_3 *cu metrica* (1) *sînt conexiunile* (5), *care depind de şapte funcţii arbitrare de o variabilă. Dintre acestea, singurele care sînt compatibile cu un spaţiu* V_3 *compact şi orientabil sînt cele pentru care*

$$\beta = \frac{\varphi^2 \mu + 2 \varphi\varphi' - k}{2}.$$

Vom determina acum conexiunile afine invariante la grupul (2′). Considerînd transformarea $X_1 f$, ecuaţia (4) ne dă

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0,$$

adică

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} (x^1, x^2).$$

În cazul transformării $X_2 f$, ecuaţia (4) se scrie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} \sin x^3 + \delta^3_k \cos x^3 \Gamma^i_{j2} + \frac{\partial (\operatorname{cotg} x^2 \cos x^3)}{\partial x^k} \Gamma^i_{j3} + \delta^3_j \cos x^3 \Gamma^i_{2k} + \\ + \frac{\partial (\operatorname{cotg} x^2 \cos x^3)}{\partial x^j} \Gamma^i_{3k} + \delta^i_3 \Gamma^2_{jk} \frac{\cos x^3}{\sin^2 x^2} - \Gamma^3_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k}. \end{aligned} \tag{6}$$

Notînd cu (i, j, k) ecuaţia obţinută din (6) pentru valorile i, j, k date indicilor, ecuaţia (1,1,1) devine

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^2} = 0,$$

adică

$$\Gamma^1_{11} = \alpha\,(x^1),$$

unde α este o funcţie arbitrară.

Din ecuaţiile (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 1, 3) şi (1, 3, 1) rezultă

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = 0.$$

Ecuaţiile (1, 2, 2), (1, 2, 3) şi (1, 3, 2) ne dau

$$\Gamma^1_{22} = \beta(x^1), \quad \Gamma^1_{23} = -\,\Gamma^1_{32} = \gamma\,(x^1) \sin x^2.$$

Din ecuaţiile (2, 1, 1) şi (3, 1, 1) deducem

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = 0.$$

Ecuaţiile (2, 1, 2) şi (2, 2, 1) se scriu

$$\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^2} \sin x^3 - \frac{\cos x^3}{\sin^2 x^2}\, {\Gamma^2}_{13} - \cos x^3\, \Gamma^3_{12} = 0,$$

$$\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^2} \sin x^3 - \frac{\cos x^3}{\sin^2 x^2}\, \Gamma^2_{31} - \cos x^3\, \Gamma^3_{21} = 0,$$

de unde

$$\Gamma^2_{12} = \delta(x^1), \quad \Gamma^2_{21} = \lambda\,(x^1)$$

şi

(7) $$\Gamma^2_{13} = -\,\Gamma^3_{12} \sin^2 x^2, \quad \Gamma^2_{31} = -\,\Gamma^3_{21} \sin^2 x^2.$$

În acelaşi mod, ecuaţiile (2, 1, 3) şi (2, 3, 1) ne dau

$$\Gamma^3_{13} = \delta\,(x^1), \;\; \Gamma^3_{31} = \lambda\,(x^1), \;\; \Gamma^2_{13} = \mu(x^1) \sin x^2, \quad \Gamma^2_{31} = \nu\,(x^1) \sin x^2.$$

Ţinînd seama de expresiile lui Γ^2_{13} şi Γ^2_{31} ecuaţiile (7) ne dau

$$\Gamma^3_{12} = -\,\frac{\mu\,(x^1)}{\sin x^2}, \quad \Gamma^3_{21} = -\,\frac{\nu\,(x^1)}{\sin x^2}\,.$$

Din ecuaţia (2, 2, 2) rezultă

$$\Gamma^2_{22} = a^2_{22}\,(x^1), \quad \Gamma^3_{22} = -\,\frac{\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32}}{\sin^2 x^2.}\,.$$

Din ecuaţiile (2, 2, 3) şi (2, 3, 2) deducem

$$\Gamma^2_{23} = a^2_{23}\,(x^1) \sin x^2, \quad \Gamma^2_{32} = a^2_{32}\,(x^1) \sin x^2$$

şi

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = a^2_{22}(x^1) - \frac{\Gamma^2_{33}}{\sin^2 x^2.}\,.$$

Ecuaţia (2, 3, 3) ne dă

$$\Gamma^2_{33} = \sin x^2 \cos x^2 + a^2_{33}(x^1)\sin^2 x^2, \quad \Gamma^3_{33} = [a^2_{23}(x^1) + a^2_{32}(x^1)]\sin x^2.$$

Din ecuaţiile $(3, j, k)$, $(j, k = 2, 3)$, rezultă

$$a^2_{22} = a^2_{23} = a^2_{32} = a^2_{33} = 0.$$

Celelalte ecuaţii (i, j, k) şi ecuaţiile obţinute din (4) pentru transformarea $X_3 f$ sînt identic satisfăcute.

Deci conexiunea afină invariantă pe spaţiul (2) are componentele

$$\Gamma^1_{11} = \alpha(x^1),\ \Gamma^1_{22} = \beta(x^1),\ \Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = \gamma(x^1)\sin x^2,\ \Gamma^1_{33} = \beta(x^1)\sin^2 x^2,$$

$$\Gamma^2_{12} = \delta(x^1),\ \Gamma^2_{21} = \lambda(x^1),\ \Gamma^2_{13} = \mu(x^1)\sin x^2,\ \Gamma^2_{31} = \nu(x^1)\sin x^2, \tag{8}$$

$$\Gamma^2_{33} = \sin x^2 \cos x^2,$$

$$\Gamma^3_{12} = -\frac{\mu(x^1)}{\sin x^2},\ \Gamma^3_{21} = -\frac{\nu(x^1)}{\sin x^2},\ \Gamma^3_{13} = \delta(x^1),\ \Gamma^3_{31} = \lambda(x^1),$$

$$\Gamma^3_{23} = -\Gamma^3_{32} = -\operatorname{cotg} x^2,$$

componentele nescrise fiind nule.

Conexiunea lui Levi-Civita ataşată spaţiului (2) are singurele componente nenule

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = \varphi(x^1)\varphi'(x^1),\ \overline{\Gamma}^1_{33} = \varphi(x^1)\varphi'(x^1)\sin^2 x^2,\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{\varphi'(x^1)}{\varphi(x^1),},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{33} = \sin x^2 \cos x^2,\ \overline{\Gamma}^3_{23} = -\overline{\Gamma}^3_{32} = -\operatorname{cotg} x^2.$$

Calculînd invariantul lui Tallini obţinem

$$R - \overline{R} - T = \frac{2}{\varphi^2}(\delta'\varphi^2 + 2\varphi\varphi'' + \varphi'^2 - \beta').$$

În baza teoremei lui Tallini, conexiunea (8) este compatibilă cu un spaţiu V_3 compact şi orientabil numai dacă $R - \overline{R} - T = 0$, adică dacă

$$\beta' = \delta'\varphi^2 + 2\varphi\varphi'' + \varphi'^2. \tag{9}$$

Avem deci următoarea

TEOREMĂ. *Conexiunile afine invariante pe spaţiul V_3 cu metrica* (2) *sînt conexiunile* (8), *care depind de şapte funcţii arbitrare de o variabilă. Dintre acestea, singurele care sînt compatibile cu un spaţiu V_3 compact şi orientabil sînt cele pentru care este satisfăcută relaţia* (9).

În sfîrşit, vom determina conexiunile afine invariante la grupul (3').

În cazul transformării $X_1 f$, ecuaţia (4) se scrie

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0,$$

de unde

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}\,(x^1,\ x^2).$$

Considerînd ecuaţia (4) pentru transformarea $X_2 f$, obţinem

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} - \delta^3_k\,\Gamma^i_{j3} - \delta^3_j\,\Gamma^i_{3k} + \Gamma^3_{jk}\,\delta^i_3 = 0.$$

De aici deducem

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11},\ \Gamma^1_{12} = a^1_{12},\ \Gamma^1_{21} = a^1_{21},\ \Gamma^1_{22} = a^1_{22},\ \Gamma^1_{13} = a^1_{13}\,\mathrm{e}^{x^2},\ \Gamma^1_{31} = a^1_{31}\,\mathrm{e}^{x^2},$$

$$\Gamma^1_{23} = a^1_{23}\,\mathrm{e}^{x^2},\ \Gamma^1_{32} = a^1_{32}\,\mathrm{e}^{x^2},\ \Gamma^1_{33} = a^1_{33}\,\mathrm{e}^{2x^2},\ \Gamma^2_{11} = a^2_{11},\ \Gamma^2_{12} = a^2_{12},\ \Gamma^2_{21} = a^2_{21},$$

$$\Gamma^2_{22} = a^2_{22},\ \Gamma^2_{13} = a^2_{13}\,\mathrm{e}^{x^2},\ \Gamma^2_{31} = a^2_{31}\,\mathrm{e}^{x^2},\ \Gamma^2_{23} = a^2_{23}\,\mathrm{e}^{x^2},\ \Gamma^2_{32} = a^2_{32}\,\mathrm{e}^{x^2},\ \Gamma^2_{33} = a^2_{33}\,\mathrm{e}^{2x^2}$$

$$\Gamma^3_{11} = a^3_{11}\,\mathrm{e}^{-x^2},\ \Gamma^3_{12} = a^3_{12}\,\mathrm{e}^{-x^2},\ \Gamma^3_{21} = a^3_{21}\,\mathrm{e}^{-x^2},\ \Gamma^3_{22} = a^3_{22}\,\mathrm{e}^{-x^2},\ \Gamma^3_{13} = a^3_{13},$$

$$\Gamma^3_{31} = a^3_{31},\ \Gamma^3_{23} = a^3_{23},\ \Gamma^3_{32} = a^3_{32},\ \Gamma^3_{33} = a^3_{33}\,\mathrm{e}^{x^2},$$

unde a^i_{jk} sînt funcţii de variabila x^1.

Notînd cu $(i,\ j,\ k)$ ecuaţia obţinută din (4) pentru valorile $i,\ j,\ k$ ale indicilor, în cazul transformării $X_3 f$, ecuaţiile (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 1, 3) şi (1, 3, 1) ne dau

$$a^1_{12} = a^1_{21} = a^1_{13} = a^1_{31} = 0.$$

Ecuaţia (1, 2, 2) se scrie

$$a^1_{23} + a^1_{32} = 0.$$

Din ecuaţiile (1, 2, 3) şi (1, 3, 2) deducem

$$a^1_{22} = a^1_{33}.$$

Ecuaţiile (2, 1, 1) şi (3, 1, 1) ne dau

$$a^2_{11} = a^3_{11} = 0.$$

Din (2, 1, 2) şi (2, 2, 1) rezultă

$$a^3_{12} = -\,a^2_{13},\quad a^3_{21} = -\,a^2_{31}.$$

De asemenea, din (2, 1, 3) şi (2, 3, 1) obţinem

$$a^3_{13} = a^2_{12},\quad a^3_{31} = a^2_{21},$$

iar din (2, 2, 2) şi (2, 3, 3)

$$a^2_{23} + a^2_{32} + a^3_{22} = 0,\quad a^3_{33} + a^3_{22} = 0 \tag{10}$$

Ecuațiile (2, 2, 3) și (2, 3, 2) se scriu

$$(10') \qquad a^2_{22} - a^2_{33} - a^3_{23} = 0, \quad a^3_{23} - a^3_{32} = 0,$$

iar (3, 2, 2) și (3, 3, 3)

$$(10'') \qquad a^2_{22} - 2a^3_{23} = 2, \quad a^2_{33} + 2a^3_{32} = -1.$$

Din sistemul (10'), (10'') rezultă

$$a^2_{22} = 0, \ a^2_{33} = 1, \ a^3_{23} = a^3_{32} = -1.$$

Din (3, 2, 3) și (3, 3, 2) deducem

$$a^2_{23} + a^3_{22} - a^3_{33} = 0, \quad a^2_{23} - a^2_{32} = 0,$$

care împreună cu (10) ne dau

$$a^2_{23} = a^2_{32} = a^3_{22} = a^3_{33} = 0.$$

Celelalte ecuații (i, j, k) sînt identic satisfăcute.

Dacă notăm $a^1_{11} = \alpha(x^1)$, $a^1_{22} = \beta(x^1)$, $a^1_{23} = \gamma(x^1)$, $a^2_{12} = \delta(x^1)$, $a^2_{21} = \lambda(x^1)$, $a^2_{13} = \mu(x^1)$, $a^2_{31} = \nu(x^1)$, conexiunea afină invariantă pe spațiul (3) are componentele

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11} = \alpha(x^1), \ \Gamma^1_{22} = \beta(x^1), \ \Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = \gamma(x^1)e^{x^2}, \ \Gamma^1_{33} = \beta(x^1)e^{2x^2},\\ (11) \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \delta(x^1), \ \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \lambda(x^1), \ \Gamma^2_{13} = \mu(x^1)e^{x^2}, \ \Gamma^2_{31} = \nu(x^1)e^{x^2},\\ \Gamma^2_{33} = e^{2x^2}, \ \Gamma^3_{12} = -\mu(x^1)e^{-x^2}, \ \Gamma^3_{21} = -\nu(x^1)e^{-x^2}, \ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -1,\end{gathered}$$

componentele nescrise fiind nule.

Componentele nenule ale conexiunii lui Levi-Civita atașată spațiului (3) sînt

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = \varphi(x^1)\varphi'(x^1), \ \overline{\Gamma}^1_{33} = \varphi(x^1)\varphi'(x^1)e^{x^2}, \ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{\varphi'(x^1)}{\varphi(x^1)},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{33} = e^{2x^2}, \ \overline{\Gamma}^3_{23} = -\overline{\Gamma}^3_{32} = -1.$$

Invariantul lui Tallini are valoarea

$$R - \overline{R} - T = \frac{2}{\varphi^2}(\delta'\varphi^2 - \beta' + 2\varphi\varphi'' + \varphi'^2).$$

Deci, conexiunea (11) este compatibilă cu un spațiu V_3 compact și orientabil numai dacă

$$(12) \qquad \beta' = \delta'\varphi^2 + 2\varphi\varphi'' + \varphi'^2.$$

Rezultă următoarea

TEOREMĂ. *Conexiunile afine invariante pe spațiul V_3 cu metrica* (3) *sînt conexiunile* (11), *care depind de șapte funcții arbitrare de o variabilă. Dintre acestea singurele care sînt compatibile cu un spațiu V_3 compact și orientabil sînt cele pentru care este verificată relația* (12).

Din aceste trei teoreme deducem următoarea

TEOREMĂ. *Conexiunile afine invariante pe un spațiu V_3 care are ca grup total de mișcări un grup intranzitiv cu trei parametri depind de șapte funcții arbitrare de o variabilă. În general, aceste conexiuni nu sînt compatibile cu un spațiu V_3 compact și orientabil.*

Primită la redacție la 17 noiembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. BIANCHI L., *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni*, Bologna, 1928.
2. STOKA M., *Connexions invariantes sur un espace riemannien V_3*. I. Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **10**, 9, (1965).
3. TALLINI G., *Una proprietà in grande della varietà à connessione affine compatte con applicazioni alla varietà à connessione proiettiva*. Rend. Acc. Lincei, **32**, 644—648 (1964).

APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR PRIVIND ÎNCOVOIEREA BARELOR DREPTE

DE

WILHELM KECS

Se studiază cu ajutorul teoriei distribuțiilor reprezentarea matematică a momentelor distribuite continuu pe o curbă și se dau soluțiile generalizate ale problemelor privind încovoierea barelor drepte prin intermediul produsului de convoluție.

De asemenea, se introduce noțiunea de moment concentrat dirijat de un anumit ordin cu ajutorul căruia se studiază transmiterea acțiunii unei forțe dintr-un punct în alt punct al barei.

În încheiere se dau cîteva exemple pentru ilustrarea considerațiilor făcute.

Studiul încovoierii barelor drepte ocupă un loc important în rezolvarea multor probleme tehnice, pentru care au fost elaborate diferite metode de rezolvare, analitice și grafo-analitice, printre care menționăm metodele : Cauchy, Krîlov, Klebsch.

Din analiza acestor metode rezultă că la integrarea ecuației liniei elastice a barelor drepte, exprimarea matematică a sarcinilor ce solicită bara are un rol fundamental.

În cadrul acestui articol vom da, cu ajutorul teoriei distribuțiilor, reprezentarea matematică a momentelor distribuite precum și soluțiile generalizate ale problemelor privind încovoierea barelor drepte.

Soluțiile diverselor probleme se prezintă sub o formă unitară, exprimată cu ajutorul produsului de convoluție în spațiul distribuțiilor, fapt care ne va permite să studiem și transmiterea acțiunii unei forțe dintr-un punct al barei în alt punct.

În acest scop se introduce noțiunea de moment concentrat de un anumit ordin, căruia i se dă reprezentarea matematică corespunzătoare.

În încheiere se dau cîteva exemple pentru ilustrarea considerațiilor făcute.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 1035–1048, BUCUREȘTI, 1965

1. MOMENT CONCENTRAT DIRIJAT DE UN ANUMIT ORDIN

În lucrarea [5] s-a introdus noţiunea de moment concentrat dirijat pentru care s-a obţinut următoarea expresie analitică :

$$(1)\qquad \vec{Q}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{M^{(1)}\vec{F}^0}{|\vec{u}_1^0 \times \vec{F}^0|}\frac{\partial}{\partial u_1^0}\delta(X-X_0),$$

în care :

X (x_1, x_2, x_3) reprezintă un punct arbitrar din spaţiul tridimensional,

$M^{(1)}$ mărimea momentului,

$\vec{F}^0$ versorul uneia din forţele cu care s-a definit momentul,

$\vec{u}_1^0$ versorul care defineşte direcţia de tindere la limită a punctului de aplicaţie a uneia din forţele ce definesc momentul,

$\delta(X-X_0) = \delta(x_1-x_1^0, x_2-x_2^0, x_3-x_3^0)$ distribuţia lui Dirac,

$\frac{\partial}{\partial u_1}$ derivata direcţională după versorul $\vec{u}_1^0$.

Acest moment concentrat în punctul A, avînd coordonata X_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0), reprezintă limita în sensul distribuţiilor a perechii de forţe $(\vec{F}, -\vec{F})$ cînd braţul de pîrghie $d_1 \rightarrow 0$, considerîndu-se punctul A fix, B mobil, iar mărimea momentului $M = Fd_1$ precum şi versorii $\vec{u}_1^0$, $\vec{F}^0$ constanţi (fig. 1).

În aplicaţii sarcina $\vec{Q}$ echivalentă cu acţiunea momentului concentrat trebuie interpretată ca o sarcină distribuită pe mediul unde acţionează acesta.

Să presupunem că în punctul B_1 acţionează sarcina $\vec{Q}^{(1)}$, iar în punctul $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ sarcina $-Q^{(1)}$ (fig. 2) avînd expresia

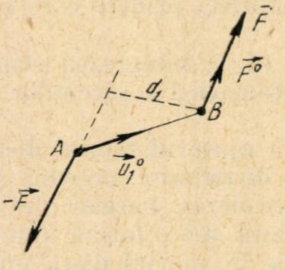


Fig. 1

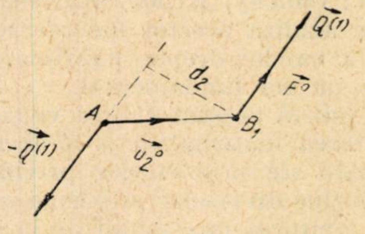


Fig. 2

$$(2)\qquad -\vec{Q}^{(1)}_{(x_1, x_2, x_3)} = \frac{M^{(1)}\vec{F}^0}{|\vec{u}_1^0 \times \vec{F}^0|}\frac{\partial}{\partial u_1}\delta(X-X_0).$$

DEFINIŢIE. Numim moment concentrat dirijat de ordinul 2, corespunzător punctului A (X_0), limita în sensul distribuţiilor a perechii de sarcini

$(\vec{Q}^{(1)}, -\vec{Q}^{(1)})$ cînd braţul de pîrghie $d_2 \to 0$, considerîndu-se punctul B_1 mobil iar mărimea momentului $M^{(2)} = M^{(1)} d_2$ precum şi versorii $\vec{u}_2^0$ şi $\vec{F}^0$ constanţi.

Numărul pozitiv $M^{(2)}$ reprezintă mărimea momentului concentrat de ordinul 2.

Efectuînd trecerea la limită a perechii de sarcini mai sus menţionată, vom obţine pentru momentul concentrat dirijat de ordinul 2 notat prin simbolul $\vec{Q}^{(2)}$ expresia

$$(3)\quad \vec{Q}^{(2)}_{(x_1,\, x_2,\, x_3)} = \lim_{d_2 \to 0} (\vec{Q}^{(1)}, -\vec{Q}^{(1)}) = \frac{M^{(2)} \vec{F}^0}{|\vec{u}_1^0 \times \vec{F}^0| . |\vec{u}_2^0 \times \vec{F}^0|} \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \delta(X - X_0),$$

în care $\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2}$ reprezintă derivata direcţională de ordinul 2, direcţiile fiind definite de versorii $\vec{u}_1^0$ şi $\vec{u}_2^0$.

În mod analog dacă vom nota cu $M^{(n)}$ mărimea momentului concentrat dirijat de ordinul n corespunzător punctului $A(X_0)$ şi cu $\vec{u}_i^0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ versorii ce definesc direcţiile de tindere la limită, atunci momentul concentrat de ordinul n va fi definit prin relaţia

$$(4)\qquad \vec{Q}^{(n)}_{(x_1,\, x_2,\, x_3)} = \lim_{d_n \to 0} (\vec{Q}^{(n-1)}, -\vec{Q}^{(n-1)}),$$

unde $\vec{Q}^{(n-1)}$, $-\vec{Q}^{(n-1)}$ reprezintă momente concentrate de ordinul $n-1$ aplicate în punctul fix $A(X_0)$ şi punctul mobil B_n iar d_n braţul de pîrghie (fig. 3).

Mărimea momentului de ordinul n, $M^{(n)} = M^{(n-1)} d_n$, ca şi versorii $\vec{u}_i^0$, $\vec{F}^0$ se consideră constanţi.

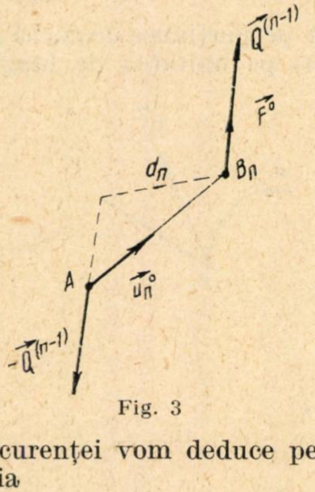


Fig. 3

Aplicînd metoda recurenţei vom deduce pentru momentul concentrat de ordinul n expresia

$$(5)\qquad \vec{Q}^{(n)}(X) = \frac{(-1)^n M^{(n)} \vec{F}^0}{\prod_1^n |\vec{u}_i^0 \times \vec{F}^0|} \frac{\partial^n}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n} \delta(X - X_0).$$

Derivatele se consideră direcţionale şi definite de versorii $\vec{u}_i^0 (i = 1,2, ..., n)$.

În particular, dacă vom considera $\vec{u}_i^0 = \vec{u}^0 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \; (i = 1, 2, ..., n)$, expresia momentului concentrat dirijat de ordinul n se va scrie sub forma

$$\vec{Q}^{(n)}_{(x_1, x_2, x_3)} = \frac{(-1)^n M^{(n)} \vec{F}^0}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|^n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta (X - X_0) \right)^{(n)} . \tag{6}$$

Dacă $\vec{u}^0 = \vec{x}_1^0$, unde $\vec{x}_1^0$ reprezintă versorul axei Ox_1, atunci expresia (6) devine

$$\vec{Q}^{(n)}_{(x_1, x_2, x_3)} = \frac{(-1)^n M^{(n)} \vec{F}^0}{|\sin (\vec{x}_1^0, \vec{F}^0)|^n} \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \delta (X - X_0).$$

2. EXPRESIA MATEMATICĂ A MOMENTELOR DIRIJATE, DISTRIBUITE CONTINUU PE O CURBĂ

Fie (c) o curbă definită sub formă parametrică prin ecuaţiile

$$x_i = f_i(s) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{7}$$

unde funcţiile f_i se presupun indefinit derivabile în raport cu parametrul s reprezentînd arcul de curbă şi astfel încît

$$\lim_{s \to \pm\infty} (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) = +\infty.$$

Vom presupune că pe porţiunea de curbă $\overset{\frown}{AB}$ corespunzătoare intervalului $s \in [a, b]$ (fig. 4) pe unitatea de lungime a arcului acţionează

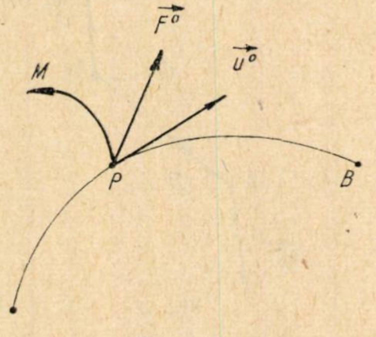


Fig. 4

momente concentrate dirijate de ordinul întîi $\vec{Q}^{(1)}$, avînd expresia

$$\vec{Q}^{(1)} = - \frac{M \vec{F}^0}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|} \frac{\partial}{\partial s} \delta (X - Y), \tag{8}$$

unde M, $\vec{F}^0$ și $\vec{u}^0$ sînt funcții cunoscute depinzînd de arcul s de curbă, iar $\Upsilon = \Upsilon(f_1, f_2, f_3)$. Versorul $\vec{u}^0$ reprezintă în acest caz versorul tangentei la curbă.

Deoarece în fiecare punct P de pe arcul de curbă $\widehat{AB}$ acționează sarcina concentrată $\vec{Q}^{(1)}(s)$, arcului $\widehat{AB}$ îi vom asocia sarcina $\vec{Q}$ definită prin expresia

$$(9) \qquad \vec{Q} = \int_a^b \vec{Q}^{(1)}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pentru a explica expresia (9) vom nota cu $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ o funcție fundamentală și în baza definiției egalității a două distribuții vom avea

$$(10) \qquad (\vec{Q}, \varphi) = \int_a^b \left(-\frac{M F^0}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|} \frac{\partial}{\partial s} \delta(X - \Upsilon),\ \varphi \right) \mathrm{d}s.$$

Deoarece

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial s} \delta(X - \Upsilon),\ \varphi \right) = -\frac{\partial}{\partial s} \varphi(\Upsilon),$$

unde $\varphi(\Upsilon) = \varphi(f_1, f_2, f_3)$, expresia (10) se va scrie

$$(12) \qquad (\vec{Q}, \varphi) = \int_a^b \frac{M \vec{F}^0}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|} \frac{\partial}{\partial s} \varphi(\Upsilon)\ \mathrm{d}s.$$

Notînd cu $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ respectiv proiecțiile versorilor $\vec{u}^0, \vec{F}^0$ și integrînd prin părți obținem

$$(13) \qquad (\vec{Q}, \varphi) = \left| \frac{M \varphi(f_1, f_2, f_3)}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|} \vec{F}^0 \right|_a^b - \int_a^b \varphi(f_1, f_2, f_3) \frac{\partial}{\partial s} \frac{M \vec{F}^0}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|}\,\mathrm{d}s.$$

Cu ajutorul funcției

$$\theta_1(s) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } s \in [a, b], \\ 0 \text{ în rest,} \end{cases}$$

relația (13) devine

$$(14) \qquad (\vec{Q}, \varphi) = \left| \frac{M \varphi(f_1, f_2, f_3)}{|\vec{u}^0 \times \overset{\Rightarrow}{F}{}^0|} \vec{F}^0 \right|_a^b - \left(\theta_1 \frac{\partial}{\partial s} \frac{M \vec{F}^0}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|},\ \varphi(f_1, f_2, f_3) \right).$$

Avînd în vedere cele arătate în [4] (p. 267) vom obține pentru sarcina $\vec{Q}$ expresia

$$(15) \qquad \vec{Q}(x_1, x_2, x_3) = \frac{M(b) \vec{F}^0(b)}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|_{s=b}} \delta(X - X_B) - \frac{M(a) \vec{F}^0(a)}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|_{s=a}} \delta(X - X_A) -$$
$$- \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\theta}_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{M \vec{F}^0}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|} \right) \mathrm{d}s,$$

unde $\overline{\theta}_1 = \theta_1(s)\theta(X-Y)$, θ fiind funcţia lui Heaviside.

În particular, dacă vom alege arcul s drept linie de coordonată, atunci expresia momentului concentrat dirijat de ordinul întîi, concentrat în punctul s_0 pe arcul de curbă, va avea expresia

$$\vec{Q}^{(1)}(s) = -\frac{M(s)\vec{F}^0(s)}{|\vec{u}^0(s)\times\vec{F}^0(s)|}\frac{\partial}{\partial s}\delta(s-s_0).$$

În consecinţă, expresia (15) a sarcinii echivalente cu momentul continuu distribuit se va scrie

$$(16)\qquad \vec{Q}(s) = \frac{M(b)\vec{F}^0(b)}{|\vec{u}^0(b)\times\vec{F}^0(b)|}\delta(s-b) - \frac{M(a)\vec{F}^0(a)}{|\vec{u}^0(a)\times\vec{F}^0(a)|}\delta(s-a) - \theta_1(s)\frac{\partial}{\partial s}\frac{M\vec{F}^0}{|\vec{u}^0\times\vec{F}^0)|}.$$

Exemplul 1

Pe segmentul ab (fig. 5) acţionează momente uniform distribuite avînd mărimea M, iar $\vec{F}^0$ (cos α, sin α) constant.

Conform relaţiei (16) expresia sarcinii echivalente cu momentul uniform distribuit va fi

$$(17)\qquad \vec{Q}(x_1) = \frac{M\vec{F}^0}{\sin\alpha}\big(\delta(x_1-b) - \delta(x_1-a)\big).$$

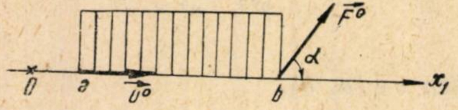


Fig. 5

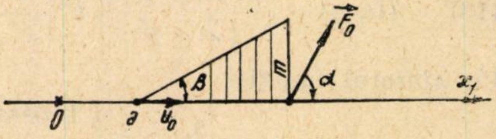


Fig. 6

Exemplul 2

Pe segmentul ab acţionează momentul distribuit cum se arată în (fig. 6) avînd $\vec{F}^0$(cos α, sin α) constant şi $M(a) = 0$; $M(b) = m$. Conform relaţiei (16) momentul distribuit este echivalent cu sarcina

$$(18)\qquad \vec{Q}(x_1) = \frac{m\vec{F}^0}{\sin\alpha}\left(\delta(x_1-b) - \frac{\theta_1}{b-a)}\right),$$

deoarece

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = \operatorname{tg}\beta = \frac{m}{b-a}.$$

3. ECHIVALENŢA ACŢIUNII FORŢELOR

Vom presupune că forţa $\vec{F}$ acţionează în punctul $A(l, h, k)$ asupra unui mediu oarecare. Ne propunem să găsim condiţiile în care putem muta forţa $\vec{F}$ din punctul A în punctul $O(0, 0, 0)$ astfel încît efectul forţei să rămînă acelaşi (fig. 7).

Forţa $\vec{F}$ aplicată în punctele A şi O este echivalentă respectiv cu sarcinile $\vec{Q}_A$ şi $\vec{Q}_O$ avînd expresiile

$$
(19)\quad \begin{aligned} \vec{Q}_A(x_1, x_2, x_3) &= \vec{F}\,\delta(x_1 - l,\ x_2 - h,\ x_3 - k), \\ \vec{Q}_O(x_1, x_2, x_3) &= \vec{F}\,\delta(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}
$$

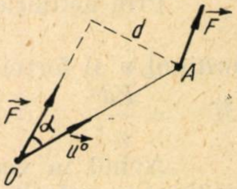


Fig. 7

Dezvoltînd după formula lui Taylor expresia sarcinii $\vec{Q}_A$ vom obţine

$$
(20)\quad \vec{Q}_A = \vec{F}\left[\delta(X) - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} l + \frac{\partial}{\partial x_2} h + \frac{\partial}{\partial x_3} k\right)\delta(X) + \right.
$$

$$
+ \frac{1}{2\,!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} l + \frac{\partial}{\partial x_2} h + \frac{\partial}{\partial x_3} k\right)^{(2)} \delta(X) + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} l + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\partial}{\partial x_2} h + \frac{\partial}{\partial x_3} k\right)^{(n-1)} \left.\delta(X) + R_n\right],
$$

unde

$$
\delta(X) = \delta(x_1, x_2, x_3),
$$

$$
R_n = \frac{(-1)^n}{n\,!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} l + \frac{\partial}{\partial x_2} h + \frac{\partial}{\partial x_3} k\right)^{(n)} \delta(x_1 - \theta l,\ x_2 - \theta h,\ x_3 - \theta k)
$$

$$
\text{şi } 0 < \theta < 1.
$$

Notînd cu $\vec{u}^0$ versorul vectorului $\overrightarrow{OA}$ (fig. 7), expresia (20) se va scrie cu ajutorul derivatelor direcţionale după $\vec{u}^0$ sub forma

$$
(21)\quad \vec{Q}_A = \vec{F}\delta(X) - \vec{F}^0(F\overline{OA})\,\frac{\partial\delta(X)}{\partial u} + \frac{1}{2\,!}\vec{F}^0(F\overline{OA}^2)\,\frac{\partial^2\delta(X)}{\partial u^2} + \ldots
$$

$$
\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!}\vec{F}^0(F\overline{OA}^{n-1})\,\frac{\partial^{n-1}\delta(X)}{\partial u^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{n\,!}\vec{F}^0(F\overline{OA}^n)\,\frac{\partial^n}{\partial u^n}\,\delta(x_1 -
$$

$$
- \theta l,\ x_2 - \theta h,\ x_3 - \theta k),
$$

unde $\vec{F}^0$ reprezintă versorul forţei $\vec{F}$.

Să observăm că cu ajutorul distanței d, măsurată de la punctul A la suportul forței $\vec{F}$ aplicată în O, expresia (21) se va scrie

$$\vec{Q}_A = \vec{Q}_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \vec{F}^0 \frac{(Fd^i)}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|^i} \frac{\partial^i}{\partial u^i} \delta(X) + \tag{21'}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n!} \vec{F}^0 \frac{(Fd^n)}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|^n} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(x_1 - \theta l,\ x_2 - \theta h,\ x_3 - \theta k).$$

Prin definiție expresia $\frac{Fd^n}{n!}$ o vom numi mărimea momentului de ordinul n al forței $\vec{F}$ aplicată în O în raport cu punctul A și o vom nota $M^{(n)} = \frac{Fd^n}{n!}$.

Avînd în vedere expresia (6) a momentului concentrat dirijat de ordinul n, relația (21′) devine

$$\vec{Q}_A = \vec{Q}_o + \vec{Q}^{(1)} + \vec{Q}^{(2)} + \ldots + \vec{Q}^{(n-1)} + \vec{Q}_1^{(n)}, \tag{22}$$

unde

$$\vec{Q}_1^{(n)} = \frac{(-1)^n}{|\vec{u}^0 \times \vec{F}^0|^n} M^{(n)} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(x_1 - \theta l,\ x_2 - \theta h,\ x_3 - \theta k).$$

Expresia (22) ne dă legea de echivalență a acțiunii forței $\vec{F}$ aplicată în două puncte diferite A și O.

Deci forța $\vec{F}$ aplicată în punctul A este echivalentă cu acțiunea forței $\vec{F}$ aplicată în punctul O plus suma a $n-1$ momente concentrate dirijate de ordinele $1, 2, \ldots, n-1$ aplicate în O și un moment de ordinul n aplicat într-un anumit punct situat pe segmentul OA.

În funcție de particularitățile mediului asupra căruia acționează forța $\vec{F}$, se determină ordinul maxim al momentelor concentrate dirijate, adică numărul n.

Astfel, în cazul unui mediu rigid, care se caracterizează prin aceea că distanța dintre două puncte ale mediului rămîne invariant, ordinul maxim al momentelor este 1.

Acest rezultat decurge din legea de echivalență a acțiuni a două forțe egale aplicate în două puncte diferite aparținînd unui corp rigid.

Adică pentru corpurile rigide legea de echivalență este dată de expresia

$$\vec{Q}_A = \vec{Q}_o + \vec{Q}^{(1)}. \tag{23}$$

Să presupunem acum că deformarea unui mediu se produce numai după axa Ox_2, caz care are loc de exmplu cînd o bară dreaptă elastică este solicitată de forțe normale pe bară (fig. 8).

După cum se va arăta în paragraful 4, deformarea liniei elastice a barei este dată de legea

$$EI\,x_2 = x_2^0(x_1) + E^+(x_1) * q(x_1), \tag{24}$$

unde simbolul „$*$” reprezintă produsul de convoluţie în spaţiul distribuţiilor iar $q(x_1)$ distribuţia ce descrie acţiunea sarcinilor normale pe bară.

Funcţia $E^+(x_1)$ reprezintă soluţia particulară fundamentală a ecuaţiei liniei elastice care în cazul barei are expresia

$$EI\,E^+(x_1) = \left(\frac{x_1^3}{6}\right)_+ = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{6} & \text{pentru } x_1 \geqslant 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}. \tag{25}$$

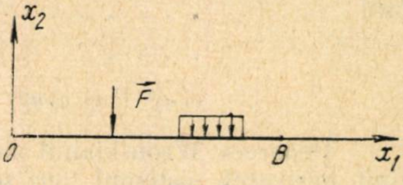


Fig. 8

Vom presupune că asupra barei acţionează forţa $\vec{F}$ aplicată în punctul A. Deoarece această forţă este echivalentă cu sarcina $Q_A = q(x_1)$ dată de (22), prin substituirea ei în (24) vom obţine

$$EIx_2 = x_2^0(x_1) + E^+(x_1) * (Q_0 + Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^{(3)}), \tag{26}$$

deoarece

$$E^+(x_1) * Q^{(P)} = 0 \qquad (P \geqslant 4).$$

Deci pentru bara dreaptă elastică avînd rigiditatea EI constantă avem $n = 3$ şi în consecinţă dezvoltarea (22) se limitează la primii patru termeni, adică

$$Q_A = Q_o + Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^{(3)}. \tag{27}$$

În concluzie putem spune că deformarea produsă de forţa $\vec{F}$ aplicată în A este aceeaşi ca şi în cazul cînd forţa $\vec{F}$ ar fi aplicată în O şi în care ar acţiona momente concentrate dirijate de ordinele 1, 2, 3.

4. SOLUŢIA GENERALIZATĂ A ECUAŢIEI LINIEI ELASTICE A BARELOR DREPTE

Considerăm ecuaţia diferenţială ordinară de gradul n cu coeficienţi constanţi

$$P(D)\,x_2 = f(x_1), \tag{28}$$

unde $f(x_1)$ reprezintă o distribuţie oarecare.

Fie $u_i(x_1)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ un sistem fundamental al ecuaţiei omogene corespunzătoare lui (28).

Soluţia generală a ecuaţiei omogene o vom nota cu $x_2^0(x_1)$ şi are expresia

$$x_2^0(x_1) = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i. \tag{29}$$

Pentru determinarea soluției generale în distribuții a ecuației neomogene (28), vom aplica metoda variației constantelor lui Lagrange, în baza căreia vom obține sistemul de ecuații

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
&c_1' u_1 + c_2' u_2 + \ldots + c_n' u_n = 0,\\
&c_1' u_1' + c_2' u_2' + \ldots + c_n' u_n' = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_1' u_1^{(n-1)} + c_2' u_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' u_n^{(n-1)} = f(x_1).
\end{aligned}
$$

Deoarece Wronskianul sistemului (30) este diferit de zero și indefinit derivabil, sistemul (30) se poate rezolva și vom obține

$$
(31)\qquad C_i'(x_1) = f(x_1)\,\frac{A_i(x_1)}{W(x_1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),
$$

unde $A_i(x_1)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ reprezintă complemenți algebrici din Wronskian.

Dacă în particular considerăm $f(x_1) = \delta(x_1)$, atunci ecuațiile (31) devin

$$
(32)\qquad C_1'(x_1) = \delta(x_1)\,\frac{A_i(x_1)}{W(x_1)} = \delta(x_1)\,\frac{A_i(0)}{W(0)},
$$

deoarece $\dfrac{A_i(x_1)}{W(x_1)}$ este indefinit derivabil și

$$
(33)\qquad \delta(x_1)\,\frac{A_i(x_1)}{W(x_1)} = \delta(x_1)\,\frac{A_i(0)}{W(0)}.
$$

În acest caz ecuațiile (32) se integrează imediat și avem

$$
(34)\qquad C_i = \frac{A_i(0)}{W(0)}\,\theta(x_1) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),
$$

unde $\theta(x_1)$ reprezintă funcția lui Heaviside anume

$$
\theta(x_1) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x_1 > 0,\\ 0 \text{ pentru } x_1 < 0.\end{cases}
$$

Soluția generală a ecuației

$$
(35)\qquad P(D)\,E(x_1) = \delta(x_1)
$$

va fi

$$
(36)\qquad E(x_1) = x_2^0(x_1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i(0)}{W(0)}\,\theta(x_1)\,u_i(x_1).
$$

Funcţia $\theta(x_1)\, u_i(x_1)$ reprezintă partea pozitivă a funcţiei $u_i(x_1)$ şi o vom nota

$$u_i^+(x_1) = \theta(x_1)\, u_i(x_1) = \begin{cases} u_i(x_1) \text{ pentru } x_1 \geqslant 0, \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases} \tag{37}$$

Pe de altă parte funcţia

$$E^+(x_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i(0)}{W(0)} u_i^+(x_1) \tag{38}$$

reprezintă soluţia particulară a ecuaţiei (35) şi deoarece ea se obţine din soluţia fundamentală $E(x_1)$ dată de (36) o vom numi soluţia particulară fundamentală.

De remarcat că cu ajutorul soluţiei particulare fundamentale se poate exprima şi soluţia particulară a ecuaţiei (28)

Deoarece

$$P(D)\, x_2^0 = 0 \text{ şi } P(D) E^+(x_1) = \delta(x_1),$$

rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (28) este

$$x_2 = x_2^0 + E^+(x_1) * f(x_1). \tag{39}$$

Evident că produsul de convoluţie din expresia (39) se consideră în spaţiul distribuţiilor.

În particular, dacă sistemul fundamental de soluţii $u_i(x_1)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ este normal, atunci $W(0) = 1$; $A_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $A_n(0)=1$ şi deci soluţia particulară fundamentală $E^+(x_1)$ va avea expresia

$$E^+(x_1) = u_n^+(x_1). \tag{40}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (28) se va scrie în acest caz sub forma

$$x_2 = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i + u_n^+ * f(x_1), \tag{41}$$

unde constantele C_i se determină din condiţiile

$$C_1 = x_2 \big|_{x_1 = x_1^0},$$

$$C_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\bigg|_{x_1 = x_1^0},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1} x_2}{\mathrm{d}x_1^{n-1}}\bigg|_{x_1 = x_1^0}.$$

După cum se ştie din rezistenţa materialelor, ecuaţia liniei elastice a barelor drepte cu rigiditatea EI constantă este

$$EI \frac{\mathrm{d}^4 x_2}{\mathrm{d}x_1^4} = q(x_1), \tag{42}$$

unde $q(x_1)$ reprezintă distribuţia ce descrie sarcina normală pe bară.

Aplicînd considerațiile de mai sus la ecuația (42) vom obține următorul sistem fundamental normal

$$u_1 = 1\,;\; u_2 = x_1\,;\; u_3 = \frac{x_1^2}{2}\,;\; u_4 = \frac{x_1^3}{6}$$

și deci soluția particulară fundamentală $E^+(x_1)$ va fi

$$E^+(x_1) = \frac{1}{EI}\,u_n^+ = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{6\,EI} & \text{pentru } x_1 \geqslant 0, \\ 0 \text{ în rest.} & \end{cases}$$

În consecință soluția generală a ecuației (42) este

$$(43) \qquad EIx_2 = C_1 + C_2\,x_1 + C_3\,\frac{x_1^2}{2} + C_4\,\frac{x_1^3}{6} + \frac{1}{6}\,(x_1^3)_+ * q(x_1).$$

Evident că în funcție de condițiile de fixare a barei se determină constantele $C_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ținînd seamă de exprimarea matematică a sarcinilor ce acționează asupra barei, vom putea determina dintr-o dată deformarea barei exprimată de ecuația (43).

Exemplu

Fie OA o bară dreaptă încastrată în punctul O, asupra căreia la capătul $A(\overline{OA} = a)$ acționează forța P (fig. 9).

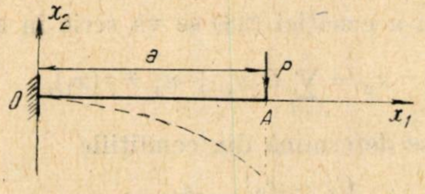


Fig. 9

Forța P este echivalentă cu sarcina $q(x_1) = -\,P\delta(x_1 - a)$ și deci conform ecuației (43) deformarea liniei elastice are expresia

$$(44) \quad EIx_2 = C_1 + C_2 x_1 + C_3\,\frac{x_1^2}{2} + C_4\,\frac{x_1^3}{6} - \frac{1}{6}\,(x_1^3)_+ * P\delta(x_1 - a).$$

Deoarece

$$(x_1^3)_+ * P\delta\,(x_1 - a) = P\,(x_1 - a)_+^3,$$

avem

$$(45) \qquad EIx_2(x_1) = C_1 + C_2 x_1 + C_3\,\frac{x_1^2}{2} + C_4\,\frac{x_1^3}{6} - \frac{P}{6}\,(x_1 - a)_+^3\,.$$

Această ecuaţie poate fi scrisă şi sub forma $EIx_2 = \left[A_1 + A_2 x_1 + A_3 \frac{x_1^2}{2} + \right.$ $\left. + A_4 \frac{x_1^3}{6} - \frac{1}{6} (x_1^3)_+ \right] * P\delta(x_1 - a)$, unde constantele de integrare se determină din condiţiile :

$$\text{pentru } x_1 = 0 \begin{cases} x_2 = \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0, \\[2ex] EI \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}x_1} = -aP \text{ (momentul încovoietor)}, \\[2ex] EI \dfrac{\mathrm{d}^3 x_2}{\mathrm{d}x_1^3} = P \text{ (forţa tăietoare)}. \end{cases}$$

În consecinţă pentru constante vom obţine valorile

$$A_1 = -\frac{a^3}{3} P, \ A_2 = -\frac{a^2}{2} P, \ A_3 = 0, \quad A_4 = P.$$

Conform relaţiei (27) acţiunea forţei P aplicată în punctul A este echivalentă cu forţa P aplicată în punctul O a cărei reprezentare este $Q_0 = P\delta(x_1)$ şi a momentelor $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}$ concentrate în O avînd respectiv expresiile,

$$Q^{(1)} = -aP \frac{\mathrm{d}\delta(x_1)}{\mathrm{d}x_1}, \ Q^{(2)} = \frac{a^2}{2} P \frac{\mathrm{d}^2 \delta(x_1)}{\mathrm{d}x_1^2}, \ Q^{(3)} = -\frac{a^3}{6} P \frac{\mathrm{d}^3 \delta(x_1)}{\mathrm{d}x_1^3}.$$

Notînd

$$\mathcal{E}(x_1) = \frac{1}{P} \left[A_1 + A_2 x_1 + A_4 \frac{x_1^3}{6} - \frac{1}{6} (x_1^3)_+ \right],$$

putem scrie

$$EI x_2 = \mathcal{E}(x_1) * P\delta(x_1 - a) = \mathcal{E} * Q_0 + \mathcal{E} * Q^{(1)} + \mathcal{E} * Q^{(2)} + \mathcal{E} * Q^{(3)},$$

adică

$$EI x_2 = \left[-\frac{a^3}{3} P - \frac{a^2}{2} P x_1 + \frac{P}{6} x_1^3 - \frac{P}{6} (x_1^3)_+ \right] - aP \left[-\frac{a^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{x_1^2}{2} \theta(x_1) \right] + \frac{a^2}{2} P [x_1 - (x_1)_+] - \frac{a^3}{6} P [1 - \theta(x_1)].$$

Primită la redacţie la 28 aprilie 1965

Institutul de mine Petroşani

BIBLIOGRAFIE

1. Victor Bauşic, Th. Havîrneanu, N. Preda, D. Horbaniuc, P. Agachi, *Contribuţiuni la generalizarea ecuaţiei fibrei elastice a barelor drepte*. Bul. Inst. politehnic Iaşi, serie nouă, **III** (**VII**) *1—2* (1957).
2. M. Diaconu, N. Preda, *Aplicarea parametrilor iniţiali la calculul săgeţii grinzilor încovoiate ţinînd seama de forţele tăietoare*. Bul. Inst. politehnic Iaşi, serie nouă, **III** (**VII**) *1—2* (1957).
3. И. М. Гельфанд, Т. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*. Том I, Москва, 1958.
4. Wilhelm Kecs, *Reprezentarea cîmpurilor vectoriale cu ajutorul funcţiilor generalizate*. St. cerc. mat. **15**, *2* (1964).
5. Wilhelm Kecs, *Sur les problèmes concernant le demiespace élastique*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. **6**(**54**), *3—4* (1962).
6. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Vol. I, II, Hermann, Paris, 1950—1951.
7. Anton Şesan, *Relations statiques générales pour l'étude de la flexion*. Bul. Inst. politehnic Iaşi, serie nouă. **IV** (**VIII**). *1—2* (1958).

ASUPRA SOLUŢIEI UNUI SISTEM DE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE TIP ELIPTIC ÎN E_m, ANALOG ECUAŢIEI LUI BELTRAMI ÎN COMPLEX

DE

MARIANA COROI-NEDELCU

Se studiază ecuaţia cu derivate spaţiale (5) care defineşte un sistem liniar de ecuaţii cu derivate parţiale de tip eliptic cu operatorul derivată spaţială în sensul lui N. Teodorescu. Se caută soluţii generalizate în sensul lui S.L. Sobolev pentru ecuaţia (5) care este echivalentă cu o ecuaţie integrală singulară pentru care se arată că admite întotdeauna soluţie unică în problemă la limită dată. În paralel, se studiază şi ecuaţiile cu derivate spaţiale (27) şi (31).

Extinderea noţiunii de derivată areolară, dată de D. Pompeiu în 1912 pentru funcţiile de o variabilă complexă care aparţin clasei C^1 şi de N. Teodorescu în 1931 [9] pentru o clasă mai largă de funcţii [10], a fost generalizată la spaţiul cu m dimensiuni de Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu [3] pentru funcţii care aparţin clasei C^1 cu ajutorul calculului matricial sau a numerelor hipercomplexe. N. Teodorescu a dat o generalizare pentru o clasă mai largă de funcţii [8]. Vom considera următoarea definiţie dată de N. Teodorescu.

Fiind dat un cîmp de matrici $\varphi = \{\varphi_j^h\} \in C^0(\Delta)$ şi o familie regulată (ω, σ) de domenii care tind către un punct $P \in \Delta$, vom spune că cîmpul φ *este derivabil spaţial în punctul P, în raport cu cîmpul de matrici constante* $\gamma(\gamma^1,\ldots,\gamma^m)$, dacă

$$\Phi(P) = -\lim_{\text{măs}\ \omega\to 0} \frac{\int_\sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\varphi(M)\,d\sigma_M}{\text{măs}\ \omega}$$

există şi este independentă de familia (ω, σ). În aceste condiţii matricea numerică $\Phi(P)$ se va numi derivata spaţială a matricii φ în raport cu γ în punctul P şi se va nota cu $\Phi = \Delta\varphi$.

Dacă Φ există pe o submulţime $E \subset \Delta$, vom spune că φ este derivabilă (γ) pe E. Matricile $\varphi \in C^0(\Delta)$ derivabile (γ) în $\Omega \subset \Delta$ cu derivata spaţială sumabilă în Ω se vor numi de clasa $\Lambda_\gamma^1(\Omega)$. N. Teodorescu a dat următoarea teoremă:

Condiţia necesară şi suficientă ca $\varphi \in \Lambda_\gamma^1(\Delta)$ este ca să existe o funcţie Φ sumabilă pe Δ astfel încît

$$\int_\sigma (\vec{n}_M \cdot \gamma)\, \varphi(M)\, d\sigma_M + \int_\omega \Phi(Q)\, d\omega_Q = 0$$

să aibă loc pentru orice pereche $(\omega, \sigma) \subset \Delta$; $\vec{n}$ este vectorul normalei interioare la σ. Dacă $\varphi \in C^1(\Delta)$ operatorul $\Phi = D\varphi$ este dat de

$$D\varphi = \sum_{k=1}^{m} \gamma^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

unde indicele de însumare k variază de la 1 la m, dimensiunea spaţiului. Dacă $\widetilde{D}$ este operatorul adjunct al lui D, atunci

$$\widetilde{D}\varphi = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \gamma^k.$$

Pentru $\widetilde{D}$ se dă o definiţie asemănătoare ca pentru D cînd $\varphi \in C^0(\Delta)$ şi integrala de definiţie are pe φ permutat cu $(\vec{n}_M \cdot \gamma)$. D se va mai numi şi derivata spaţială (γ) la stînga iar $\widetilde{D}$ la dreapta. Dacă D şi $\widetilde{D}$ coincid pentru orice $\varphi \in C^1(\Delta)$, atunci operatorul se va numi autoadjunct. Operatorul linear $D = \sum_{k=1}^{m} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ fiind dat, operatorul $\overline{D} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ astfel încît $\overline{D}D = e\Delta$ impune condiţiile

$$\overline{\gamma}^k \gamma^l + \overline{\gamma}^l \gamma^k = 2\delta^{kl} e, \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

unde e este matricea unitate. Relaţia (1) impune şi condiţia $D\overline{D} = e\Delta$ pentru că condiţiile (1) impun şi

$$\gamma^k \overline{\gamma}^l + \gamma^l \overline{\gamma}^k = 2\delta^{kl} e, \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Matricile $\overline{\gamma}^k$ sînt matricile transpuse lui γ^k şi din (1) sau (2) pentru $l = k$ se vede că sînt şi inverse. Operatorul $\overline{D}$ se defineşte printr-o integrală asemănătoare ca D în care γ se înlocuieşte cu $\overline{\gamma}(\overline{\gamma}^1, \ldots, \overline{\gamma}^m)$. La fel se defineşte şi $\widetilde{\overline{D}}$ pentru care în integrala de definiţie φ se permută cu $(\vec{n}_M \cdot \gamma)$ iar γ se înlocuieşte cu $\overline{\gamma}$. Dacă $\varphi \in C^1(\Delta)$,

$$\widetilde{\overline{D}}\varphi = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \overline{\gamma}^k.$$

N. Teodorescu a arătat că dacă D şi $\overline{D}$ liniarizează laplaceanul, atunci cel puţin numărul liniilor sau coloanelor matricii φ va fi par.

Gr. C. Moisil a arătat, pentru $\varphi \in C^1(\Delta)$ iar N. Teodorescu pentru $\varphi \in \Lambda^1_\gamma(\Delta)$, că are loc formula de reprezentare Moisil-Teodorescu

$$\frac{1}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}.\overline{\gamma})}{MP^m}(\vec{n}_M.\gamma)\varphi(M)\mathrm{d}\sigma_M + \frac{1}{s_m}\int_\Omega \frac{(\overrightarrow{QP}.\overline{\gamma})}{QP^m} D\varphi(Q)\,\mathrm{d}\omega_Q =$$

$$= \begin{cases} \varphi(P) & \text{pentru } P \in \Omega \subset \Delta \\ 0 & \text{pentru } P \in \text{ext } \Omega \end{cases} \tag{3}$$

şi alte 3 relaţii asemănătoare pentru cazul operatorilor $\widetilde{D}$, $\overline{D}$ şi $\widetilde{\overline{D}}$, unde s_m este aria hipersferei unitate în E_m şi Σ hipersuprafaţa care mărgineşte Ω şi admite normală continuă în orice punct.

N. Teodorescu a numit funcţie *monogenă într-un punct* $P \in E_m$, orice $\varphi \in C^1$ într-o vecinătate a lui P şi care satisface în acest punct sistemul $D\varphi = 0$ şi condiţiei (1). O funcţie monogenă într-un domeniu $\Delta \subset E_m$ se va numi *olomorfă în* Δ.

Pentru funcţiile olomorfe în E_m se generealizează formula lui Cauchy din plan (făcînd $D\varphi = 0$ în (3)). Deci prima integrală în (3) reprezintă o funcţie olomorfă în E_m.

N. Teodorescu a studiat ecuaţii cu derivate spaţiale de tipul

$$D\varphi = \Phi$$

în care soluţia este dată după (3) de

$$\varphi(P) = h(P) + \frac{1}{s_m}\int_\Omega \frac{(\overrightarrow{QP}.\overline{\gamma})}{QP^m}\Phi(Q)\mathrm{d}\omega_Q, \tag{4}$$

unde $h(P)$ este o funcţie (matrice) olomorfă arbitrară şi integrala este analoagă integralei lui Pompeiu din plan şi reprezintă o primitivă în raport cu operatorul D.

În [1] Biţadze a rezolvat probleme la limită pentru $\mathrm{D}\varphi = 0$ pentru spaţiul E_3 şi un sistem particular γ^i definit de Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu în [3]. În [4] am studiat ecuaţii liniare cu derivate spaţiale de ordin superior asemănătoare ecuaţiilor diferenţiale liniare. Tot în [4] am generalizat procedeul lui Biţadze pentru ecuaţia $\mathrm{D}^n\varphi = 0$, construind soluţia generală şi aplicînd-o problemei la limită prin inversarea unui sistem de ecuaţii integrale singulare. O aplicaţie am dat şi în [5].

În [7] Sevcenko a studiat un analog în E_3 al ecuaţiei lui Beltrami în complex şi anume ecuaţia cu derivate spaţiale

$$DU - Q\overline{D}U = 0,$$

unde D este definit printr-un sistem particular de matrici γ^i, definit pentru prima dată de Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu în [3].

În cele ce urmează voi considera ecuaţia studiată de Sevcenko în E_3 şi anume ecuaţia cu derivate spaţiale în E_m :

$$D\psi(P) - Q(P)\overline{D}\psi(P) = 0, \tag{5}$$

unde

$$D = \sum_{i=1}^{m} \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ și } \overline{D} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$\varphi(P)$ este o matrice reală necunoscută, $Q(P)$ o matrice pătratică de forma

$$Q(P) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\gamma}^i q_i(P) \tag{6}$$

dată pentru fiecare punct $P(x^1, ..., x^m)$ dintr-un domeniu finit $\Omega \subset E_m$.

Matricile γ^i satisfac relații (1) și (2) și în plus vom presupune că

$$\overline{\gamma}^i \overline{\gamma}^j - \gamma^j \gamma^i = \gamma^i \gamma^j - \overline{\gamma}^j \overline{\gamma}^i = 0 \tag{7}$$

În [4] am impus condiția ca $(u, \gamma)^2 = (u, \overline{\gamma})^2$, ceea ce conducea la relația $\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = \overline{\gamma}^i \overline{\gamma}^j + \overline{\gamma}^j \overline{\gamma}^i$ $(i, j = 1, 2, ..., m)$. Condiția (7) este în concordanță cu aceste relații și cu (1) și (2), însă nu este posibilă pentru $\gamma^i = \overline{\gamma}^i$ (cazul sistemelor lui Dirac). Acest caz va fi special tratat pentru ecuția (5).

Vom presupune că sistemul (5) este eliptic în sensul lui Petrovski în regiunea închisă Ω. Atunci

$$\det \left[\sum_{i=1}^{m} (\gamma^i - Q \overline{\gamma}^i) \xi_i \right] = \det \left[\left(\sum_{i=1}^{m} \gamma^i - \sum_{j,i=1}^{m} \overline{\gamma}^j \overline{\gamma}^i q_j \right) \xi_i \right] =$$

$$= \det \left[\left(\sum_{i=1}^{m} \gamma^i - \sum_{i,j=1}^{m} \gamma^i \gamma^j q_j \right) \xi_i \right] = \det \left[\sum_{i=1}^{m} \gamma^i \xi_i \right] \det \left[e - \sum_{i=1}^{m} \gamma^i q_i \right] \cdot$$

Însă $\det \left[\sum_{i=1}^{m} \gamma^i \xi_i \right] = -(\xi_1^2 + ... + \xi_m^2)^s$, unde $2s$ este numărul liniilor și coloanelor matricilor γ^i iar din relația $D\overline{D} = \overline{D}D = e\Delta$ rezultă că operatorii D și $\overline{D}$ (transpusul lui D) sînt operatori eliptici care liniarizează laplacianul iar e este matricea unitate. Determinații sistemului definit de D și $\overline{D}$ fiind egali, rezultă valoarea dată mai sus determinantului. Notăm prin

$$A(P) = e - \sum_{i=1}^{m} \gamma^i q_i(P). \tag{8}$$

Deci pentru ca sistemul să fie eliptic, vom presupune că determinantul

$$\det(A) > 0. \tag{9}$$

Acest lucru este posibil de satisfăcut prin alegerea convenabilă a elementelor $q_1, ..., q_m$. Se vede că pentru $q_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $\det(A) = 1$ iar pentru $q_i = 1$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $\det(A) = 0$. Vom considera q_i continue, definite în spațiul variabilelor q_i într-o vecinătate a originei în așa fel încît determinantul lui A să satisfacă (9).

Det (A) prin dezolvare este un polinom în q_i, deci o funcţie continuă. În spaţiul variabilelor q_i în jurul originii putem determina un q_0 astfel încît distanţa de la origină la q_0 să fie mai mică decît 1, adică

$$\sqrt{q_1^2(P) + \ldots + q_m^2(P)} < q_0 < 1, \; q_0 = \text{constant}. \tag{9'}$$

În aceste condiţii, condiţia (9) e îndeplinită şi sistemul (5) este eliptic. Datorită proprietăţii (7) sistemul (5) poate fi scris şi sub forma

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma^j A \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0. \tag{5'}$$

În cele ce urmează prin $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ vom înţelege derivate generalizate în sensul lui S. L. Sobolev. Vom presupune că $q_i(P)$ admit derivate generalizate $\dfrac{\partial q_j}{\partial x^i} \in L_p(\bar{\Omega})$ cu $p > m$ şi (9) satisfăcută. Urmează $Q(P) \in C_\alpha(\bar{\Omega})$ adică satisface o condiţie Hölder de indice $0 < \alpha < 1$

Vom căuta soluţii generalizate pentru ecuaţia (5) în E_m.

Să arătăm că ea admite întotdeauna soluţii. Vom lua soluţia de formă generală (4):

$$\psi(P) = h(P) + \frac{1}{s_m}\int_\Omega \frac{(\overrightarrow{QP}, \gamma)}{\overline{QP}^m}\, \omega(Q)\, \mathrm{d}\omega_Q \tag{10}$$

cu $\omega \in L_p(\Omega)$ şi $h(P)$ o funcţie olomorfă arbitrară în spaţiu, deci $Dh(P) = 0$. Integrala (10) reprezintă derivatele de ordinul întîi ale potenţialului de volum (mai corect, produsul scalar între gradientul potenţialului de volum şi $\bar{\gamma}$ cu densitatea de sarcini matricea ω). Se ştie că potenţialul de volum admite derivate generalizate de ordinul al doilea care aparţin lui L_p şi anume

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T\omega = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{1}{s_m}\int_\Omega \frac{(\overrightarrow{QP}, \bar{\gamma})}{\overline{QP}^m}\, \omega(Q)\, \mathrm{d}\omega_Q =$$

$$= \frac{1}{s_m}\int_\Omega^* \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{(\overrightarrow{QP}, \bar{\gamma})}{\overline{QP}^m}\right) \omega(Q)\, \mathrm{d}\omega_Q + \frac{1}{m}\, \bar{\gamma}^i\, \omega(P). \tag{11}$$

unde * arată că integrala se înţelege în sensul valorii principale Cauchy.

Din această formulă rezultă că

$$DT\omega = D\frac{1}{s_m}\int_\Omega \frac{(\overrightarrow{QP}, \bar{\gamma})}{\overline{QP}^m}\, \omega(Q)\, \mathrm{d}\omega_Q = \omega(P), \tag{12}$$

formulă dată de N. Teodorescu în [8] şi dacă $\omega \in C_\alpha\ (\bar{\Omega})$

$$T_1\omega = \overline{D} T\omega = \overline{D}\,\frac{1}{s_m}\int_\Omega \frac{(\overrightarrow{QP},\bar{\gamma})}{\overline{QP}^m}\,\omega(Q)\,\mathrm{d}\omega_Q = \frac{1}{s_m}\int_\Omega \overline{D}\left(\frac{(\overrightarrow{QP},\bar{\gamma})}{\overline{QP}^m}\right)[\omega(Q) -$$

$$-\,\omega(P)]\,\mathrm{d}\omega_Q + \frac{\omega(P)}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\frac{(\overrightarrow{MP}.\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M, \tag{13}$$

unde Σ este suprafaţa închisă care mărgineşte Ω şi $\vec{n}_M$ normala interioară la Σ.

Deoarece derivatele generalizate secunde ale potenţialului de volum aparţin lui L_p $(p > 1)$, atunci vom avea şi

$$\|\overline{D}T\omega\|_{L_p} = \|T_1\omega\|_{L_p} \leqslant C_p\|\omega\|_{L_p} \tag{14}$$

cu $C_2 = 1$.

Remarcăm şi următoarele proprietăţi analoage cu cele din [11] şi [7]:

Dacă $\omega \in C_\alpha(\overline{\Omega})$ şi Σ suficient de netedă, atunci

$$T\omega \in C_\alpha^1(\overline{\Omega}), \tag{15}$$

$$T_1\omega \in C_\alpha(\overline{\Omega}), \tag{16}$$

şi

$$\|T_1\omega\|_{C_\alpha} \leqslant M_\alpha\|\omega\|_{C_\alpha}. \tag{17}$$

Ţinînd seama de (12) şi (13), înlocuim soluţia (10) în ecuaţia (5). Vom obţine ecuaţia integrală

$$\omega(P) - Q(P)\,T_1\omega(P) = Q(P)\overline{D}h(P), \tag{18}$$

unde $h(P)$ este o funcţie olomorfă arbitrară care se determină prin problema la limită pusă ecuaţiei (5). Sevcenko în [7] a dat o valoare particulară a lui $h(P)$ în E_3 [1].

Ecuaţia (18) este o ecuaţie integrală singulară care vom arăta că admite întotdeauna o singură soluţie ca ecuaţie liniară în L_2 pentru h olomorf, oarecare, dat.

Din (14) $C_2 = 1$, deci norma operatorului $T_1\omega$ în $L_2(\overline{\Omega})$ este 1.

Din cauza condiţiei (9') de elipticitate a sistemului şi luînd ca normă a matricii max modulului componentelor, vom avea

$$\|QT_1\omega\|_{L_2} \leqslant q_0\|T_1\omega\|_{L_2} \leqslant q_0\|\omega\|_{L_2} \leqslant \|\omega\|_{L_2}.$$

---

[1] El ia în spaţiul cu 3 dimensiuni

$$h(P) = Z = \left\|\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\|$$

Deci operatorul QT_1 are norma în L_2 mai mică decît 1 şi deci ecuaţia (18) admite o soluţie unică oricare ar fi membrul drept. O soluţionăm de exemplu prin aproximaţii succesive.

Dacă condiţia de elipticitate (9) nu e satisfăcută, reprezentarea (18) rămîne valabilă, însă nu se ştie nimic despre soluţia ei. Prin soluţionarea ecuaţiei (18) pentru h dat, ecuaţia (5) se reduce la rezolvarea unei probleme la limită pentru soluţiile ecuaţiei $Dh = 0$ adică pentru funcţiile olomorfe în spaţiu. La fel ca în [7] se vede că soluţia $\psi \in C_\alpha(\overline{\Omega})$ cu $0 < \alpha < 1$.

Vom pune soluţia sub o altă formă asemănătoare cu cea dată în [7].

Fie Ω_0 o vecinătate a unui punct fix P_0 şi $Q \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, iar punctul P_0 astfel ales încît (9′) este satisfăcută în Ω_0.

Vom lua originea axelor în P_0 şi notăm $q_i(0) = q_{i_0}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Facem în (1) substituţia $A_0\psi = \varphi$ cu $A_0 = e - \sum_{i=1}^{m} \gamma^i q_{i_0} = e - \overline{Q}_0$. Matricea A_0^{-1} existînd datorită condiţiei (9), vom avea (ţinînd seama de (7)) :

$$D(A_0\psi) = D(e - \overline{Q}_0)\psi = D\psi - \sum_{i,j=1}^{m} \gamma^i \gamma^j q_{i_0} \psi_j =$$

$$= D\psi - \sum_{i,j=1}^{m} \overline{\gamma}^j \overline{\gamma}^i q_{i_0} \psi_j = D\psi - Q_0 \overline{D}\psi$$

şi deci

$$D\psi = D(A_0\psi) + Q_0\overline{D}\psi = D\varphi + Q_0\overline{D}A_0^{-1}\varphi = D\varphi + Q_0\overline{D}^*\varphi,$$

unde $Q_0 = Q(P_0)$, $\overline{D}^* = \overline{D}A_0^{-1}$ şi notînd cu $Q_1(P) = Q(P) - Q_0$ cu $Q_1(P_0) = 0$, ecuaţia (5) devine :

$$D\varphi - Q_1(P)\overline{D}^*\varphi = 0. \tag{19}$$

Fie $\Omega_\delta \subset \Omega_0$ o hipersferă cu centrul în origină şi raza δ. Notăm prin $C_\alpha^0(\Omega_\delta)$ mulţimea matricilor $\omega \in C_\alpha(E_m)$ care se anulează în afara lui Ω_δ şi $\omega(0) = 0$. Căutăm soluţia ecuaţiei (19) în Ω_δ prin soluţia de forma (10) adică

$$\varphi(P) = h(P) + T\omega(P) \tag{20}$$

cu $\omega \in C_1^0(\Omega_\delta)$; sîntem conduşi la ecuaţia integrală singulară analoagă ecuaţiei (18) şi anume

$$\omega(P) - Q_1(P)\,T_1^*\omega(P) = Q_1(P)\,\overline{D}^*h(P), \tag{21}$$

unde $T_1^*\omega = \overline{D}^*T\omega = \overline{D}A_0^{-1}\,T\omega$. În condiţiile de mai sus, aplicînd relaţia (17) vom avea

$$\|Q_1\overline{D}A_0^{-1}T\omega\|_{C_\alpha} \leqslant k(q_0)\,\|\overline{D}T\omega\|_{C_\alpha} \leqslant k(q_0)\,M_\alpha\|\omega\|_{C_\alpha}.$$

Deoarece $\omega(0) = 0$ putem alege δ în Ω_δ suficient de mic astfel ca operatorul liniar $Q_1T_1^*$ să aibă norma mai mică decît 1 în C_α şi rezolvăm astfel ecuaţia (21) prin aproximaţii succesive obţinînd soluţia unică în $\Omega_\delta \subset \Omega_0$ pentru un h olomorf oarecare dat.

Ținînd seama de substituția care am făcut-o $\varphi = A_0\psi$, vom avea pentru ecuația (5) în Ω_δ soluția dată de (20) adică :

$$\psi(P) = A_1^{-1}\,[h(P) + T\omega(P)] \tag{22}$$

cu h funcție olomorfă arbitrară care se determină prin problema la limită impusă.

Fie cazul cînd Q este o matrice constantă :

$$Q(P) = Q_0(P) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\gamma}^i \varphi_{i_0}. \tag{23}$$

În acest caz $Q_1(P) \equiv 0$ și ecuația (19) devine

$$D\varphi = 0 \tag{24}$$

și în condiția (9′) schimbarea de funcție $\varphi = A_0\psi$ devine valabilă în tot Ω. Se ajunge la ecuația (24) făcînd direct substituția în ecuația (5′), unde acum $A = A_0$.

Fiindcă $Q_1 = 0$, ecuația (21) se reduce la $\omega = 0$ și în soluția (20) se obține un rezultat deja cunoscut anume că soluția lui (24) este

$$\varphi(P) = h(P) \tag{25}$$

cu h funcție olomorfă arbitrară.

Deci rezultă că

$$\psi(P) = A_0^{-1}h(P), \tag{26}$$

unde $h(P)$, funcție olomorfă arbitrară, se determină prin condițiile la limită.

Dacă în ecuația (5) permutăm Q cu $\overline{D}\psi$, adică dacă considerăm ecuația

$$D\psi(P) = \overline{D}\psi(P)\,Q(P) = 0, \tag{27}$$

observăm că datorită relației (7) avem :

$$\overline{D}\psi . Q = \sum_{i,j=1}^{m} \overline{\gamma}^i\,\overline{\gamma}^j \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\, q_j = \sum_{i,j=1}^{m} \gamma^j\gamma^i \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\, q_j = \overline{Q}D\psi$$

și ecuația (27) devine :

$$A(P)\,D\psi(P) = 0. \tag{28}$$

Cum condiția (9) este satisfăcută, A are un invers și ecuația (28) se reduce la

$$D\psi(P) = 0 \tag{29}$$

care are ca soluție

$$\psi(P) = h(P), \tag{30}$$

unde h e o funcţie olomorfă oarecare şi care poate fi determinată de problema la limită.

Dacă în ecuaţia (5) mai adăugăm termenul $-D\overline{Q}.\psi$, deci dacă considerăm ecuaţia :

$$D\psi(P)-Q(P)\overline{D}\psi(P)-D\overline{Q}(P).\psi(P)=0, \tag{31}$$

observăm că ecuaţia (31), în baza relaţiei (7), devine :

$$\sum_{i=1}^{m}\gamma^{i}A\,\frac{\partial\psi}{\partial x^{i}}+DA.\psi=D(A\psi)=0. \tag{32}$$

Ecuaţia (32) deci şi (31) va avea deci soluţia

$$A\psi=h(P)$$

şi ştiind în baza lui (9) că A admite un invers,

$$\psi(P)=A^{-1}(P)h(P), \tag{33}$$

soluţie asemănătoare cu cea pentru A constant pentru ecuaţia (5).

Prin relaţia (7) am suprimat cazul matricelor lui Dirac cînd $\gamma^{i}=\overline{\gamma}^{i}$. În acest caz ecuaţia (5) devine (28) care e echivalentă, în condiţia (9), cu (29) cu soluţia (30).

Dacă acum considerăm ecuaţiile

$$\overline{D}\psi-\overline{Q}D\psi=0, \tag{34}$$

$$\overline{D}\psi-D\psi.\overline{Q}=0, \tag{35}$$

$$\overline{D}\psi-\overline{Q}\overline{D}\psi-\overline{D}Q.\psi=0, \tag{36}$$

observăm că apare $\det\overline{A}=\det A$ şi în condiţiile (9) toate rezultatele rămîn valabile schimbînd în cele de mai sus $\gamma^{i}\to\overline{\gamma}^{i}$ şi $\overline{\gamma}^{i}\to\gamma^{i}$. Funcţia h va satisface $\overline{D}h=0$ şi se numeşte coolomorfă.

Dacă utilizăm operatorii $\widetilde{D}$ în loc de D şi $\overline{\widetilde{D}}$ în loc de $\overline{D}$ în (5), (27) 31), (34), (35), (36), rezultatele rămîn valabile considerînd însă toţi operatorii definiţi faţă de operatorii $\widetilde{D}$ şi $\overline{\widetilde{D}}$ (vezi calcul cu astfel de operatori în [4]).

Primită la redacţie la 25 mai 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. A. B. БИЦАДЗЕ, *Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений.* Доклады АН СССР, **XCIII**, *4* (1953).
2. GR. C. MOISIL, *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la Physique Mathématique*, Bucarest, I Göbelet fils, 1931.
3. GR. C. MOISIL şi N. TEODORESCU, *Fonctions holomorphes dans l'espace.* Bul. Soc. de Şt. Cluj, **6**, 177–194 (1931).

4. MARIANA NEDELCU, *La théorie des polynômes aréolaires dans l'espace à m dimensions. III. Théorème de Morera et applications du polynôme aux équations à dérivées aréolaires et aux problèmes aux limites.* Bull. Math., **3** (**51**), *2*, 165—207 (1959).
5. MARIANA NEDELCU, *O aplicație a derivatei spațiale la ecuațiile elasticității in spațiu.* Comunicările Acad. R.P.R., **10**, *10* (1960).
6. MARIANA NEDELCU, *Une application de la dérivée spatiale eaux équations de l'élasticité dans l'espace.* Rev. de Math. pures et appl., **5**, *3—4* (1960).
7. V.I. SEVCENKO, *On local homeomorphious of three dimensional space determined by solution of an elliptic system 1935—1038* (1962) Tradus din Dokladiv Akad. Nauk. SSSR, **146** (1962).
8. N. TEODORESCU, *Sur l'emploi ae conditions globales dans quelques problèmes physiques.* Annali di Matematica, **11**, 325—362 (1933).
9. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique Mathématique*, Thèse, Paris 1932.
10. N. TEODORESCU, *Dérivée aréolaire globale et dérivée généralisée.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. **6** (**54**), *3—4* (1962).
11. И. Н. ВЕКУА, *Обобщение аналитических функций.* Москва, 1959.

ASUPRA SPAȚIILOR RIEMANN V_4 CU CONEXIUNE CONSTANTĂ DE GENUL DOI

DE

EFTIMIE GRECU

În această lucrare se determină spațiile lui Riemann V_4 cu conexiune constantă de genul doi, utilizînd rezultatele obținute de acad. prof. Gh. Vrănceanu cu privire la reducerea la o formă canonică a două forme pătratice. Metoda folosită constă în a asocia metricii spațiului energia cinetică corespunzătoare și scriind ecuațiile lui Lagrange.

Un spațiu riemannian V_4 cu conexiune constantă de genul doi este un spațiu al cărui tensor fundamental c_{ij} este de forma :

$$c_{ij} = ta_{ij} + sb_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

unde a_{ij}, b_{ij} sînt constante, iar t, s sînt funcții de coordonatele x^1, x^2, x^3, x^4, ale spațiului, astfel încît raportul lor nu este o constantă. Notînd pentru simplificare,

$$t = \mathrm{e}^{2p}, \quad s = e^{2q},$$

unde diferența $p - q$ nu este o constantă, rezultă că metrica spațiului se poate scrie sub forma :

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2p} \cdot \varphi(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3, \mathrm{d}x^4) + \mathrm{e}^{2q} \cdot \Psi(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3, \mathrm{d}x^4),$$

unde φ, Ψ sînt două forme diferențiale pătratice cu coeficienți constanți.

Într-o lucrare anterioară [5] am studiat cazul cînd forma φ este pozitiv definită și cazul în care ea este de tip hiperbolic normal și am găsit metricile respective.

În lucrarea de față vom studia cazul cînd φ nu este definită și este reductibilă la forma canonică

$$\varphi = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2,$$

adică are două pătrate pozitive și două pătrate negative.

ST. CERC. MAT., TOM 17, Nr. 7, P. 1059–1075, BUCUREȘTI, 1965

În acest scop vom utiliza rezultatele obținute de acad. prof. G. Vrănceanu cu privire la reducerea la o formă canonică a două forme pătratice [2], [3].

Vom presupune în primul rînd că ecuația caracteristică

$$|b_{ij} - \rho a_{ij}| = 0$$

referitoare la formele

$$\varphi = a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^3 - (\mathrm{d}x^4)^2,$$

$$\Psi = b_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j,$$

are toate rădăcinile reale, ale căror direcții caracteristice nu sînt direcții nule pentru forma φ.

În acest caz, forma Ψ se poate reduce la forma canonică

$$\Psi = b_1(\mathrm{d}x^1)^2 + b_2(\mathrm{d}x^2)^2 + b_3(\mathrm{d}x^3)^2 + b_4(\mathrm{d}x^4)^2.$$

Matrica lui V_4 se scrie :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}.\,[(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2] + \mathrm{e}^{2q}.[b_1(\mathrm{d}x^1)^2 + b_2(\mathrm{d}x^2)^2 + \\ + b_3(\mathrm{d}x^3)^2 + b_4(\mathrm{d}x^4)^2].$$

Punînd $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = u$ și luînd în loc de e^{2p}, e^{2q} funcțiile $\mathrm{e}^{2p} + b_1\mathrm{e}^{2q}$, respectiv e^{2q}, putem presupune că Ψ are coeficientul lui $\mathrm{d}x^2$ egal cu zero, iar metrica spațiului se poate scrie sub forma

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}u^2) + \mathrm{e}^{2q}(a\mathrm{d}y^2 + b\mathrm{d}z^2 + c\mathrm{d}u^2).$$

Energia cinetică asociată acestei metrici se scrie

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2).$$

Geodezicele sînt date de ecuațiile lui Lagrange care se scriu sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

În cazul nostru, obținem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{e}^{2p}\dot{x}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\;p_x + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\;q_x,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{e}^{2p}\dot{y} + a\mathrm{e}^{2q}\dot{y}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\;p_y + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\;q_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(-\,\mathrm{e}^{2p}\dot{y} + b\mathrm{e}^{2q}\dot{z}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\;p_z + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\;q_z,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(-\mathrm{e}^{2p}\dot{u} + c\mathrm{e}^{2q}\dot{u}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\;p_u + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\;q_u.$$

Derivînd în raport cu t, obținem:

$$\mathrm{e}^{2p}\ddot{x} + 2\dot{x}\mathrm{e}^{2p}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\, p_x + $$
$$+ \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\, q_x,$$

$$\mathrm{e}^{2p}\ddot{y} + a\mathrm{e}^{2q}\ddot{y} + 2\dot{y}\mathrm{e}^{2p}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) + 2a\dot{y}\mathrm{e}^{2q}(q_x\dot{x} + q_y\dot{y} +$$
$$+ q_z\dot{z} + q_u\dot{u}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\, p_y + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\, q_y,$$

$$- \mathrm{e}^{2p}\ddot{z} + b\mathrm{e}^{2q}\ddot{z} - 2\dot{z}\mathrm{e}^{2p}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) + 2b\dot{z}\mathrm{e}^{2q}(q_x\dot{x} + q_y\dot{y} +$$
$$+ q_z\dot{z} + q_u\dot{u}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\, p_z + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\, q_z,$$

$$- \mathrm{e}^{2p}\ddot{u} + c\mathrm{e}^{2q}\ddot{u} - 2\dot{u}\mathrm{e}^{2p}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) + 2c\dot{u}\mathrm{e}^{2q}(q_x\dot{x} + q_y\dot{y} +$$
$$+ q_z\dot{z} + q_u\dot{u}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\, p_u + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\, q_u.$$

Împărțind cu e^{2p}, aceste ecuații se mai scriu

$$\ddot{x} + 2\dot{x}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\, p_x +$$
$$+ \mathrm{e}^{2(q-p)}.\, q_x(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2), \tag{1}$$

$$\ddot{y} + a\mathrm{e}^{2(q-p)}\,(\ddot{y} + \dot{y}^2\, q_y + 2\dot{x}\dot{y}q_x + 2\dot{y}\dot{z}q_z + 2\dot{y}\dot{u}q_u) + 2\dot{y}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} +$$
$$+ p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\, p_y + \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_y(b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2), \tag{2}$$

$$- \ddot{z} + b\mathrm{e}^{2(q-p)}\,(\ddot{z} + \dot{z}^2q_z + 2\dot{x}\dot{z}q_x + 2\dot{y}\dot{z}q_y + 2\dot{z}\dot{u}q_u) - 2\dot{z}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} +$$
$$+ p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\, p_z + \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_z(a\dot{y}^2 + c\dot{u}^2), \tag{3}$$

$$- \ddot{u} + c\mathrm{e}^{2(q-p)}\,(\ddot{u} + \dot{u}^2q_u + 2\dot{x}\dot{u}q_x + 2\dot{y}\dot{u}q_y + 2\dot{z}\dot{u}q_z) - 2\dot{u}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} +$$
$$+ p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\, p_u + \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_u(a\dot{y}^2 + b\dot{z}^2). \tag{4}$$

Pentru ca aceste ecuații să aibă coeficienții constanți este necesar să avem

$$p(x, y, z, u) = kx + ly + mz + nu,\quad q_y = \beta,\quad \ddot{y} = -\beta\dot{y}^2$$
$$\mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_x = \alpha,\quad b = c = 0,\quad \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_z = \gamma,\quad \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_u = \delta.$$

Ținînd seamă de aceste condiții, ecuația (2) devine

$$(l - \beta)\,\dot{y}^2 - l\,(\dot{x}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2) + 2\,(a\alpha + k)\,\dot{x}\dot{y} + 2\,(a\gamma + m)\,\dot{y}\dot{z} +$$
$$+ 2\,(a\delta + n)\,\dot{y}\dot{u} \equiv 0.$$

Această relație, pătratică în $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ și $\dot{u}$, fiind o identitate, rezultă

$$l = \beta = 0,\quad a\alpha + k = 0,\quad a\gamma + m = 0,\quad a\delta + n = 0. \tag{5}$$

Scriind condițiile de integrabilitate, obținem

$$\begin{gathered} \alpha(\beta - l) = 0,\quad \gamma(\beta - l) = 0,\quad \delta(\beta - l) = 0, \\ \alpha m - \gamma k = 0,\quad \alpha n - \delta k = 0,\quad \gamma n - \delta m = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Se observă că (6) sînt identic satisfăcute, oricare ar fi k, m, n, α, γ şi δ, atunci cînd ţinem seama de (5).

Integrînd sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$q_y = 0,\ \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_x = \alpha,\ \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_z = \gamma,\ \mathrm{e}^{2(q-p)}\, q_u = \delta$$

obţinem :

$$\mathrm{e}^{2q} = \frac{\alpha}{k}\,(\mathrm{e}^{2p} - 1) = -\,\frac{1}{a}\,(\mathrm{e}^{2r} - 1).$$

Metrica spaţiului se scrie

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2(kx+mz+nu)}\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}u^2) - [\mathrm{e}^{2(kx+mz+nu)} - 1]\,\mathrm{d}y^2.$$

Să presupunem acum că ecuaţia caracteristică are două rădăcini reale simple şi o rădăcină dublă care corespunde unei direcţii caracteristice nule. În acest caz, variabilele se separă în Ψ în grupe de cîte o variabilă şi o grupă de două variabile canonice ale lui φ, una pozitivă şi una negativă.

Avem deci forma canonică a lui Ψ :

$$\Psi = a_1\mathrm{d}x^2 + a_4\mathrm{d}u^2 + a_2\mathrm{d}y^2 + 2\lambda\mathrm{d}y\mathrm{d}z + a_3\mathrm{d}z^2.$$

Metrica lui V_4 se scrie

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}u^2) + \mathrm{e}^{2q}(a_1\mathrm{d}x^2 + a_4\mathrm{d}u^2 + a_2\mathrm{d}y^2 + {}$$
$$+ 2\lambda\mathrm{d}y\mathrm{d}z + a_3\mathrm{d}z^2).$$

Luînd în loc de e^{2p} şi e^{2q} respectiv funcţiile $\mathrm{e}^{2p} + a_1\mathrm{e}^{2q}$ şi e^{2q}, putem presupune că în Ψ coeficientul lui $\mathrm{d}x^2$ este nul, deci metrica se poate scrie sub forma :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}u^2) + \mathrm{e}^{2q}(a\mathrm{d}y^2 + 2\lambda\mathrm{d}y\mathrm{d}z + b\mathrm{d}z^2 + {}$$
$$+ c\mathrm{d}u^2).$$

Energia cinetică asociată acestei metrici este:

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + 2\lambda\dot{y}\dot{z} + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2).$$

iar geodezicele sînt date de ecuaţiile lui Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{e}^{2p}\dot{x}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\,p_x + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + 2\lambda\dot{y}\dot{z} + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\,q_x,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{e}^{2p}\dot{y} + a\mathrm{e}^{2q}\dot{y} + \lambda\mathrm{e}^{2q}\dot{z}) = \mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\,p_y + \mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2 + {}$$
$$+ 2\lambda\dot{y}\dot{z} + b\dot{z}^2 + c\dot{u}^2)\,q_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\mathrm{e}^{2p}\dot{z}+b\mathrm{e}^{2q}\dot{z}+\lambda\mathrm{e}^{2q}\dot{y})=\mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2-\dot{u}^2)\,p_z+\mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2+$$
$$+2\lambda\dot{y}\dot{z}+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)\,q_z,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\mathrm{e}^{2p}\dot{u}+c\mathrm{e}^{2q}\dot{u})=\mathrm{e}^{2p}(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2-\dot{u}^2)\,p_u+\mathrm{e}^{2q}(a\dot{y}^2+2\lambda\dot{y}\dot{z}+$$
$$+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2)\,q_u$$

care se mai scriu:

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+2\dot{x}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})=(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2-\dot{u}^2)\,p_x+\\&+(\mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_x(a\dot{y}^2+2\lambda\dot{y}\dot{z}+b\dot{z}^2+c\dot{u}^2),\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{y}+2\dot{y}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})-(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2-\dot{u}^2)\,p_y+\\&+a\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{y}+\dot{y}^2q_y+2\dot{x}\dot{y}q_x+2\dot{y}\dot{z}q_z+2\dot{y}\dot{u}q_u)+\lambda\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{z}+2\dot{z}^2q_z+\\&+2\dot{x}\dot{z}q_x+2\dot{z}\dot{u}q_u)=\mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_y(b\dot{z}^2+c\dot{u}^2),\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&-\ddot{z}-2\dot{z}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})-(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2-\dot{u}^2)\,p_z+\\&+b\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{z}+\dot{z}^2q_z+2\dot{x}\dot{z}q_x+2\dot{y}\dot{z}q_y+2\dot{z}\dot{u}q_u)+\lambda\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{y}+2\dot{y}^2q_y+\\&+2\dot{x}\dot{y}q_x+2\dot{y}\dot{u}q_u)=\mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_z(a\dot{y}^2+c\dot{u}^2),\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&-\ddot{u}-2\dot{u}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})-(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2-\dot{u}^2)\,p_u+\\&+c\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{u}+\dot{u}^2q_u+2\dot{x}\dot{u}q_x+2\dot{y}\dot{u}q_y+2\dot{z}\dot{u}q_z)=\mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_u(a\dot{y}^2+\\&+2\lambda\dot{y}\dot{z}+b\dot{z}^2).\end{aligned}\tag{10}$$

Pentru ca ecuaţia (7) să fie cu coeficienţii constanţi, este necesar să avem

$$\begin{aligned}&p=kx+ly+mz+nu,\\&\mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_x=\alpha.\end{aligned}\tag{11}$$

Dacă în (10) luăm $q_u=\delta$, avem de considerat două cazuri după cum $\delta\neq 0$ sau $\delta=0$. Dacă luăm $\delta\neq 0$, atunci trebuie ca

$$a=\lambda=b=0,\quad \ddot{u}=-\delta\dot{u}^2,\ \mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_y=\beta,\ \mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_z=\gamma.$$

Înlocuind în (10), obţinem relaţia pătratică în $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$:

$$\delta\dot{u}^2-2\dot{u}(k\dot{x}+l\dot{y}+m\dot{z}+n\dot{u})-(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2-\dot{u}^2)\,n+$$
$$+2c\dot{u}(\alpha\dot{x}+\beta\dot{y}+\gamma\dot{z})\equiv 0,$$

care este incompatibilă cu $\delta\neq 0$.

Trebuie deci să presupunem că $\delta=0$. În acest caz, ecuaţia (10) ne spune că trebuie să luăm $c=0$.

Considerînd și ecuațiile (8), (9), rezultă că pentru a avea coeficienți constanți sînt necesare condițiile :

$$q_v = \beta,\ \ddot{y} = -\beta\dot{y}^2,\ e^{2(q-p)}q_z = \gamma,\ \lambda = b = 0. \tag{12}$$

Ținînd seama de (11) și (12), ecuația (8) devine :

$$-\beta\dot{y}^2 + 2\dot{y}(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\,l +$$
$$+ 2a(\alpha\dot{x}\dot{y} + \gamma\dot{y}\dot{z}) \equiv 0.$$

Această relație pătratică în $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ fiind o identitate, rezultă :

$$l = \beta = n = 0,\quad k + a\alpha = 0,\quad m + a\gamma = 0 \tag{13}$$

Condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor

$$e^{2(q-p)}q_x = \alpha,\quad e^{2(q-p)}q_z = \gamma,$$

sînt :

$$\frac{\alpha}{k} = \frac{\gamma}{m},\quad \alpha(\beta - l) = 0,\quad \gamma(\beta - l) = 0$$

care sînt satisfăcute dacă ținem seama de (13).

Integrăm sistemul de mai sus și obținem :

$$e^{2q} = \frac{\alpha}{k}(e^{2p} - 1).$$

Metrica spațiului se scrie :

$$ds^2 = e^{2(kx+mz)}(dx^2 + dy^2 - dz^2 - du^2) - [e^{2(kx+mz)} - 1]\,dy^2. \tag{14}$$

Considerînd acum în ecuația (10) că avem

$$e^{2(p-q)}q_u = \delta,\ c = 0,$$

din ecuațiile (8) și (9) rezultă că trebuie să luăm

$$q_y = \beta,\ \ddot{y} = -\beta\dot{y}^2,\ e^{2(q-p)}q_z = \gamma,\ b = \lambda = 0.$$

Ținînd seama de aceste condiții în (8), obținem relația pătratică în $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$:

$$-\beta\dot{y}^2 + 2\dot{y}(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 - \dot{u}^2)\,l + 2a\dot{y}(\alpha\dot{x} +$$
$$+ \gamma\dot{z} + \delta\dot{u}) \equiv 0$$

care fiind o identitate, deducem

$$l = \beta = 0,\ k + a\alpha = 0,\ m + a\gamma = 0,\ n + a\delta = 0. \tag{15}$$

Pe de altă parte, scriind condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor

$$e^{2(q-p)}q_x = \alpha,\ e^{2(q-p)}q_z = \gamma,\ e^{2(q-p)}q_u = \delta,$$

obţinem

$$\frac{k}{\alpha} = \frac{m}{\gamma} = \frac{n}{\delta}, \quad \alpha(\beta - l) = 0, \ \gamma(\beta - l) = 0, \ \delta(\beta - l) = 0$$

care sînt satisfăcute dacă ţinem seama de (15).

Integrînd sistemul de mai sus, obţinem

$$e^{2q} = \frac{\alpha}{k}(e^{2p} - 1).$$

Metrica spaţiului se scrie

$$(16) \quad ds^2 = e^{2(kx+mz+nu)}(dx^2 + dy^2 - dz^2 - du^2) - [e^{2(kx+mz+nu)} - 1]\,dy^2.$$

Deoarece faţă de o transformare ortogonală cantităţile m şi n constituie componentele unui vector contravariant, se poate presupune că printr-o transformare ortogonală în variabilele z, u, ce păstrează variabilele x,y, vectorul (m, n) poate fi redus în aşa fel încît să aibă direcţia axei OZ, deci metrica (16) se poate scrie

$$ds^2 = e^{2(kx+mz)}(dx^2 + dy^2 - dz^2 - du^2) - [e^{2(kx+mz)} - 1]\,dy^2,$$

adică sub forma (14).

Să presupunem acum că ecuaţia caracteristică referitoare la formele φ şi Ψ are două rădăcini duble, ale căror direcţii caracteristice sînt direcţii nule, pentru forma φ. În acest caz avem formele canonice :

$$\varphi = 2dx\,du + 2dy\,dz$$

$$\Psi = a\,dx^2 + 2b\,dx\,du + \lambda\,dy^2 + 2\mu\,dy\,dz.$$

Metrica spaţiului V_4 se scrie

$$ds^2 = e^{2p}(2dx\,du + 2dy\,dz) + e^{2q}(a\,dx^2 + 2b\,dx\,du + \lambda\,dy^2 + 2\mu\,dy\,dx).$$

Luînd în loc de e^{2p} şi e^{2q} respectiv funcţiile $e^{2q} + be^{2q}$ şi e^{2q}, putem presupune că Ψ are coeficientul lui $dx\,du$ egal cu zero, deci obţinem metrica :

$$ds^2 = e^{2p}(2dx\,du + 2dy\,dz) + e^{2q}(a\,dx^2 + 2b\,dy\,dz + c\,dy^2).$$

Energia cinetică asociată acestei metrici este :

$$T = \frac{1}{2}e^{2p}(2\dot{x}\dot{u} + 2\dot{y}\dot{z}) + \frac{1}{2}e^{2q}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{y}\dot{z} + c\dot{y}^2),$$

iar geodezicele se scriu :

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + 2\dot{u}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_x + ae^{2(q-p)}(\ddot{x} + \\ (17) \quad &+ \dot{x}^2q_x + 2\dot{x}\dot{y}q_y + 2\dot{x}\dot{z}q_z + 2\dot{x}\dot{u}q_u) = e^{2(q-p)}\,q_x(2b\dot{y}\dot{z} + c\dot{y}^2), \\ &\ddot{z} + 2\dot{z}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_y + e^{2(q-p)}[c\ddot{y} + \\ (18) \quad &+ c\dot{y}^2q_y + b\ddot{z} + 2(b\dot{z} + c\dot{y})\,(q_x\dot{x} + q_z\dot{z} + q_u\dot{u})] = a\dot{x}^2\,e^{2(q-p)}\,q_y, \end{aligned}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\, p_z + be^{2(q-p)}(\ddot{y} +$$

(19) $$+ 2\dot{y}^2 q_y + 2\dot{x}\dot{y}q_x + 2\dot{y}\dot{u}q_u) = e^{2(q-p)}\, q_z(a\dot{x}^2 + c\dot{y}^2),$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\, p_u = e^{2(q-p)}\, q_u(a\dot{x}^2 + 2b\dot{y}\dot{z} + c\dot{y}^2).$$
(20)

Pentru ca ecuația (20) să fie cu coeficienți constanți, este necesar să avem :

$$p = kx + ly + mz + nu$$
$$e^{2(q-p)}\, q_u = \delta\, .$$

Considerăm acum ecuația (17). Pentru a avea coeficienții constanți, este necesar să fie satisfăcută condiția :

$$q_x = \alpha.$$

Avem două cazuri :
Cazul I : $\alpha \neq 0$. În acest caz trebuie să avem :

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{x}^2,\ e^{2(q-p)}\, q_y = \beta,\ e^{2(q-p)}\, q_z = \gamma,\ b = c = 0.$$

Dacă ținem seama de aceste condiții în ecuația (20), obținem

$$-\alpha\dot{x}^2 + 2\dot{x}(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\, n - a\delta\dot{x}^2 \equiv 0.$$

Această relație pătratică în $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$, fiind o identitate, rezultă

(21) $$2k = \alpha + a\delta,\ l = m = n = 0.$$

Scriind condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor cu derivate parțiale de mai sus, obținem :

$$\beta(k - \alpha) = 0,\ \gamma(k - \alpha) = 0,\ \delta(k - \alpha) = 0,\ \beta m - \gamma l = 0,\ \beta n -$$
$$- \delta l = 0,\ \gamma n - \delta m = 0.$$

Ultimele trei condiții se verifică identic dacă ținem seama de (21). Considerăm primele trei condiții de mai sus. Avem următoarele două cazuri :
a) $k \neq \alpha$. Atunci rezultă $\beta = \gamma = \delta = 0$, iar din prima ecuație din (21) rezultă :

$$\alpha = 2k \text{ și } q = 2kx.$$

În acest caz, metrica spațiului V_4 se scrie :

(22) $$ds^2 = e^{2kx}(2\,dx\,du + 2\,dy\,dz) + ae^{4kx}\,dx^2.$$

b) $k = \alpha$. Integrînd sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$q_x = k,\quad e^{2(q-p)}\, q_y = \beta,\quad e^{2(q-p)}\, q_z = \gamma,\quad e^{2(q-p)}\, q_u = \delta$$

obținem :

$$e^{2q} = 2e^{2kx}(\beta y + \gamma z + \delta u).$$

Metrica spațiului V_4 se scrie în acest caz sub forma :

$$ds^2 = e^{2kx}\,[2\,dx\,du + 2\,dy\,dz + 2a(\beta y + \gamma z + \delta u)\,dx^2], \tag{23}$$

unde $\delta = \dfrac{k}{a}\cdot$

Se poate arăta ușor că aceasta este metrica unui spațiu V_4 local euclidian.

Cazul II : $\alpha = 0$. În acest caz ecuațiile (17), (18), (19) ne arată că trebuie să luăm $a = b = 0$, $q_y = \beta$, $\ddot{y} = -\beta\dot{y}^2$, $e^{2(q-p)}\,q_z = \gamma$. Ținînd seama de aceste relații în ecuația (19), obținem :

$$-\beta\dot{y}^2 + 2\dot{y}\,(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,m - c\gamma\dot{y}^2 \equiv 0.$$

Aceasta fiind o indentitate, rezultă :

$$2l = \beta + c\gamma, \quad k = m = n = 0. \tag{24}$$

Condițiile de integrabilitate se scriu în acest caz sub forma :

$$\gamma(l - \beta) = 0, \quad \delta(l - \beta) = 0, \quad \alpha m - \gamma k = 0, \quad \alpha n - \delta k = 0,$$
$$\gamma n - \delta m = 0.$$

Se observă că ultimele trei condiții sînt identic satisfăcute în virtutea lui (24).

Luînd în considerație primele două condiții, avem două cazuri :

a) $l \neq \beta$, . Atunci rezultă $\gamma = \delta = 0$, iar din prima relație (24) rezultă : $\beta = 2l$ și $q = 2ly$.

Metrica spațiului V_4 se scrie :

$$ds^2 = e^{2ly}(2\,dx\,du + 2\,dy\,dz) + ce^{4ly}\,dy^2. \tag{25}$$

b) $l = \beta$. În acest caz vom integra sistemul :

$$q_y = l, \quad q_x = 0, \quad e^{2(q-p)}\,q_z = \gamma, \quad e^{2(q-p)}\,q_u = \delta$$

și obținem :

$$e^{2q} = 2e^{2ly}(\gamma z + \delta u).$$

În acest caz obținem metrica

$$ds^2 = e^{2ly}\,[2\,dx\,du + 2\,dy\,dz + 2c(\gamma z + \delta u)\,dy^2] \tag{26}$$

unde $\gamma = \dfrac{l}{c}$, care este metrica unui spațiu V_4 local euclidian.

Se observă că dacă schimbăm între ele variabilele x, y pe de o parte și variabilele z, u pe de altă parte, atunci metrica (25) se transformă în metrica (22).

Dacă în ecuația (17) presupunem că avem

$$e^{2(q-p)}\,q_x = \alpha,$$

rezultă că trebuie să luăm

$$a = b = 0, \quad q_y = \beta, \quad \ddot{y} = -\beta\dot{y}^2, \quad e^{2(q-p)}\,q_z = \gamma.$$

În acest caz se obţin metricile următoare:

$$\text{(27)} \qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2lv}(2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) + c\mathrm{e}^{4lv}\,\mathrm{d}y^2,$$

$$\text{(28)} \qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2lv}[2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2c(\alpha x + \gamma z + \delta u)\,\mathrm{d}y^2],$$

unde $\gamma = \frac{l}{c}\cdot$

Se observă că metricile (25) şi (27) sînt identice, iar metrica (26) se obţine din metrica (28) pentru $\alpha = 0$.

Este de remarcat faptul că dacă în cazul I (adică $\alpha \neq 0$) vom presupune că $\delta = 0$, adică $q_u = 0$, celelalte condiţii rămînînd neschimbate, atunci relaţia $2k = \alpha$ ne arată că avem $k \neq \alpha$, adică obţinem numai metrica (22) de la cazul *a*).

De asemenea, ecuaţia (20) ne arată că nu putem avea $q_u = \delta \neq 0$, deoarece a, b, c nu pot fi toţi nuli, iar diferenţa $p - q$ nu trebuie să fie o constantă.

Să presupunem că avem condiţiile:

$$p = kx + ly + mz + nu, \quad a = c = 0,$$
$$\mathrm{e}^{2(q-p)}q_x = \alpha, \quad \mathrm{e}^{2(q-p)}q_u = \delta,$$
$$q_v = \beta, \quad \ddot{y} = -2\beta\dot{y}^2, \quad q_z = \gamma, \quad \ddot{z} = -2\gamma\dot{z}^2$$

care, după cum se verifică uşor, sînt suficiente pentru ca toţi coeficienţii ecuaţiilor (17), (18), (19), (20) să fie constanţi. Ţinînd seamă în ecuaţiile (18), (19), obţinem:

$$-2\gamma\dot{z}^2 + 2\dot{z}(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})l + 2b\alpha\dot{x}\dot{z} + 2b\delta\dot{z}\dot{u} \equiv 0,$$
$$-2\beta\dot{y}^2 + 2\dot{y}(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})m + 2b\alpha\dot{x}\dot{y} + 2b\delta\dot{y}\dot{u} \equiv 0.$$

Acestea fiind două identităţi, rezultă:

$$l = m = 0, \quad \beta = \gamma = 0, \quad \frac{\alpha}{k} = \frac{\delta}{n}\cdot$$

Scriind condiţiile integrabilităţii, obţinem:

$$\alpha(l - \beta) = 0, \quad \delta(l - \beta) = 0, \quad \alpha(m - \gamma) = 0, \quad \delta(m - \gamma) = 0,$$
$$\alpha n - \delta k = 0$$

care sînt identic satisfăcute dacă ţinem seama de relaţiile de mai sus. Integrînd sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale:

$$\mathrm{e}^{2(q-p)}q_x = \alpha, \quad q_v = q_z = 0, \quad \mathrm{e}^{2(q-p)}q_u = \delta$$

obţinem:

$$\mathrm{e}^{2q} = \frac{\alpha}{k}(\mathrm{e}^{2p} - 1).$$

Metrica spațiului se scrie :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2(kx+nu)}(2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) + 2b\frac{\alpha}{k}[\mathrm{e}^{2(kx+nu)} - 1]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{29}$$

Această metrică se mai scrie sub forma :

$$\mathrm{d}s^2 = 2\mathrm{e}^{2p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u + 2\,[(1 + h)\,\mathrm{e}^{2p} - h]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

unde $p = kx + nu, \quad h = b\frac{\alpha}{k}\cdot$

În continuare, vom presupune că rădăcina ce corespunde la direcția nulă, este cvadruplă. În acest caz formele pătratice φ și Ψ sînt reductibile la formele canonice :

$$\varphi = 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$\Psi = c\varphi + \Phi,$$

unde Φ are una din formele

$$2a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + b\,\mathrm{d}y^2, \quad 2a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z, \quad \varepsilon\,\mathrm{d}x^2. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Metrica spațiului V_4 se scrie :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}\varphi + \mathrm{e}^{2q}(c\varphi + \Phi) = (\mathrm{e}^{2p} + c\mathrm{e}^{2q})\,\varphi + \mathrm{e}^{2q}\Phi.$$

Se observă că dacă luăm în loc de e^{2p}, e^{2q} respectiv funcțiile $\mathrm{e}^{2p} + c\mathrm{e}^{2q}$, e^{2q}, atunci metrica se poate scrie :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}\varphi + \mathrm{e}^{2q}\Phi.$$

Vom considera mai întîi cazul în care avem :

$$\Phi = 2a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + b\,\mathrm{d}y^2.$$

Obținem metrica :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2p}(2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) + \mathrm{e}^{2q}(2a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + b\,\mathrm{d}y^2).$$

Energia cinetică asociată acestei metrici se scrie :

$$T = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2p}(2\dot{x}\dot{u} + 2\dot{y}\dot{z}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2q}(2a\dot{x}\dot{z} + b\dot{y}^2).$$

Geodezicele sînt date de ecuațiile lui Lagrange care se scriu :

$$\begin{aligned}&\ddot{u} + 2\dot{u}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_x + \\ &+ a\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{z} + 2\dot{z}^2q_z + 2\dot{y}\dot{z}q_y + 2\dot{z}\dot{u}q_u) = b\dot{y}^2\mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_x,\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{z} + 2\dot{z}(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_y + \\ &+ b\mathrm{e}^{2(q-p)}(\ddot{y} + \dot{y}^2q_y + 2\dot{x}\dot{y}q_x + 2\dot{y}\dot{z}q_z + 2\dot{y}\dot{u}q_u) = 2a\dot{x}\dot{z}\mathrm{e}^{2(q-p)}\,q_y,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{y} + 2\dot{y}\,(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_z + \\ &+ a\mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,(\ddot{x} + 2\dot{x}^2 q_x + 2\dot{x}\dot{y}q_y + 2\dot{x}\dot{u}q_u) = b\dot{y}^2\mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,q_z,\end{aligned} \tag{32}$$

$$\ddot{x} + 2\,\dot{x}\,(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_u = \mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,q_u\,(2a\dot{x}\dot{z} + b\dot{y}^2), \tag{33}$$

Pentru ca ecuația (33) să aibă coeficienții constanți, este necesar și suficient să avem

$$p = kx + ly + mz + nu$$

$$\mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,q_u = \delta,$$

unde constanta δ poate fi și zero.

Considerînd ecuația (32), vedem că se impune condiția : $q_x = \alpha$.

Avem două cazuri de deosebit :

Cazul I : $\alpha \neq 0$. Atunci trebuie să fie satisfăcute ecuațiile :

$$\ddot{x} = -\,2\alpha\dot{x}^2, \quad \mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,q_y = \beta, \quad b = 0, \quad q_z = \gamma, \quad \ddot{z} = -\,2\gamma\dot{z}^2.$$

Înlocuim în ecuațiile (31), (33) și obținem :

$$-2\gamma\dot{z}^2 + 2\dot{z}\,(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,l - 2a\beta\dot{x}\dot{z} \equiv 0,$$

$$-2\alpha\dot{x}^2 + 2\dot{x}\,(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,n - 2a\delta\dot{x}\dot{z} \equiv 0.$$

Din aceste identități rezultă relațiile :

$$l = n = 0, \quad \gamma = m, \quad \alpha = k, \quad k = a\beta = 0, \quad m - a\delta = 0. \tag{34}$$

Scriind condițiile de integrabilitate, obținem :

$$\beta\,(k - \alpha) = 0, \quad \delta\,(k - \alpha) = 0, \quad \beta\,(m - \gamma) = 0, \quad \delta\,(m - \gamma) = 0,$$

$$\beta n - \delta l = 0$$

care sînt identic satisfăcute în virtutea lui (34).

Integrăm sistemul de ecuații cu derivate parțiale :

$$q_x = \alpha, \quad q_z = \gamma, \quad \mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,q_y = \beta, \quad \mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,q_u = \delta.$$

Avem :

$$\mathrm{e}^{2q} = 2\mathrm{e}^{2\,(kx+mz)}\,(\beta y + \delta u), \quad \text{unde } \beta = \frac{k}{a}, \quad \delta = \frac{m}{a}\cdot$$

Metrica spațiului V_4 este în acest caz

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\,(kx+mz)}\,[2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 4\,(ky + mu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z]. \tag{35}$$

Cazul II : $\alpha = 0$. Acesta este cazul particular al cazului mai general în care avem :

$$\mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,q_x = \alpha.$$

Dacă $\alpha = 0$, rezultă $q_x = 0$, adică tocmai cazul II.

Atunci trebuie să luăm :

$$a = 0, \quad \mathrm{e}^{2\,(q-p)}\,q_z = \gamma, \quad q_y = \beta, \quad \ddot{y} = -\,\beta\dot{y}^2.$$

Substituind în ecuaţia (32) obţinem :

$$-\beta\dot{y}^2+2\dot{y}(k\dot{x}+l\dot{y}+m\dot{z}+n\dot{u})-2(\dot{x}\dot{u}+\dot{y}\dot{z})m-b\gamma\dot{y}^2\equiv 0.$$

Avînd în vedere că această relaţie este o identitate, rezultă :

$$2l=\beta+b\gamma,\quad k=m=n=0. \tag{36}$$

Condiţiile de integrabilitate se scriu :

$$\alpha(l-\beta)=0,\quad \gamma(l-\beta)=0,\quad \delta(l-\beta)=0;\quad \alpha m-\gamma k=0,$$
$$\alpha n-\delta k=0,\quad \gamma n-\delta m=0.$$

Se observă că ultimele trei condiţii se verifică identic în virtutea lui (36). Cît priveşte primele trei condiţii, avem două cazuri :

a) $l\neq\beta$. Rezultă $\alpha=\gamma=\delta=0$, iar din (36) avem $\beta=2l$. Deci $q=2ly$. Metrica spaţiului V_4 este în acest caz

$$ds^2=e^{2ly}(2\,dx\,du+2\,dy\,dz)+be^{4ly}dy^2. \tag{37}$$

Se observă că această metrică este de aceeaşi formă cu metrica (25), deci dacă schimbăm între ele variabilele (x,y) şi (z,u), atunci metrica (37) se transformă în metrica (22).

b) $l=\beta$. În acest caz vom integra sistemul :

$$q_y=l,\quad e^{2(q-p)}q_x=\alpha,\quad e^{2(q-p)}q_z=\gamma,\quad e^{2(q-p)}q_u=\delta.$$

Avem

$$e^{2q}=2e^{2ly}(\alpha x+\gamma z+\delta u).$$

Metrica lui V_4 este în acest caz :

$$ds^2=e^{2ly}[2\,dx\,du+2\,dy\,dz+2b(\alpha x+\gamma z+\delta u)\,dy^2], \tag{38}$$

unde $\gamma=\frac{1}{b}\cdot$

Se observă că metrica (38) este de aceeaşi formă cu metrica (28). Dacă în (38) facem $\alpha=0$, obţinem o metrică de aceeaşi formă cu (26).

Considerăm acum cazul în care avem :

$$\Phi=2a\,dx\,dy+2b\,dx\,dz.$$

Metrica lui V_4 se scrie :

$$ds^2=e^{2p}(2\,dx\,du+2\,dy\,dz)+e^{2q}(2a\,dx\,dy+2b\,dx\,dz).$$

Asociem energia cinetică şi obţinem :

$$T=\frac{1}{2}e^{2p}(2\dot{x}\dot{u}+2\dot{y}\dot{z})+\frac{1}{2}e^{2q}(2a\dot{x}\dot{y}+2b\dot{x}\dot{z})=e^{2p}(\dot{x}\dot{u}+\dot{y}\dot{z})+e^{2q}(a\dot{x}\dot{y}+b\dot{x}\dot{z}).$$

Geodezicele sînt date de ecuaţiile lui Lagrange care sînt :

$$\ddot{u}+2\dot{u}(p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}+p_u\dot{u})-2(\dot{x}\dot{u}+\dot{y}\dot{z})p_z+ae^{2(q-p)}(\ddot{y}+2\dot{y}^2q_y+$$
$$+2\dot{y}\dot{z}q_z+2\dot{y}\dot{u}q_u)+be^{2(q-p)}(\ddot{z}+2\dot{z}^2q_z+2\dot{y}\dot{z}q_y+2\dot{z}\dot{u}q_u)=0, \tag{39}$$

$$\ddot{z} + 2\dot{z}(p_x\dot{x} + p_v\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})p_v + ae^{2(q-p)}(\ddot{x} + 2\dot{x}^2 q_x +$$

$$\text{(40)} \qquad + 2\dot{x}\dot{z}q_z + 2\dot{x}\dot{u}q_u) = 2b\dot{x}\dot{z}e^{2(q-p)}q_v,$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y}(p_x\dot{x} + p_v\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})p_z +$$

$$\text{(41)} \qquad = be^{2(q-p)}(\ddot{x} + 2\dot{x}^2 q_x + 2\dot{x}\dot{y}q_v + 2\dot{x}\dot{u}q_u) = 2a\dot{x}\dot{y}e^{2(q-p)}q_z,$$

$$\text{(42)} \quad \ddot{x} + 2\dot{x}(p_x\dot{x} + p_v\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})p_u = 2e^{2(q-p)}q_u(a\dot{x}\dot{y} + b\dot{x}\dot{z}).$$

Pentru ca toţi coeficienţii ecuaţiei (42) să fie constanţi, este necesar şi suficient să avem :

$$p = kx + ly + mz + nu$$

$$e^{2(q-p)}q_u = \delta.$$

Trecînd la ecuaţia (41) vedem că se impune condiţia :

$$q_x = \alpha.$$

Este de remarcat faptul că nu putem avea $\alpha = 0$, deoarece ar rezulta $a = b = 0$, sau $p - q =$ const. ceea ce trebuie înlăturat. Pentru ca ecuaţia (41) să aibă toţi coeficienţii constanţi, este necesar să fie satisfăcute relaţiile :

$$\ddot{x} = -2\alpha\dot{x}^2, \quad e^{2(q-p)}q_y = \beta, \quad a = 0.$$

Cît priveşte ecuaţiile (39), (40), acestea ne impun condiţiile :

$$q_z = \gamma, \quad \ddot{z} = -2\gamma\dot{z}^2.$$

Înlocuind aceste condiţii în (40) şi (42), obţinem :

$$-2\gamma\dot{z}^2 + 2\dot{z}(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})l - 2b\beta\dot{x}\dot{z} \equiv 0$$

$$-2\alpha\dot{x}^2 + 2\dot{x}(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + u\dot{u}) - 2(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})n - 2b\delta\dot{x}\dot{z} \equiv 0.$$

Din aceste două identităţi rezultă :

$$\text{(43)} \qquad \gamma = m, \quad \alpha = k, \quad l = n = 0, \quad k - b\beta = 0, \quad m - b\delta = 0.$$

Condiţiile de integrabilitate se scriu :

$$\beta(k - \alpha) = 0, \quad \delta(k - \alpha) = 0, \quad \beta(m - \gamma) = 0, \quad \delta(m - \gamma) = 0,$$

$$\beta n - \delta l = 0$$

care se vede că sînt identic verificate în virtutea lui (43).

Integrînd sistemul :

$$q_x = \alpha, \quad e^{2(q-p)}q_v = \beta, \quad q_z = \gamma, \quad e^{2(q-p)}q_u = \delta$$

se obţine :

$$e^{2q} = 2e^{2(kx+mz)}(\beta y + \delta u), \quad \text{unde} \quad \beta = \frac{k}{b}, \quad \delta = \frac{m}{b}.$$

Metrica spaţiului este

$$(44)\qquad ds^2 = e^{2(kx+mz)}\,[2\,dx\,du + 2\,dy\,dz + 4\,(ky + mn)\,dx\,dz]$$

care se vede că este aceeaşi cu metrica (35).

Ecuaţiile (39), (40), (41), (42) sînt de asemenea cu coeficienţi constanţi dacă avem condiţiile :

$$p = kx + ly + mz + nu, \quad e^{2(q-p)}\,q_u = \delta, \quad q_x = \alpha, \quad \ddot{x} = \alpha\dot{x}^2,$$

$$e^{2(q-p)}\,q_z = \gamma, \quad b = 0, \quad q_v = \beta, \quad \ddot{y} = -2\beta\dot{y}^2.$$

Înlocuim acum în ecuaţiile (41), (42) şi obţinem identităţile :

$$-2\beta\dot{y}^2 + 2\dot{y}\,(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,m - 2a\gamma\,\dot{x}\dot{y} \equiv 0,$$

$$-2\alpha\dot{x}^2 + 2\dot{x}\,(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,n - 2a\delta\,\dot{x}\dot{y} \equiv 0$$

de unde rezultă :

$$(45)\qquad \beta = l, \quad \alpha = k, \quad m = n = 0, \quad k - a\gamma = 0, \quad l - a\delta = 0.$$

Condiţiile de integrabilitate sînt :

$$\gamma(k - \alpha) = 0, \quad \delta(k - \alpha) = 0, \quad \gamma(l - \beta) = 0, \quad \delta(l - \beta) = 0,$$

$$\gamma n - \delta m = 0$$

care sînt identic satisfăcute dacă ţinem seama de (45).

Integrînd sistemul

$$q_x = \alpha, \quad q_v = \beta, \quad e^{2(q-p)}\,q_z = \gamma, \quad e^{2(q-p)}\,q_u = \delta$$

obţinem :

$$e^{2q} = 2e^{2(kx+lv)}\,(\gamma z + \delta u),$$

unde $\gamma = \dfrac{k}{a}$, $\delta = \dfrac{l}{a}$.

Metrica spaţiului V_4 se scrie în acest caz :

$$(46)\qquad ds^2 = e^{2(kx+ly)}\,[2\,dx\,du + 2\,dy\,dz + 4\,(kz + lu)\,dx\,dy].$$

Este de remarcat faptul că dacă schimbăm între ele variabilele y, z, atunci metrica (46), se transformă în metrica (44).

Să considerăm, în sfîrşit, cazul în care avem

$$\Phi = \varepsilon\,dx^2,$$

unde $\varepsilon = \pm 1$.

Metrica lui V_4 se scrie :

$$ds^2 = e^{2p}\,(2\,dx\,du + 2\,dy\,dz) + \varepsilon e^{2q}\,dx^2.$$

Asociem acestei metrici energia cinetică corespunzătoare :

$$T = e^{2p}\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z}) + \frac{1}{2}\,\varepsilon e^{2q}\dot{x}^2.$$

Geodezicele spaţiului V_4 sînt :

$$\ddot{u} + 2\dot{u}\,(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_x +$$

$$+\,\varepsilon e^{2\,(q-p)}\,(\ddot{x} + \dot{x}^2 q_x + 2\,\dot{x}\dot{y}q_y + 2\,\dot{x}\dot{z}q_z + 2\,\dot{x}\dot{u}q_u) = 0 \tag{47}$$

$$\ddot{z} + 2\dot{z}\,(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_y - \varepsilon\dot{x}^2 e^{2\,(q-p)}\,q_y = 0 \tag{48}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y}\,(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_z - \varepsilon\dot{x}^2 e^{2\,(q-p)}\,q_z = 0, \tag{49}$$

$$\ddot{x} + 2\,\dot{x}\,(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_u\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,p_u - \varepsilon\dot{x}^2 e^{2\,(q-p)}\,q_u = 0. \tag{50}$$

Se observă foarte uşor că pentru ca aceste ecuaţii să fie cu coeficienţii constanţi, este necesar şi suficient să avem condiţiile :

$$p = kx + ly + mz + nu, \quad q_x = \alpha, \quad \ddot{x} = -\,\alpha\dot{x}^2,$$

$$e^{2\,(q-p)}\,q_y = \beta, \quad e^{2\,(q-p)}\,q_z = \gamma, \quad e^{2\,(q-p)}\,q_u = \delta$$

unde α trebuie să fie diferit de zero, dacă vrem ca diferenţa $p - q$ să nu fie o constantă.

Înlocuind în ecuaţia (50), obţinem identitatea :

$$-\,\alpha\dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,(k\dot{x} + l\dot{y} + m\dot{z} + n\dot{u}) - 2\,(\dot{x}\dot{u} + \dot{y}\dot{z})\,u - \varepsilon\delta\,\dot{x}^2 \equiv 0$$

de unde rezultă :

$$2k = \alpha + \varepsilon\delta, \quad l = m = n = 0. \tag{51}$$

Condiţiile de integrabilitate se scriu :

$$\beta\,(k - \alpha) = 0, \quad \gamma\,(k - \alpha) = 0, \quad \delta\,(k - \alpha) = 0, \quad \beta m - \gamma l = 0,$$

$$\beta n - \delta l = 0, \quad \gamma n - \delta m = 0.$$

Ultimele trei condiţii se verifică identic în virtutea lui (51).

În ceea ce priveşte primele trei condiţii, avem două cazuri de deosebit :

a) $k \neq \alpha$. Rezultă $\beta = \gamma = \delta = 0$, iar $\alpha = 2k$. Deci $q = 2kx$.

Metrica lui V_4 se scrie sub forma :

$$ds^2 = e^{2kx}\,(2\,dx\,du + 2\,dy\,dz) + \varepsilon e^{4kx}\,dx^2.$$

Observăm că această metrică este aceeaşi cu metrica (22).

b) $k = \alpha$. În acest caz vom integra sistemul :

$$q_x = k, \quad e^{2\,(q-p)}\,q_y = \beta, \quad e^{2\,(q-p)}\,q_z = \gamma, \quad e^{2\,(q-p)}\,q_u = \delta$$

şi obţinem

$$e^{2q} = 2e^{2kx}\,(\beta y + \gamma z + \delta u)$$

iar metrica spaţiului V_4 se scrie sub forma :

$$ds^2 = e^{2kx}\,[2\,dx\,du + 2\,dy\,dz + 2\,\varepsilon\,(\beta y + \gamma z + \delta u)\,dx^2]\,; \quad \delta = \frac{k}{\varepsilon}$$

şi se observă că această metrică este aceeaşi cu metrica (23).

Primită la redacţie la 24 noiembrie 1964

Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghe Vrănceanu, *Asupra spațiilor lui Riemann cu conexiunea constantă.* Studii și cercetări matematice, **XIII**, *2* (1962).
2. Gheorghe Vrănceanu, *Reducerea la forma canonică a unei forme pătratice prin transformăr hiperbolice.* Analele Univ. ,,C. I. Parhon'', **25** (1960).
3. Gheorghe Vrănceanu, *Reducerea la forma canonică a două forme pătratice.* Studii și cercetări matematice, **XII**, *1* (1961).
4. Gheorghe Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială.* vol. I, II. Ed. Academiei R.P.R., București, 1952.
5. Grecu Eftimie, *Asupra spațiilor lui Riemann cu conexiune constantă de genul doi.* Studii și cercetări matematice, **XV**, *2* (1964).

ASUPRA FUNCTORULUI DE COMPLETARE

DE

N. RADU

Se dau condiţii în care functorul de completare pe anumite clase A-module este exact, păstrează monomorfismele sau este exact la dreapta. A este un inel cu element unitate şi completarea se face în topologia dată de puterile unui ideal bilateral m al lui A. Se constată că proprietăţile functorului de completare pe anumite clase de A-module sînt legate de proprietăţile de separare ale modulelor din clasa respectivă şi ale completatelor lor.

Vom nota cu A un inel cu element unitate, iar A modulele, vor fi A-module stîngi unitare, dacă nu se va specifica altceva în plus. Prin ideal al lui A vom înţelege un ideal bilateral.

Să presupunem că pe A este dată o filtrare $\{F_i A\}$, $i = 0,1\ldots,$ descrescătoare exhaustivă, adică $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F_i A = A$, iar E este A-modul-filtrat cu filtrarea $\{F_i\ E\}$, $i = 0,1,\ldots,$ $F_0\ E = E$. Din categoria A-modulelor stîngi filtrate $\mathcal{F}_A$ separăm clasa $\overline{\mathcal{F}}_A$ a celor E pentru care $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} F_i\ E = 0$ (A-module separate) şi E este spaţiu complet în topologia dată de $F_i\ E$, $i = 0,1,\ldots,$ ca un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui (0). Un modul din clasa $\overline{\mathcal{F}}_A$ îl numim complet. Fiecărui A-modul E i se asociază A-modulul din $\overline{\mathcal{F}}_A$:

$$\overline{E} = \lim_{\longleftarrow} \frac{E}{F_i E}$$

care se numeşte completatul lui E; în particular, lui A i se asociază A-modul $\overline{A}$ care este inel, iar A-modulele din clasa $\overline{\mathcal{F}}_A$ sînt $\overline{A}$-module stîngi.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 1077–1087, BUCUREŞTI, 1965

Fiecărui A-modul E i se asociază omomorfismul canonic de A-module filtrate $\varphi^E : E \to \overline{E}$ iar $\varphi^E(E)$ este submodul dens al lui $\overline{E}$. Dacă $\varphi : E \to E'$ este un omomorfism de A-module filtrate, lui i se asociază omomorfismul $\overline{\varphi} : \overline{E} \to \overline{E}'$ de A-module filtrate şi deci şi de A-module astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi^E"'] & E' \arrow[d, "\varphi^{E'}"] \\
\overline{E} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \overline{E}'
\end{tikzcd}$$

este comutativă. Se construieşte astfel un functor de la categoria A-modulelor filtrate $\mathcal{F}_A$ la clasa A-modulelor filtrate complete. O proprietate a completatului $\overline{E}$ al A-modului E, care de altfel îl caracterizează, în afară de un izomorfism, este următoarea : pentru orice A-modul F din clasa $\overline{\mathcal{F}}_A$ şi orice omomorfism de A-module filtrate $f : E \to F$ există un omomorfism unic de A-module filtrate $f' : \overline{E} \to F$ care închide diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi^E"] \arrow[d, "f"'] & \overline{E} \arrow[dl, "f'"] \\
F &
\end{tikzcd}$$

adică astfel încît $f = f' \circ \varphi^E$, altfel spus $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}_A}(F,F) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}_A}(\overline{E}, F)$ (proprietatea de universalitate a functorului de completare).

Functorul de completare este exact pe categoria preabeliană $\mathcal{F}_A$, adică pentru orice şir exact

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

de A-module filtrate, şirul de A-module filtrate

$$0 \to \overline{E}' \to \overline{E} \to \overline{E}'' \to 0$$

este exact.

Fie pe A o filtrare dată de puterile unui ideal $\mathfrak{m} \subset A$, iar A-modulele E sînt filtrate cu filtrarea $\{\mathfrak{m}^i E\}$, $i = 0,1,\ldots,$. Această filtrare pe E o numim $\mathfrak{m}$-adică. Se observă că în acest caz orice omomorfism de A-module este şi omomorfism de A-module filtrate.

Dacă

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0 \tag{1}$$

este un şir exact de A-module şi $\overline{E}'$, $\overline{E}$, $\overline{E}''$ sînt completatele lui E', E, E'' în topologiile $\mathfrak{m}$-adice, atunci şirul corespunzător de A-module

$$0 \to \overline{E}' \to \overline{E} \to \overline{E}'' \to 0 \tag{2}$$

nu este în general exact. Aceasta se datoreşte şi faptului că şirul (1), considerat ca şir de A-module filtrate cu filtrarea $\mathfrak{m}$-adică, nu este exact. Dacă notăm cu E'_1 modulul E' cu filtrarea $\{\mathfrak{m}^i E \cap E'\}$, $i = 0,1,\ldots$, atunci șirul

$$0 \to E'_1 \to E \to E'' \to 0$$

este un șir exact de A-module filtrate, A, E, E'' fiind filtrate cu filtrarea $\mathfrak{m}$-adică. Se obține astfel, prin trecerea la completările respective, șirul exact de $\bar{A}$-module filtrate (deci și de A-module filtrate):

$$0 \to \overline{\overline{E}}'_1 \to \overline{\overline{E}} \to \overline{\overline{E}}'' \to 0.$$

Deoarece $\mathfrak{m}^i E' \subset \mathfrak{m}^i E \cap E'$, omomorfismul identic $\varphi : E' \to E'_1$ este un omomorfism de A-module filtrate și se obține următoarea diagramă comutativă

$$(3) \qquad \begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi^{E'}"'] & E'_1 \arrow[d, "\varphi^{E'_1}"] \\ \overline{\overline{E}}' \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & \overline{\overline{E}}'_1 \end{tikzcd}$$

unde $\varphi^{E'}$ respectiv $\varphi^{E'_1}$ sînt omomorfismele canonice determinate de $\varphi_i^{E'} : E' \to E'/\mathfrak{m}^i E'$ și $\varphi_i^{E'_1} : E'_1 \to E'_1/\mathfrak{m}^i E \cap E'$. Dacă în (3) $\bar{\varphi}$ este izomorfism, atunci șirul (2) este exact. Acest lucru se întîmplă dacă pentru orice k există i astfel ca

$$(4) \qquad \mathfrak{m}^k E' \supset \mathfrak{m}^i E \cap E'.$$

Relația (4) este o proprietate de tip Artin-Rees a lui E' relativă la E, ea reamintind de lema lui Artin-Rees pentru cazul în care A este inel noetherian comutativ, iar E este A-modul finit. Așadar dacă (4) este verificată pentru o clasă de A-module, atunci functorul de completare este exact ca functor de la clasa respectivă în categoria A-modulelor.

În cele ce urmează se examinează cazul în care $\bar{\varphi}$ este monomorfism, ceea ce revine la faptul că functorul de completare păstrează monomorfismele și se stabilește legătura cu lema lui Krull.

În legătură cu aceasta se examinează și exactitatea functorului de completare pe anumite clase de A-module precum și legătura acesteia cu A-platitudinea lui $\bar{A}$.

1. Fie A un inel filtrat E, E_1 două A-module filtrate, $\varphi : E \to E_1$ un monomorfism de A-module filtrate; vom considera diagrama comutativă

$$(5) \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi^{E}"'] & E_1 \arrow[d, "\varphi^{E_1}"] \\ \overline{\overline{E}} \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & \overline{\overline{E}}_1 \end{tikzcd}$$

în care $\overline{\overline{E}}$ și $\overline{\overline{E}}_1$ sînt completatele lui E și E_1 în topologiile date de filtrările respective pe care le vom nota cu $\{F_i E\}$, $i = 0,1,\ldots$, respectiv

$\{F_i\ E_1\}$, $i = 0,1,..$, şi le presupunem exhaustive (ca de altfel şi filtrarea pe A pe care o notăm cu $F_i\ A$, $i = 0,1,\ldots,$), φ^E respectiv φ^{E_1} sînt omomorfismele canonice de A - modul, al modulului respectiv în completatul său iar $\overline{\varphi}$ omomorfismul de A-module filtrate determinat de φ.

LEMA 1. *Următoarele proprietăţi sînt echivalente :*

1) $\overline{\varphi}$ *este monomorfism de A-module*

2) *Orice şir fundamental* $\{a_i\}$, $i = 0,1,\ldots$, *în* E *pentru care şirul* $\{\varphi\,(a_i)\}$ *este echivalent cu şirul nul în* E_1, *este echivalent cu şirul nul în* E.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2). Şirul $\{\varphi^E(a_i)\}$, $i = 0,1,\ldots$, este şir fundamental în $\overline{E}$ şi deoarece acesta este complet, el are o limită $\overline{a}$. Din comutativitatea diagramei (5) şi datorită faptului că în E_1 şirul $\{\varphi\,(a_i)\}$, $i = 0, 1,\ldots$, este echivalent cu şirul nul, rezultă că $\overline{\varphi}\,(\overline{a}) = 0$, adică $\overline{a} = 0$ şi ca atare şirul $\{a_i\}$, $i = 0,1\ldots$, este echivalent cu şirul nul în E.

2) $\Rightarrow$ 1). Fie $\overline{a} \in \operatorname{Ker} \overline{\varphi}$, atunci există un şir $\{a_i\}$, $i=0, 1,\ldots$, de elemente din E astfel ca şirul $\{\varphi^E(a_i)\}$, $i = 0,1,\ldots$, să aibă ca limită pe $\overline{a}$, adică şirul $\{a_i\}$, $i = 0,1,\ldots$, este şir fundamental în E şi atunci $\{\varphi\,(a_i)\}$, $i = 0,1,\ldots$, este şir fundamental în E_1. Mai mult, el este echivalent cu şirul nul, pentru că şirul $\{\varphi^{E_1}\varphi\,(a_i)\}$, datorită comutativităţii diagramei (5), tinde către 0 : 2) implică faptul că şirul $\{a_i\}$, $i = 0,1,\ldots$, este echivalent cu şirul nul în E şi deci $\overline{a} = 0$. Adică $\overline{\varphi}$ este monomorfism.

LEMA 2. *Dacă* $\overline{\varphi}$ *este monomorfism de A-module, atunci*

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} F_i\,E = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} F_i\,E_1\right).$$

Demonstraţie. Din diagrama (5) rezultă

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} F_i E = \ker\,\varphi^E = \ker\,(\overline{\varphi}\circ\varphi^E) = \ker\,(\varphi^{E_1}\circ\varphi) = \varphi^{-1}\,(\ker\varphi^{E_1}) = \varphi^{-1}\,(\bigcap_{i=0}^{\infty} F_i\ E_1)$$

datorită faptului că φ şi $\overline{\varphi}$ sînt monomorfisme de A-module.

LEMA 3. *Dacă există* n *aşa ca pentru* $i \geqslant n$

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} (\varphi^{-1}\,(F_j\,E_1) + F_i\,E) = F_i\,E,$$

atunci $\overline{\varphi}$ *este monomorfism de A-module.*

Demonstraţie. Conform lemei 1 este suficient să demonstrăm că orice şir fundamental $\{a_i\}$, $i = 0,1\ldots$, din E, pentru care $\{\varphi\,(a_i)\}$ este echivalent cu şirul nul, este el însuşi echivalent cu şirul nul. Aşadar din ipoteză avem $\varphi\,(a_j) \in F_s\,E_1$, unde $s \to \infty$ pentru $j \to \infty$, iar

$$a_k - a_j \in F_i\,E \text{ pentru } k,\ j > n(i)$$

adică

$$a_k \in F_i\,E + \varphi^{-1}\,(F_s\,E_1)$$

oricare ar fi $s = 0,1,\ldots$ Așadar

$$a_k \in \bigcap_{s=0}^{\infty} (\varphi^{-1} (F_s E_1) + F_i E) = F_i E$$

adică șirul $\{a_i\}$, $i = 0,1,\ldots$, este echivalent cu șirul nul în E.

Corolar. *Fie* $x \in A$ *un nondivizor al lui zero în* E. *Atunci dacă* $\bigcap_{j=0}^{\infty} ((F_j E : x A) + F_i E) = F_i E$, $\varphi^A (x) \in \overline{A}$ *este nondivizor al lui zero în* $\overline{E}$.

Se aplică lema 3 monomorfismului $\varphi : E \to E$ definit prin $\varphi (e) = xe$.

Vom considera, în cele ce urmează, un ideal $\mathfrak{m}$ al inelului A și pentru orice A-modul vom considera filtrarea $\mathfrak{m}$-adică.

Teorema 1. *Fie* $\mathcal{C}$ *o clasă de A-module separate care conține o dată cu un A-modul și imaginile sale omomorfe. Dacă* $\varphi : E' \to E$ *este monomorfism de A-module,* E', $E \in \mathcal{C}$, *atunci* $\overline{\varphi} : \overline{E}' \to \overline{E}$ *este monomorfism de A-module.*

Demonstrație. Conform lemei 3 este suficient să arătăm că

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} (\varphi^{-1} (\mathfrak{m}^j E) + \mathfrak{m}^i E') = \mathfrak{m}^i E', \qquad (i = 0,1,\ldots,)$$

Identificînd pe E' cu $\varphi (E')$, avem însă

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} (\varphi^{-1} (\mathfrak{m}^j E) + \mathfrak{m}^i E') = \bigcap_{j=0}^{\infty} (\mathfrak{m}^j E \cap E' + \mathfrak{m}^i E') \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} (\mathfrak{m}^j E + \mathfrak{m}^i E') = \mathfrak{m}^i E'$$

deoarece $E/\mathfrak{m}^i E' \in \mathcal{C}$. Inegalitatea contrară fiind evidentă, obținem egalitatea cerută și deci teorema este demonstrată.

În vederea slăbirii ipotezelor teoremei de mai sus în cazul în care A este inel comutativ vom demonstra în prealabil cîteva leme.

Lema 4. *Fie* $f : A \to A'$ *un epimorfism de inele,* $\mathcal{C}$ *o clasă de A-module care conține o dată cu un modul imaginile sale omomorfe și orice* E *din* $\mathcal{C}$, *pentru care elementele de forma* $1 + \mathfrak{m}$ *nu sînt divizori ai lui zero în* E, *este separat. Dacă* $\mathcal{C}'$ *este clasa* A'*-modulelor* $E' = A' \otimes_A E$ *cînd* E *parcurge modulele din* $\mathcal{C}$, *atunci* $\mathcal{C}'$ *are aceleași proprietăți relativ la* $f (\mathfrak{m})$.

Demonstrație. Fie $\mathfrak{a} = \ker f$; atunci $E' = A' \otimes_A E = E/\mathfrak{a} E$ și deci faptul că $\mathcal{C}'$ conține o dată cu un modul imaginile sale omomorfe este evident. Fie E' un modul din $\mathcal{C}'$ pentru care elementele de forma $1 + f (\mathfrak{m})$ nu sînt divizori ai lui zero, aceasta înseamnă că pentru A-modulul $E/\mathfrak{a} E \in \mathcal{C}$ elementele de forma $1 + \mathfrak{m}$ nu sînt divizori ai lui zero și deci

$$0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n E/\mathfrak{a} E = \bigcap_{n=0}^{\infty} (f(\mathfrak{m}))^n E'.$$

Lema 5. *Dacă A este inel comutativ în care elementele de forma* $1 + \mathfrak{m} = S$ *nu sînt divizori ai lui zero, iar* $\mathcal{C}$ *o clasă de A-module care conține o dată cu un modul imaginile sale omomorfe și astfel încît modulele* *din* $\mathcal{C}$ *pentru care elementele de forma* $1 + \mathfrak{m}$ *nu sînt divizori ai lui zero sînt separate, atunci clasa* $\mathcal{C}_S$ *formată din* A_S*-modulele de forma* $E_S = A_S \otimes_A E$, *cînd* E *parcurge pe* $\mathcal{C}$, *are aceleași proprietăți relativ la* $\mathfrak{m} A_S$.

Demonstrație. Să demonstrăm mai întîi că $\mathcal{C}_S$ conține o dată cu un modul și imaginile sale omomorfe. Fie $E_S = A_S \otimes_A E$ cu $E \in \mathcal{C}$. Dacă F' este submodul al lui E_S, atunci există un A-modul $F \subset E$ așa ca $E_S/F' \xrightarrow{\sim} A_S \otimes E/F = (E/F)_S$ ceea ce conduce la concluzia cerută.

Pentru a demonstra cea de-a doua proprietate observăm că trecerea de la E la E_S se poate face în modul următor.

Se consideră A-modulul $E' = E/E_1$, unde E_1 este submodulul lui E format de elementele $e \in E$ pentru care există $s \in S$ așa ca $se = 0$. Conform ipotezei $E' \in \mathcal{C}$ și elementele din S sînt nondivizori ai lui zero în E' așa încît $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n E' = 0$. Avem însă evident $E_S = E'_S$ și deci putem presupune că clasa $\mathcal{C}$ este compusă din A-module separate pentru care elementele de forma $1 + \mathfrak{m}$ nu sînt divizori ai lui zero. Deoarece elementele de forma $1 + \mathfrak{m} A_S$ sînt unități în A, trebuie să demonstrăm că pentru orice E_S din $\mathcal{C}_S$ avem

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i A_S E_S = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i E_S = (0).$$

Fie $e' \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i E_S$, $e' = e/s$, $e \in E$, $s \in S$; atunci $e' \in \mathfrak{m}^i E_S$ oricare ar fi $i \geqslant 0$, deci $e \in \mathfrak{m}^n E_S$ pentru $n \geqslant 0$. Așadar $e = \sum_{j=1}^{k} m_j \frac{e_i}{s}$, $e_i \in E\ m_j \in \mathfrak{m}^i$; atunci $se \in \mathfrak{m}^n E$. Dar, $s = 1 + m$, $m \in \mathfrak{m}$ și deci

$$e \in \mathfrak{m}^n E + \mathfrak{m}\, e;$$

iterînd se obține

$$e \in \mathfrak{m}^n E + \mathfrak{m}^k e \text{ pentru orice } k \geqslant 0$$

adică $e \in \mathfrak{m}^n E$ oricare ar fi $n \geqslant 0$, deci $e = 0$ și $e' = 0$.

LEMA 6. *Dacă* A *este inel comutativ,* $\mathcal{C}$ *o clasă de* A*-module, care conține o dată cu un modul imaginile sale omomorfe și orice modul din* $\mathcal{C}$, *pentru care elementele de forma* $1 + \mathfrak{m} = S$ *nu sînt divizori ai lui zero, este separat, atunci clasa* $\mathcal{C}_S$, *formată din* A_S*-modulele de forma* $E_S = A_S \otimes_A E$, *unde* E *parcurge modulele din* $\mathcal{C}$, *are aceleași proprietăți relativ la* $\mathfrak{m} A_S$.

Demonstrație. Trecerea de la $E \in \mathcal{C}$ la $E_S \in \mathcal{C}_S$ se poate realiza în două etape. Se trece mai întîi de la E la $E' = A' \otimes_A E$, unde A' este inelul $A/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ fiind idealul format de elementele lui A pentru care există $s \in S$ așa ca $sa = 0$. Apoi de la E' se trece la E_S prin relația $E_S = A'_{S'} \otimes_{A'} E$, unde S' este semigrupul format în A' de imaginile elementelor din S.

Prin trecerea de la E la E' se obține clasa de A'-module $\mathcal{C}'$ care are proprietățile cerute conform lemei 4, iar prin trecerea de la E' la E_S se obține clasa de $A'_{S'}$-module $\mathcal{C}'_{S'}$ care de asemenea posedă proprietățile cerute conform lemei 5, S' fiind format din nondivizori ai lui zero în A'.

TEOREMA 1 a. *Fie A inel comutativ, $\mathcal{C}$ o clasă de A-module care conține o dată cu un modul, imaginile sale omomorfe și toate modulele din $\mathcal{C}$, pentru care elementele de forma $1 + \mathfrak{m}$ nu sînt divizori ai lui zero, sînt separate. Dacă $\varphi : E' \to E$ este monomorfism de A-module, $E', E \in \mathcal{C}$, atunci $\bar{\varphi} : \bar{E}' \to \bar{E}$ este monomorfism de A-module.*

Demonstrație. Deoarece imaginile elementelor din $1 + \mathfrak{m} = S$ prin omomorfismul $\varphi^A : A \to \bar{A}$ sînt elemente inversabile în $\bar{A}$, atunci pentru orice A-modul E omomorfismul canonic

$$E \xrightarrow{\varphi^E} \bar{E}$$

se factorizează în [1]

$$E \to E_S \xrightarrow{\varphi^{E_S}} \bar{E}.$$

Dacă se notează cu $\mathcal{C}_S$ clasa A_S-modulelor care provin din module din $\mathcal{C}$, această clasă satisface ipotezele din teorema 1 pentru $\mathfrak{m} A_S$ conform lemei 6. Așadar prin trecerea de la E_S la $\bar{E}$ (care este și completatul lui E_S în topologia $\mathfrak{m} A_S$-adică) se păstrează monomorfismele pentru modulele din $\mathcal{C}_S$, cum prin trecerea de la E la E_S se păstrează de asemenea; functorul respectiv fiind chiar exact, deducem afirmația teoremei.

TEOREMA 2. *Fie $\mathcal{C}$ o clasă de A-module care conține toate modulele monogene și astfel încît pe această clasă functorul de completare păstrează monomorfismele. Atunci orice modul E din $\mathcal{C}$, pentru care elementele de forma $1 + \mathfrak{m}$ nu sînt divizori ai lui zero, este separat.*

Demonstrație. Fie $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i E$; atunci notînd cu φ omomorfismul canonic $Ax \to E$, obținem, prin ipoteză, că $\bar{\varphi} : \overline{Ax} \to E$ este monomorfism, deci din lema 2 rezultă egalitatea

$$Ax = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i E\right) = Ax \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i E\right) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i x$$

adică $x = mx$ cu $m \in \mathfrak{m}$ și, prin urmare, $x(1 - m) = 0$ sau $x = 0$.

COROLARUL 1. *Dacă în inelul A elementele de forma $1 + \mathfrak{m}$ sînt inversabile, iar $\mathcal{C}$ este o clasă de A-module care conține modulele monogene și o dată cu un modul imaginile sale omomorfe, următoarele afirmații sînt echivalente.*

a) *Modulele din C sînt separate*

b) *Dacă E, F sînt A-module din $\mathcal{C}$ și $\varphi : E \to F$ este monomorfism de A-module, $\bar{\varphi} : \bar{E} \to \bar{F}$ este monomorfism.*

Din teoremele 1 a şi 2 rezultă următoarea consecinţă.

COROLARUL 1 a. *Dacă A este inel comutativ, $\mathcal{C}$ o clasă de A-module care conţine modulele monogene şi o dată cu un modul imaginile sale omomorfe, atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

a) *Orice $E \in \mathcal{C}$, pentru care elementele de forma $1 + \mathfrak{m}$ nu sînt divizori ai lui zero, este separat.*

b) *Dacă $E', E \in C$ şi $\varphi : E' \to E$ este monomorfism, atunci $\overline{\varphi} : \overline{E}' \to \overline{E}$ este monomorfism.*

În continuare examinăm exactitatea la dreapta a functorului de completare. Notăm cu $\overline{\mathcal{C}}_A$ clasa tuturor A-modulelor separate complete.

Presupunem în plus că pe completatele modulelor care intervin, topologia introdusă este cea $\mathfrak{m}$-adică.

LEMA 7. *$\overline{\mathcal{C}}_A$ formează o categorie preabeliană* [2]. *Dacă $u \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}_A}(E', E)$, $E', E \in \overline{\mathcal{C}}_A$, atunci*

$$\operatorname{coim} u = E'/\ker\, u, \ \operatorname{im} u = \bigcap_{i=0}^{\infty} (u\,(E') + \mathfrak{m}^i E),$$

unde prin ker u s-a notat nucleul lui u în categoria $\mathcal{C}_A$ (care este de altfel nucleu şi în categoria $\overline{\mathcal{C}}_A$), iar prin $u\ (E')$ imaginea prin u a lui E' în $\mathcal{C}_A$.

Demonstraţie. Dacă E, F sînt în $\overline{\mathcal{C}}_A$, atunci

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}_A}(E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(E, F)$$

căci orice omomorfism de A-module este continuu în topologia $\mathfrak{m}$-adică. Suma directă $E \oplus F$ în $\mathcal{C}_A$ a doua A-module din $\overline{\mathcal{C}}_A$ este tot în $\overline{\mathcal{C}}_A$, căci limita proiectivă permută cu suma directă finită şi evident este şi suma directă a acestor module în $\overline{\mathcal{C}}_A$. Aşadar $\overline{\mathcal{C}}_A$ este categorie aditivă.

Orice omomorfism $u : E \to E'$, $E, E' \in \mathcal{C}_A$ are nucleu şi conucleu. În adevăr, se verifică imediat că ker u (nucleul lui u în categoria $\overline{\mathcal{C}}_A$) este complet şi este nucleu al lui u în categoria $\overline{\mathcal{C}}_A$. Conucleul lui u se construieşte astfel : Se consideră modulul factor $E'' = E/u\,(E)$, unde $u\,(E)$ este imaginea lui u în categoria $\mathcal{C}_A$ şi coker $u = E''/\bigcap_{i=0}^{\infty} m^i E''$ care aparţine lui $\overline{\mathcal{C}}_A$. Celelalte afirmaţii ale lemei se deduc apoi imediat.

LEMA 8. *Functorul de completare este exact la dreapta de la categoria $\mathcal{C}_A$ la categoria $\overline{\mathcal{C}}_A$.*

Demonstraţie. Dacă

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E'' \longrightarrow 0 \tag{6}$$

este şir exact în $\mathcal{C}_A$, şirul corespunzător

$$\overline{E}' \xrightarrow{\overline{\varphi}} \overline{E} \xrightarrow{\overline{\psi}} \overline{E}'' \longrightarrow 0$$

este exact în $\overline{\mathcal{C}}_A$ în sensul că $(\overline{E}'', \overline{\psi}) =$ coker $\overline{\varphi}$. În adevăr, fie F un modul din $\overline{\mathcal{C}_A}$ și $\theta : \overline{E} \to F$ un omomorfism de A-module așa ca $\theta \circ \overline{\varphi} = 0$. Considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi^{E'}"] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi^{E}"] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{E''}"] & 0 \\
\overline{E}' \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \overline{E} \arrow[r, "\overline{\psi}"] \arrow[d, "\theta"] & \overline{E}'' \arrow[r] & 0 \\
 & F & &
\end{tikzcd}$$

atunci evident avem și

$$\theta \circ \varphi^E \circ \varphi = \theta \circ \overline{\varphi} \circ \varphi^{E'} = 0$$

din care rezultă, șirul (6) fiind exact, că există un omomorfism unic $\xi : E'' \to F$ așa ca $\theta \circ \varphi^E = \xi \circ \psi$ și deci un omomorfism unic $\eta : \overline{E}'' \to F$ așa ca $\xi = \eta \circ \varphi^{E''}$ (proprietatea de universalitate). Deci $\theta \circ \varphi^E = \eta \circ \varphi^{E''} \circ \psi = \eta \circ \overline{\psi} \circ \varphi^E$ de unde rezultă $\theta = \eta \circ \overline{\psi}$ căci $\varphi^E(E)$ este dens în $\overline{E}$ și aplicațiile sînt continue iar din construcția lui η rezultă unicitatea lui.

Corolar. *Dacă* $E, E' \in \mathcal{C}_A$ *și* $\varphi : E \to E''$ *este epimorfism, atunci* $\overline{\varphi} : \overline{E} \to \overline{E}''$ *este epimorfism, în* $\mathcal{C}_A$.

Dacă $\mathcal{C}$ este o clasă de A-module, notăm cu $\overline{\mathcal{C}}$ clasa de A-module constituită din completatele modulelor din $\mathcal{C}$.

Teorema 3. *Dacă imaginile omomorfe ale unui modul din* $\overline{\mathcal{C}}$ *sînt separate, atunci functorul de completare este exact la dreapta ca functor definit pe* $\mathcal{C}$ *cu valori în* $\mathcal{C}_A$.

Demonstrație. Fie $0 \to E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \to 0$ un șir exact de A-module din $\mathcal{C}$. Trebuie să arătăm că șirul $\overline{E}' \xrightarrow{\overline{u}} \overline{E} \xrightarrow{\overline{v}} \overline{E}'' \to 0$ este exact. Din corolarul de la lema 8 rezultă că $\overline{v}$ este epimomorfism. Pentru a arăta că este exact, este necesar și suficient, după cum rezultă din lema 7, ca $\bigcap_{i=0}^{\infty} (\overline{u}(\overline{E}') + m^i\overline{E}) = \overline{u}(\overline{E}')$ adică $E/\overline{u}(E')$ să fie separat.

Corolarul 1. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este o clasă de A-module separate care conține o dată cu un modul imaginile sale omomorfe, iar imaginile omomorfe ale modulelor din* $\overline{\mathcal{C}}$ *sînt separate, atunci functorul de completare este exact.*

Corolarul 2. *În condițiile teoremei 3, dacă în plus A este comutativ,* $\mathcal{C}$ *conține modulele monogene și imaginile omomorfe ale oricărui modul din* $\mathcal{C}$, *atunci o condiție necesară și suficientă ca functorul de completare să fie exact pe* $\mathcal{C}$ *cu valori în* $\mathcal{C}_A$ *este ca orice E din* $\mathcal{C}$, *pentru care elementele de forma* $1+\mathfrak{m}$ *nu sînt divizori ai lui zero, să fie separat.*

Mai jos vom aplica cele de mai sus la clasa $\mathcal{C}'_A$ a A-modulelor finite.

Lema 8. *Dacă* $E \in \mathcal{C}'_A$, *atunci* $\overline{E} \in \mathcal{C}'_{\overline{A}}$.

Demonstrație. Considerăm omomorfismele

$$\varphi_i^A \otimes_A 1 : \overline{A} \otimes_A E \to E/\mathfrak{m}^i E,$$

unde $\varphi_i^A : \overline{A} \to \overline{A}/\mathfrak{m}^i\overline{A} = A/\mathfrak{m}^iA$ este omomorfismul canonic. Aceste omomorfisme determină un omomorfism canonic (functorial) $i_E : \overline{A}\otimes_A E \to \overline{E}$ astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{A}\otimes_A E \arrow[rr, "i_E"] \arrow[dr, "\varphi_i^A\otimes_A 1"'] & & \overline{E} \arrow[dl] \\
& E/\mathfrak{m}^iE &
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Deoarece $E \in \mathcal{C}_A$, există un A-modul liber finit şi un epimomorfism $\varphi : F \to E$. De aici rezultă următoarea diagramă comutativă.

$$\begin{tikzcd}
\overline{A}\otimes_A F \arrow[r, "1\otimes_A\varphi"] \arrow[d, "i_F"] & \overline{A}\otimes_A E \arrow[r] \arrow[d, "i_E"] & 0 \\
\overline{F} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \overline{E} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

în care $1\otimes_A\varphi$ este epimorfism, produsul tensorial fiind exact la dreapta, i_F este izomorfism, cei doi functori fiind aditivi, iar $\overline{A}\otimes_A A \rightleftarrows \overline{A}$. Deoarece $\overline{\varphi}$ este epimomorfism, conform corolarului de la lema 8 rezultă că i_E este epimorfism şi deci $\overline{E} \in \mathcal{C}'_{\overline{A}}$.

COROLAR. *Dacă modulele din $\mathcal{C}'_{\overline{A}}$ sînt separate, atunci pe $\mathcal{C}'_A$ functorul de completare este exact la dreapta.*

TEOREMA 4. *Dacă modulele din $\mathcal{C}'_{\overline{A}}$ sînt separate, atunci i_E pentru $E \in \mathcal{C}'_A$ este izomorfism (functorial).*

Demonstraţie. $\ker i_E = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i(\overline{A}\otimes_A E) = 0$ deci i_E este monomorfismul şi în lema 8 s-a demonstrat că este epimorfism.

COROLARUL 1. *Dacă A-modulele finite şi $\overline{A}$-modulele finite sînt separate, atunci functorul de completare este exact pe $\mathcal{C}'_A$ şi $\overline{A}$ este A-plat.*

COROLARUL 2. *Dacă $\overline{A}$-modulele finite sînt separate şi $\overline{A}$ este A-modul plat, atunci functorul de completare este exact pe $\mathcal{C}'_A$.*

COROLARUL 3. *Dacă $\overline{A}$-modulele finite sînt separate şi $\overline{A}$ este A-plat, atunci orice A-modul finit E, pentru care elementele de forma $1 + \mathfrak{m}$ nu sînt divizori ai lui zero în E, este separat. Reciproc, dacă A este în plus comutativ şi $\mathcal{C}'_A$, $\mathcal{C}'_{\overline{A}}$ satisfac condiţiile de mai sus, $\overline{A}$ este A-plat.*

Rezultă din teoremele 4, 2 şi 1 a.

COROLARUL 4. *Dacă A este inel comutativ, $\mathfrak{m} \subset R$ (A), iar $\overline{A}$ este nœtherian, atunci următoarele proprietăţi sînt echivalente :*

a) *A este nœtherian.*

b) *Orice A-modul finit este separat.*

c) *Functorul de completare este exact pe $\mathcal{C}'_A$.*

d) *$\overline{A}$ este A-modul plat.*

Implicația a) $\Rightarrow$ b) este lema lui Krull, implicațiile b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ b) rezultă din corolarele 1 și 2 de mai sus, iar implicația c) $\Rightarrow$ a) rezultă din următoarea teoremă :

TEOREMA 5. *Dacă functorul de completare este exact pe $\mathcal{C}'_A$, elementele de forma $1 + \mathfrak{m}$ sînt inversabile în A iar E este A-modul finit astfel încît $\overline{E}$ este $\overline{A}$-noetherian, atunci E este A-noetherian.*

Demonstrație. Este suficient să arătăm că E are limitare maximală pentru A-submodulele finite, iar pentru aceasta este suficient să arătăm că din $E_1 \subset E_2$, E_1, E_2 A-module finite rezultă $\overline{E}_1 \subset \overline{E}_2$, ceea ce revine la a arăta că dacă E este A-modul finit nenul, completatul său este nenul (datorită faptului că functorul de completare este exact.) Acest fapt este însă evident căci în ipotezele teoremei, $\varphi^E : E \rightarrow \overline{E}$ este monomorfism.

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică

Primită la redacție la 10 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. GROTHENDIECK, *Elements de géométrie algébrique. I.* I.H.E.S., Paris, 1960.
2. M. NAGATA, *Local rings.* New York, 1962.

ASUPRA CONCEPŢIEI CUANTICE RELATIVISTE A GRAVITAŢIEI

DE

LIVIU SOFONEA

Se cercetează în perspectivă istorică conţinutul şi variatele interpretări care s-au dat gravitaţiei, în teoria clasică newtoniană, în teoria geometrică stabilită de relativitatea generalizată şi se face legătura cu procesele atomice, cercetînd şi teoria cuantică a radiaţiei gravitaţionale şi în general consecinţele legate de cuantificarea cîmpului gravitaţional.

I. CARACTERUL SPECIFIC AL CÎMPULUI GRAVITAŢIONAL

A. CARACTERUL ATOMIST AL CÎMPULUI GRAVITAŢIONAL

Proprietăţile acestei realităţi fizice atît de importante, pe care o constituie în impunătorul ei ansamblu gravitaţia, au fost descoperite şi interpretate în cadrul fizicii clasice, marcînd o adevărată epocă în dezvoltarea teoretică şi practică a fizicii (legea atracţiei universale a lui I. Newton, teoria potenţialului, aplicarea cu succes în mecanica cerească).

Cîmpul gravitaţional ca fapt fizic, n-a intervenit cîtuşi de puţin în microfizică, şi interpretarea lui de pe poziţii cuantice relativiste s-a făcut la început sub imperiul nevoii unui tablou cît de cît unitar al microfizicii, în lumina concepţiilor consecvente relativisto-cuantice. Tratarea teoretică a cîmpului gravitaţional, în cadrul acestei etape a fizicii a avut deci în mare măsură caracterul unui exerciţiu teoretic, deocamdată rămas fără posibilitatea unor verificări experimentale. Dar tratarea cuantică, deşi provizorie la extrem, a însemnat totuşi un pas înainte în cunoaşterea lumii fizice, conducînd la unele rezultate cu importanţă principială.

Cuantificarea cîmpului se loveşte de anumite dificultăţi inevitabile, deşi anunţă în felul acesta sinteze viitoare cu privire la cuantificare (neliniaritatea), şi cu privire la unificarea cîmpului gravitaţional cu celelalte

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 1089–1107, BUCUREŞTI, 1965

forme ale materiei (noi teorii unitare, de data asta cuantice). Mersul raționamentelor privitoare la cîmpul gravitațional pornește (ca și în cazul electrodinamicei), de la ecuațiile relativiste clasice ale acestuia, ecuații de data asta neliniare (ecuațiile date de Einstein).[1] Peste tot se urmărește în prim stadiu o analogie de comportare cu cîmpul electromagnetic cuantificat, și bine cunoscut, am putea zice devenit model.

S-a văzut de la bun început că gravitatea nu joacă în mod practic nici un rol la scara interacțiunilor microscopice. Energia gravitațională a doi protoni V_{grav}, în interacțiune, este complet neglijabilă în comparație cu energia lor electrică, V_e, și chiar cu cea magnetică.

$$\boxed{\frac{V_{\text{grav}}}{V_e} = \varkappa\,\frac{M^2}{r} : \frac{e^2}{r} \sim 10^{-36}} \tag{1.1}$$

($\varkappa$ este constanta gravitațională a lui Cavendish, $\varkappa = 6{,}685 \,.\, 10^{-8}$ cm^3/g.s^2). Energia potențială gravitațională este mică și în comparație potențială de natură mezonică dintre aceleași particule, la distanțe în care ultima se face resimțită $\left(r < \frac{1}{\varkappa_0} \sim 10^{-13}\ \text{cm}\right)$

$$\boxed{\frac{V_{\text{grav}}}{V_{\text{mez}}} \sim \frac{\varkappa M^2}{r} : \frac{\tilde{g}^2}{r} \sim 10^{-38}} \tag{1.2}$$

($\tilde{g}$ = sarcina mezonică).

În concepție atomistă, corpurile grele, sensibile la cîmp gravitațional și generîndu-l pe acesta, trebuie să aibă o sarcină specifică (de cuplare cu acest cîmp continuu). Acest lucru s-a văzut bine la constituirea electromagnetismului și a mezodinamicei (sarcinile e și $\tilde{g}$). Se introduce deci fenomenologic noțiunea de sarcină gravitațională. Ea coincide numeric cu masa corpului, sau este în orice caz strîns legată de ea :

$$\boxed{m' = \sqrt{\varkappa}\,.\,m}\,. \tag{1.3}$$

Interacțiile microscopice se împart după tăriile lor și măsura acestora o constituie niște constante adimensionale proporținale cu sarcinile specifice. Pentru interacțiile tari, ale mezonilor care ''duc'' forțele nucleare, constanta este $\beta = 2\pi \,.\, \tilde{g}^2/hc \sim 15$. Pentru cele electromagnetice, este tocmai constanta structurii fine $\alpha = 2\pi \frac{e^2}{hc} \sim \frac{1}{137}\cdot$ Interacțiile zise slabe, petrecute între cîmpul electrono-neutrinic cu desprinderea unuia sau a mai multor neutrini, sau chiar fără de participarea lor (dezintegrarea β, ca a mezonilor μ, π, a hiperonilor și mezonilor k) are un coeficient practic egal în toate cazurile interacțiilor slabe, și mult mai mic decît constanta structurii fine $\nu = 2\pi \frac{\widetilde{\mu}^2}{hc} \sim 10^{-11}$. Faţă de toate aceste interacţii, cea gravitaţională se dovedeşte a fi cu mult mai slabă. Constanta $\gamma = 2\pi \frac{\varkappa m^2}{hc}$ este mult mai mică chiar ca aceia a interacţiilor slabe. Pentru cele mai grele microparticule elementare cunoscute (hiperoni) constanta adimensională $\gamma = 2\pi \frac{M_y^2}{hc} \sim 10^{-48}$ are un ordin de mărime atît de mic încît vădeşte slaba prezenţă a gravitaţiei în mecanismul interacţiilor microscopice dintre particule, dintre structurile pe care, în această etapă, fizica este nevoită să le considere ca elementarităţi.

Se poate spune dar că sarcina gravitaţională a microparticulelor elementare este mică în comparaţie cu sarcinile electrice sau mezonice. Dar faptul, necunoscut în esenţa lui, a coincidenţei dintre gravitaţie şi masa de repaus a microparticulei, indică faptul că influenţa gravitaţiei este prezentă. Nu însă atît în comportarea exterioară a microparticulelor, cît în structurarea ei : la nivelul însăşi al particulei, cum ar fi de pildă în problema energiei proprii a microparticulelor. Aşadar o influenţă în structură.

Gravitaţia începe să joace un rol important numai pentru corpuri macroscopice (situaţii din tehnică : greutatea grinzilor etc. etc.) şi prevalează asupra altor forme de interacţie pentru corpurile de mase astronomice : mecanica cerească.

B. CARACTERUL GEOMETRIC AL GRAVITAŢIEI

Deşi cunoscută fenomenologic, şi exprimată într-o formă analitică operativă şi elegantă, gravitaţia ca realitate fizică a cunoscut variate interpretări de fond, de principiu, în diferitele stadii de dezvoltare ale fizicii macroscopice : teoria lui Newton, cu perfectarea zisă ''cosmologică'' (Seliger, ş.a.), relativitatea restrînsă, şi mai ales relativitatea generalizată. Conform acestor teorii, cîmpul gravitaţional a rămas în afara unificărilor diferitelor domenii ale fizicii, unificări în urma cărora la sfîrşitul veacului al XIX-lea, optica, electricitatea şi magnetismul, s-au strîns în electromagnetism, tinzînd chiar să imprime o unică amprentă, o unică viziune universului fizic. Cîmpul gravitaţional rămîne în fizica începutului de veac o entitate fizică aparte ale cărei comportări şi legi analitice se cunoşteau bine, dar într-un mod oarecum exterior, putem spune, mecanicist.

În fizica bazată pe relativitatea lui Einstein (1916), cîmpul gravitaţional apare cu un alt înţeles : el este considerat ca un cîmp metric, provenit din prezenţa cîmpurilor fizice care au curbat universul spaţiu-timp. Structura lumii fizice este dată de o geometrie neeuclidiană, lobacevskiană, în care cîmpul gravific este rupt de materia obişnuită, materie care este constituită din particule elementare şi cîmpuri. Obiectele fizice (după cum observă chiar Einstein, în cartea sa *The meaning of relativity* Princeton, 1946), sînt împărţite în cîmp metric, $g_{\mu\nu}$ adică gravitaţie, şi cîmp electromagnetic, $\mathcal{H}_{\mu\nu}$, sau, mai modern vorbind, în particule elementare și cîmpuri. Abia mai tîrziu, sau mai bine-zis prin prisma cuantică relativistă, s-a văzut că proprietățile cîmpului gravitațional prezintă trăsături comune cu cîmpul electromagnetic și cu cel mezonic, relevat de atomism. Această împrejurare permite tratarea gravitației cu aceleași metode ca cele ce au fost utilizate în electrodinamică, și pentru cîmpul mezonic, în cuantica cîmpurilor fizice, tratare care nu este banal analogică, ci are meritul de a fi subliniat o serie de proprietăți specifice, inerente acestui cîmp.

Faptul că gravitația nu se resimte la scară atomică a făcut ca atomismul să se desfășoare în etape, iar fenomenele gravitaționale să rămînă legate de aspectul nici măcar simplu-macroscopic al lumii, cît mai ales de cel cosmic. Cuantificarea cîmpului gravitațional se bazează în mod esențial pe ecuațiile de cîmp, soluționabile exact în cazuri rămase celebre (Schwartzschild, Weyl, ș.a.), și pe asocierea unor microparticule duale aspectului continuu, aspect cunoscut clasicește. Descrierea cuantică a mișcării trebuia de la început să pornească de la rezultate clasice cu caracter relativist. Apoi era necesar să se cunoască ordinul tensorial (caracterul matematic al mărimii funcțiilor clasice de cîmp, care vor deveni componente în funcția de undă a cîmpului cuantificat, indicînd totodată lagrangeanul) și prin urmare toate mărimile de cîmp, așa cum s-a făcut în cazul cîmpului electromagnetic.

C. CARACTERUL CLASIC AL CÎMPULUI GRAVITAȚIONAL

Cîmpul gravitațional în prima teorie istoricește constituită, teoria lui Newton, era un cîmp simplu la extrem : un cîmp static descris de un scalar φ, a cărui ecuație ”de undă” era faimoasa ecuație Laplace-Poisson :

$$\nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi = 4\pi . \varkappa m \rho, \tag{1.4}$$

m fiind masa corpului care generează cîmpul. Ea se distribuie în spațiu cu densitatea $\rho(\vec{r})$. Pentru particule foarte mici, cu caracter atomic, situate în originea axelor ($\vec{r} = 0$), distribuția are un caracter delta-form (funcția δ a lui Dirac).

$$\rho = \delta(\vec{r}). \tag{1.5}$$

Cu o nouă și naturală normare a potențialului și sarcinei, se poate împlini o fructuoasă analogie cu cazul electrostaticei. Noua sarcină are un caracter specific față de coeficientul $\sqrt{\varkappa}$, prin analogie cu electrostatica. Baza analogiei este desigur identitatea formală a dependenței forței de distanțe și mase în cele două cazuri, la cele două cîmpuri statice de naturi diferite : legile lui Newton, respectiv Coulomb :

$$\boxed{\begin{array}{ll} m' = \sqrt{\varkappa} . m ; & \varphi' = \dfrac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}} \\ f_{\text{grav}} = \varkappa \dfrac{m_1 m_2}{r^2} ; & f_{\text{elec}} = k \dfrac{m_1 m_2}{r^2} \end{array}} \quad k = 1\,(\text{GGS}). \tag{1.6}$$

Ecuaţia cîmpului este chiar cea din electrostatică

$$\nabla^2\varphi' = 4\pi . m'\rho. \tag{1.7}$$

Energia de interacţie a corpului de masă m în cîmp gravitaţional, în aproximaţia statică a lui Newton, este

$$\boxed{U = -m'\varphi;\ U_{\mathrm{el}} = -e\mathcal{E}.} \tag{1.8}$$

O dată cu teoria relativităţii, teoria newtoniană a gravitaţiei s-a generalizat, în anumite direcţii. Încă în efervescenţa de idei a construirii relativităţii restrînse, Poincaré a observat că ecuaţia statică a gravitaţiei trebuie în orice caz înlocuită, din motive de covarianţă, cu o ecuaţie în care să apară în mod simetric şi timpul: o ecuaţie a undelor. Legea lui Newton ce părea la un moment dat imaginea însăşi a idealului de lege fizică prototip neschimbător în formulare, este deci şi ea doar o aproximaţie statică a formulei corespunzătoare dinamice. Aşa că interacţia gravifică dintre două sarcini se exprimă printr-o formulă covariantă, care să conţină vitezele maselor grele (cum în electrodinamică se petrece cu două sarcini care interacţionează conform cu formula lui Breit).

În teoria clasică relativistă a lui Einstein se dă forma ecuaţiei undelor grele. În esenţă cîmpul gravific indică curbura spaţiului-timp, curbură care a părut la vremea ei oarecum stranie, şi pe care o produce tocmai această gravitaţie. Metrica spaţiului (matematic, tensorul ei), este deci legat fizic de acest cîmp material curbator:

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu};\quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4)} \, . \tag{1.9}$$

Cîmpul gravitaţional trebuie atunci descris nu de un potenţial monocomponent φ, ci de o funcţie de undă cu 10 componente $g_{\mu\nu}$, care formează un tensor simetric

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu};\quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{1.10}$$

Tensorul cîmp-gravitaţional, coincide, în acest caz, cu tensorul metric, simetric:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\mathrm{metric}} \tag{1.10'}$$

care caracterizează distanţele în spaţiu, şi geometriceşte exprimă de fapt şi curbura spaţiului cvadridimensional, ca toate proprietăţile lui legate de categoria de distanţă. În această echivalenţă constă tot specificul teoriei einsteiniene a gravitaţiei, care nu are analogie cu nici o altă teorie de cîmp. Această geometrizare a gravitaţiei reprezintă totodată şi limitele concepţiei relativiste.

În general, toate cîmpurile gravitaţionale obişnuite sînt slabe, aşa că curburile spaţiu-timpului sînt mici. Atunci componentele potenţialului gravitaţional (şi în acelaşi timp curbura) pot fi considerate ca fiind date de valorile pseudoeuclidiene $g^0_{\mu\nu}$, constante, la care se adaugă corecţiile mici $h_{\mu\nu}$ (de patrat neglijabil)

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{(covariante)}, \tag{1.11}$$

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - h_{\mu\nu} \quad \text{(contravariante)}, \tag{1.12}$$

$$g^0_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Potenţialul newtonian apare în concepţia clasică-relativistă ca una din componentele timpului slab, anume partea aşa-numită "temporal-temporală" (după caracterul indicilor săi):

$$\varphi = c^2 \frac{h_{44}}{2}. \tag{1.14}$$

Cîmpul slab, $h_{\mu\nu}$, se comportă faţă de transformări liniare ca un tensor simetric; el poate fi scris condensat sub următoarea formă

$$\begin{gathered} h = e_\mu h_{\mu\mu}\,;\; h^{\mu\nu} = e_\mu . e_\nu . h_{\mu\nu}\,; \\ g^0_{\mu\nu} = e_\mu . \delta_{\mu\nu}\,;\; \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases};\; \sqrt{-g} = 1 + h \end{gathered} \tag{1.15}$$

(g = determinantul format cu mărimile potenţialului "metric"). În expresie se folosesc următoarele mărimi cu proprietăţi asemănătoare versorilor $e_1 = e_2 = e_3 = -1$; $e_4 = +1$ (fiind un fel de versori, aceste simboluri ale geometrului Eisenhardt au indicii insumabili). Esenţa concepţiei relativiste asupra gravitaţiei constă în "metrizarea" ei. Potenţialul gravitaţional are deci caracterul unui potenţial geometric, "metric".

D. INFLUENŢA GRAVITAŢIEI ŞI RADIAŢIA GRAVITAŢIEI

Deşi cîmpul gravitaţional are o esenţă aparte, metrică, la fel ca şi în cazul celorlalte cîmpuri se pun două probleme fundamentale: descrierea acţiunii cîmpului gravitaţional asupra materiei, şi descrierea generării (a radierii) cîmpului gravitaţional de către materie. Modificatoare a geometriei lumii, gravitaţia nu este mai puţin un efect legat de materie, o formă a ei de manifestare, de interacţie, care se transmite altor corpuri, totodată îşi pune amprenta pe structura spaţiului, pe curbura sa.

Soluţia primei probleme este de fapt foarte simplă datorită geometrizării gravitaţiei. Din acest motiv este suficient numai a scrie lagrangeanul care descrie mişcarea liberă a particulei (sau a unor cîmpuri fizice) sub forma general-covariantă (adică în coordonate curbilinii cvadridimensionale, generale). Aceste coordonate geometrice sînt date prin coeficienţii metricei, $g_{\mu\nu}$, entitate intrinsecă a spaţiului metric, adică mai fizic prin potenţialele gravitaţionale. Aceşti coeficienţi geometrici descriu simplu toată acţiunea cîmpului asupra unei particule a cărei ecuaţie de mişcare liberă (fără perturbarea gravitaţiei), se cunosc.

Apar în aceste scrieri generalizate (uneori încărcate de simboluri indici, şi deosebit de ample), termeni în plus faţă de cazul pseudoeuclidian : ei sînt tocmai corespunzătorii interacţiunii cîmpului gravitaţional cu acea particulă, sau cu acel cîmp. Pentru un cîmp slab, în aceste expresii general covariante, se pun numai valorile aproximative $g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ simplificîndu-se considerabil lectura şi scrierea expresiilor. Atunci, termenii suplimentari descriu interacţia cu cîmpul slab.

Radiaţia gravitaţională, comportă, ca soluţionare, dificultăţi mai mari, şi teoria relativităţii generalizate a arătat că ecuaţiile "de undă" sînt complicatele ecuaţii neliniare ale lui Einstein. Cele zece potenţiale sînt legate între ele prin relaţii diferenţiale a căror scriere arată astfel

$$\boxed{\mathfrak{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{R} = - 8\pi\varkappa \mathfrak{T}_{\mu\nu}} \, . \tag{1.16}$$

În membrul drept se află tensorul $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$, care determină densitatea răspîndirii întregii materii, $\varkappa$ constanta gravitaţională, $\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ tensorul de curbură binecunoscut din geometria spaţiilor curbe (de pildă chiar la suprafaţă). El este o mărime cu caracter tensorial, formată din derivatele lui $g_{\mu\nu}$ în raport cu coordonatele şi timpul $\partial g_{\mu\nu}/\partial x_r$ etc. $\mathfrak{R}$ este scalarul provenit după însumarea indicilor μ şi ν din acelaşi tensor de curbură. Aşadar nişte ecuaţii suficient de complicate, conţinînd derivatele potenţialelor.

Datorită caracterului neliniar şi a tratării tensorilor în forma lor general-covariantă este necesară la tot pasul folosirea analizei tensoriale. Din aceste motive, adiacente la importanţa excepţională a problemei, teoria gravitaţională s-a expus mai adesea în monografii de mare renume : P. Bergmann, *Introducere în teoria relativităţii*, A. Eddington, *Teoria relativităţii*, 1934 ; L. Landau-E. Lifşiţ, *Teoria polea*, 1948, W. Pauli, *Teoria relativităţii*, R. Tolman, *Relativity, Thermodinamics and Cosmology*, Oxford 1934 ş.a.

Cîmpul gravitaţional fiind în deobşte slab, ecuaţiile lui se pot da în aproximaţia liniară. Asta înseamnă de fapt o eludare a caracterului intrinsec neliniar al cîmpului gravitaţional. Exprimarea cîmpului gravitaţional slab $h_{\mu\nu}$, se poate face în perfectă analogie cu celelalte cîmpuri : electromagnetic, mezonic, precum şi cu alte cîmpuri. În felul acesta se păstrează într-o bună aproximaţie caracterul pseudoeuclidian al metricei şi deci energia de interacţie a cîmpului slab cu orice particulă sau cîmp. Energia de interacţie a oricărui cîmp sau particulă cu cîmpul gravific slab se poate atunci cunoaşte construind după regula generală lagrangeanul care să ţină seama de legătura cîmpului (sau a particulelor) cu cîmpul gravitaţional, slab. Pentru cîmpuri puternice, măcar în principiu, problema se soluţionează făcînd apel la ecuaţiile einsteiniene.

II. CARACTERUL CUANTIC AL CÎMPULUI GRAVITAŢIONAL

A. CUANTIFICAREA GRAVITAŢIEI

Urmînd analogul celorlalte cuantificări ale cîmpurilor, s-a procedat la cercetarea cîmpului gravitaţional: W. Pauli şi M. Fierz, Proc. Roy. Soc., 1939. Pentru ca să se poată aplica formalismul cuantificării, era absolut necesar să se cunoască structura matematică a funcţiilor de cîmp şi a ecuaţiilor de cîmp, date, desigur, de teoria clasică relativistă einsteiniană. Ecuaţiile lui Einstein fiind neliniare, apare, după cum am mai spus, o dificultate în calea cuantificării, principiul suprapunerii ne mai fiind valabil. Formalismul se poate însă aplica în cazul cîmpului gravific slab şi aşa s-a şi făcut.

Acesta, după cum s-a văzut, are 10 componente. Ele se denumesc în mod distinct şi au funcţii fizice specifice, h_{44} se zice temporal-temporală, sau componentă longitudinal-longitudinală. Mai rămîn apoi h_{4n} şi h_{nk}, $n = 1, 2, 3$. Componentele h_{4n} se zic longitudinal-transversale şi h_{nk} transversal-transversale. Printr-o transformare infinit de mică de coordonate se poate face ca într-o undă plană gravitaţională $g_{\mu\nu}$, cu zece componente purtînd denumirile de mai sus, să fie diferite de zero numai două componente transversal-transversale. Numai acestea au un sens fizic nemijlocit (etalonarea potenţialului).

Radiaţia gravitaţională slabă aşa cum rezultă din ecuaţiile acesteia constă din unde plane care au numai părţile h_{nk}, transversal-transversale. Aşadar analog cu undele radiaţiei electromagnetice. Aceste componente în număr de 6, h_{nk}, satisfac o ecuaţie a undelor de tip elastic şi electromagnetic : o ecuaţie D'Alembert.

$$\boxed{\Box\, h_{nk} = 0}\,. \tag{2.1}$$

Operatorul cvadridimensional al derivatelor de ordinul doi care generalizează laplaceanul este d'alembertianul

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3} + \frac{\partial^2}{\partial x_4}\,. \tag{2.1'}$$

Între componentele h_{nk}, 6 la număr, există următoarele relaţii

$$\frac{\partial h_{nk}}{\partial x_n} = 0\,; \quad h = h_{11} + h_{22} + h_{33} = 0. \tag{2.2}$$

În felul acesta partea transversal-transversală are de fapt numai două componente independente. Încă o dată : acest rezultat se obţine printr-o transformare infinitezimală de coordonate, aplicată celor 10 componente gravitaţionale slabe, caz particular al ecuaţiilor einsteiniene, şi ţine de teoria clasică relativistă a gravitaţiei.

Sensul fizic al cuantificării acestor ecuaţii clasice constă din asocierea la undele gravitaţionale a unor cuante, aşa-numiţii gravitoni. Aşadar clasic, conform cu prevederile timpurii ale lui Goliţin şi Poincaré, cîmpul gravitaţional se propagă cu viteza luminii, şi corpurile mobile emit şi ele unde gravitaţionale. Aceste unde au, ca orice entitate fizică, un caracter dual, cuantic. După ce s-au obţinut ecuaţiile ce descriu diverse particule, ele se supun celei de-a doua cuantificări, ceea ce va face ca fiecărei stări de undă să i se asocieze gravitonul său. În acelaşi timp se pune problema relativistă a transformării reciproce a particulelor.

Din punctul de vedere al teoriei cîmpului din această etapă, este întîi de toate esenţial caracterul tensorial al funcţiei de undă : funcţiile de tip tensorial fiind (conform cu tezele generale ale mecanicii cîmpului) asociate mişcări microparticulelor cu un moment cinetic intrinsec (spin), întreg (Bosoni). În mecanica cuantică a cîmpurilor s-au studiat matematic cîmpuri scalare (pur academice ; teoretice) şi pseudoscalare, adică tensori de ordinul zero, cîmpuri tensoriale de ordinul 1, dintre care cel vectorial corespunde mezonilor şi în particular fotonilor, iar cel pseudovectorial ar trebui să aibă o particulă de asemenea cu spinul 1. Mai departe, ridicînd ordinul tensorial se cercetează matematic cuantizarea cîmpului format dintr-un tensor simetric de ordinul 2 ; spinul său va fi 2, în unităţi $h/2\pi$. Cu alte cuvinte cînd masa de repaus a microparticulelor asociate unui astfel de model de cîmp ar fi luată zero (ca şi în cazul fotonilor), ecuaţiile microparticulelor cu spinul 2 vor coincide cu cele ale cîmpului gravitaţional slab (liniar). Deci cuantificarea cîmpului gravitaţional slab conduce la gravitoni cu spinul 2 şi masa de repaus nulă, la fel cum cuantificarea ecuaţiilor lui Maxwell duce la fotoni, cu spin 1 şi masa de repaus nulă.

Aşadar independent de teoria relativităţii generale, ecuaţiile liniare de tipul celora ce descriu un cîmp gravitaţional slab tot ar fi fost introduse în mod firesc în fizică. Ecuaţiile celorlalte cîmpuri fizice erau însă liniare, am zice chiar principial liniare, şi într-o anumită fază a fizicii exista o singură excepţie : ecuaţiile Einstein. S-a făcut însă observat faptul că datorită transformării reciproce a tuturor microparticulelor şi cîmpurilor, toate ecuaţiile cuantice relativiste de cîmp trebuie să descrie în cele din urmă efecte neliniare, care nu se află în termenii interacţiei, nu se obţin din simpla superpoziţie (difuzie lumină pe lumină, adică interacţia fasciculelor optice, difuzie mezon pe mezon etc.).

S-a arătat că se pot obţine ecuaţii neliniare pentru microparticule cu spin 2 ca de altfel pentru toate celelalte microparticule pe baza concepţiilor moderne asupra vidului. Problema dacă termenii neliniari trebuie incluşi direct în ecuaţiile de cîmp sau dacă efectele neliniare trebuie calculate pornind de la ecuaţii liniare a rămas deschisă în această fază istorică de dezvoltare a atomismului de tip cuantic. Pare mai natural, mai fizic, ca neliniaritatea să se introducă în însăşi ecuaţiile cîmpului (Heisenberg, Ivanenko, L. de Broglie, ş.a.). Ar urma atunci o încadrare firească şi a ecuaţiilor oarecum de excepţie ale lui Einstein în sistemul general al ecuaţiilor teoriei cuantice moderne a cîmpului. Caracterul specific al gravitaţiei rămîne prezent şi pe această treaptă de cunoaştere, căci numai în acest caz fizic mărimile ce descriu un cîmp oarecare, $g_{\mu\nu}$, pot caracteriza simultan şi proprietăţile gometrice ale spaţiului. Neliniaritatea ca margine superioară a programului de investigaţie pe care poate să-l mai realizeze fizica cuantică fără de alte îmbogăţiri mai revoluţionare, unifică, ca mod de manifestare, gravitaţia cu alte forme ale materiei, dar nu-i stirbeşte şi nici nu-i explică caracterul ei straniu geometric.

B. INFLUENŢA GRAVITAŢIEI ASUPRA MIŞCĂRII MICROPARTICULEI

Influenţa gravitaţiei asupra mişcării particulei (sau a microparticulei cuantice) trebuie să pună în evidenţă efecte noi, care în principiu se manifestă la fel cu modificarea introdusă de gravitaţie asupra materiei clasice. Aşadar ecuaţiile cuantice-relativiste de undă se scriu în coordonate generale a căror metrică se particularizează de obicei pentru cazul gravitaţiei foarte slabe. Acest lucru este valabil deci şi pentru cîmpul cuantic relativist fundamental, cîmpul Ψ, a cărui propagare este descrisă de ecuaţia fundamentală, binecunoscuta ecuaţie a lui Klein. Microparticulele ataşate lui Ψ au în general o masă de repaus finită ($k_0^2 \neq 0$). La fotoni $k_0^2 = 0$, şi regăsim ecuaţia de ordinul doi a undelor :

$$(\nabla_\mu \nabla_\mu - k_0^2)\Psi = 0. \tag{2.3}$$

Această ecuaţie de ordinul doi dedusă (postulată) prin operaţionalizarea obişnuită (cunantificarea deci) a relaţiei pătratice relativiste dintre energie şi impuls, trebuie scrisă în coordonate curbilinii-generale în care Ψ este în mod fizic o entitate invariantă. Operatorul laplacean $\nabla_\mu \nabla_\mu = \triangle$ îşi capătă scrierea sa generalizată atît de uzuală. În această exprimare apar derivatele de ordinul 1 ale componentelor $g_{\mu\nu}$ sub forma aşa-numitelor simboluri ale lui Christoffel, indispensabile la transcrierile covariante. Ecuaţia fundamentală a teoriei cuantice-relativiste a cîmpului se prezintă astfel în coordonate generale

$$(-g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + g^{\mu\nu} \{\mu\nu, \alpha\} \nabla_\alpha - k_0^2)\Psi = 0. \tag{2.4}$$

Simbolurile lui Christoffel sînt

$$\{\mu\nu, \alpha\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right). \tag{2.5}$$

Pentru un cîmp slab constînd dintr-o parte transversală efectiv radiabilă, h_{nk}, se vor pune pentru $g^{\mu\nu}$ valorile de cîmp slab şi radiat ($g^{\mu\nu}$ şi $\nabla_\mu \nabla_\mu$, se simplifică considerabil). Ecuaţia de bază ia forma

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right) \Psi = U \Psi} \,. \tag{2.6}$$

Mărimile U_1 şi U_2 sînt termeni care apar făcînd amintita transformare $U = U_1 + U_2;$

$$
\begin{aligned}
&U_1 = - h_{ns}.\nabla_n \nabla_s \\
(2.7) \qquad &U_2 = - (\nabla_s h_{ns} h_{nk}) \nabla_k - \frac{1}{4} e_\alpha (\nabla_\alpha h_{ns} h_{ns}) \nabla_\alpha,
\end{aligned}
$$

(e_α = simbolurile de mai înainte).

Această tratare generală descrie mişcarea microparticulelor în prezenţa gravitaţiei. Prin introducerea coordonatelor curbilinii cvadridimensionale şi a derivatei covariante formate cu ajutorul lui $g_{\mu\nu}$, se obţin obişnuitele ecuaţii ale particulelor şi cîmpurilor care se descriu în general prin tensori obişnuiţi, de ordin întreg (aplicarea calculului diferenţial zis absolut). Aceşti tensori de undă, daţi în forma lor general covariantă, sînt scalari, vectori, tensori de ordinul 2 antisimetrici etc, ceea ce fizic, aşa cum a arătat teoria generală a cîmpurilor cuantice, reprezintă în imaginea corpusculară numai un anumit grup de microparticule. Anume cele cu spin întreg (particule Bose). Dimpotrivă, microparticulele asociate cîmpului spinorial şi care au un spin neîntreg, neavînd un analog clasic direct, scrierea lor în coordonate curbilinii generale (care indică şi efectul cu gravitaţia), necesită un studiu suplimentar. În esenţă un spinor este un semivector : tensor de ordinul 1/2 şi el este o funcţie de 4 coordonate asupra căruia acţionează operatorul lui Dirac. Acesta apare din liniarizarea ecuaţiei pătratice a lui Klein, şi constituie tocmai punctul de plecare la stabilirea ecuaţiei Dirac-iene ! (despicarea).

Cum se va scrie deci spinorul în coordonate curbilinii ? Desigur că tot printr-o factorizare, adică printr-o descompunere a lui $g_{\mu\nu}$. Forma general covariantă cerută de prezenţa gravitaţiei pentru ecuaţia Dirac se face folosind nişte matrici Dirac γ, dar generalizate în chip firesc şi anume prin descompunerea lui $g_{\mu\nu}$ (Fock-Ivanenco, ş.a.). Matricile Dirac generalizate satisfac anumite condiţii : ele sînt rădăcinile pătratice (suigeneris, operaţionale) ale componentelor $g_{\mu\nu}$. Definiţia lor exactă a rezultat din însăşi noţiunea de covariantă a despicării (a liniarizării) :

$$(2.8) \qquad [\gamma^\mu.(\nabla_\mu - \Gamma_\mu) - ik_0]\Psi = 0, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Ca de obicei $\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, derivată parţială, adică nabla ; Γ_μ = coeficienţii care caracterizează transportul paralel ; $\nabla_\mu - \Gamma_\mu$ = modificarea fizică care are loc pentru mărime în spaţiul fizic curb, sau altfel spus abaterea variaţiei de la simpla derivată pe direcţie, pricinuită de structura geometrică curbă. Ecuaţia (2.8) arată limpede că ea este un ''radical'' (termeni operaţionali de gradul 1) al ecuaţiei pătratice a lui Klein. Aceasta este însăşi ideia care a condus la ecuaţia Dirac în coordonate carteziene.

În cazul existenţei gravitaţiei, matricile γ_μ (definite în (2.8)) spre deosebire de matricile Dirac propriu-zise formate din elemente numerice simple ± 1 $\pm i$ nu mai sînt constante (pseudoeuclidiene) ; ele trebuie să reprezinte funcţii de timp şi spaţiu. Ele satisfac la condiţia

$$(2.9) \qquad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu},$$

care arată că de la ecuațiile despicării (2.8) trebuie să se ajungă prin dubla operaționalizare (ridicare la pătrat) la ecuația pătratică (2.6) kleiniană. În felul acesta mărimle γ_μ sînt fundamentate.

Pentru cîmpurile slabe, $g^{\mu\nu}$ luînd forme mai simple,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \simeq 2e_\mu . \delta_{\mu\nu} - 2e_\mu e_\nu . h_{\mu\nu} . \tag{2.10}$$

Se poate exprima rezultatul și cu ajutorul vectorului cîmpului slab gravitațional h_μ (2.10):

$$\gamma^\mu = \gamma_0^\mu - h^\mu , \tag{2.11}$$

unde γ_0 sînt matricile Dirac obișnuite, numerice, constante

$$\gamma_0^\mu \gamma_0^\nu + \gamma_0^\nu \gamma_0^\mu = 2e_\mu \delta_{\mu\nu} . \tag{2.11'}$$

Atunci se arată că, cu această condiție de compunere pentru γ^μ, cîmpul gravitațional variabil, vector, se poate da pînă la urmă sub forma

$$h^\mu = \frac{1}{2} \gamma_0^\lambda . e_\mu . h_{\mu\lambda} , \qquad (\mu\lambda = 1, 2, 3, 4). \tag{2.12}$$

Scrierea ecuațiilor de mișcare ale unui cîmp fizic oarecare spinorial de pildă, are înainte de toate un interes principial: se ține seama de acțiunea gravitației asupra electronului cuantic, deși se înțelege că efectele care apar sînt infime. Transcrierea reprezintă și soluționarea unei probleme de interes practic, anume aceea de a scrie ecuația lui Dirac (și altele) în coordonate curbilinii, ceea ce poate fi util la integrarea ei.

C. CÎMPUL GRAVITAȚIONAL CUANTIFICAT

Cuantificarea, în extenso, a cîmpului gravitațional se face asemănător cu cea a cîmpului de Broglie scalar, sau cu cea a spinorialului. Ea reprezintă modul de a se mișca al microparticulei asociate, al entității ipotetice numită graviton (un foton gravific). Cîmpul neliniar nu poate fi cuantificat de două ori pornind de la principiul suprapunerii: problema neliniarității pusă din nou în microfizică. Cuantificarea ordinară se poate face nestînjenit pentru cîmpul slab, liniarizat.

Studiul cîmpului gravitațional slab se întreprinde pornind de la expresia generală a lagrangeanului: un invariant cît mai simplu format din componentele cîmpului $g_{\mu\nu}$ (în coordonate generale însă). Acest lagrangean se cunoaște din teoria clasică-relativistă și se știe că rezultate concordante cu experiența se capătă pornind de la termeni care să nu cuprindă decît derivate de ordinul cel mai mic ale componentelor $g_{\mu\nu}$ (de ordinul întîi), date în forma general covariantă (deci apar chiar simbolurile christoffeliene)

$$\mathfrak{L} = \frac{c^4}{16\,\pi} \cdot \frac{1}{\varkappa} . g^{\mu\nu} . \sqrt{-g} (\{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\} \{\alpha\beta, \beta\}). \tag{2.13}$$

Aici

$$\{\alpha\beta, \beta\} = \nabla_\alpha . \sqrt{-g} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} . \sqrt{-g} \tag{2.14}$$

adică o derivată, un gradient în coordonate generalizate. Din acest lagrangean s-a obţinut pe cale variaţională imaginea cîmpului clasic (teoria relativităţii generalizate).

Pentru cîmpul gravitaţional slab, toate expresiile se simplifică. În plus cîmpul efectiv fizic fiind redus doar la cel transversal-transversal, se poate face o anumită etalonare, astfel ca $h = e_\mu h_{\mu\mu} = 0$, aşa că se îndepărtează componentele longitudinale formale, rămînînd doar partea transversal-transversală. Considerînd în particular unde gravitaţionale, în propagare de-a lungul axei $x_1 = x$ din corelaţiile date între componentele $h_{\mu\nu}$ se vede că vor fi diferite de zero doar 2 componente. Lagrangeanul cîmpului slab al unor astfel de unde gravitaţionale va fi

$$(2.15) \qquad \mathfrak{L} = \frac{c^4}{64\,.\,\pi\varkappa} \sum\nolimits_{\mu\nu=3,2} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Proprietăţile fizice ale cîmpului (deocamdată necuantificat) se obţin prin aplicarea consecventă a formalismului obişnuit al teoriei cîmpului : aici cîmpul gravitaţional transversal. Reamintim etapele : formarea tensorului-energie-impuls, desprinderea din el a densităţii de energie şi a vectorului densitate de impuls al cîmpului, momentul cinetic al cîmpului liber, spinul. Rezultatele se cunosc din teoria clasică. Densitatea de energie este ca de obicei componenta temporală a tensorului energie-impuls :

$$(2.16) \quad \mathfrak{T}_{44} = \mathfrak{L} - g_4^{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_4^{\alpha\beta}}; \; g_4^{\alpha\beta} = \nabla_4 \cdot (\sqrt{-g} \,.\, g^{\alpha\beta}) = - e_\alpha e_\beta \frac{1}{c} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t}.$$

Deci

$$(2.17) \qquad \boxed{\mathfrak{T}_{44} = \frac{c^4}{64\,\pi\varkappa} \cdot \sum_{\mu,\nu=3,2} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right]}.$$

În acord cu teoria generală, densitatea de energie a cîmpului gravitaţional care se descrie prin tensori şi nu prin spinori, este pozitiv definită, ceea ce are consecinţe primordiale în cuantificare. La fel se calculează şi spinul urmînd regula generală a formalismului de cîmp. Întrucît funcţia de undă are mai multe componente, de la început se vede că spinul diferă de zero. Tratarea cuantificării se face introducînd suprapunerea de stări (adică descompunerea în stări spectrale) considerînd apoi amplitudinile descompunerii nu ca mărimi simple, ci ca operatori ce acţionează asupra funcţiei de undă, şi introducînd în legătură cu aceste amplitudini operatorii privind numerele de gravitoni. O astfel de teorie cuantică afirmă că spinul gravitonului asociat undei de gravitaţie este de 2 ($2h/2\pi$). Aşadar un spin întreg corespunzător densităţii de energie pozitiv definită a unui cîmp de natură tensorială = cîmpul fotonic maxwellian, era vectorial şi fotonul avea spinul 1 ca şi cîmpul mezonic vectorial al lui Proca. Obiectul cuantic, gravitonul, este astfel prevăzut, şi descris printr-o metodică analogă cu aceea prin care s-a cuantificat de două ori cîmpul fotonic sau electrono-pozitronic. Cu aceasta programul de investigaţie al cuantizării se şi află în fapt istovit, redus la propriile sale limite, care sînt borne dintr-o graniţă largă marcînd evoluţia fizicii.

III. RADIAȚIA GRAVITAȚIONALĂ CUANTICĂ

A. EMISIA DE UNDE GRAVITAȚIONALE

Teoria relativității a subliniat că trebuie să existe o undă de gravitate. Așadar corpurile cu sarcini gravitaționale trebuie să emită ''fotoni'' gravifici, la fel cum sarcinile electrice o fac sub forma fotonilor obișnuiți, ''electromagnetici''. Esența mecanismului procesului ar fi aceeași. Radiația gravitațională, atît clasică cît și cea cuantificată, are însă un caracter deosebit de cea electromagnetică. Spre deosebire de radiația electromagnetică (sau cea a cîmpului mezonic vectorial al lui Proca), ''radiația grea'' are un caracter cvadripolar, în timp ce precedentele sînt esențial dipolare. Această constatare se obține prin cercetări asupra radiației făcute în mod asemănător.

În electrodinamica clasică valoarea energiei radiate este determinată de pătratul accelerației momentului dipolar, pentru sistemul simplu dar important al dipolului. În tratarea cuantică momentul dipolar se înlocuiește prin elementul de matrice al tranziției dintre două stări, conform cu principiul de corespondență :

$$(3.1)\qquad -\frac{\mathrm{d}U^{\text{electr}}_{\text{clasic}}}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\cdot\ddot{\vec{r}}^{\,2}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,.\,\omega^4\,.\,\vec{r}^{\,2}\,.$$

În general un sistem de sarcini electrice are drept cîmp radiat pe acela al cărui potențial (vector) și este dat în primă aproximație de termenul dipolar al sistemului. Această aproximație este și hotărîtoare și ea se referă la cazul extinderilor destul de mici în raport cu lungimea de undă emisă și pentru viteze destul de mici ($R \ll \lambda$; $V \ll c$). Pentru sistemul clasic, sau pentru microparticule, care ar avea o aceeași sarcină specifică

$$\begin{array}{l|l|} (3.2) & \dfrac{e_1}{m_1}=\dfrac{e_2}{m_2}=\ldots\dfrac{e}{m}=\text{const}\,; \\ (3.2') & \qquad\qquad\qquad\qquad -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=0 \end{array}$$

accelerația momentului dipolar este nulă, deși radiația dipolară lipsește :

$$(3.3)\qquad \vec{p}=\sum e_i\vec{r}_i=\frac{e}{m}\sum m_i\vec{r}_i=\frac{e}{m}\vec{r}_0 M,$$

$\vec{r}_0$ = raza vectoare a centrului de inerție, M masa totală. Cum întotdeauna se poate lua geometricește $\vec{r}_0=0$, rezultă că $\vec{p}\equiv 0$. Altfel zis, radiația dipolară nu va exista dacă centrul de inerție este fix, sau dacă el se mișcă uniform, $\ddot{\vec{r}}_0=0$, deci dacă sistemul are o strînsă simetrie (această problemă interesează emisia γ din nuclee).

Atunci interesează termenii următori din dezvoltarea potenţialului vectorial al cîmpului. Ei survin cînd radiaţia dipolară este nulă (asimetrie a sistemului), sau cînd sînt luate în consideraţie şi dimensiunile sistemului $(r \sim \lambda)$, sau a corecţiilor cu caracter relativist $\left(\frac{V}{c} \sim 1\right)$. Atunci radiaţia este determinată de momentul electric cvadrupolar şi de momentul dipolar magnetic. Acest rezultat, dintre cele mai bine cunoscute, subzistă şi în tratarea cuantică prin ”matricializarea” momentelor. Binecunoscuta teorie din electrodinamică conduce la

$$\frac{-\mathrm{d}U^{\text{electr}}_{\text{clasic}}}{\mathrm{d}t} \sim \frac{e^2}{c^5} \cdot \dddot{Q}^2 \sim \frac{e^2 x^4}{c^5} \cdot \omega^6, \tag{3.4}$$

unde

$$Q \equiv Q_{nk} = \sum_{nk=1,2,3} (3x_n . x_k - \delta_{nk} . r^2) \tag{3.4'}$$

este tensorul momentului cvadrupolar al distribuţiei. Raportul dintre intensitatea radiaţiei cvadrupolare şi cea dipolară, este în cazul electromagnetic, ca ordin de mărime, egal cu

$$\boxed{\frac{e^2 . \ddot{Q}^2/c^5}{e^2 \ddot{r}^2/c^3} \sim \frac{1}{c^2}\, \omega^2 . x^2} . \tag{3.5}$$

La fel a fost atacată problema şi în cazul radiaţiei gravitaţionale deşi calculele apar mai extinse, tocmai datorită cvadrupolarităţii. Analog cu potenţialul de tip electrostatic, potenţialul gravitaţional generat de o distribuţie de mase se pune sub forma unei sume

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \tag{3.6}$$

φ_0 este potenţialul obişnuit, condiţionat de masa totală a sistemului, φ_1 este potenţialul de tip dipolar, adică al unui sistem de două mase grele, care, de fapt, nu pot fi afectate de un semn al sarcinei. Acest termen este nul întotdeauna în cazul gravitaţiei, căci raportul dintre sarcina gravitaţională (analogul lui e/m), este acelaşi pentru toate cazurile

$$. \frac{\sqrt{x}.m}{m} = \sqrt{\varkappa}. \tag{3.7}$$

Potenţialul φ este determinat în mod hotărîtor de cvadrupolul distribuţiei de mase, termen care va consta din derivate de ordinul doi în dezvoltarea generală serială (cîmpuri intens-neomogene)

$$\boxed{\varphi_0 = -\frac{\varkappa m}{r};\ \varphi_1 = 0;\ \varphi \simeq \varphi_2 \sim \varkappa m Q_{nk} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_k} \cdot \frac{1}{r}} . \tag{3.8}$$

De aceea în timp ce radiaţia electromagnetică are în general un caracter dipolar şi capătă un caracter cvadrupolar în cazuri speciale, radiaţia gravițională a cîmpului slab, analogul celeia electromagnetice este de fapt întotdeauna cvadrupolară. Teoria ei conduce la următoarea energie disipată. Rezultatul (ca de altfel și demonstrația) este cu totul analog cu cazul electro-electromagnetic ($\sqrt{\varkappa m}$ analog cu e).

$$\boxed{\frac{-\mathrm{d}U^{\text{grav.}}_{\text{clas}}}{\mathrm{d}t} \sim \frac{\varkappa\,.\,m}{c^5}\dddot{Q}^2} . \tag{3.9}$$

Cuantificarea (făcută în același mod) a acestor rezultate confirmă constatarea că gravitația are o structură cvadrupolară a radiației, mărimea de cvadrupol clasic înlocuindu-se cu elementul său de matrice respectiv conform cu spiritul general în care se fac trecerile de la relațiile clasice la cele cuantice.

B. INFLUENȚA RADIAȚIEI GRAVITAȚIONALE ASUPRA MIȘCĂRII MASEI

Mișcarea unei particule grele se face și ea ca și a celei electrice în autocîmpul gravitațional radiat de ea. Este fenomenul de frecare de radiație a masei, binecunoscut în electromagnetism, unde condiționează lărgimea liniei spectrale (reacția electronului). Aplicînd ca acolo bilanțul de energie și forță (energie cinetică și radiativă pe seama mișcării și reacțiunii), se obține în gravitație forța de frecare (amortizarea prin gravitație). La fel cu forța de frecare electromagnetică, forța se introduce în ecuația de mișcare, modificîndu-i efectul; cel puțin în principiu.

Teoria corespunzătoare a arătat că forța aceasta de frecare radiativă este egală cu derivata a cincea în raport cu timpul a momentului cvadrupolar, față de derivata a treia din cazul electromagnetic-dipolar. În loc de

$$\mathfrak{F}_{\text{el}} \sim \frac{e^2}{c^3}\,\omega^3 x \sim \frac{e^2}{c^3}\dddot{x} \tag{3.10}$$

va fi acuma

$$\mathfrak{F}_{\text{grav}} \sim \varkappa\frac{m^2}{c^3}\,\omega^5\,.\,x^3 \sim \varkappa\frac{m^2}{c^5}\cdot(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x^3}). \tag{3.11}$$

Așadar o frînare sensibilă numai la o ”accelerație” deosebită, la o variație extrem de rapidă în timp a poziției (o accelerație de ordin superior).

Radiația energiei gravitaționale s este infimă, așa că amortizarea mișcării prin autofrecvență-frecare gravitațională are un aspect doar teoretic. Cu toate că frecvențele de oscilație sînt mari, în cazul particulelor de la scară atomică, efectele sînt infime datorită maselor mici. Aceiași situație se petrece și la scară astronomică, întrucît aici în ciuda maselor enorme, frecvențele de oscilație sînt foarte reduse. Acesta este cazul stelelor duble, care se rotesc una în jurul celeilalte. Astfel în cazul stelelor duble frecvența poate fi de ordinul $\omega \sim 10^{-3}$, masa $m \sim 10^{32}$, iar raza mișcării de ordinul $r \sim 10^{11}$ (C.G.S.). Energia radiată gravific $-\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$, constituie abea 10^{-20} din cea proprie, și în această etapă a fizicei, nu poate fi din păcate, decelată.

C. TRANSFORMAREA CUANTICĂ A GRAVITAŢIEI

Rezultatul cel mai interesant al concepţiei cuantice relativiste preliminare asupra cîmpului gravitaţional constituie prevederea posibilităţii principiale de transformare a cîmpului gravitaţional în particule elementare, şi reciproc. De pildă transformarea a două sarcini electron-pozitron în doi gravitoni. Această constatare, neverificabilă în practică în această etapă a fizicii datorită secţiunilor eficace infime, are însă un mare înţeles principial şi reprezintă cu tot provizoratul cuantificării semnalate o deschidere de perspectivă.

În teoria clasică rezultatul ar părea paradoxal. În teoria cuantică el este consecinţa nemijlocită a dublei cuantificări. În fond gravitonii sînt creaţi de masele grele precum fotonii sînt creaţi de sarcinile electrice mobile. Teoria relativistă cuantică începînd cu Dirac a explicat în perfectă concordanţă cu experienţa posibilitatea şi desfăşurarea procesului formării perechilor dînd şi binecunoscutele formule pentru secţiunile eficace. În esenţă totul se petrece la fel ca şi în cazul cîmpului fotonic şi electronopozitronic doar că este vorba de un cîmp de o altă natură fizică, cel gravific. Şi cum sarcinile electrice au masa lor şi deci radiază fotoni gravitaţionali, există posibilitatea unor tranziţii gravitate-electricitate şi electricitate-gravitate la scară atomică.

Posibilitatea transformărilor gravitonilor în perechi electron-pozitron şi în fotoni cît şi a transmutaţiilor inverse a fost relevată de mai mulţi autori, în etapa fizicală de care ne ocupăm. Jordan a relevat pe baza unor consideraţii cu caracter general, posibilitatea transformării gravitaţiei în materie ''obişnuită''. Mai amintim apoi pe Ivanenko, Sokolov, Brodski Peer ş.a. Dacă influenţa forţelor gravitaţionale asupra proceselor atomice şi nucleare poate fi întotdeauna neglijabilă, se pune problema dacă nu există legături legice între fizica particulelor elementare, şi cosmologie unde gravitaţia este dominantă.

În istoria fizicii, în toate etapele ei asemenea legături macromicrocosm au fost dintotdeauna prezente, cosmosul fiind dacă nu încă un laborator de experimentare, dar un mare sistem în observaţie, şi în etapa atomismului relativist-cuantic cosmosul capătă o imagine de asemenea atomizată. Asemenea legături, referitoare la gravitaţie şi microparticule nu s-au stabilit în mod categoric în această etapă a fizicei atomice şi cosmice de care ne ocupăm, cu toate că prezenţa unei concentraţii preferenţiale de protoni, neutroni şi electroni în porţiunea cunoscută a universului în detrimentul antiparticulelor respective este un neîndoielnic fapt cosmologic. Cum cîmpul gravitaţional este posibil ca să aibă o metrică care să depindă de timp, această expansiune generală ar putea fi legată de concentraţia amintită de microparticule. Problema conturează şi ea marginile etapei istorice la care am ajuns cu expunerea noastră, şi anume aceea care anunţă pe viitor corelaţii temeinice între cosmos şi lumea atomistă.

Probabilitatea sau secţiunea eficace a unei astfel de transformări este extrem de mică în cazul unor cîmpuri gravifice slabe. În secţiune apare pătratul aşa-numitei "raze gravitaţionale"

$$\boxed{r_{\text{grav}} = \varkappa \frac{m}{c^2}} \tag{3.12}$$

în timp ce în formulele electrodinamicei cuantice pentru conversiunile electromagnetice, devenite un fapt obişnuit, figura pătratul razei electrice :

$$r_{\text{electr}} = \frac{e^2}{mc^2}. \tag{3.13}$$

Cuantic, mecanismul este analog cu cel al formării perechilor de fotoni în condiţiile legilor de conservare microscopică. Ordinul de mărime, şi cvadrupolaritatea modifică cantitativ lucrurile. În timp ce secţiunea de transformare a electronului şi pozitronului în doi fotoni, la viteze mici era dată de formula (aproximată) a lui Dirac

$$\sigma_{\text{electr}} \sim r_e^2 \cdot \frac{c}{V} \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \tag{3.14}$$

calculele conversiunii gravitaţionale duc la o expresie uşor diferită. Anume la

$$\sigma_{\text{grav}} \sim r_{\text{grav}}^2 \frac{c}{V} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4. \tag{3.15}$$

Formula exprimă secţiunea eficace ca aceeaşi pereche de mase electron şi pozitron să se transforme nu în doi fotoni, ci în doi gravitoni. În afară de înlocuirea razei electrice prin cea gravitaţională mai apare un factor cvadrupolar caracteristic $\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4$, în locul celuia dipolar din conversiunile electromagnetice (sau mezodinamica vectorială). Termenul $\frac{E}{mc^2}$ arată raportul dintre energia radiaţiei şi energia proprie a microparticulelor care se schimbă în ambele sensuri în radiaţie.

Evident în condiţii obişnuite, ($E < mc^2$), cîmpul este slab, şi probabilitatea unei astfel de transmutaţii gravitaţionale este cu totul infimă faţă de cea "obişnuită", cînd $E \sim mc^2$ indică pragul formării perechilor.

$$\boxed{\frac{\sigma_{\text{grav}}}{\sigma_{\text{electr}}} \sim \frac{r_g}{r_{\text{el}}} \sim 10^{-82}}. \tag{3.16}$$

Totuşi probabilitatea transformărilor gravitaţionale creşte foarte rapid cu creşterea energiei şi pentru valori $E \sim 10^{21} mc^2$ atinge ordinul de mărime al efectelor electromagnetice. Cum experienţa fizicii terestre şi cosmice din această etapă dispune de fapt de numai trei cîmpuri gravitaţionale (cel terestru, cel lunar şi cel solar) care trebuie considerate statice, în etapa cuantică relativistă a fizicii microscopice şi în cea premergătoare experienţelor de mare amploare din cosmos, problema undelor gravitaţionale şi a gravitonilor nu poate fi verificată.

Rezultatul are însă un evident răsunet principial deoarece datorită posibilităţilor transformărilor amintite se şterge deosebirea categorică dintre cîmpul gravitaţional şi alte cîmpuri şi microparticule, deosebire care a existat în toate concepţiile precedente asupra gravitaţiei. Aceasta îndeamnă la construirea unor noi teorii de felul celor unitare, dar de pe o altă temelie, mai bogată în fapte, în ipoteze noi menite să înlocuiască analogiile cuantice observate la un nivel relativ grosolan de granulaţie a materiei, şi care din lecţiile pe care ni le-a servit istoria fizicii nu se menţin la diferitele secţiuni de micime ale atomismului. Aşadar un îndemn la construirea regenerată a unor teorii unitare electricitate-gravitaţie-mezodinamică-atomism, şi reprezintă o primă sugerare asupra unui tablou mai general al structurii întregii materii alcătuită după imaginea cuantică din cîmpuri şi microparticule interschimbabile şi înzestrate neîndoios cu o bogată structură.

Primită la redacţie la 26 ianuarie 1965

Institutul politehnic Braşov

BIBLIOGRAFIE

1. A. Ahiezer-Bereţeţki, *Electrodinamica cuantică.* Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1960.
2. P.G. Borgmann, *Introduction to the theory of relativity.* New York, 1942.
3. P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford, 1935.
4. De Donder, *La gravifique einsteinienne*, Paris, 1921.
5. A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Ann. d. Phys., **49**, 760 (1916).
6. A. Einstein, *The meaning of relativity.* Princeton, 1955, ed. 4.
7. Б. А. Фок, *Теория пространства времени и тяготения.* Государственное издательство физ.-мат.-лит., Москва, 1961.
8. W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation.* Oxford, 1944, ed. 2.
9. D. Ivannenko, A. Sokolov, *Teoria clasică a cîmpului.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
10. Д. Иванненко, А.Соколов, *Квантовая теория полио.* Москва, 1952.
11. Kaluza, *Zum Unitäts-Problem der Physik.* J. Preuss. Akad. Wiss., 1921.
12. L. Landau, E. Lifshitz, *Teoria Cîmpului.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1963.
13. В. Паули, *Релятивистская теория элементарных частиц.* И. Л. 1947.
14. J.A. Schouten, *Ricci-Calculus.* Springer-Verlag, Berlin, 1954.
15. T. Vescan, *Fizica teoretică.* Bucureşti, 1960.
16. H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie.* Springer, Berlin, 1923.

METODA PENTRU DETERMINAREA CONDUCTIBILITĂȚILOR TOTALE ALE UNUI MULTIPOL

DE

ION TOMESCU

În [3] A.G. Lunț a dat o metodă pentru analiza funcționării unui multipol $\mathfrak{A}$ cu p noduri, asociindu-i matricea A de ordin p a conductibilităților directe și formînd șirul $\{A^r\}_{r \varepsilon N}$.

Există $n \leqslant p-1$ așa ca $A^n = \chi(A)$, matricea conductibilităților totale ale multipolului. O variantă a acestei metode constă în formarea șirului $\{A^{2^r}\}_{r \varepsilon N}$.

În lucrarea de față este dată o nouă metodă pentru determinarea conductibilităților totale ale unui multipol care conduce la rezultat cel puțin tot atît de repede ca metoda formării șirului $\{A^{2^r}\}_{r \varepsilon N}$ și este mai avantajoasă pentru programarea la un calculator electronic.

Se mai demonstrează că orice transformare care păstrează toate conductibilitățile totale ale unui multipol poate fi reprezentată ca un produs de transformări de tipul τ_1 și de tipul τ_2 și se dă o variantă a metodei în cazul matricilor simetrice.

I

Fie matricea conductibilităților directe $A = \{a_{mn}\}_{m,\, n\, =\, 1, \ldots,\, p}$ atașată multipolului $\mathfrak{A}$ cu p noduri (prin metoda matricială de reprezentare a schemelor dată de Lunț).

Matricea A are elementele de pe diagonala principală egale cu 1 și celelalte elemente funcții booleene de conductibilitățile asociate contactelor și elementelor redresoare ale multipolului $\mathfrak{A}$.

Notăm cu $\mathcal{C}_p$ mulțimea matricilor conductibilităților directe asociate multipolilor cu p noduri. Pe $\mathcal{C}_p$ definim operatorii $T_{ij}{}^{(k)}$ astfel : $T_{ij}{}^{(k)}(A) = B$ dacă $A = \{a_{mn}\}_{m,\, n\, =\, 1, \ldots,\, p}$ și $B = \{b_{mn}\}_{m,\, n\, =\, 1, \ldots,\, p}$ cu $b_{ij} = a_{ij} + a_{ik}\, a_{kj}$ și $b_{mn} = a_{mn}$ pentru $(m, n) \neq (i, j)$. (Operația „$+$" se mai notează într-o algebră booleană cu „$\bigcup$").

PROPOZIŢIA 1.1. Avem

$$T_{ii}^{(k)} = T_{ij}^{(i)} = T_{ij}^{(j)} = I \tag{1}$$

unde I este operatorul identic.

Rezultă că în mulţimea de operatori $\{T_{ij}^{(k)}\}_{i,\,j,\,k=1,\dots,p}$ există $3p^2 - 2p$ operatori egali cu operatorul identic.

PROPOZIŢIA 1.2. Avem

$$T_{ij}^{(k_1)}\, T_{ij}^{(k_2)} = T_{ij}^{(k_2)}\, T_{ij}^{(k_1)} \tag{2}$$

ceea ce rezultă din definiţia operatorilor $T_{ij}^{(k)}$.

Observaţie. Produsul înseamnă compunerea operatorilor în sensul că $UV(A) = U(V(A))$.

Introducem operatorii T_{ij} definiţi pe mulţimea $\mathcal{C}_p$ astfel :

$$T_{ij}(A) = B \text{ dacă } A = \{a_{mn}\}_{m,\,n=1,\dots,p} \text{ şi } B = \{b_{mn}\}_{m,\,n=1,\dots,p}$$

cu

$$b_{ij} = a_{ij} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,\,j}}^{p} a_{ik}\, a_{kj} \text{ şi } b_{mn} = a_{mn} \text{ pentru } (m, n) \neq (i, j).$$

Din definiţie rezultă că operatorii $T_{ii} = I$ pentru $i = 1, 2, \dots, p$.

PROPOZIŢIA 1.3. *Avem*

$$T_{ij} = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,\,j}}^{p} T_{ij}^{(k)} = \prod_{k=1}^{p} T_{ij}^{(k)}. \tag{3}$$

Din (2) rezultă că ordinea în care se face produsul este indiferentă ; fie de exemplu :

$$T_{ij} = T_{ij}^{(1)}\, T_{ij}^{(2)} \dots T_{ij}^{(p)} \tag{4}$$

şi notăm :

$$T = \prod_{\substack{i,\,j=1\\ i\neq j}}^{p} T_{ij} = \prod_{i,\,j=1}^{p} T_{ij}\,, \tag{5}$$

unde produsul se face într-o ordine arbitrară, dar fixată.

Considerăm şirul de matrici : $A, T(A), T^2(A), \dots, T^r(A), \dots$ cu $A \in \mathcal{C}_p$.

TEOREMA 1. $\chi(T^r(A)) = \chi(A)$ *pentru orice* $r \in N$ *şi* $A \in \mathcal{C}_p$ *adică matricile din şirul* $\{T^r(A)\}_{r\in N}$ *au aceleaşi conductibilităţi totale, date de* $\chi(A)$.

Demonstraţie. Din [1], teorema 2, rezultă că $\chi(T_{ij}^{(k)}(A)) = \chi(A)$. Din (3) rezultă prin iterare că $\chi(T_{ij}(A)) = \chi(A)$ pentru $i, j = 1, \dots, p$ şi din (5) rezultă prin iterare că $\chi(T(A)) = \chi(A)$.

Procedînd prin inducţie,

$$\chi(T^r(A)) = \chi(T(T^{r-1}(A))) = \chi(T^{r-1}(A)) = \chi(A) \text{ q. e. d.}$$

TEOREMA 2. $T^r(A) \supset A^{2^r}$ *pentru orice* $r \in N$ şi $A \in \mathcal{C}_p$.

Fixînd o anumită ordine a operatorilor în produsul din (5), această ordine induce o relaţie de ordine în mulţimea perechilor (α_i, β_i) cu α_i, $\beta_i \in \{1, \ldots, p\}$ şi $\alpha_i \neq \beta_i$ astfel:

Spunem că (α_k, β_k) precede pe (α_l, β_l) şi scriem $(\alpha_k, \beta_k) \prec (\alpha_l, \beta_l)$ dacă:

$$T = T_{\alpha_1\beta_1} \ldots T_{\alpha_{k-1}\beta_{k-1}} T_{\alpha_k\beta_k} \ldots T_{\alpha_l\beta_l} T_{\alpha_{l+1}\beta_{l+1}} \ldots T_{\alpha_{p^2-p}\beta_{p^2-p}}. \tag{6}$$

Vom demonstra mai întîi că:

$$T(A) \supset A^2. \tag{7}$$

Notînd $T(A) = A^{(1)} = \{a_{mn}^{(1)}\}_{m,\, n=1, \ldots, p}$ obţinem:

$$a_{mn}^{(1)} = a_{mn} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m,\, n}}^{p} \tilde{a}_{mk}\, \tilde{a}_{kn}. \tag{8}$$

Expresiile de forma $\tilde{a}_{ij}$ care apar în (8) au valoarea: $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$ dacă $(i, j) \prec (m, n)$ şi $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}^{(1)}$ dacă $(m, n) \prec (i, j)$ cu condiţia ca operatorul T să fie dat de (6).

Dar:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + \sum_{(i,\, j)} \supset a_{ij}$$

deci în toate cazurile $\tilde{a}_{ij} \supset a_{ij}$ şi (8) devine: $a_{mn}^{(1)} \supset a_{mn} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq m,\, n}}^{p} a_{mk}\, a_{kn}$

pentru $m, n = 1, \ldots, p$ adică (7). Procedînd prin inducţie rezultă că:

$$T^r(A) = T(T^{r-1}(A)) \supset (A^{2^{r-1}})^2 = A^{2^r} \text{ q. e. d.}$$

Fie q cel mai mic indice pentru care $A^{2^q} = \chi(A)$.

Rezultă că $T^q(A) \supset A^{2^q} = \chi(A)$, dar $T^q(A) \subset \chi(T^q(A)) = \chi(A)$ şi deci $T^q(A) = \chi(A)$ şi prin acest procedeu obţinem matricea conductibilităţilor totale cel puţin tot atît de repede ca prin procedeul formării şirului $A, A^2, A^4, \ldots, A^{2^r}, \ldots$

În momentul cînd am obţinut un indice q cu $T^q(A) = T^{q+1}(A)$, rezultă că $T^q(A) = \chi(A)$ deoarece notînd $T^q(A) = \{a_{mn}^{(q)}\}_{m,\, n=1, \ldots, p}$ există relaţia:

$$a_{ij}^{(q)} = a_{ij}^{(q)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,\, j}}^{p} a_{ik}^{(q)}\, a_{kj}^{(q)}$$

pentru orice $i \neq j$, care este o condiţie necesară şi suficientă pentru ca matricea $T^q(A)$ să fie egală cu $\chi(T^q(A)) = \chi(A)$.

La programarea la maşina electronică de calcul, avantajul metodei faţă de celelalte procedee constă în reducerea memoriei utile la jumătate, simplificarea programului şi reducerea numărului de iteraţii.

II

Fiind date matricile A şi B din $\mathcal{C}_p$, spunem că matricea B a fost obţinută din matricea A printr-o transformare de tipul τ_1 dacă există $i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$ aşa ca $B = T_{ij}^{(k)}(A)$ şi spunem că matricea B a fost obţinută din matricea A printr-o transformare de tipul τ_2 dacă există $i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$ aşa ca $A = T_{ij}^{(k)}(B)$. Aplicarea transformării τ_2 revine la rezolvarea ecuaţiei booleene :

$$x + a_{ik}\, a_{kj} = a_{ij} \tag{9}$$

care are soluţie dacă şi numai dacă este satisfăcută relaţia :

$$a_{ik}\, a_{kj}\, \bar{a}_{ij} = 0. \tag{10}$$

Dacă (10) este îndeplinită, soluţia generală a ecuaţiei (9) este : $x = a_{ij}(u + \bar{a}_{ik} + \bar{a}_{kj})$, cu u funcţie booleană arbitrară.

PROPOZIŢIA 2.1. *Dacă* $A \rightsquigarrow B$ *printr-o transformare de tipul* τ_1 *sau* τ_2, *atunci* $\chi(A) = \chi(B)$ *deoarece* $\chi(A) = \chi(T_{ij}^{(k)}(A))$.

PROPOZIŢIA 2.2. *Trecerea de la matricea* A *la matricea* $T(A)$ *reprezintă un produs de transformări de tipul* τ_1 *şi trecerea de la matricea* $T(A)$ *la matricea* A *reprezintă un produs de transformări de tipul* τ_2.

Demonstraţie. Din (4) rezultă că trecerea de la A la $T_{ij}(A)$ cu $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ reprezintă un produs de transformări de tipul τ_1. Deoarece T este un produs de transformări de tipul T_{ij}, dat de (5), rezultă că $A \rightsquigarrow T(A)$ printr-un produs de transformări de tipul τ_1.

În mod analog se demonstrează că trecerea de la matricea $T(A)$ la matricea A reprezintă un produs de transformări de tipul τ_2.

TEOREMA 3. Orice transformare care păstrează toate conductibilităţile totale ale unui multipol poate fi reprezentată ca un produs de transformări τ_1 şi de transformări τ_2.

Demonstraţie. Fie matricile conductibilităţilor directe B şi C asociate multipolilor $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ cu $\chi(B) = \chi(C)$.

Presupunem că r este cel mai mic indice cu $T^r(B) = \chi(B)$ şi s este cel mai mic indice cu $T^s(C) = \chi(C)$. Fie diagrama :

$$B \rightsquigarrow T(B) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow T^r(B) = \chi(B) = \chi(C) = T^s(C) \rightsquigarrow T^{s-1}(C) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow C.$$

Din 2.2 rezultă că transformarea $B \rightsquigarrow C$ reprezintă un produs dintre un produs de transformări de tipul τ_1 şi un produs de transformări de tipul τ_2. Această reprezentare nu este unică. Se pot obţine diferite reprezentări pentru diferite alegeri ale operatorului $T = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{p} T_{ij}$.

III

În cazul matricilor conductibilităţilor directe simetrice (ataşate multipolilor care nu conţin elemente ventil), metoda dată admite o modificare care permite obţinerea matricii caracteristice $\chi(A)$ cel puţin tot atît de repede ca prin procedeul formării şirului $\{T^r(A)\}_{r\in N}$.

Notăm mulţimea matricilor conductibilităţilor directe simetrice asociate multipolilor cu p noduri fără elemente ventil cu $\mathcal{C}_p^*$. Se observă că $\mathcal{C}_p^* \subset \mathcal{C}_p$.

Introducem operatorii $S_{ij}^{(k)}$ cu $i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$ definiţi pe mulţimea $\mathcal{C}_p^*$ astfel : $S_{ij}^{(k)}(A) = B$ dacă $A = \{a_{mn}\}_{m, n=1, \ldots, p}$ şi $B = \{b_{mn}\}_{m, n=1, \ldots, p}$ cu $b_{ij} = a_{ij} + a_{ik}\, a_{kj}$; $b_{ji} = a_{ji} + a_{jk}\, a_{ki}$ şi $b_{mn} = a_{mn}$ pentru $(m, n) \neq (i, j)$; (j, i) şi operatorii $S_{ij}^{(k)}$ au proprietăţi analoage cu operatorii $T_{ij}^{(k)}$. Se definesc operatorii :

$$S_{ij} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i, j}}^{p} S_{ij}^{(k)} = \prod_{k=1}^{p} S_{ij}^{(k)} \tag{11}$$

S_{ij} nu depind de ordinea în care se face produsul şi

$$S = \prod_{\substack{i, j=1 \\ i\neq j}}^{p} S_{ij} = \prod_{i, j=1}^{p} S_{ij}, \tag{12}$$

unde produsul se face într-o ordine arbitrară, dar fixată. Din [2], teorema II, rezultă că :

$$\chi(S_{ij}^{(k)}(A)) = \chi(A). \tag{13}$$

TEOREMA 4. *$\chi(S^r(A)) = \chi(A)$ pentru orice $r \in N$ şi $A \in \mathcal{C}_p^*$.*

Demonstraţia se face prin inducţie, folosind relaţia (13), analog cu demonstraţia teoremei 1.

PROPOZIŢIA 3.1. *Dacă A, $B \in \mathcal{C}_p^*$ şi $A \supset B$, atunci $S_{ij}^{(k)}(A) \supset S_{ij}^{(k)}(B)$.*

CONSECINŢĂ. *Utilizînd această relaţie şi relaţia* (11) *rezultă prin iterare că dacă A, $B \in \mathcal{C}_p^*$ şi $A \supset B$, atunci $S_{ij}(A) \supset S_{ij}(B)$.*

PROPOZIŢIA 3.2. *Dacă $A \in \mathcal{C}_p^*$, atunci $S_{ij}^{(k)}(A) \supset T_{ij}^{(k)}(A)$.*

CONSECINŢĂ. *Folosind acest rezultat şi consecinţa propoziţiei* 3.1, *rezultă prin iterare din* (11) *şi* (3) *că dacă $A \in \mathcal{C}_p^*$, atunci $S_{ij}(A) \supset T_{ij}(A)$.*

PROPOZIŢIA 3.3. *Pentru orice $A \in \mathcal{C}_p^*$, $S(A) \supset T(A)$ dacă S şi T se scriu în acelaşi mod ca produs de operatori S_{ij} respectiv T_{ij}.*

Mai departe vom presupune această condiţie îndeplinită.

Pentru demonstraţie se iterează consecinţele propoziţiilor 3.1 şi 3.2.

PROPOZIŢIA 3.4. *Dacă A, $B \in \mathcal{C}_p^*$ şi $A \supset B$, atunci $S(A) \supset S(B)$.*

Pentru demonstraţie se iterează consecinţa propoziţiei 3.1.

TEOREMA 5. *$S^r(A) \supset T^r(A)$ pentru orice $r \in N$ și $A \in \mathcal{C}_p^*$.*

Demonstrația se face prin inducție, folosind propoziția 3.3 și 3.4 :

$$S^r(A) = S\,(S^{r-1}(A)) \supset S\,(T^{r-1}(A)) \supset T\,(T^{r-1}(A)) = T^r(A) \text{ q. e. d.}$$

Fie q cel mai mic indice pentru care $T^q(A) = \chi(A)$:

$$S^q(A) \supset T^q(A) = \chi(A) \text{ și } S^q(A) \subset \chi(S^q(A)) = \chi(A),$$

deci $S^q(A) = \chi(A)$ și prin metoda formării șirului $\{S^r(A)\}_{r \in N}$ ajungem la rezultat cel puțin tot atît de repede ca prin procedeul formării șirului $\{T^r(A)\}_{r \in N}$ (dacă S se scrie în același mod ca și T ca produs de operatori S_{ij}, respectiv T_{ij}) iar pe parcurs obținem numai matrici simetrice căci $S^r(A) \in \mathcal{C}_p^*$. Introducem transformările de tipul σ_1 și σ_2 analog cu transformările de tipul τ_1 și τ_2 :

Dacă A, $B \in \mathcal{C}_p^*$, atunci $A \rightsquigarrow B$ printr-o transformare de tipul σ_1 dacă $B = S_{ij}^{(k)}(A)$ iar $A \rightsquigarrow B$ printr-o transformare de tipul σ_2 dacă $A = S_{ij}^{(k)}(B)$ cu $i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$. Pentru transformările de tipul σ_1 și σ_2 se obțin propoziții analoage cu 2.1 și 2.2, ceea ce permite să se demonstreze :

TEOREMA 6. *Orice transformare care păstrează toate conductibilitățile totale ale unui multipol care nu conține elemente ventil poate fi reprezentată ca un produs de transformări τ_1 și de transformări τ_2 sau ca un produs de transformări σ_1 și de transformări σ_2 și fiecare din reprezentări nu este unică.*

Demonstrația se face la fel ca pentru teorema 3 folosind operatorii S.

Să concretizăm aplicarea teoremei 3 pentru transformarea dată de P. Constantinescu în [1] pentru simplificarea multipolilor : $A \xrightarrow{T_2^*} B$ cu $A = \{a_{mn}\}_{m,\, n\, =\, 1, \ldots, p}$ și $a_{\mu\nu} = R + S_1 S_2 \ldots S_{r+1}$, $a_{\mu\rho_1} = S_1 + T_1$, $a_{\rho_1\rho_2} = S_2 + T_2, \ldots, a_{\rho_r\nu} = S_{r+1} + T_{r+1}$ și $B = \{b_{mn}\}_{m,\, n\, =\, 1, \ldots, p}$ cu $b_{\mu\nu} = R$, $b_{mn} = a_{mn}$ pentru $(m, n) \neq (\mu, \nu)$ și $\chi(A) = \chi(B)$.

Scriem $A = C + D$ cu $C, D \in \mathcal{C}_p$ și $c_{\mu\nu} = S_1 S_2 \ldots S_{r+1}$, $c_{\mu\rho_1} = S_1$, $c_{\rho_1\rho_2} = S_2, \ldots, c_{\rho_r\nu} = S_{r+1}$ și $d_{\mu\nu} = R$, $d_{\mu\rho_1} = T_1$, $d_{\rho_1\rho_2} = T_2, \ldots, d_{\rho_r\nu} = T_{r+1}$ iar $c_{mn} = 0$ și $d_{mn} = a_{mn}$ pentru $(m, n) \neq (\mu, \nu), (\mu, \rho_1), (\rho_1, \rho_2), \ldots, (\rho_r, \nu)$ și $m \neq n$.

Din matricea C obținem după $r - 1$ transformări de tipul τ_1 matricea $C^{(r-1)}$ cu $c_{\rho_i\nu} = S_{i+1} S_{i+2} \ldots S_{r+1}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant r - 1$ și $c_{mn}^{(r-1)} = c_{mn}$ pentru $(m, n) \neq (\rho_i, \nu)$ cu $1 \leqslant i \leqslant r - 1$.

Aplicînd o transformare de tipul τ_2 pentru elementele $c_{\mu\nu}^{(r-1)}$, $c_{\mu\rho_1}^{(r-1)}$ și $c_{\rho_1\nu}^{(r-1)}$ între care există relația : $c_{\mu\nu}^{(r-1)} = c_{\mu\rho_1}^{(r-1)} c_{\rho_1\nu}^{(r-1)}$, se obține matricea $C^{(r)}$ cu $c_{\mu\nu}^{(r)} = 0$ și $c_{mn}^{(r)} = c_{mn}^{(r-1)}$ pentru $(m, n) \neq (\mu, \nu)$. După $r - 1$ transformări de tipul τ_2^n produsele $S_{i+1} S_{i+2} \ldots S_{r+1}$ dispar și se obține matricea $C^{(2r-1)} = \{c_{mn}^{(2r-1)}\}_{m,\, n=1, \ldots, p}$ cu $c_{\mu\nu}^{(2r-1)} = 0$ și $c_{mn}^{(2r-1)} = c_{mn}$ pentru $(m, n) \neq (\mu, \nu)$.

Deci $\chi(A) = \chi(C + D) = \chi(C^{(2r-1)} + D) = \chi(B)$ deoarece $\chi(C) = \chi(C^{(2r-1)})$ și teorema de simplificare este demonstrată.

O descompunere analoagă într-un produs de transformări de tipul σ_1 şi de tipul σ_2 există şi pentru transformarea corespunzătoare T_2 de simplificare a matricilor simetrice din [2].

Primită la redacţie la 13 februarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. P. Constantinescu, *Synthesis of the multi-terminal networks with relay — contacts and rectifiers*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. **2 (50)**, *4* (1958).
2. P. Constantinescu, *Asupra reducerii numărului de contacte prin introducerea circuitelor în punte*. Revista Univ. ''C.I. Parhon'' Bucureşti, *10* (1956).
3. А. Г. Лунц, *Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем.*, Изд. Ак. Наук СССР, Сер. матем,. 1952.
4. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
5. S. Rudeanu, *Boolean equations and their applications to the study of bridge — circuits*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys de la R.P.R., **3 (51)**, *4* (1959).

INDICATORII DE STABILITATE, MODEL MATEMATIC PENTRU STRUCTURA NUCLEULUI CELULAR

DE

MIHAI ŞERBAN şi CANTEMIR RIŞCUŢIA

În această lucrare se propune un model matematic pentru a evalua posibilităţile de întrunire într-un individ a cromozomilor proveniţi de la generaţiile ancestrale, în particular de la bunici. Se definesc indicatorii de stabilitate şi se indică modul de calcul al lor.

Biologia operează la diferite niveluri de organizare a materiei vii cu o serie de unităţi morfo-funcţionale, individualizate, cum sînt celulele dintr-un organism, sau indivizii în cadrul unei populaţii. Caracterul discret şi individualitatea acestor unităţi — ce nu au decît alternativa : existenţă-neexistenţă — ne permit să le studiem cu ajutorul matematicei numerelor întregi, fără ca prin aceasta să ajungem la o negare a naturii lor funcţionale sau a dependenţelor lor biologice — prin conexiuni în spaţiu sau prin legături filogenetice în timp.

Chiar dacă aceste unităţi prezintă o pronunţată variabilitate, ca diferenţe de talie sau de formă, printr-o abstractizare permisă şi de cele mai multe ori chiar indispensabilă, ele pot fi considerate drept echivalente în cazul unei prelucrări matematice cu ajutorul căreia se studiază laturile lor pur cantitative.

La nivelul infracelular se găsesc de asemenea o serie de unităţi morfo-funcţionale dintre care o atenţie deosebită trebuie acordată cromozomilor, elemente individualizate al căror ansamblu constituie o parte însemnată din masa nucleului şi ca valoare funcţională partea esenţială a acestuia. Cromozomii sînt nişte corpi ce se colorează intens cu anumiţi coloranţi, formează sediul acizilor dezoxiribonucleici (ADN) şi astfel constituie substratul morfologic al eredităţii.

Dat fiind rolul cromozomilor în transmiterea caracterelor ereditare atît la plante cît şi la animale, prezintă interes orice lucrare care poate stabili date şi relaţii cantitative cu privire la aceste unităţi.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 1117–1131, BUCUREŞTI, 1965

La caracterul lor discret se mai adaugă un înalt grad de constanţă numerică în cadrul speciilor, ceea ce le conferă o remarcabilă valoare ca material de prelucrare matematică. Şi în cazul cromozomilor putem face abstracţie de latura lor calitativă şi să valorificăm datele cantitative reprezentate de numărul acestora cu ajutorul matematicei numerelor întregi.

Vieţuitoarele cu organizare celulară şi înmulţire sexuală, plantele la fel ca şi animalele, au în toţi nucleii din celulele lor somatice cîte un echipament de cromozoni care este format din două garnituri, fiecare garnitură fiind formată din unităţi calitativ diferite unele de altele, astfel că din fiecare fel de cromozom nucleul celulei conţine două exemplare. Acest număr constant şi caracteristic pentru o specie este denumit număr diploid, în înţelesul de număr dublu, şi notat în genetică cu $2n$. De exemplu specia umană are un număr diploid de 46 de cromozomi, spre deosebire de cele trei specii de maimuţe antropoide care toate au 48 cromozomi.

La constituirea celulelor germinale, numite gameţi, are loc un proces de reducere a numărului de cromozomi de la două la o singură garnitură formată din n unităţi, care constituie faza haploidă, caracterizată printr-un număr simplu de cromozomi. Prin unirea a doi gameţi de sexe opuse, adică prin fecundare, se naşte oul sau zigotul al cărui nucleu întruneşte din nou $2n$ cromozomi.

În lucrarea noastră ne vom permite să înlocuim simbolul n folosit în genetică cu N, pentru ca să putem păstra pentru n semnificaţia sa matematică obişnuită, adică de număr oarecare, finit, întreg. De asemenea mai introducem o modificare faţă de notarea obişnuită în analiza genetică pentru denumirea diferitelor generaţii, astfel vom nota individul obiectul central al cercetării noastre cu F, iar generaţiile parentale în ordinea ascendentă de la părinţi la bunici etc. cu P_1, P_2, ..., P_n.

Lucrarea de faţă prezintă un model matematic care încearcă să cuprindă posibilităţile de întrunire într-un individ oarecare F a cromozomilor proveniţi, prin intermediul părinţilor, de la generaţiile ancestrale, în mod particular de la bunici.

În modelul matematic elaborat s-a ţinut seama numai de parametrul *număr*, lăsîndu-se pentru prelucrări ulterioare, problema celorlalţi parametri ai cromozomilor (mărime, formă, conţinut în heterocromatină etc.), sau studiul valorii lor funcţionale. Am admis drept ipoteze simplificatoare următoarele :

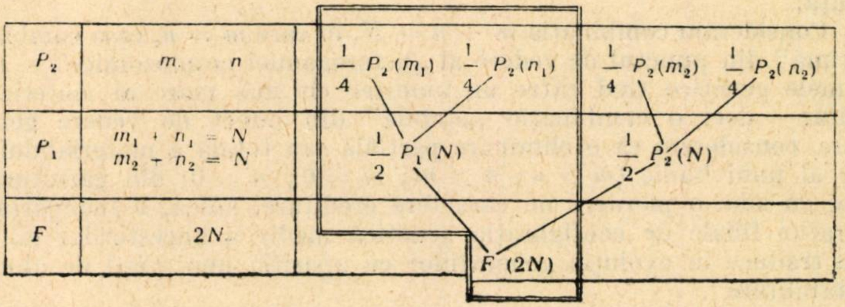
1. Toţi cromozomii au aceeaşi mărime.
2. Mărimea cromozomilor este direct proporţională cu valoarea lor funcţională.
3. Fiecare cromozom al unei garnituri formate din N elemente constituie o individualitate cu o sumă de calităţi prin care se deosebeşte de toţi ceilalţi cromozomi, astfel că fiecare dintre ei este indispensabil.
4. Fiecare cromozom reprezintă o cantitate egală cu $1/n$ din totalitatea materialului ereditar, adică toţi cromozomii sînt echivalenţi ca valoare genetică.
5. Facem abstracţie de fenomenul de recombinare genetică prin ”crossing-over”.

Constituirea genomului format din n cromozomi ai unui gamet în timpul diviziunii reducţionale din meioză se face conform legilor statistice prin repartizarea întîmplătoare în nucleul gametului a n elemente din cei $2n$ cromozomi disponibili daţi de un părinte. Măsura în care unul sau celălalt partener dintr-o pereche de bunici ($1/2P_2$) va fi reprezentat prin cromozomii săi în nepotul lor (F) rămîne deci la voia întîmplării.

Notînd cu m numărul de cromozomi cu care participă unul din cei doi parteneri ai unei perechi de bunici la constituirea nucleului haploid al unui gamet oarecare şi cu n participarea celuilalt partener vom avea în mod evident relaţia $m + n = N$; m şi n putînd varia fiecare de la 0 la N.

A doua pereche de bunici prezentînd în mod independent de prima pereche un fenomen cu totul analog, va fi suficient să cercetăm fenomenele care se petrec pentru o singură pereche parentală P_2. Reprezentăm schematic cele spuse mai sus (schema 1).

Schema 1



Astfel, în cadrul unei garnituri parentale haploide N, un bunic $\left(\frac{1}{4}P_2\right)$, care participă cu m cromozomi, poate fi reprezentat cu m cromozomi, de la $m = 0$ pînă la $m = N$ cromozomi, în următoarele combinaţii posibile în raport cu partenerul său, care participă cu n cromozomi (schema 2).

Schema 2

1	$m = 0$; $n = N$	$0 + N = N$
2	$m = 1$; $n = N - 1$	$1 + N - 1 = N$
3	$m = 2$; $n = N - 2$	$2 + N - 2 = N$
.	. .	. .
	$m = \frac{N}{2}$; $n = \frac{N}{2}$	$\frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$
.	. .	. .
$N - 1$	$m = N - 2$; $n = 2$	$N - 2 + 2 = N$
N	$m = N - 1$; $n = 1$	$N - 1 + 1 = N$
$N + 1$	$m = N$; $n = 0$	$N + 0 = N$

unde $N = m + n$

Oprindu-ne asupra posibilităţilor de combinaţie $m = n = \frac{N}{2}$, constatăm un fapt nou : această combinaţie nu se poate realiza decît dacă N este un număr par.

Deci caracterul par sau impar al numărului N influenţează posibilităţile de combinare ale cromozomilor proveniţi de la generaţia P_2 în gameţii generaţiei P_1, care urmează să constituie genomul individului F.

Cu alte cuvinte, notînd cu m şi n participarea celor doi parteneri ai unei perechi de bunici şi ţinînd seama că

$$m + n = N,$$

media $M\left(\frac{m}{n}\right)$ a tuturor combinaţiilor posibile între m şi n, va fi diferită în funcţie de caracterul par sau impar al numărului N. Această constatare reprezintă punctul de plecare al modelului matematic propus în lucrarea de faţă.

Considerăm combinaţia $m + n = N$, în care $m = n$, ca o combinaţie ,,optimă'' din punctul de vedere al ,,heterogamiei cromozomice'' — toate sistemele genetice tind către un amestec cît mai mare al materialului ereditar — deci o combinaţie ,,stabilă'' din punct de vedere genetic. Invers, considerăm că o eliminare parţială sau totală a materialului ereditar al unui bunic ($m > n$; $n > m$; $m = 0$; $n = 0$) din garnitura N, aduce cu sine o pierdere de caractere ereditare, adică, o îndepărtare a generaţiei filiale de configuraţia genetică medie a ancestorilor ei, ceea ce se traduce în evoluţia generaţiilor cu apariţia unui grad de anumită ,,instabilitate''.

Constatăm că această combinaţie ,,optimă'', unde $m = n$, este posibilă numai în cazurile în care N este un număr par, pentru că, potrivit caracterului teoretic ,,indivizibil'' al cromozomilor, pentru un $N = m + n$ impar, posibilitatea $m = n$ se exclude.

Pe baza raţionamentului de mai sus, am procedat la elaborarea unor formule pentru exprimarea valorilor medii ale tuturor combinaţiilor posibile între m şi n, ($m + n = N$), în vederea stabilirii exacte a diferenţelor cantitative dintre aceste medii, determinate de caracterul par sau impar al numărului N.

În notele iniţiale [1], [2] am dat acestor valori medii denumirea de ,,coeficienţi de stabilitate'' (C.S.), dar la recomandarea prof. Octav Onicescu am adoptat ulterior [3], [4], termenul mai potrivit de ,,indicatori de stabilitate'' (I.S.).

În lucrările [3], [4], [5] sînt date cîteva aplicaţii biologice care sînt în acord cu prevederile modelului nostru matematic. Astfel sistemele genetice formate dintr-un număr haploid par de cromozomi sînt mai frecvente în lumea plantelor cu flori, la fel ca şi numărul diploid par la celulele tumorale din tulpina HeLa cultivate în culturile de ţesuturi şi care au un număr variabil de cromozomi între 55 şi 90. O altă aplicaţie constă în faptul că reducerea numărului de cromozomi de la 48 la 46 a putut juca un rol în însăşi evoluţia omului [5]. Viteza mai mare cu care s-au derulat transformările evolutive la om în raport cu trunchiul antropoidelor din care a derivat, poate fi pusă în legătură cu indicatorii de stabilitate a căror valoare este mai mică pentru un număr impar oarecare decît a celor două numere pare între care este cuprins.

În cele ce urmează dăm procedeul pentru calcularea indicatorilor de stabilitate.

Indicatorii de stabilitate (I.S.) se calculează făcînd suma unor șiruri. Termenii șirurilor sînt produsele a două probabilități.

Punctul de plecare al calculelor îl constituie coeficienții binomiali ai expresiei $(a + b)^N$ în care $a = b = 1$. Avem

$$(1 + 1)^N = C_N^0 + C_N^1 + C_N^2 + \dots + C_N^N = 2^N. \tag{1}$$

Împărțind fiecare termen din (1) cu 2^N, vom avea

$$\frac{C_N^0}{2^N} + \frac{C_N^1}{2^N} + \dots + \frac{C_N^N}{2^N} = 1. \tag{2}$$

Avînd în vedere că :

$$C_N^m = C_N^{N-m}$$

relația (2) se va putea scrie sub forma

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{2C_N^m}{2^N} = 1. \tag{3}$$

Pentru a da relației (3) caracterul de indicator de stabilitate, deci de media combinațiilor posibile între m și n, înmulțim fiecare din termenii sumei (3) cu cîte un termen din șirul $\frac{m}{n}$ în care $m + n = N$. Din (3) se va obține astfel inegalitatea :

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{2 \cdot \frac{m}{n} \cdot C_N^m}{2^N} < 1. \tag{4}$$

Înlocuind în (3) pe N cu $N = m + n$, vom avea după simplificare :

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{m+n}{2}\right]} \frac{\frac{m}{n} \cdot C_{m+n}^m}{2^{m+n-1}} < 1 \tag{5}$$

iar dacă înmulțim ambele părți ale inegalității (5) cu 100, vom avea :

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{m+n}{2}\right]} \frac{100 \cdot \frac{m}{n} \cdot C_{m+n}^m}{2^{m+n-1}} < 100. \tag{6}$$

Calculăm astfel sumele fiecărui șir, făcînd pe rînd $N = 2, 3, 4, \dots 25$, N fiind egal cu $m+n$. Aceste sume reprezintă indicatorii de stabilitate I.S._2, I.S._3, I.S._4, ..., I.S._{25}.

Dăm un exemplu de calcul pentru indicatorii I.S.$_{23}$, sau I.S.$_{N}$, în care $N = 23$. Numărul 23 este numărul de cromozomi haploid al speciei umane.

Utilizăm formula (4), iar înmulţirea cu 100 o facem la urmă. Înlocuind pe N cu $N = 23$ vom avea :

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{23}{2}\right]} \frac{2 \cdot \frac{m}{n} C_{23}^{m}}{2^{23}} ;$$

dezvoltînd obţinem :

$$\frac{2 \cdot \frac{0}{23} \cdot C_{23}^{0}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{1}{22} \cdot C_{23}^{1}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{2}{21} \cdot C_{23}^{2}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{3}{20} \cdot C_{23}^{3}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{4}{19} \cdot C_{23}^{4}}{2^{23}} +$$

$$+ \frac{2 \cdot \frac{5}{18} \cdot C_{23}^{5}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{6}{17} \cdot C_{23}^{6}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{7}{16} \cdot C_{23}^{7}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{8}{15} \cdot C_{23}^{8}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{9}{14} \cdot C_{23}^{9}}{2^{23}} +$$

$$+ \frac{2 \cdot \frac{10}{13} \cdot C_{23}^{10}}{2^{23}} + \frac{2 \cdot \frac{11}{12} \cdot C_{23}^{11}}{2^{23}} = \text{I.S.}_{23}.$$

Valoarea primului termen este evident egală cu zero. Termenul al doilea are o valoare foarte mică, restul termenilor avînd valori crescătoare.

Simplificînd cu 2 şi scoţînd în factor comun avem :

$$\text{I.S.}_{23} = \frac{1}{2^{22}}\left[\frac{0}{23} \cdot C_{23}^{0} + \frac{1}{22} \cdot C_{23}^{1} + \frac{2}{21} \cdot C_{23}^{2} + \ldots + \frac{10}{13} \cdot C_{23}^{10} + \frac{11}{12} \cdot C_{23}^{11}\right].$$

În tabelul 1 sînt date rezultatele parţiale pentru calculul numeric al indicatorului de stabilitate I.S.$_{23}$.

În coloana a I-a sînt trecute fracţiile $\frac{m}{n}$.

În coloana a 2-a sînt date valorile numerice ale fracţiilor zecimale $m : n$, luate din tabelele inverselor lui n, sau calculate prin produse şi sume ale lui $\frac{1000}{n}$ din tabele (Hütte, Manualul inginerului etc.).

În coloana a 3-a sînt date valorile pentru $\frac{C_N^m}{2^{N-1}}$, înmulţite cu 100, iar în coloana a 4-a sînt date produsele

$$\frac{\frac{m}{n} \cdot C\frac{m}{N}}{2^{N-1}} \cdot 100$$

a căror sumă este egală cu I.S.$_{23}$.

Valorile coeficienților binomiali au fost calculate cu ajutorul algoritmului numit triunghiul lui Pascal, cifrele reprezentînd 2^{N-1} au fost calculate de asemenea exact, iar împărțirile $\frac{C_N^m}{2^{N-1}}$ au fost făcute cu rigla de calcul. Produsele $\left[\frac{m}{n}\right]\cdot\left[\frac{C_N^m}{2^{N-1}}\right]$ au fost de asemenea calculate cu rigla.

Tabelul 1

Calcularea indicatorului I. S.$_{23}$

m/n	$m : n$	$100\cdot\frac{C_N^m}{2^{N-1}}$	$100\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{C_N^m}{2^{N-1}}$
0/23	0,000	0,00	0,000
1/22	0,045	0,00	0,000
2/21	0,095	0,01	0,001
3/20	0,150	0,04	0,006
4/19	0,211	0,21	0,044
5/18	0,273	0,80	0,222
6/17	0,353	2,41	0,851
7/16	0,437	5,85	2,557
8/15	0,533	11,68	6,228
9/14	0,643	19,48	12,525
10/13	0,769	27,26	20,960
11/12	0,917	32,24	29,580

$$\text{I.S.}_{23} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{23}{2}\right]} 100\cdot\frac{m}{n}\cdot C_{23}^m\cdot\frac{1}{2^{22}} = 72{,}974$$

în care $m + n = N = 23$.

Exemplul dat este valabil pentru calcularea indicatorilor I.S$_N$. pentru numerele N impare ($N = 2n - 1$).

Pentru calcularea indicatorilor I.S$_N$. pentru numerele pare ($N = 2n$), se va avea în vedere că termenul $C_N^{\frac{N}{2}}$ nu intervine de 2 ori, ci numai odată.

De exemplu dezvoltarea pentru I.S.$_{24}$ va fi :

$$\text{I.S.}_{24} = \frac{1}{2^{23}}\left[\frac{0}{24}\,C_{24}^0 + \frac{1}{23}\,C_{24}^1 + \frac{2}{22}\,C_{24}^2 + \ldots + \frac{11}{13}\,C_{24}^{11} + \frac{1}{2^{24}}\cdot\frac{12}{12}\,C_{24}^{12}\right]\cdot$$

În tabelul 2 sînt date valorile indicatorilor de stabilitate de la I.S.$_2$ pînă la I.S.$_{25}$. Ele sînt despărţite pe două coloane, pentru a invedera deosebirile dintre indicatorii de stabilitate pentru numerele *N* pare (în stînga) şi numerele *N* impare (în dreapta).

Tabelul 2

Indicatorii de stabilitate I.S.$_2$ – I.S.$_{25}$

N	Valorile I.S. pentru $N = 2\,n$	Valorile I.S. pentru $N = 2n+1$
2	50 000	
3		37 500
4	54 167	
5		49 012
6	58 420	
7		55 968
8	61 762	
9		60 147
10	64 453	
11		63 350
12	66 539	
13		65 767
14	68 331	
15		67 714
16	69 792	
17		69 330
18	71 120	
19		70 680
20	72 190	
21		71 858
22	73 161	
23		72 974
24	74 107	
25		73 896

Cu mașina electronică s-au calculat cu 9 cifre indicatorii de stabilitate pentru numerele cuprinse între 2 și 100 (tabelul 3).

Tabelul 2 împreună cu graficul variației indicatorilor de stabilitate I.S.$_N$ de la $N = 2$ pînă la $N = 25$ au servit drept orientare pentru programarea calculului la mașina electronică. În acest scop s-au folosit următoarele formule :

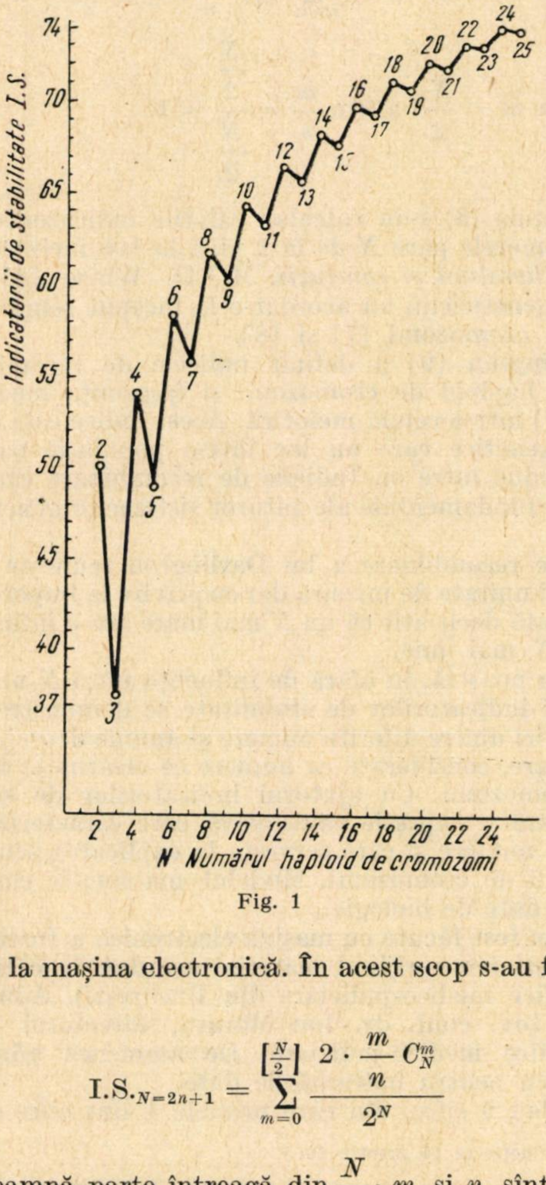


Fig. 1

$$\text{I.S.}_{N=2n+1} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{2 \cdot \frac{m}{n} C_N^m}{2^N} \tag{7}$$

în care $\left[\frac{N}{2}\right]$ înseamnă parte întreagă din $\frac{N}{2}$, m și n sînt două numere întregi, oarecare, a căror sumă trebuie să fie egală cu N, adică $m + n = N$.

Pentru N s-au luat pe rînd toate numerele impare de la 3 pînă la 99 inclusiv.

$$2.\ \mathrm{I.S.}_{N=2n} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{N}{2}-1\right]} \frac{2}{2^N}\cdot\frac{m}{n}\cdot C_N^m + \frac{1}{2^N}\cdot C_N^{\frac{N}{2}} \tag{8}$$

deoarece pentru $m = \frac{N}{2}$, avem $\frac{m}{n} = \frac{\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} = 1.$

După formula (8) s-au calculat valorile indicatorilor de stabilitate pentru toate numerele pare N de la 2 pînă la 100 inclusiv.

Date din literatură și concluzii. M.J.D. White [6] arată lipsa de interes pe care geneticienii au acordat-o la început semnificației biologice a numărului de cromozomi [7] și [8].

C.D. Darlington [9] a definit indicele de recombinare ca suma dintre numărul haploid de cromozomi și frecvența medie a chiasmelor (''crossing-over'') într-o celulă meiotică. Acest indice este o măsură pentru recombinațiile genetice care au loc într-o populație oarecare, ai cărei indivizi se reproduc între ei. Indicile de recombinare caracterizează una din proprietățile fundamentale ale tuturor sistemelor genetice fie vegetale, fie animale.

Indicele de recombinare a lui Darlington reunește influența a doi factori în aceeași unitate de măsură dar cu privire la importanța numărului haploid N nu arată decît atît că un N mai mare are o influență mai însemnată decît un N mai mic.

În lucrarea noastră, în afară de influența unui N mai mare sau mai mic, cu ajutorul indicatorilor de stabilitate se demonstrează și existența unor alte deosebiri dintre diferite numere și anume deosebirea între numerele pare și impare, considerate ca numere ce alcătuiesc diferite garnituri haploide de cromozomi. Cu ajutorul indicatorilor de stabilitate se dă pentru prima oară o expresie cantitativă care caracterizează diferențele calitative dintre numere și care servește la explicarea semnificației biologice a numărului de cromozomi. Modelul matematic construit satisface o serie de fapte date de biologie.

Calculele au fost făcute cu mașina electronică a Institutului de fizică atomică București (cu sprijinul material acordat de către Institutul de cercetări științifice medico-judiciare din București). Aducem pe această cale mulțumiri tov. conf. dr. Ion Moraru, directorul Institutului de cercetări științifice medico-judiciare. De asemenea aducem mulțumiri acad. O. Onicescu pentru îndrumările date.

Calculele dau 9 cifre, din care primele 4 sînt cifre exacte.

Primită la redacție la 16 martie 1965

Institutul de Speologie al Academiei
Republicii Socialiste România
Institutul medico-judiciar București

Tabelul 3

Indicatorii de stabilitate de la 2 pînă la 100 calculați cu mașina electronică

N par		*N* impar	
2	50.0000000		
		3	37.5000006
4	54.1666655		
		5	49.4791642
6	58.4374967		
		7	55.9635407
8	61.7782709		
		9	60.2385516
10	64.4120483		
		11	63.3563076
12	66.5448515		
		13	65.7733188
14	68.3152929		
		15	67.7254156
16	69.8154953		
		17	69.3490526
18	71.1083219		
		19	70.7297383
20	72.2380702		
		21	71.9242881
22	73.2367842		
		23	72.9723100
24	74.1284091		
		25	73.9022840

Tabelul 3 (continuare)

N par		N impar	
26	74.9311086		
		27	74.7354471
28	75.6589959		
		29	75.4879641
30	76.3232198		
		31	76.1723577
32	76.9327220		
		33	76.7986460
34	77.4947677		
		35	77.3747789
36	78.0153072		
		37	77.9072924
38	78.4993425		
		39	78.4015136
40	78.9509725		
		41	78.8619986
42	79.3737865		
		43	79.2924755
44	79.7707487		
		45	79.6961423
46	80.1444242		
		47	80.0757261
48	80.4970704		
		49	80.4335840

Tabelul 3 (continuare)

N par		*N* impar	
50	80.8306879		
		51	80.7718162
52	81.1468374		
		53	81.0920813
54	81.4470344		
		55	81.3959904
56	81.7326962		
		57	81.6849789
58	82.0048808		
		59	81.9602089
60	82.2646928		
		61	82.2227516
62	82.5130290		
		63	82.4736638
64	82.7507509		
		65	82.7136051
66	82.9785804		
		67	82.9435515
68	83.1973061		
		69	83.1641129
70	83.4073389		
		71	83.3759189
72	83.6093875		
		73	83.5795582
74	83.8038514		

Tabelul 3 (continuare)

N par		*N* impar	
		75	83.7756565
76	83.9913201		
		77	83.9644682
78	84.1722332		
		79	84.1466051
80	84.3467053		
		81	84.3223215
82	84.5153930		
		83	84.4921789
84	84.6786436		
		85	84.6563543
86	84.8365028		
		87	84.8152500
88	84.9893114		
		89	84.9690039
90	85.1375360		
		91	85.1181049
92	85.2813080		
		93	85.2626341
94	85.4207484		
		95	85.4028186
96	85.5562699		
		97	85.5389016
98	85.6878844		
		99	85.6712304
100	85.8158695		

BIBLIOGRAFIE

1. M. Şerban and C. Rişcuţia, *A New Mathematical Method for the Quantitative Research of the Caryotype*. XVI International Congress of Zoology, Washington, 20—27 August 1963, Proceedings, volume 2, p. 195.
2. M. Şerban and C. Rişcuţia, *Attempt on the Biological Significance of the Chromosome Numbers*. Genetics Today, Proceedings of the XI International Congress of Genetics, The Hague, September 1963, volume I, Abstracts, Section 8,27, p. 140.
3. M. Şerban şi C. Rişcuţia, *Cariotipul în tulpina HeLa*. Fiziologia normală şi patologică, X, *2*, 169—181 (1964).
4. M. Şerban und C. Rişcuţia, *Eine neue mathematische Methode zur quantitativen Untersuchung des Karyotyps*. Zoologischer Anzeiger, **174** (sub tipar).
5. M. Şerban et C. Rişcuţia, *Le nombre des chromosomes a-t-il joué un rôle dans l'évolution de l'homme*? Discuţii pe marginea unei comunicări a prof. B. Chiarelli în cadrul simpoziomului ,,Deosebirea dintre om şi animal'' prezentată la al VII-lea Congres internaţional de ştiinţe antropologice şi etnologice, Moscova, 3—10 august 1964.
6. M.J.D. White, *Animal Cytology and Evolution*. Cambridge, 1954.
7. T. H. Morgan, C. B. Bridges and A. H. Sturtevant, *The genetics of Drosophila*. Bibliogr. genet., **2**, 1—262 (1925).
8. E.B. Wilson, *The Cell in Development and Heredity*. New-York, Macmillan, 1925.
9. C.D. Darlington, *The biology of crossing-over*. Nature, London, **140**, 759 (1957).

STRUCTURI PSEUDOTOPOLOGICE (III)

DE

ELEMÉR ROSINGER

Se expun definiţiile spaţiilor şi structurilor pseudotopologice separate (Hausdorff) cît şi construcţiile spaţiului respectiv structurii pseudotopologice separate, asociate în anume condiţii unui spaţiu respectiv structură pseudotopologică.

CAPITOLUL V

CONSTRUCŢIA DE SEPARARE

§.1. ÎN CADRUL SPAŢIILOR PSEUDOTOPOLOGICE

1. SPAŢII PSEUDOTOPOLOGICE SEPARATE

Definiţia 1. Fie $\mathrm{E} \in \mathcal{M}$; notăm cu PTH(E) acele spaţii pseudotopologice $\sum = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in \mathrm{E}), \mathrm{R}, \mathfrak{D}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}_z) \in \mathrm{PT(E)}$ pentru care

$$(\forall)\ x,\ y \in \mathrm{E}:$$

$$\text{(PTH)} \qquad \left(\begin{matrix}(\exists)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x,\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y: \\ \mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})\end{matrix}\right) \Rightarrow x = y$$

şi le numim separate.

Observaţia 1. Rezultă că acele spaţii pseudotopologice sînt separate în care nu există filtre echivalente (în sensul relaţiei R — a se vedea observaţia 1 de la Cap. I., § 1, pct. 1 [6]) convergente spre elemente diferite.

2. CONSTRUIREA SEPARATULUI

La fel ca şi la construirea completatului, [7], întîi ne vom ocupa de spaţiile pseudotopologice reduse deoarece şi construcţia de separare este legată esenţial doar de aceste structuri.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 1133–1143, BUCUREŞTI, 1965

DEFINIŢIA 2. Fie $E \in \mathcal{M}$; notăm cu PTRH(E) mulţimea spaţiilor pseudotopologice reduse $\nu(\Sigma)$, unde $\Sigma \in \mathrm{PTH}(E)$.

LEMA 1. *Fie* $E \in \mathcal{M}$; *atunci*

1) $\mathrm{PTRCS}(E) \subseteq \mathrm{PTRT}(E)$

2) $\mathrm{PTRCH}(E) \subseteq \mathrm{PTRTS}(E)$

Demonstraţie: 1) Fie $\Sigma \in \mathrm{PTRCS}(E)$, fie $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathfrak{F}$ ca $R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $R(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ dar $(\exists)\, x \in E : \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$ căci $\Sigma \in \mathrm{PTRC}(E)$ deci $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$ căci $R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ şi $\Sigma \in \mathrm{PTRS}(E)$ deci şi $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_x$ căci $R(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ şi $\Sigma \in \mathrm{PTRS}(E)$ dar atunci $R(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ deoarece $\mathcal{F}, \mathcal{H} \in \mathfrak{F}_x$; deci în definitiv $\Sigma \in \mathrm{PTRT}(E)$.

2) Fie $\Sigma \in \mathrm{PTRCH}(E)$, fie $x \in E$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$, $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$ ca $R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ dar $(\exists)\, y \in E : \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y$ căci $\Sigma \in \mathrm{PTRC}(E)$ însă atunci $x = y$ căci $\Sigma \in \mathrm{PTRH}(E)$ şi

$$\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x,\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y,\ R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

deci $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$, de unde rezultă că $\Sigma \in \mathrm{PTRS}(E)$; ţinînd seama de 1), rezultă că $\Sigma \in \mathrm{PTRT}(E)$.

DEFINIŢIA 3. Fie $E \in \mathcal{M}$, $\tau = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R) \in \mathrm{PTR}(E)$.

Definim relaţia binară e_τ pe E astfel ca

$$e_\tau(x, y) \Leftrightarrow (\exists)\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x,\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y : R(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Evident, e_τ este reflexivă şi simetrică.

Definim: 1) $\underset{\sim}{E}_\tau = E/e_\tau$; [1])

2) $\iota_\tau : E \to \underset{\sim}{E}_\tau$ ca $\iota_\tau(x) = \{y \in E \mid e_\tau(x, y)\}$.

Evident, ι_τ este o aplicaţie pe.

Definim: 3) $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau = \{\iota_\tau(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}\}$;

$$4)\ \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau \underset{\sim}{x}} = \left\{ \iota_\tau(\mathcal{F}) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\exists)\, x \in E : \\ \underset{\sim}{x} = \iota_\tau(x) \\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \end{array} \right\} \text{ cu } \underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{E}_\tau;$$

5) $\underset{\sim}{R}_\tau(\underset{\sim}{\mathcal{F}}, \underset{\sim}{\mathcal{G}})$ pentru $\underset{\sim}{\mathcal{F}}, \underset{\sim}{\mathcal{G}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau$ numai dacă $(\exists)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} : \underset{\sim}{\mathcal{F}} = \iota_\tau(\mathcal{F})$, $\underset{\sim}{\mathcal{G}} = \iota_\tau(\mathcal{G})$, $R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Notăm $\underset{\sim}{\tau} = (\underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau, (\underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau \underset{\sim}{x}} \mid \underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{E}_\tau), \underset{\sim}{R}_\tau)$.

PROPOZIŢIA 1. În condiţiile de la definiţia 3 avem:

1) $\tau \in \mathrm{PTRH}(E) \Leftrightarrow ((\forall)x,\ y \in E : e_\tau(x, y) \Rightarrow x = y)$.

2) $(\forall)x,\ y \in E : \iota_\tau(x) = \iota_\tau(y) \Rightarrow e_\tau(x, y) \Leftrightarrow x \in \iota_\tau(y) \Leftrightarrow y \in \iota_\tau(x)$.

3) e_τ tranzitivă $\Leftrightarrow ((\forall)\, x,\ y \in E : e_\tau(x, y) \Leftrightarrow \iota_\tau(x) = \iota_\tau(y))$

4) Dacă $\tau \in \mathrm{PTRT}(E)$, atunci:

4.1) $(\forall)\, x,\ y \in E$:

$$e_\tau(x, y) \Leftrightarrow ((\forall)\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x,\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y : R(\mathcal{F}, \mathcal{G}));$$

4.2) e_τ tranzitivă.

5) Dacă $\tau \in \mathrm{PTRS}(E)$, atunci

5.1) $(\forall)x,\ y \in E$:

$$e_\tau(x, y) \Leftrightarrow \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_y;$$

5.2) e_τ tranzitivă.

---

[1] Pentru definirea spaţiului cît după relaţii binare reflexive şi simetrice a se vedea anexa.

6) Dacă $\tau \in \mathrm{PTRC(E)}$, atunci
  6.1) $\tau \in \mathrm{PTRT(E)} \Leftrightarrow$ 4.1) şi 4.2)
  6.2) $\tau \in \mathrm{PTRS(E)} \Leftrightarrow$ 5.1).

7) $(\forall)\ \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau$:

$$e_{\underset{\sim}{\tau}}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\exists)\, x, y \in \mathrm{E}, \mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{G}, \mathcal{G}' \in \mathfrak{F} : \\ 7.1)\ \underset{\sim}{x} = \iota_\tau(x),\ \underset{\sim}{y} = \iota_\tau(y) \\ 7.2)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x,\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y \\ 7.3)\ \iota_\tau(\mathcal{F}) = \iota_\tau(\mathcal{F}') \\ \qquad\quad \iota_\tau(\mathcal{G}) = \iota_\tau(\mathcal{G}') \\ 7.4)\ \mathrm{R}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \end{array} \right|^{2)}$$

Demonstrație. 1) 2) şi 3) sînt imediate.

4.1) Implicaţia $\Leftarrow$ este evidentă; reciproc, dacă $e_\tau(x, y)$ atunci $(\exists)$ $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}_x$, $\mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_y$: $\mathrm{R}(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$; fie acum $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$, $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y$; atunci $\mathrm{R}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F})$, $\mathrm{R}(\mathcal{G}_0, \mathcal{G})$ de unde $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRT(E)}$.

4.2) Rezultă din 4.1)

5.1) Implicaţia $\Leftarrow$ este evidentă; reciproc, dacă $e_\tau(x, y)$, atunci $(\exists)\, \mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}_x$, $\mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_y$: $\mathrm{R}(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ deci $\mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_x$ şi $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}_y$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRS(E)}$; fie $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$; atunci $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0)$ deoarece $\mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_x$ deci $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_y$ deoarece $\mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_y$ şi $\tau \in \mathrm{PTRS(E)}$; de aici rezultă că $\mathfrak{F}_x \subseteq \mathfrak{F}_y$; analog se arată că $\mathfrak{F}_y \subseteq \mathfrak{F}_x$.

5.2) Rezultă din 5.1).

6.1) Implicaţia $\Rightarrow$ rezultă din 4); reciproc, fie $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathfrak{F}$ ca $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $\mathrm{R}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$; fie $x, y, z \in \mathrm{E}$ ca $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$, $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y$, $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_z$ întrucît $\tau \in \mathrm{PTRC(E)}$, dar atunci $e_\tau(x, y)$ şi $e_\tau(y, z)$ de unde $e_\tau(x, z)$ dat fiind 4.2); de aici rezultă însă $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ deoarece $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$, $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_z$, $e_\tau(x, y)$ şi 4.1) deci, în definitiv, R este tranzitivă.

6.2) Implicaţia $\Rightarrow$ rezultă din 5); reciproc, fie $x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$, $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$ ca $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$; dar $(\exists)\ y \in \mathrm{E}$: $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRC(E)}$ deci $e_\tau(x, y)$ de unde $\mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_y$ deoarece am presupus 5.1); deci în definitiv $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_x$ adică R verifică condiţia (PTS).

7) Este imediată.

PROPOZIŢIA 2. *În condițiile de la definiția 3 avem :*

1) $\bigcup\limits_{\underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{\mathrm{F}}_\tau} \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau \underset{\sim}{x}} \subseteq \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau$;

2) $(\forall)\ \underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau : \mathcal{U}_{\underset{\sim}{x}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau \underset{\sim}{x}}$;

3) $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau$ *este reflexivă și simetrică*;

4) $\tau \in \mathrm{PTRT(E)} \bigcup \mathrm{PTRS(E)} \Rightarrow \mathrm{R}_\tau$ *verifică* (PT3);

5) $\tau \in \mathrm{PTRTH'(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau$ *verifică* (PTT)$^{3)}$;

---

[2] Cu toate că la definiția 3 am definit relația binară e_τ numai pentru $\tau \in \mathrm{(PTR)}$ și încă n-am arătat că și $\underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{(PTR)}$, totuși remarcăm că se poate defini și relația binară $e_{\underset{\sim}{\tau}}$.

[3] Notăm, prin (PTH') condiția

$$(\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} : \iota_\tau(\mathcal{F}) = \iota_\tau(\mathcal{G}) \Rightarrow \mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

6) $\tau \in \mathrm{PTRSH}'(\mathrm{E}) \Rightarrow \underset{\sim}{\mathrm{R}}\,\tau$ *verifică* (PTS);

7) *dacă* $\tau \in \mathrm{PTRTH}'(\mathrm{E})$ *atunci*

$$(\forall)\, \underset{\sim}{\mathcal{F}},\ \underset{\sim}{\mathcal{G}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau :$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\underset{\sim}{\mathcal{F}},\ \underset{\sim}{\mathcal{G}}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}(\forall)\, \mathcal{F},\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F},\ \underset{\sim}{\mathcal{F}} = \iota_\tau(\mathcal{F}),\ \underset{\sim}{\mathcal{G}} = \iota_\tau(\mathcal{G}) : \\ \mathrm{R}(\mathcal{F},\ \mathcal{G})\end{array}\right)$$

Demonstrație. 1) Este evidentă.

2) Fie $\underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau$; atunci $(\exists)\, x \in \mathrm{E} : \underset{\sim}{x} = \iota_\tau(x)$, dar $\mathcal{U}_x \in \mathfrak{F}_x$ iar $\iota_\tau(\mathcal{U}_x) = \underset{\sim}{\mathcal{U}}_{\underset{\sim}{x}}$ de unde $\underset{\sim}{\mathcal{U}}_{\underset{\sim}{x}} \in \mathfrak{F}_{\tau\underset{\sim}{x}}$.

3) Este evidentă.

4) Fie $\underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau$, $\underset{\sim}{\mathcal{F}},\ \underset{\sim}{\mathcal{G}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau\underset{\sim}{x}}$; atunci

$$(\exists)\, y,\ z \in \mathrm{E},\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_y,\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_z :$$

$$\underset{\sim}{x} = \iota_\tau(y) = \iota_\tau(z)$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}} = \iota_\tau(\mathcal{F}),\ \underset{\sim}{\mathcal{G}} = \iota_\tau(\mathcal{G})$$

dar $\iota_\tau(y) = \iota_\tau(z) \Rightarrow e_\tau(y,\ z)$ deci dacă $\tau \in \mathrm{PTRT}(\mathrm{E})$, atunci $\mathrm{R}(\mathcal{F},\ \mathcal{G})$ deoarece avem 4.1) de la propoziția 1; dacă însă $\tau \in \mathrm{PTRS}(\mathrm{E})$, atunci $\mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_z$ conform cu 5.1) de la propoziția 1 de unde $\mathrm{R}(\mathcal{F},\ \mathcal{G})$; deci în definitiv oricum $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\underset{\sim}{\mathcal{F}},\ \underset{\sim}{\mathcal{G}})$.

5) Fie $\underset{\sim}{\mathcal{F}}, \underset{\sim}{\mathcal{G}}, \underset{\sim}{\mathcal{H}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau$ ca $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\underset{\sim}{\mathcal{F}},\ \underset{\sim}{\mathcal{G}})$ și $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\underset{\sim}{\mathcal{G}},\ \underset{\sim}{\mathcal{H}})$; atunci $(\exists)\, \mathcal{F},\ \mathcal{G}',\ \mathcal{G}'',\ \mathcal{H} \in \mathfrak{F}$:

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}} = \iota_\tau(\mathcal{F}),\ \underset{\sim}{\mathcal{G}} = \iota_\tau(\mathcal{G}') = \iota_\tau(\mathcal{G}''),\ \underset{\sim}{\mathcal{H}} = \iota_\tau(\mathcal{H})$$

$$\mathrm{R}(\mathcal{F},\ \mathcal{G}'),\ \mathrm{R}(\mathcal{G}'',\ \mathcal{H})$$

dar $\mathrm{R}(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ întrucît $\iota_\tau(\mathcal{G}') = \iota_\tau(\mathcal{G}'')$ și am presupus $\tau \in \mathrm{PTRH}'(\mathrm{E})$; deci $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRT}(\mathrm{E})$ de aici rezultă însă $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\underset{\sim}{\mathcal{F}}, \underset{\sim}{\mathcal{H}})$ adică $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau$ este tranzitivă.

6) Fie $\underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau$, $\underset{\sim}{\mathcal{F}} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\tau\underset{\sim}{x}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{G}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau$ ca $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\underset{\sim}{\mathcal{F}},\ \underset{\sim}{\mathcal{G}})$; atunci $(\exists)\ x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$, $\mathcal{F}',\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F}$:

$$\underset{\sim}{x} = \iota_\tau(x)$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}} = \iota_\tau(\mathcal{F}) = \iota_\tau(\mathcal{F}'),\ \mathcal{G} = \iota_\tau(\mathcal{G})$$

$$\mathrm{R}(\mathcal{F}',\ \mathcal{G})$$

însă $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ deoarece $\iota_\tau(\mathcal{F}) = \iota_\tau(\mathcal{F}')$ și $\tau \in \mathrm{PTRH}'(\mathrm{E})$ deci $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}_x$ deoarece $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$ și $\tau \in \mathrm{PTRS}(\mathrm{E})$ deci și $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$ căci $\mathrm{R}(\mathcal{F}', \mathcal{G})$, $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}_x$, $\tau \in \mathrm{PTRS}(\mathrm{E})$; de aici rezultă însă că $\underset{\sim}{\mathcal{G}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau\underset{\sim}{x}}$ astfel că $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau$ verifică (PTS).

7) Implicația $\Leftarrow$ este evidentă; reciproc, fie $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\underset{\sim}{\mathcal{F}},\ \underset{\sim}{\mathcal{G}})$; atunci $(\exists)\, \mathcal{F}_0,\ \mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F} : \underset{\sim}{\mathcal{F}} = \iota_\tau(\mathcal{F}_0),\ \underset{\sim}{\mathcal{G}} = \iota_\tau(\mathcal{G}_0),\ \mathrm{R}(\mathcal{F}_0,\ \mathcal{G}_0)$; fie $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}$ ca $\iota_\tau(\mathcal{F}) = \underset{\sim}{\mathcal{F}}$, $\iota_\tau(\mathcal{G}) = \underset{\sim}{\mathcal{G}}$, atunci $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, $\mathrm{R}(\mathcal{G}, \mathcal{G}_0)$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRH}'(\mathrm{E})$ deci $\mathrm{R}(\mathcal{F},\ \mathcal{G})$ dat fiind că $\tau \in \mathrm{PTRT}(\mathrm{E})$.

PROPOZIŢIA 3. *În condiţiile de la definiţia 3 avem :*

1) $(\forall)\, x \in \mathrm{E}, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x : \iota_\tau(\mathcal{F}) \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau\iota_\tau(x)}$

2) $(\forall)\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F} : \iota_\tau(\mathcal{F}) \in \mathfrak{F}_\tau$

3) $(\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}, \mathrm{R}(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G}) : \underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\iota_\tau(\mathcal{F}), \iota_\tau(\mathcal{G}))$.

Demonstraţia este imediată.

PROPOZIŢIA 4. În condiţiile de la definiţia 3 avem :

1) $\tau \in \mathrm{PTRH(E)} \Rightarrow \iota_\tau$ *biunivocă, pe.*

2) *dacă* $\tau \in \mathrm{PTRT(E)} \bigcup \mathrm{PTRS(E)}$, *atunci* ι_τ *biunivocă* $\Rightarrow \tau \in \mathrm{PTRH(E)}$.

3) (e_τ *tranzitivă*, ι_τ *biunivocă*) $\Rightarrow \tau \in \mathrm{PTRH(E)}$.

Demonstraţie. 1) Fie $x, y \in \mathrm{E}$ ca $\iota_\tau(x) = \iota_\tau(y)$; atunci $e_\tau(x, y)$ deoarece 2) de la propoziţia 1 deci $x = y$ deoarece 1) de la propoziţia 1.

3) Fie $x, y \in \mathrm{E}$ ca $e_\tau(x, y)$ dar atunci conform cu 3) de la propoziţia 1 rezultă $i_\tau(x) = i_\tau(y)$ dat fiind că e_τ este tranzitivă, însă i_τ este presupusă biunivocă deci $x = y$; atunci rezultă conform cu 1) de la propoziţia 1 că $\tau \in \mathrm{PTRH(E)}$.

2) Rezultă din 3) şi din 4), 5) de la propoziţia 1.

TEOREMA 1. *În condiţiile de la definiţia 3 avem*

1) $\tau \in \mathrm{PTRT(E)} \bigcup \mathrm{PTRS(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTR}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau)$

2) $\tau \in \mathrm{PTRH(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTRHH'}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau)$

3) $\tau \in \mathrm{PTRTH'(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTRTH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau)$

4) $\tau \in \mathrm{PTRSH'(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTRSH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau)$

5) *dacă* $\tau \in \mathrm{PTRTC(E)} \bigcup \mathrm{PTRSC(E)}$, *atunci*

$$\underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTRH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau) \Leftrightarrow \tau \in \mathrm{PTRH'(E)}$$

6) $\tau \in \mathrm{PTRC(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\tau}$ *verifică* (PTC).

Demonstraţie. 1) Din 1), 2), 3) şi 4) de la propoziţia 2 rezultă că $\underset{\sim}{\tau}$ verifică (PT1), (PT2) şi (PT3).

2) Rezultă din 1) de la propoziţia 4.

3) Faptul că $\underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTRT}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau)$ rezultă din 1) şi din propoziţia 2, pct. 5) ; fie $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau$ ca $e_{\underset{\sim}{\tau}}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})$; atunci cu notaţiile de la propoziţia 1, pct. 7), avem $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ şi $\mathrm{R}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRH'(E)}$ dar $\mathrm{R}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ deci $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRT(E)}$, deci $e_\tau(x, y)$ întrucît $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$ şi $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y$, de aici rezultă că $\iota_\tau(x) = \iota_\tau(y)$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRT(E)}$ şi 4.2), 3) de la propoziţia 1, deci în sfîrşit $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ adică $\underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTRH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau)$.

4) Faptul că $\underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTRS}(\mathrm{E}_\tau)$ rezultă din 1) şi din propoziţia 2, pct. 6) ; cu notaţiile de la demonstraţia punctului precedent, dat fiind că $\tau \in \mathrm{PTRS}$ (E) rezultă $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}_x$ deoarece $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ şi $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$, deci $\mathcal{G}' \in \mathfrak{F}_x$ deoarece $\mathrm{R}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ deci şi $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$ deoarece $\mathrm{R}(\mathcal{G}', \mathcal{G})$ de unde $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ întrucît $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$, deci $e_\tau(x, y)$ adică $\iota_\tau(x) = \iota_\tau(y)$ dat fiind că $\tau \in \mathrm{PTRS(E)}$ şi 5.2), 3) de la propoziţia 1 ; deci $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ adică $\underset{\sim}{\tau} \in \mathrm{PTRH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau)$.

5) Implicația $\Leftarrow$ rezultă din 3) și 4) ; reciproc, fie $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}$ ca $\iota_\tau(\mathcal{F}) = \iota_\tau(\mathcal{G})$ dar $(\exists)\ x, y \in \mathrm{E} : \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x,\ \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRC(E)}$, fie $\underset{\sim}{x} = \iota_\tau(x)$, $\underset{\sim}{y} = \iota_\tau(y)$, atunci $\iota_\tau(\mathcal{F}) \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau \underset{\sim}{x}}$, $\iota_\tau(\mathcal{G}) \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau \underset{\sim}{y}}$ și $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\tau(\iota_\tau(\mathcal{F}), \iota_\tau(\mathcal{G}))$ deci $\underset{\sim}{e}_\tau(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})$ adică $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ deoarece am presupus $\tau \in \mathrm{PTRH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\tau)$; deci $\iota_\tau(x) = \iota_\tau(y)$, deci $e_\tau(x, y)$ adică $(\exists)\ \mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}_x,\ \mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_y : \mathrm{R}(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$. Dacă acum $\tau \in \mathrm{PTRT(E)}$, atunci $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ deoarece $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)\ \mathrm{R}(\mathcal{G}, \mathcal{G}_0)$ căci $\mathcal{F}, \mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}_x,\ \mathcal{G}, \mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_y$ iar dacă $\tau \in \mathrm{PTRS(E)}$, atunci $\mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_x$ deoarece $\mathrm{R}(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ și $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}_x$ însă $\mathrm{R}(\mathcal{G}, \mathcal{G}_0)$ căci $\mathcal{G}, \mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}_y$ deci $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$ de unde $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ căci și $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$; deci oricum $\mathrm{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, adică $\tau \in \mathrm{PTRH'(E)}$.

6) Fie $\underset{\sim}{\mathcal{F}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau$; atunci $(\exists)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F} : \underset{\sim}{\mathcal{F}} = \iota_\tau(\mathcal{F})$ dar $(\exists)\, x \in \mathrm{E} : \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$ deoarece $\tau \in \mathrm{PTRC(E)}$; fie $\underset{\sim}{x} = \iota_\tau(x)$, atunci evident $\underset{\sim}{\mathcal{F}} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\tau \underset{\sim}{x}}$.

Observația 2. Din pct. 2) de la teorema 1 rezultă că dacă τ verifică (PTH), atunci verifică și (PTH′) ; din pct. 5) rezultă și reciproca, dacă τ verifică (PTC) și una cel puțin din condițiile (PTT) sau (PTS).

Deci condiția (PTH′) este natural legată de condiția (PTH).

Revenim la spațiile pseudotopologice.

DEFINIȚIA 4. Fie $\mathrm{E} \in \mathcal{M}$, $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in \mathrm{E}), \mathrm{R}\ \mathfrak{D}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}\mathfrak{r}) \in \mathrm{PT(E)}$.

Definim :

1) $e_\Sigma = e_{\nu(\Sigma)}$;

2) $\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma = \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{\nu(\Sigma)}$;

3) $\iota_\Sigma = i_{\nu(\Sigma)}$;

4) $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\Sigma = \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\nu(\Sigma)}$;

5) $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\Sigma \underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\nu(\Sigma) \underset{\sim}{x}}$ cu $\underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma$;

6) $\underset{\sim}{\mathrm{R}}_\Sigma = \underset{\sim}{\mathrm{R}}_{\nu(\Sigma)}$;

7) $\underset{\sim}{\mathfrak{D}}_\Sigma = \{\underset{\sim}{\mathrm{D}} \subseteq \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma \mid \iota_\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{\mathrm{D}}) \in \mathfrak{D}\}$;

8) $\underset{\sim}{\mathfrak{J}}_\Sigma = \{\underset{\sim}{\mathrm{I}} \subseteq \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma \mid \iota_\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{\mathrm{I}}) \in \mathfrak{J}\}$;

9) $\underset{\sim}{\mathfrak{K}\mathfrak{r}}_\Sigma = \{\iota_\Sigma(\mathrm{K}) \mid \mathrm{K} \in \mathfrak{K}\mathfrak{r}\}$.

Notăm $\underset{\sim}{\Sigma} = (\underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\Sigma, (\underset{\sim}{\mathfrak{F}}_{\Sigma \underset{\sim}{x}} \mid \underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma), \underset{\sim}{\mathrm{R}}_\Sigma, \underset{\sim}{\mathfrak{D}}_\Sigma, \underset{\sim}{\mathfrak{J}}_\Sigma, \underset{\sim}{\mathfrak{K}\mathfrak{r}}_\Sigma)$.

TEOREMA (H). *În condițiile de la definiția* 4 *avem*

1) $\Sigma \in \mathrm{PTT(E)} \cup \mathrm{PTS(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\Sigma} \in \mathrm{PT}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma)$;

2) $\Sigma \in \mathrm{PTH(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\Sigma} \in \mathrm{PTHH'}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma)$;

3) $\Sigma \in \mathrm{PTTH'(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\Sigma} \in \mathrm{PTTH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma)$;

4) $\Sigma \in \mathrm{PTSH'(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\Sigma} \in \mathrm{PTSH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma)$;

5) *dacă* $\Sigma \in \mathrm{PTTC(E)} \cup \mathrm{PTSC(E)}$, *atunci* $\underset{\sim}{\Sigma} \in \mathrm{PTH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_\Sigma) \Leftrightarrow \Sigma \in \mathrm{PT}$ $\mathrm{H'(E)}$;

6) $\Sigma \in \mathrm{PTC(E)} \Rightarrow \underset{\sim}{\Sigma}$ verifică (PTC).

Demonstrație. 1) a) din teorema 1, pct. 1), rezultă că $\utilde{\Sigma}$ verifică condițiile (PT1), (PT2) și (PT3);

b) $\utilde{\Sigma}$ verifică condiția (PT4); fie $\utilde{\mathrm{D}} \in \utilde{\mathfrak{D}}_\Sigma$, $\utilde{x} \in \utilde{\mathrm{E}}_\Sigma$, $\utilde{\mathcal{F}} \in \utilde{\mathfrak{F}}_{\Sigma \utilde{x}} \cap \mathrm{FIL}_{\utilde{\mathrm{E}}_\Sigma - \utilde{\mathrm{D}}}(\utilde{\mathrm{E}}_\Sigma)$; atunci $(\exists)$ $\mathrm{D} \in \mathfrak{D}$, $x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x$:

$$\mathrm{D} = \iota_\Sigma^{-1}(\utilde{\mathrm{D}}), \quad \utilde{x} = \iota_\Sigma(x), \quad \utilde{\mathcal{F}} = \iota_\Sigma(\mathcal{F})$$

dar $\mathcal{F} \in \mathrm{FIL}_{\mathrm{E}-\mathrm{D}}(\mathrm{E})$ deoarece fie $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, atunci $\iota_\Sigma(\mathrm{F}) \in \utilde{\mathcal{F}}$ deci $(\exists)$ $\utilde{\mathrm{B}} \in \utilde{\mathcal{F}}$: $\utilde{\mathrm{B}} \subseteq \utilde{\mathrm{E}}_\Sigma - \utilde{\mathrm{D}}$, $\utilde{\mathrm{B}} \subseteq \iota_\Sigma(\mathrm{F})$ deci $\iota_\Sigma^{-1}(\utilde{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{E} - \mathrm{D}$ dar $(\exists)$ $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$: $\iota_\Sigma(\mathrm{B}) \subseteq \utilde{\mathrm{B}}$ deci $\mathrm{B} \subseteq \iota_\Sigma^{-1}(\iota_\Sigma(\mathrm{B})) \subseteq \iota_\Sigma^{-1}(\utilde{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{E}-\mathrm{D}$; însă $\mathrm{B} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{F}$ și $\mathrm{B} \cap \mathrm{F} \subseteq \mathrm{E}-\mathrm{D}$, $\mathrm{B} \cap \mathrm{F} \subseteq \mathrm{F}$, deci $x \in \mathrm{E}-\mathrm{D}$ deoarece $\mathrm{D} \in \mathfrak{D}$, dar atunci $\utilde{x} = \iota_\Sigma(x) \in \utilde{\mathrm{E}}_\Sigma - \iota_\Sigma(\mathrm{D})$;

c) $\utilde{\Sigma}$ verifică condiția (PT 5) deoarece fie $\utilde{\mathrm{I}} \in \utilde{\mathfrak{J}}_\Sigma$, $\utilde{x} \in \utilde{\mathrm{E}}_\Sigma$, $\utilde{\mathcal{F}} \in \utilde{\mathfrak{F}}_{\Sigma x} \cap \mathrm{FIL}_{\utilde{\mathrm{I}}}(\utilde{\mathrm{E}}_\Sigma)$; atunci

$$(\exists)\, \mathrm{I} \in \mathfrak{J}, \ x \in \mathrm{E}, \ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x :$$

$$I = \iota_\Sigma^{-1}(\utilde{\mathrm{I}}), \quad \utilde{x} = \iota_\Sigma(x), \quad \utilde{\mathcal{F}} = \iota_\Sigma(\mathcal{F});$$

dar $\mathcal{F} \in \mathrm{FIL}_\mathrm{I}(\mathrm{E})$ deoarece fie $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$; atunci $\iota_\Sigma(\mathrm{F}) \in \utilde{\mathcal{F}}$ deci $(\exists)$ $\utilde{\mathrm{B}} \in \utilde{\mathcal{F}}$: $\utilde{\mathrm{B}} \subseteq \utilde{\mathrm{I}}$, $\utilde{\mathrm{B}} \subseteq \iota_\Sigma(\mathrm{F})$ deci $\iota_\Sigma^{-1}(\utilde{\mathrm{B}}) \subseteq \iota_\Sigma^{-1}(\utilde{\mathrm{I}}) = \mathrm{I}$ dar $(\exists)$ $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$: $\iota_\Sigma(\mathrm{B}) \subseteq \utilde{\mathrm{B}}$ deci $\mathrm{B} \subseteq \iota_\Sigma^{-1}(\iota_\Sigma(\mathrm{B})) \subseteq \iota_\Sigma^{-1}(\utilde{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{I}$ însă $\mathrm{B} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{F}$ și $\mathrm{B} \cap \mathrm{F} \subseteq \mathrm{I}$, $\mathrm{B} \cap \mathrm{F} \subseteq \mathrm{F}$; deci $x \in \mathrm{I}$ deoarece $\mathrm{I} \in \mathfrak{J}$, dar atunci

$$\utilde{x} = \iota_\Sigma(x) \in \iota_\Sigma(\mathrm{I}) = \utilde{\mathrm{I}};$$

d) $\utilde{\Sigma}$ verifică condiția (PT 6) deoarece fie $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_\tau$, $\utilde{\mathcal{U}} \in \mathrm{UFIL}(\iota_\Sigma(\mathrm{K}))$ fie $\mathcal{V} = \{\iota_\Sigma^{-1}(\utilde{\mathrm{U}}) \cap \mathrm{K} \mid \utilde{\mathrm{U}} \in \utilde{\mathcal{U}}\}$; atunci $\mathcal{V} \in \mathrm{BFIL}(\mathrm{K})$ fie $\mathcal{U} \in \mathrm{UFIL}(\mathrm{K})$ ca $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ atunci $\iota_\Sigma(\mathcal{U}) = \utilde{\mathcal{U}}$ deoarece $\utilde{\mathcal{U}} = \iota_\Sigma(\mathcal{V}) \leqslant \iota_\Sigma(\mathcal{U})$ și $\utilde{\mathcal{U}}$ este ultrafiltru; dar $\mathrm{fil}_\mathrm{E}\,\mathcal{U} \in \mathfrak{F}$ deoarece $\mathcal{U} \in \mathrm{UFIL}(\mathrm{K})$ și $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_\tau$ deci $\mathrm{fil}_{\utilde{\mathrm{E}}_\Sigma}\,\utilde{\mathcal{U}} = \iota_\Sigma(\mathrm{fil}_\mathrm{E}\,\mathcal{U}) \in \mathfrak{F}_\Sigma$; 2), 3), 4), 5) și 6) rezultă din 1) și din punctele corespunzătoare de la teorema 1.

TEOREMA (H—O). *Fie* $\mathrm{E} \in \mathcal{M}$ *și* $\Sigma \in \mathrm{PTT(E)} \cup \mathrm{PTS(E)} \cup \mathrm{PTH(E)}$, *atunci*:

1) $\utilde{\Sigma} = \Sigma^{\iota_\Sigma}$

2) *dacă* $\Sigma \in \mathrm{PTH(E)}$, *atunci* Σ *și* $\utilde{\Sigma}$ *sînt izomorfe prin aplicația* ι_Σ.

Demonstrația este imediată.

§ 2. ÎN CADRUL STRUCTURILOR PSEUDOTOPOLOGICE

1. STRUCTURI PSEUDOTOPOLOGICE SEPARATE

DEFINIȚIA 1. Fie $\mathrm{E}_i \in \mathcal{M}$ cu $i = 0, 1$; notăm cu $\mathrm{PTH}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ acele structuri pseudotopologice $\boxed{\sim} \in \mathrm{PT}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ pentru care $\pi_0(\boxed{\sim}) \in \mathrm{PTH}(\mathrm{E}_0)$ iar $\pi_1(\boxed{\sim}) \in \mathrm{PTH}(\mathrm{E}_1)$ și le numim separate.

2. CONSTRUIREA SEPARATULUI

DEFINIȚIA 2. Fie $E_i \in \mathscr{M}$ cu $i = 0, 1$; $\boxed{\sim} = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi, \Phi_u) \in PT(E_0, E_1)$ ca $\Sigma_i = (\mathfrak{F}^i, (\mathfrak{F}^i_{x_i} \mid x_i \in E_i), R^i, \mathfrak{D}^i, \mathfrak{I}^i, \mathfrak{K}\mathfrak{r}^i)$ cu $i = 0, 1$. Definim :

$$1)\ \underset{\sim}{\Phi}_{\boxed{\sim}} = \left\{ \underset{\sim}{f} : \underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}} \to \underset{\sim}{E}_{1_{\Sigma_1}} \;\middle|\; \begin{array}{c} (\exists) f \in \Phi : (\forall)\, \underset{\sim}{x_0} \in \underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}} \\ x_0 \in \iota^{-1}_{\Sigma_0}(\underset{\sim}{x_0}) : \\ \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x_0}) = \iota_{\Sigma_1}(f(x_0)) \end{array} \right\}$$

$$2)\ \underset{\sim}{\Phi}_{u\boxed{\sim}} = \left\{ \underset{\sim}{f} : \underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}} \to \underset{\sim}{E}_{1_{\Sigma_1}} \;\middle|\; \begin{array}{c} (\exists) f \in \Phi_u : (\forall)\, \underset{\sim}{x_0} \in \underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}} \\ x_0 \in \iota^{-1}_{\Sigma_0}(\underset{\sim}{x_0}) : \\ \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x_0}) = \iota_{\Sigma_1}(f(x_0)) \end{array} \right\}$$

Notăm $\underset{\sim}{\boxed{\sim}} = (\underset{\sim}{\Sigma_0}, \underset{\sim}{\Sigma_1}, \underset{\sim}{\Phi}_{\boxed{\sim}}, \underset{\sim}{\Phi}_{u\boxed{\sim}})$. Structura $\underset{\sim}{\boxed{\sim}}$ în condițiile care se vor vedea mai jos, va fi o structură pseudotopologică verificînd axioma (PTH).

Observația 1. Conform cu definiția de sus rezultă că diagrama

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_{\Sigma_0}"'] & E_1 \arrow[d, "\iota_{\Sigma_1}"] \\ \underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}} \arrow[r, "\underset{\sim}{f}"'] & \underset{\sim}{E}_{1_{\Sigma_1}} \end{tikzcd}$$

este comutativă în sensul că

1) $(\forall)\, x_0 \in E_0 : \underset{\sim}{f}(\iota_{\Sigma_0}(x_0)) = \iota_{\Sigma_1}(f(x_0))$

2) $(\forall)\, \underset{\sim}{x_0} \in \underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}} : \{\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x_0})\} = \iota_{\Sigma_1}(f(\iota^{-1}_{\Sigma_0}(x_0)))$.

DEFINIȚIA 3. Fie $E_i \in \mathscr{M}$ cu $i = 0, 1$; notăm cu $PTR(E_0, E_1)$ mulțimea structurilor $\nu\nu(\boxed{\sim})$ unde $\boxed{\sim} \in PT(E_0, E_1)$.

TEOREMA (H*). În condițiile de la definiția 2 avem

1) $\boxed{\sim} \in PTT(E_0, E_1) \cup PTS(E_0, E_1)$ [4] $\Rightarrow \nu\nu(\boxed{\sim}) \in PTR(\underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}}, \underset{\sim}{E}_{1_{\Sigma_1}})$ [5]

2) $\boxed{\sim} \in PTH(E_0, E_1) \Rightarrow \underset{\sim}{\boxed{\sim}} = \boxed{\sim} \in PTHH'(E_0, E_1)$

3) $\boxed{\sim} \in PTTH'(E_0, E_1) \Rightarrow \nu\nu(\underset{\sim}{\boxed{\sim}}) \in PTRTH(\underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}}, \underset{\sim}{E}_{1_{\Sigma_1}})$

4) $\boxed{\sim} \in PTSH'(E_0, E_1) \Rightarrow \nu\nu(\underset{\sim}{\boxed{\sim}}) \in PTRSH(\underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}}, \underset{\sim}{E}_{1_{\Sigma_1}})$

---

[4] Prin $PTT(E_0 E_1,)$ am notat acele $\boxed{\sim} \in PT(E_0, E_1)$ pentru care $\pi_i(\boxed{\sim}) \in PTT(E_i)$ cu $i = 0, 1$; analog se definesc și $PTS(E_0, E_1)$, $PTH'(E_0, E_1)$, $PTC(E_0, E_1)$ etc.

[5] La Cap. I., § 1, 3, [6], operatorul $\nu\nu$ a fost definit doar pentru $\underset{\sim}{\boxed{\sim}} \in PT(\underset{\sim}{E}_{0_{\Sigma_0}}, \underset{\sim}{E}_{1_{\Sigma_1}})$ iar aici despre $\underset{\approx}{\boxed{\sim}}$ nu știm acest lucru; cu toate acestea se vede că are totuși sens să considerăm $\nu\nu(\underset{\approx}{\boxed{\sim}})$.

5) dacă $\boxed{\backsim} \in \mathrm{PTTC}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) \cup \mathrm{PTSC}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ atunci

$\nu\nu(\underset{\sim}{\boxed{\backsim}}) \in \mathrm{PTRH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_{0\Sigma_0}, \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{1\Sigma_1}) \Leftrightarrow \boxed{\backsim} \in \mathrm{PTH}'(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$

6) $\boxed{\backsim} \in \mathrm{PTC}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) \Rightarrow \underset{\sim}{\boxed{\backsim}}$ verifică (PTC).

Demonstrație. 1) Din teorema 1, pct. 1 de la § 1, rezultă că $\nu\nu(\boxed{\backsim})$ verifică condițiile (PT 1), (PT 2) și (PT 3); arătăm că verifică și condițiile (PT 8) și (PT 9); în adevăr

(PT 8.1) fie $\underset{\sim}{x_1} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{1\Sigma_1}$, $\underset{\sim}{f} : \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{0\Sigma_0} \to \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{1\Sigma_1}$ ca

$$(\forall)\, \underset{\sim}{x_0} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{0\Sigma_0} : \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x_0}) = \underset{\sim}{x_1}$$

fie $x_1 \in \mathrm{E}_1$ ca $\underset{\sim}{x_1} = \iota_{\Sigma_1}(x_1)$; fie $f : \mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_1$ ca $(\forall)\, x_0 \in \mathrm{E}_0 : f(x_0) = x_1$; atunci $f \in \Phi$ și $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x_0}) = \iota_{\Sigma_1}(f(x_0))$ cu $\underset{\sim}{x_0} = \iota_{\Sigma_0}(x_0)$ deci $\underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{\Phi}_{\boxed{\backsim}}$; deci $\underset{\sim}{\Phi}_{\boxed{\backsim}}$ verifică condiția (PT 8.1), analog se arată că și $\underset{\sim}{\Phi}_{u_{\boxed{\backsim}}}$ verifică această condiție;

(PT 8.2) fie $\underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{\Phi}_{\boxed{\backsim}}$, atunci $(\exists)\, f \in \Phi : (\forall)\, x_0 \in \mathrm{E}_0 :$

$$\underset{\sim}{f}(\iota_{\Sigma_0}(x_0)) = \iota_{\Sigma_1}(f(x_0));$$

fie $\underset{\sim}{x_0} \in \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{0\Sigma_0}$, $\underset{\sim}{\mathcal{F}_0} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}^0_{\Sigma_0 \underset{\sim}{x_0}}$ atunci $(\exists)\, x_0 \in \mathrm{E}_0$, $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}^0_{x_0} : \underset{\sim}{x_0} = \iota_{\Sigma_0}(x_0)$, $\underset{\sim}{\mathcal{F}_0} = \iota_{\Sigma_0}(\mathcal{F}_0)$ dar $\underset{\sim}{f}(\iota_{\Sigma_0}(\mathcal{F}_0)) = \iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{F}_0))$ deci $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\mathcal{F}_0}) = \iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{F}_0))$ însă $f \in \Phi$, $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}^0_{x_0}$, (PT 8.2) $\Rightarrow f(\mathcal{F}_0) \in \mathfrak{F}^1_{f(x_0)}$ iar conform cu propoziția 3 de la § 1 pct. 2 rezultă că $\iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{F}_0)) \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}^1_{\Sigma_1 \iota_{\Sigma_1}(f(x_0))} = \underset{\sim}{\mathfrak{F}}^1_{\Sigma_1 \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x_0})}$

(PT 9.1) fie $\underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{\Phi}_{u_{\boxed{\backsim}}}$; atunci $(\exists)\, f \in \Phi_u : (\forall)\, x_0 \in \mathrm{E}_0 :$

$$\underset{\sim}{f}(\iota_{\Sigma_0}(x_0)) = \iota_{\Sigma_1}(f(x_0))$$

fie $\underset{\sim}{\mathcal{F}_0}, \underset{\sim}{\mathcal{G}_0} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}^0_{\Sigma_0}$ ca $\underset{\sim}{\mathrm{R}}^0_{\Sigma_0}(\underset{\sim}{\mathcal{F}_0}, \underset{\sim}{\mathcal{G}_0})$; atunci $(\exists)\, \mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}^0 : \underset{\sim}{\mathcal{F}_0} = \iota_{\Sigma_0}(\mathcal{F}_0)$, $\underset{\sim}{\mathcal{G}_0} = \iota_{\Sigma_0}(\mathcal{G}_0)$,

$$\mathrm{R}^0(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$$

dar

$$\underset{\sim}{f}(\iota_{\Sigma_0}(\mathcal{F}_0)) = \iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{F}_0))$$
$$\underset{\sim}{f}(\iota_{\Sigma_0}(\mathcal{G}_0)) = \iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{G}_0))$$

deci $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\mathcal{F}_0}) = \iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{F}_0))$, $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\mathcal{G}_0}) = \iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{G}_0))$ însă $f \in \Phi_u$, $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}^0$, $\mathrm{R}^0(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$, (PT 9.1) $\Rightarrow f(\mathcal{F}_0), f(\mathcal{G}_0) \in \mathfrak{F}^1$, $\mathrm{R}^1(f(\mathcal{F}_0), f(\mathcal{G}_0))$, iar conform cu poziția 3 de la § 1, pct. 2, rezultă că

$$\iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{F}_0)),\ \iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{G}_0)) \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}^1_{\Sigma_1}$$

și

$$\underset{\sim}{\mathrm{R}}^1_{\Sigma_1}(\iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{F}_0)), \iota_{\Sigma_1}(f(\mathcal{G}_0));$$

2), 3), 4), 5) și 6) rezultă din 1) și din punctele respective de la teorema 1 din § 1, pct. 2.

TEOREMA (H**). *In condițiile de la definiția 2 dacă* $\Sigma_0 \in \mathrm{PTH}''(\mathrm{E}_0)$[6]) *atunci*

1) $\boxed{\sim} \in \mathrm{PTT}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) \cup \mathrm{PTS}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) \Rightarrow \underset{\sim}{\boxed{\sim}} \in \mathrm{PT}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_{0\Sigma_0}, \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{1\Sigma_1})$

2) $\boxed{\sim} \in \mathrm{PTTH}'(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) \Rightarrow \underset{\sim}{\boxed{\sim}} \in \mathrm{PTTH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_{0\Sigma_0}, \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{1\Sigma_1})$

3) $\boxed{\sim} \in \mathrm{PTSH}'(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) \Rightarrow \underset{\sim}{\boxed{\sim}} \in \mathrm{PTSH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_{0\Sigma_0}, \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{1\Sigma_1})$

4) dacă $\boxed{\sim} \in \mathrm{PTTC}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) \cup \mathrm{PTSC}(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ atunci

$$\underset{\sim}{\boxed{\sim}} \in \mathrm{PTH}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}_{0\Sigma_0}, \underset{\sim}{\mathrm{E}}_{1\Sigma_1}) \Leftrightarrow \boxed{\sim} \in \mathrm{PTH}'(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) .$$

Demonstrație. 1) Din teorema (H), pct. 1) de la § 1, pct. 2, rezultă că $\boxed{\sim}$ verifică (PT 1), (PT 2), (PT 3), (PT 4), (PT 5) și (PT 6); arătăm că $\widetilde{\ }$verifică (PT 8) și (PT 9); pentru aceasta, conform cu pct. 1) de la teorema (H*), este suficient să verificăm condițiile (PT 8.3), (PT 8.4) și (PT 9.2);

(PT 8.3) Fie $\underset{\sim}{f} \in \Phi_{\boxed{\sim}}$; atunci $(\exists) f \in \Phi : \underset{\sim}{f} \circ \iota_{\Sigma_0} = \iota_{\Sigma_1} \circ f$; fie $\underset{\sim}{\mathrm{D}}_1 \in \underset{\sim}{\mathfrak{D}}^1_{\Sigma_1}$; atunci $\mathrm{D}_1 = \iota_{\Sigma_1}^{-1}(\underset{\sim}{\mathrm{D}}_1) \in \mathfrak{D}^1$ deci $\mathrm{D}_0 = f^{-1}(\mathrm{D}_1) = f^{-1}(\iota_{\Sigma_1}^{-1}(\underset{\sim}{\mathrm{D}}_1)) \in \mathfrak{D}^0$ deoarece $f \in \Phi$ și (PT 8.3), dar $\underset{\sim}{f}^{-1} = \iota_{\Sigma_0} \circ f^{-1} \circ \iota_{\Sigma_1}^{-1}$ deci $\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{\mathrm{D}}_1) = \iota_{\Sigma_0}(\mathrm{D}_0)$ însă $\iota_{\Sigma_0}(\mathrm{D}_0) \in \underset{\sim}{\mathfrak{D}}^0_{\Sigma_0}$ deoarece $\Sigma_0 \in (\mathrm{PTH}'')$, $\mathrm{D}_0 \in \mathfrak{D}^0$, deci $\iota_{\Sigma_0}^{-1}(\iota_{\Sigma_0}(\mathrm{D}_0)) \in \mathfrak{D}^0$;

(PT 8.4) Se demonstrează analog;

(PT 9.2) Fie $\underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{\Phi}_{u\boxed{\sim}}$; atunci $(\exists) f \in \Phi_u : \underset{\sim}{f} \circ \iota_{\Sigma_0} = \iota_{\Sigma_1} \circ f$; fie $\underset{\sim}{\mathrm{K}}_0 \in \underset{\sim}{\mathcal{K}_\tau}^0{}_{\Sigma_0}$; atunci $(\exists)\, \mathrm{K}_0 \in \mathcal{K}_\tau{}^0 : \underset{\sim}{\mathrm{K}}_0 = \iota_{\Sigma_0}(\mathrm{K}_0)$ deci $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\mathrm{K}}_0) = \underset{\sim}{f}(\iota_{\Sigma_0}(\mathrm{K}_0)) = \iota_{\Sigma_1}(f(\mathrm{K}_0))$ dar $f \in \Phi_u$, $\mathrm{K}_0 \in \mathcal{K}_\tau{}^0$, (PT 9.2) $\Rightarrow f(\mathrm{K}_0) \in \mathcal{K}_\tau{}^1$ deci $\iota_{\Sigma_1}(f(\mathrm{K}_0)) \in \underset{\sim}{\mathcal{K}_\tau}^1{}_{\Sigma_1}$ de unde $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\mathrm{K}}_0) \in \underset{\sim}{\mathcal{K}_\tau}^1{}_{\Sigma_1}$;

2), 3) și 4) rezultă din 1) și din punctele 3), 4) și 5) de la teorema (H), § 1, pct. 2.

A N E X Ă

SPAȚII CÎT DUPĂ RELAȚII BINARE REFLEXIVE ȘI SIMETRICE

În construcția de separare apare necesitatea construirii unor spații cît după relații binare care nu sînt relații de echivalență ci sînt doar reflexive și simetrice. Această construcție se efectuează în modul următor.

DEFINIȚIA 1. Fie $\mathrm{E} \in \mathscr{M}$, e o relație binară definită pe E, reflexivă și simetrică, adică verificînd

1) $(\forall)\, x \in \mathrm{E} : e(x, x)$

2) $(\forall)\, x, y \in \mathrm{E},\ e(x, y) : e(y, x)$.

Definim $\iota_e : \mathrm{E} \to \mathfrak{P}(\mathrm{E})$ ca

$$\iota_e(x) = \{y \in \mathrm{E} \mid e(x, y)\} .$$

---

[6]) Fie $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in \mathrm{E}), \mathrm{R}, \mathfrak{D}, \mathfrak{I}, \mathcal{K}_\tau) \in \mathrm{PT}(\mathrm{E})$; spunem că Σ verifică condiția (PTH″) numai dacă

$$(\forall)\, \mathrm{D} \in \mathfrak{D},\ \mathrm{I} \in \mathfrak{I} : \iota_\Sigma^{-1}(\iota_\Sigma(\mathrm{D})) \in \mathfrak{D},\ \iota_\Sigma^{-1}(\iota_\Sigma(\mathrm{I})) \in \mathfrak{I} .$$

Numim spațiu cît al mulțimii E prin relație e mulțimea

$$E/e = \iota_e(E).$$

PROPOZIȚIA 1. *In condițiile de la definiția* 1 *avem*

1) $(\forall)\, x \in E : x \in \iota_e(x)$

2) $(\forall)\, x, y \in E :$

2.1) $x \in \iota_e(y) \Leftrightarrow y \in \iota_e(x) \Leftrightarrow e(x, y)$

2.2) $\iota_e(x) = \iota_e(y) \Rightarrow e(x, y)$.

3)

$$\left(\begin{array}{l} e \text{ este} \\ \text{tranzitivă} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\forall)\, x, y \in E : \\ \quad \iota_e(x) = \iota_e(y) \Leftarrow e(x, y) \end{array}\right)$$

Demonstrația este imediată.

DEFINIȚIA 2. În condițiile de la definiția 1 definim relația binară e^* pe E încît

$$e^*(x, y) \Leftrightarrow \iota_e(x) = \iota_e(y).$$

PROPOZIȚIA 2. *In condițiile de la definiția* 1 *avem*:

1) e^* este echivalentă pe E

2) $(\forall)\, x, y \in E : e^*(x, y) \Rightarrow e(x, y)$

3) (e este tranzitivă) $\Leftrightarrow e = e^*$

4) $(\forall)\, x \in E : \iota_{e^*}(x) \subseteq \iota_e(x)$

5) $(\forall)\, x, y \in E : \iota_{e^*}(x) = \iota_{e^*}(y) \Leftrightarrow \iota_e(x) = \iota_e(y)$

Demonstrație. 1), 2), 3), 4) se demonstrează imediat;

5) Fie $\iota_{e^*}(x) = \iota_{e^*}(y)$; atunci $e^*(x, y)$ deci $\iota_e(x) = \iota_e(y)$; reciproc, fie $\iota_e(x) = \iota_e(y)$ atunci $e^*(x, y)$ deci $\iota_{e^*}(x) = \iota_{e^*}(y)$.

Observația 1. Punctul 5) de la propoziția 2 permite stabilirea unui izomorfism între spațiul cît obișnuit E/e^* și spațiul cît E/e introdus la definiția 1, în modul următor

$$E/e \ni \iota_e(x) \longrightarrow \iota_{e^*}(x) \in E/e^*.$$

Primită la redacție la 6 aprilie 1965

Institutul de proiectări metalurgice

BIBLIOGRAFIE

1. N. BOURBAKI, *Topologie générale*. vol. II, III, IX, X, Paris, 1940.
2. N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. vol. I, Paris, 1953.
3. N. DUNFORD and I.T. SCHWARTZ, *Linear Operators*. New York-London, 1958.
4. G. MARINESCU, *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice*, Ed. Acad. R.P.R., București, 1959.
5. M. NICOLESCU, *Analiză matematică*. vol. III, Ed. tehnică, București, 1958.
6. E. ROSINGER, *Structuri pseudotopologice*. St. cerc. mat., **14**, *2*, 223–251 (1963).
7. " *Structuri pseudotopologice* (II), St. cerc. mat., **15**, *9*, 1085–1110 (1964).
8. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. vol. I, II, Paris, 1957.

FUNCTORI ADJUNCȚI CONTRAVARIANȚI

DE

LUCIAN BĂDESCU

În lucrarea de față se studiază adjuncția functorilor contravarianți, se expune o serie de rezultate analoage celor cunoscute pentru cazul functorilor covarianți. În fine, se trece în ultima parte la cîteva aplicații pentru module.

Ne vom referi, în cele ce urmează, la categoriile, a căror mulțime de obiecte și morfisme aparțin unui univers Grothendieck U. Fără a mai specifica acest lucru, vom înțelege că toate categoriile care apar aici sînt U-categorii (cf. [2]).

Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două categorii oarecare și doi functori contravarianți :

$$T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}', \qquad S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}.$$

Ne punem problema să definim noțiunea de functori adjuncți contravarianți, apoi să enunțăm o serie de rezultate analoage celor cunoscute de la functorii covarianți și să trecem la cîteva aplicații.

Dacă vom înlocui categoria $\mathcal{C}$ cu categoria ei duală $\mathcal{C}^\circ$, se definesc în mod canonic functorii covarianți :

$$T^0 : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{C}', \qquad S^0 : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}^\circ,$$

prin

$$T^0X^* = TX, \qquad T^0f^* = Tf$$

$$S^0Y = (SY)^*, \qquad S^0g = (Sg)^*,$$

unde $f : X \to X'$ în $\mathcal{C}$ și $f^* : X^* \to X'^*$ în $\mathcal{C}^\circ$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$.

DEFINIȚIE. Spunem că functorul T este adjunct al lui S, dacă functorul T^0 e adjunct (în sens obișnuit) al functorului S^0.

Deci T e adjunct al lui S dacă există un izomorfism functorial :

$$\psi(Y, X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(S^0Y, X^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, T^\circ X^*)$$

cu $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $Y \in \mathrm{Ob}\,C'$.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 1145-1152, BUCUREȘTI, 1965

Dar :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(S^0Y,\ X^*) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ SY).$$

Izomorfismul devine :

$$\psi(Y,\ X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ SY) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y,\ TX).$$

Pentru definiţie se putea schimba şi categoria $\mathcal{C}'$ cu categoria ei duală $\mathcal{C}'^0$ şi se obţineau functorii:

$$T_0 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'^0, \qquad S_0 : \mathcal{C}'^0 \to \mathcal{C}.$$

Pentru ca T să fie adjunct al lui S, trebuie ca S_0 să fie adjunct al lui T_0.

Să considerăm acum functorii

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(.\,,\ T.) : \mathcal{C}' \Pi\, \mathcal{C} \to \mathrm{Ens},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(.\,,\ S.) : \mathcal{C}\, \Pi\, \mathcal{C}' \to \mathrm{Ens},$$

unde prin $\mathcal{C}' \Pi\, \mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}\, \Pi\, \mathcal{C}'$ înţelegem categoriile produs respective, iar prin Ens categoria tuturor mulţimilor. Evident, $\mathcal{C}'\Pi\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}\Pi\mathcal{C}'$ se pot identifica. Căutăm să determinăm mulţimea morfismelor functoriale de la primul functor la cel de-al doilea.

Fie functorii h_A, $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ contravarianţi, unde $h_A(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ A)$. Fie $\varphi : h_A \to F$ un morfism functorial.

PROPOZIŢIA 1. *Aplicaţia* $\varphi \to \varphi(A)\ (1_A)$ *este o bijecţie a mulţimii morfismelor functoriale de la* h_A *la* F *pe mulţimea* $F(A)$.

Iată cum se construieşte aplicaţia inversă : fie $\xi \in F(A)$. Punem

$$[\beta(\xi)X]f = F(f)\xi.$$

Dacă în rolul lui F considerăm functorul :

$$FY = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ SY)$$

obţinem următorul rezultat :

PROPOZIŢIA 2. *Aplicaţia* $\varphi \to [\varphi(X,\ TX)](1_{TX}) = \Phi$ *e o bijecţie de la mulţimea morfismelor functoriale ale functorului* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(.\,,\ T.)$ *în functorul* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(.,\ S.)$ *la mulţimea morfismelor functoriale ale functorului* $I_{\mathcal{C}}$ *în* S^0T.

PROPOZIŢIA 2a. *Aplicaţia* $\psi \to [\psi(Y,\ SY)]\ (1_{SY}) = \Psi$ *e o bijecţie de la mulţimea morfismelor functoriale ale functorului* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(.,\ S.)$ *în* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(.,\ T.)$ *la mulţimea morfismelor functoriale ale functorului* $I_{\mathcal{C}}$, *în* $T \circ S$.

PROPOZIŢIA 3. *Pentru ca morfismul* $\psi \circ \varphi$ *să fie morfismul identic al functorului* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(.,T.)$, *e necesar şi suficient ca morfismul compus*

$$T \xrightarrow{\Psi T} TST \xrightarrow{T\Phi} T$$

să fie morfismul identic al functorului T.

PROPOZIŢIA 3a. *Pentru ca morfismul* $\varphi \circ \psi$ *să fie morfismul identic al functorului* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., S.)$. *e necesar şi suficient ca morfismul compus*

$$S \xrightarrow{\Phi S} STS \xrightarrow{S\Psi} S$$

să fie morfismul identic al functorului S.

În mod evident un functor S îşi determină adjunctul T pînă la un izomorfism.

PROPOZIŢIA 4. *Dacă* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *e un functor contravariant, următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

a) *Există un functor* $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *aşa încît* T *să fie adjunctul lui* S.

b) *Pentru orice obiect* $Y \in \mathcal{C}'$ *functorul* $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, TX)$ *e reprezentabil.*

c) *Categoria* $\mathcal{C}/(Y, T)$ *are un obiect iniţial oricare ar fi* $Y \in \mathcal{C}'$.

Amintim numai cum se defineşte categoria $\mathcal{C}/(Y, T)$: obiectele ei sînt perechi de forma (f, TX), unde $f : Y \to TX$ şi $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, iar un morfism al perechii (f, TX) în perechea (g, TX') este un morfism $\alpha : X' \to X$ aşa încît diagrama :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & TX \arrow[dl, "T\alpha"] \\ & TX' & \end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

PROPOZIŢIA 5. *Dacă* T *e adjunctul lui* S, *unde* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *şi* $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, *iar* $\mathcal{C}$ *şi* $\mathcal{C}'$ *sînt două categorii abeliene, atunci* T *şi* S *sînt exacţi la stînga, comută cu produsele directe şi cu limitele proiective.*

Fie acum $\mathcal{C}$ o categorie abeliană şi A un inel oarecare cu unitate $1 \neq 0$. Prin ${}_A\mathcal{C}$ vom nota categoria A-modulelor stîngi. Spunem că $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ e un A-obiect dacă există un omomorfism de inele.

$$\varphi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X). \ (\varphi(1) = 1_X).$$

Vom nota prin $\mathcal{C}^A$ subcategoria plină a A-obiectelor.

De asemenea, prin $\mathrm{Ad}\,(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C})$ vom însemna categoria ale cărei obiecte sînt perechi de functori contravarianţi adjuncţi $S : \mathcal{C} \to {}_A\mathcal{C}$ şi $T : {}_A\mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Un morfism de la perechea (S, T) la perechea (S', T') este un cuplu de morfisme functoriale

$$\alpha : S \to S', \quad \beta : T \to T'$$

(se scrie $(\alpha, \beta) : (S, T) \to (S', T')$) așa încît să avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., T.) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(., S.) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_A(.\,;\,\alpha)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., T'.) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(., S'.)
\end{tikzcd}$$

(φ, φ' sînt izomorfismele de adjuncție).

Analog se definește categoria $\mathrm{Ad}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_A)$ ale cărei obiecte sînt perechi de functori covarianți adjuncți ($\mathcal{C}_A$ categoria A-modulelor drepte).

PROPOZIȚIA 6. *Categoriile* $\mathcal{C}^A$ *și* $\mathrm{Ad}(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C})$ *sînt echivalente.*

E suficient să construim doi functori

$$H : \mathcal{C}^A \to \mathrm{Ad}(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C})$$

$$G : \mathrm{Ad}(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^A$$

așa încît $H \circ G \approx I\ \mathrm{Ad}(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C})$ și $G \circ H \approx I_{\mathcal{C}^A}$

Pentru fiecare $X \in \mathcal{C}^A$ avem functorul $S_X : C \to {}_AC$ în felul următor :

$$S_X U = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X).$$

Pe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ avem o structură de A-modul stîng în felul următor :

$$a \cdot f = \varphi(a) \circ f, \quad f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$$

și

$$\varphi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X).$$

Considerăm în ${}_A\mathcal{C}$ șirul exact :

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \to M \to 0.$$

cu F_1 și F_0 A-module stîngi libere, deci : $F_0 = \bigoplus_{i \in J} A_i$, $F_1 = \bigoplus_{j \in J} A_j$.

Asociem obiectele din $\mathcal{C}$

$$L_0 = \prod_{i \in I} X_i,\ L_1 = \prod_{j \in J} X_j\ (A_i \approx A,\ A_j \approx A,\ X_i \approx X,\ X_j \approx X).$$

Avem

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., \prod_{i \in I} X_i) \approx \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., X_i) \approx \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., X_i)) \approx$$

$$\approx \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(A_i, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., X)) \approx \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i \in I} A_i, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., X)).$$

Obținem în fond izomorfismele functoriale :

$$\mathrm{Hom}_A(F_0, S_X Y) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L_0),$$

$$\mathrm{Hom}_A(F_1, S_x Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L_1).$$

Cu ajutorul acestor izomorfisme, f induce omomorfismul functorial :

$$\alpha(Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L_0) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L_1)$$

care e indus de o aplicaţie :

$$\bar{f} : L_0 \to L_1.$$

Punem $T_X M = \mathrm{Ker}\, \bar{f}$ şi obţinem functorul contravariant $\alpha T_X : {}_A\mathcal{C} \to \mathcal{C}$. (Faptul că $\mathrm{Ker}\, \bar{f}$ nu depinde de alegerea lui f şi F_0, F_1 e evident.)

Se verifică imediat că asocierea :

$$X \to (S_X, T_X)$$

defineşte un functor $H : \mathcal{C}^A \to \mathrm{Ad}(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C})$ (covariant), dacă arătăm că S_X şi T_X sînt adjuncţi. Dar în diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, T_X M) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta."'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, L_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, L_1) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M, S_X N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(F_0, S_X N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(F, S_X N)
\end{tikzcd}$$

liniile sînt exacte, iar aplicaţiile verticale din dreapta sînt izomorfismele construite mai sus, care ne induc izomorfismul functorial Δ.

Trecem acum la definirea functorului

$$G : \mathrm{Ad}(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^A.$$

Fie $(S, T) \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{Ad}(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C})$. Punem

$$G(S, T) = TA$$

Să arătăm că $TA \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^A$. În adevăr, există omomorfismul de inele :

$$\varphi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TA, TA)$$

punînd $\varphi(a) = T(\gamma_a)$, unde $\gamma_a : A \to A$ e definită prin $\gamma_a(\lambda) = \lambda a$. Evident γ_a e un A-omomorfism. Dacă $(\alpha, \beta) : (S, T) \to (S', T')$, atunci

$$G(\alpha, \beta) = \beta(A) : T(A) \to T(A).$$

Să verificăm că $H \circ G \approx I_{\mathrm{Ad}(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C})}$, $(H \circ T)(S, T) = H(TA) = (S_{TA}, T_{TA})$

Dar $S_{TA} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(., TA) \approx \mathrm{Hom}_A(A, S.) \approx S$, $T_{TA} \approx T$.

În fine, faptul că $G \circ H \approx I_{\mathcal{C}^A}$ rezultă în felul următor :

$$(G \circ H)(X) = G(S_X, T_X) = T_X(A).$$

Dar

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T_X A) \approx \mathrm{Hom}_A(A, S_X Y) \approx S_X Y = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

oricare ar fi $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, de unde $T_X A \approx X$. Cu aceasta propoziţia este complet demonstrată.

PROPOZIŢIA 6a. *Categoriile* $\mathcal{C}^A$ *şi* Ad $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_A)$ *sînt antiechivalente.*

Demonstraţia este duală, functorii care realizează antiechivalenţa fiind contravarianţi. Deducem de aici o dualitate (pînă la o echivalenţă) între categoriile Ad $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_A)$ şi Ad $(\mathcal{C}, {}_A\mathcal{C})$

COROLARUL 1. *Obiectele lui* Ad $(\mathcal{C}_\Gamma, {}_\Lambda\mathcal{C})$ (*sînt perechi de functori reprezentabili contravarianţi* (Λ, Γ — *inele cu unitate*).

Corolarul rezultă imediat din propoziţia 5, deoarece Ad$(\mathcal{C}_\Gamma, {}_\Lambda\mathcal{C})$ este echivalentă cu categoria $\Lambda-\Gamma$-bimodulelor (Λ — la stînga, Γ la dreapta). Dar din $\Lambda-\Gamma$-bimodulul C construim functorul $S_C = \mathrm{Hom}_\Gamma(., C)$. Adjunctul său se dovedeşte a fi functorul $T_C = \mathrm{Hom}_\Lambda(., C)$. Mai precis considerăm situaţia scrisă în felul următor $({}_\Lambda A, B_\Gamma, {}_\Lambda C_\Gamma)$. Construim izomorfismul functorial

$$\varphi : \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(B, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C))$$

în felul următor:

$$[\varphi(f)\, C]\, a = (fa)\, b$$

cu $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))$. Inversul său se defineşte prin formula $[\varphi^{-1}(g)\, a]\; b = (gb)a$ cu $g \in \mathrm{Hom}_\Gamma(B, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C))$.

Acum vom folosi acest izomorfism pentru a obţine cîteva formule de asociativitate cu ajutorul relaţiilor lui Künneth.

Presupunem că inelele Λ şi Γ sînt ereditare (Λ la stînga şi Γ la dreapta). Vom transpune cîteva din rezultatele din Cap. VI, § 3 [1] în cazul de mai sus.

PROPOZIŢIA 7. *Dacă* A *e un* Λ-*complex proiectiv* (*la stînga*, B *un* Γ-*complex proiectiv* (*la dreapta*), *iar* C *un* $\Lambda-\Gamma$-*bimodul* (Λ-*la stînga*, Γ-*la dreapta*), *au loc şirurile exacte*:

$$(1)\quad 0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda[H(A), H(\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))] \xrightarrow{\beta} H[\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))] \xrightarrow{\alpha}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda[H(A), H(\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))] \to 0$$

$$(2)\quad 0 \to \mathrm{Ext}^1_\Gamma[H(B), H(\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C))] \xrightarrow{\beta} H[\mathrm{Hom}_\Gamma(B, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C))] \xrightarrow{\alpha}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma[H(B), H(\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C))] \to 0,$$

unde α are gradul 0, iar β gradul 1. Dacă în plus inelul Λ coincide cu Γ, atunci şirurile (1) şi (2) sînt despicabile. (Λ-comutativ).

Trebuie verificate condiţiile (pentru inele ereditare) de existenţă a celor două şiruri exacte stabilite în [1], Cap. VI, § 3. În cazul nostru ele sînt:

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda[A, B^1[\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))] = 0 = \mathrm{Ext}^1_\Lambda[A, H(\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))].$$

[Prin $B^1[\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C))$ înţelegem grupul frontierelor de dimensiune 1 al complexului $\mathrm{Hom}_\Gamma(B, C)$]. Dar aceste condiţii sînt îndeplinite, deoarece A e Λ-complex proiectiv.

Presupunem acum că Λ e comutativ și coincide cu Γ. Fie X o rezoluție injectivă a lui C. Considerăm diagrama comutativă indusă de aplicația $C \to X$

(a)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_\Lambda[H(A), H(\operatorname{Hom}_\Gamma(B,X))] \arrow[r, "\beta"] & H[\operatorname{Hom}_\Lambda(A, \operatorname{Hom}_\Lambda(B,X))] \arrow[r, "\alpha"] & \operatorname{Hom}_\Lambda(H(A), H(\operatorname{Hom}_\Lambda(B,X))] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_\Lambda[H(A), H(\operatorname{Hom}_\Gamma(B,C))] \arrow[r, "\beta"] \arrow[u] & H[\operatorname{Hom}_\Lambda(A, \operatorname{Hom}_\Lambda(B,C))] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u] & \operatorname{Hom}_\Lambda(H(A), H(\operatorname{Hom}_\Lambda(B,C))] \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Comutativitatea diagramei rezultă din naturalețea aplicațiilor α și β. Vom arăta că $H(\operatorname{Hom}_\Gamma(B,C)) \to \operatorname{Hom}_\Gamma(B,X)$ e izomorfism. În adevăr, din diagrama comutativă:

(b)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_\Lambda(H(B), H(X)) \arrow[r] & H(\operatorname{Hom}_\Lambda(B,X)) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_\Lambda(H(B), H(X)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_\Lambda(H(B), C) \arrow[r] \arrow[u] & H(\operatorname{Hom}_\Lambda(B,C)) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Hom}_\Lambda(H(B), C) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

în care liniile sînt exacte [cf. teoremei 3. 3a, Cap. VI, § 3 [1] e suficient ca $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B,C) = 0 = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(B,X)$ [ceea ce e adevărat deoarece B e un complex proectiv], aplicațiile verticale extreme sînt izomorfisme, deoarece $C \approx H(X)$. Din lema celor cinci omomorfisme deducem că $H(\operatorname{Hom}_\Lambda(B,C)) \to \to H(\operatorname{Hom}, (B, X))$ e izomorfism. Mai departe, aplicațiile extreme ale diagramei (a) sînt izomorfisme, deci și aplicația din mijloc e izomorfism. Dar șirul de sus al diagramei (a) e despicabil, deoarece A e complex proiectiv, iar $\operatorname{Hom}_\Lambda(B,X)$ e complex injectiv (pentru că B e proectiv, iar X injectiv). Deducem că și șirul de jos e despicabil.

PROPOZIȚIA 8. *Dacă în situația* $({}_\Lambda A, B_\Gamma, {}_\Lambda C_\Gamma)$, Λ *e un inel ereditar la stînga, iar* Γ *ereditar la dreapta, atunci are loc izomorfismul natural*:

$$\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, \operatorname{Ext}^1_\Gamma(B,C)) = \operatorname{Ext}^1_\Gamma(B, \operatorname{Ext}^1_\Lambda(A,C)).$$

Considerăm rezoluțiile proiective X și Y peste A și B respectiv. Propoziția rezultă imediat din aplicarea propoziției 8 la situația $({}_\Lambda X, Y_\Gamma, {}_\Lambda C_\Gamma)$ și ținînd cont de izomorfismul natural φ. În adevăr, avem:

$$H^2(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, \operatorname{Hom}_\Gamma(Y,C))] \approx \operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, \operatorname{Ext}^1_\Gamma(B,C))$$

$$H^2[\operatorname{Hom}_\Gamma(Y, \operatorname{Hom}_\Lambda(X,C))] \approx \operatorname{Ext}^1_\Gamma(B, \operatorname{Ext}^1_\Lambda((A,C)).$$

PROPOZIȚIA 9. *Dacă* Λ *e comutativ și coincide cu* Γ, *pentru orice* Λ-*module* A, B, C *are loc izomorfismul*:

$$\operatorname{Ext}^1(A, \operatorname{Hom}(B,C)) + \operatorname{Hom}(A, \operatorname{Ext}^1(B,C)) \approx$$

$$\approx \operatorname{Ext}^1(B, \operatorname{Hom}(A,C)) + \operatorname{Hom}(B, \operatorname{Ext}^1(A,C)).$$

Fie X, Y rezoluţii proiective peste A şi B respectiv. Aplicăm tripletului (X, Y, C) a doua parte a propoziţiei 7. Obţinem şirurile despicabile :

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, \mathrm{Hom}_\Lambda (B, C)) \to H^1 [\mathrm{Hom}_\Lambda (X, \mathrm{Hom}_\Lambda (Y, C))] \to$$

$$\to \mathrm{Hom}_\Lambda (A, \mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, C)) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, \mathrm{Hom}_\Lambda (A, C)) \to \mathrm{H}^1 [\mathrm{Hom}_\Lambda (Y, \mathrm{Hom}_\Lambda (X, C))] \to$$

$$\to \mathrm{Hom}_\Lambda (B, \mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, C)) \to 0.$$

De aici rezultă imediat afirmaţia propoziţiei. Remarcăm că acest izomorfism nu e functorial.

COROLARUL 2. *Dacă* Λ *este un inel dedekindian,* Λ*-modulul* A *este fără torsiune dacă şi numai dacă* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, \mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, C)) = 0$ *oricare ar fi* B *şi* C.

După propoziţia 5.3, Cap. VII [1], Λ-modulul este fără torsiune dacă şi numai dacă $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, C)$ este complet oricare ar fi C. Aplicăm acum propoziţia 7 şi avem :

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, \mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, C)) \approx \mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, \mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, C)).$$

Deoarece $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, C)$ e complet (deci injectiv) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, \mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, C)) = 0$ oricare ar fi B şi C.

Invers, dacă $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (A, \mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, C)) = 0$ oricare ar fi B şi C, atunci din izomorfismul de mai sus rezultă că $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, C)$ e injectiv, deci complet.

Observaţie. Deoarece Ext^1_Λ e exact la dreapta, dacă $_\Lambda$ e dedekindian, este suficient ca B să fie presupus injectiv, iar C liber.

Considerăm acum din nou situaţia $({}_\Lambda A, B_\Gamma, {}_\Lambda C_\Gamma)$ şi X o rezoluţie proiectivă a lui A. Vom avea :

$$\mathrm{Ext}_\Lambda (A, \mathrm{Hom}_\Gamma (B, C)) \Rightarrow H [\mathrm{Hom}_\Lambda (X, \mathrm{Hom}_\Gamma (B, C))] \approx$$

$$\approx H [\mathrm{Hom}_\Gamma (B, \mathrm{Hom}_\Lambda (X, C))] \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}_\Gamma (B, H (\mathrm{Hom}_\Lambda (X, C)) =$$

$$= \mathrm{Hom}_\Gamma (B, \mathrm{Ext}_\Lambda (A, C)$$

Obţinem aşadar omomorfismul :

$$\varphi : \mathrm{Ext}_\Lambda (A, \mathrm{Hom}_\Gamma (B, C)) \to \mathrm{Hom}_\Gamma (B, \mathrm{Ext}_\Lambda (A, C)).$$

PROPOZIŢIA 10. *Dacă modulul* B *este* Γ*-proiectiv, atunci omomorfismul* φ *este izomorfism.*

În adevăr, conform teoremei IV, 7.2 din [1], aplicaţia

$$\alpha' : H [T (\mathrm{Hom}_\Lambda (X, C))] \to T [H (\mathrm{Hom}_\Lambda (X, C))]$$

este izomorfism deoarece functorul $T(D) = \mathrm{Hom}_\Gamma (B, D)$ este exact.

Primită la redacţie la 4 noiembrie 1964

Facultatea de matematică
şi mecanică a Universităţii din
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. H. CARTAN, S. EILENBERG, *Homological Algebra.* Princeton, 1956.
2. P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes.* Bull. Soc. Math. France **90**, 3 (1962).
3. A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algébra homologique.* Tohoku. Math. Journal, *3—4*, (1957).

ASUPRA MIȘCĂRII APELOR ARTEZIENE ÎNTR-UN DOMENIU CONCAV

DE

GH. PETRESCU

Se consideră mișcarea plană staționară liniară către un puț artezian cînd conturul de alimentare are forma din figura 1. Potențialul complex este dat de (13). Se calculează efectiv debitul cînd $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $z_p = 2\rho i$, $e = 6\rho$ și $r = 10^{-2}\ \rho$.

1. Mișcarea apelor arteziene în domenii concave a fost relativ foarte puțin studiată.

Într-o lucrare anterioară, [1], s-a dat o formulă exactă pentru calculul debitului unui puț artezian perfect plasat într-un mediu poros omogen, care ocupă în planul mișcării un semiplan minus un domeniu de forma unui segment circular a cărui coardă se află pe axa reală.

Mișcarea subterană a fost presupusă liniară și staționară.

Ne vom ocupa acum de mișcarea provocată de un puț artezian perfect în aceleași condiții, pentru cazul cînd mediul poros ocupă întreg semiplanul superior mai puțin două semidiscuri de raze oarecare avînd centrele pe axa reală.

2. Fie deci în planul fizic, $z = x + iy$, un puț artezian circular de rază r, plasat în punctul $z_p = x_p + iy_p$.

Mediul poros ocupă semiplanul Im $z > 0$ fără semidiscurile de rază ρ_1 și ρ_2 avînd centrele O_1 și O_2 respectiv (fig. 1).

Vom nota cu k^* coeficientul de filtrație al mediului poros, iar cu H diferența de nivel între suprafețele libere ale fluidului liber și a fluidului din puț.

Pentru rezolvarea problemei, vom folosi metoda reprezentării conforme.

ST. CERC. MAT. TOM. 17, NR 7, P. 1153–1159, BUCUREȘTI, 1965

Funcţia :

$$\zeta = \ln \frac{a+z}{a-z}, \quad \zeta = \alpha + i\beta, \tag{1}$$

defineşte în planul (z) un sistem de coordonate bipolare [2], [3], [4], ai căror poli se determină în funcţie de razele cercurilor O_1 şi O_2 precum şi de distanţa dintre centrele lor.

Fie (vezi fig. 1) :

A_1 (-a, 0 A_2 (a, 0), polii sistemului de coordonate bipolare (coordonatele lor fiind luate în raport cu sistemul cartezian Oxy), r_1 şi r_2 distanţele unui punct oarecare din domeniu la cei doi poli, α_1 şi α_2 valorile corespunzătoare contururilor Γ_1 şi Γ_2 prin transformarea (1), e distanţa O_1O_2, d distanţa OO_2, iar ρ_1 şi ρ_2 razele celor două cercuri. [1]

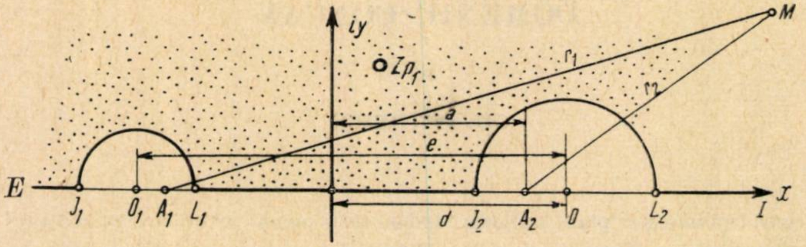


Fig. 1

Sistemul de coordonate bipolare este determinat prin cunoaşterea constantelor a şi d exprimate în funcţie de ρ_1, ρ_2 şi e.

Luînd pe rînd punctul M în L_2, J_2, J_1 şi L_1, se găseşte prin calcule simple că :

$$d = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2 + e^2}{2e}, \tag{2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{\rho_2^2 - \rho_1^2 + e^2}{2e}\right)^2 - \rho_2^2},$$

iar

$$\alpha_1 = \ln \left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{L_1} = \ln \frac{d + a + \rho_1 - e}{e + a - \rho_1 - d},$$

$$\alpha_2 = \ln \left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{J_2} = \ln \frac{d + a - \rho_2}{\rho_2 + a - d}. \tag{3}$$

Astfel sistemul de coordonate este complet determinat, şi se verifică uşor că $\alpha_1 < \alpha_2$.

3. Transformarea (1) realizează reprezentarea conformă a domeniului din planul fizic pe un dreptunghi în planul (ζ) (fig. 2).

---

[1] Prin transformarea (1), curbele $\frac{r_1}{r_2}$ = constant trec în dreptele α = constant.

Punctele A_1, A_2, J_1, J_2, L_1, şi L_2 corespund, respectiv, punctelor : $\zeta = -\infty$, $\zeta = +\infty$, $M(\alpha_1, \pi)$, $P(\alpha_2, 0)$, $N(\alpha_1, \pi)$ şi $Q(\alpha_2, 0)$, iar contururile Γ_1 şi Γ_2 corespund dreptelor $\alpha = \alpha_1$ şi $\alpha = \alpha_2$, respectiv.

Tăieturile EJ_1 şi L_2I se transformă în dreptele $\beta = \pi$, iar segmentul A_1A_2 în $\beta = 0$.

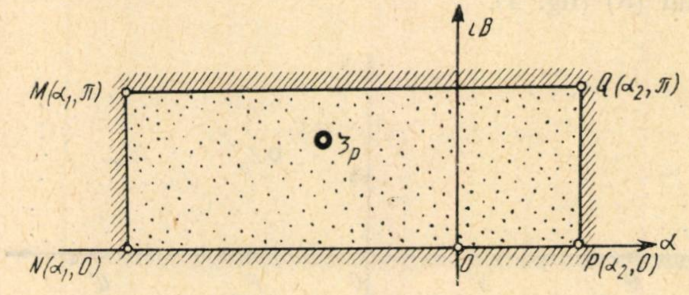


Fig. 2

Centrul puţului z_p interior domeniului fizic trece în punctul ζ_p interior dreptunghiului $MNPQ$, dat de

$$\zeta_p = \ln \frac{a + z_p}{a - z_p} \tag{4}$$

Se observă că raportul $\frac{r_1}{r_2}$ fiind subunitar în L_1 şi supraunitar în J_2, constanta α_1 este negativă iar α_2 este pozitivă.

Să mutăm originea sistemului cartezian O (fig. 2) în mijlocul segmentului NP prin translaţia :

$$S = \zeta - b, \qquad S = s_1 + is_2, \tag{5}$$

b fiind cantitatea reală $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$.

În planul (S) avem domeniul din figura 3, unde am notat cu s'_1 valoarea $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$

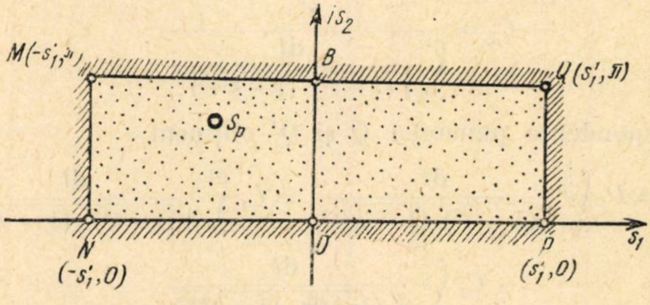


Fig. 3

În sfîrşit, reprezentăm conform acest ultim domeniu pe semiplanul Im $Z > 0$, cu ajutorul formulei Schwarz-Christoffel impunînd condiţiile :

— originile să se conserve, punctul $P(s_1', 0)$ să corespundă punctului P' $(1, 0)$ iar punctul de la infinit din planul (Z) să corespundă punctului B din planul (S) (fig. 4).

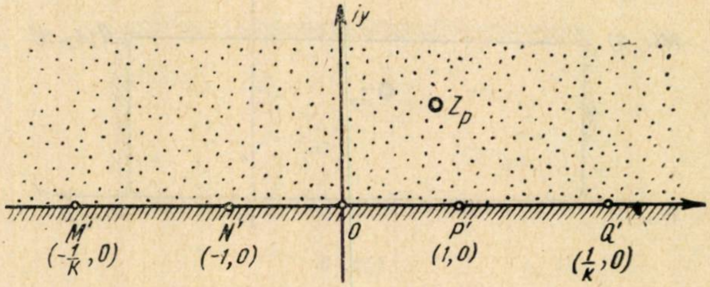


Fig. 4

Formula de transformare este

$$S = C\int_0^z \frac{\mathrm{d}Z}{\sqrt{(Z^2-1)\left(Z^2-\frac{1}{k^2}\right)}} + C_2, \tag{6}$$

unde $Z = X + iY$.

Din motive de simetrie punctelor $M(-s_1', \pi)$, $N(-s_1', 0)$ şi $Q(s_1', \pi)$ din planul (S) le corespund în planul (Z) punctele $M'\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$, $N'(-1, 0)$ şi $Q'\left(\frac{1}{k}, 0\right)$, respectiv, unde $0 < k < 1$. Vom nota $C_1 = kC$.

Conservarea originilor impune

$$C_2 = 0. \tag{7}$$

Din corespondenţa punctelor P şi P' avem

$$C_1 = \frac{s_1'}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}}}, \tag{8}$$

iar din corespondenţa punctelor Q şi Q' obţinem

$$s_1' = i\pi = C_1\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}} = C_1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}} +$$
$$+ C_1\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}}.$$

Ţinînd cont de (8),

$$s_1' + i\pi = s_1' + iC_1 \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2-1)\,(1-k^2t^2)}}.$$

Pentru determinarea lui k rezultă deci condiţia :

$$(9) \qquad \pi = s_1' \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}}}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2-1)\,(1-k^2t^2)}}} = s_1' \frac{K}{K'},$$

unde K este integrala eliptică completă de prima speţă şi de modul ($k < 1$), iar K' este $K(k')$, cu $k'^2 = 1 - k^2$.

Relaţia de transformare (6) devine :

$$(6') \qquad S = \frac{s_1'}{K} \int_0^z \frac{\mathrm{d}Z}{\sqrt{(1-Z^2)\,(1-k^2Z^2)}},$$

modulul k fiind soluţia ecuaţiei

$$(9') \qquad \frac{\pi}{s_1'} = \frac{K}{K'}.$$

Formula de reprezentare conformă a dreptunghiului $MNPQ$ pe semiplanul Im $Z > 0$ se obţine inversînd (6′), deci

$$Z = \operatorname{sn} \frac{KS}{s_1'},$$

sau trecînd în planul fizic,

$$(10) \qquad Z = \operatorname{sn} \left[\frac{K}{s_1'} \left(\ln \frac{a+z}{a-z} - b \right) \right].$$

Condiţiile la limită pe conturul de alimentare în planul fizic sînt :

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi = 0 \text{ pe } EJ_1 \cup \Gamma_1 \cup L_1J_2 \cup \Gamma_2 \cup L_2I \\ \varphi = k^*H \text{ pe cercul } \gamma_p \text{ de rază } r \text{ centrat în } z_p \text{ şi de ecuaţie} \\ (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 = r^2. \end{cases}$$

În planul (Z) ele devin

$$\begin{cases} \varphi = 0 \text{ pe axa reală} \\ \varphi = k^*H \text{ pe conturul } \gamma_p. \end{cases}$$

Admitem că cercul γ_p are raza suficient de mică spre a-l aproxima şi în planul (Z), cu un cerc cu centrul în

$$Z_p = \operatorname{sn} \left[\frac{K}{s_1'} \ln \left(\frac{a+z_p}{a-z_p} - b \right) \right].$$

În planul (Z) potențialul complex al mișcării este dat de funcția :

$$F(Z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{Z-\overline{Z}_p}{Z-Z_p}, \tag{12}$$

în care q este debitul puțului.

În sfîrșit, potențialul complex al mișcării în planul fizic este

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn} U-\overline{\operatorname{sn} U_p}}{\operatorname{sn} U-\operatorname{sn} U_p}, \tag{13}$$

unde am notat cu U expresia :

$$U = \frac{K}{s_1'}\left(\ln \frac{a+z}{a-z} - b\right),$$

iar cu U_p valoarea funcției U în centrul puțului.

Debitul q se determină din condiția pe contur pusă într-un punct oarecare $z_p{}^*$, al conturului puțului.

Fie acest punct pe orizontală, adică :

$$z_p{}^* = (x_p + r) + iy_p.$$

Condiția pentru determinarea debitului este deci :

$$\operatorname{Re}\,[F(z)]_{(x_p+r,\, y_p)} = k^* H,$$

sau, cu notația de la (13),

$$q = \frac{2\pi k^* H}{\ln \left| \dfrac{\operatorname{sn} U-\overline{\operatorname{sn} U_p}}{\operatorname{sn} U-\operatorname{sn} U_p} \right|_{(x_p+r,\, y_p)}} \tag{14}$$

4. Ca aplicație să calculăm debitul unui puț artezian plasat în punctul $z_p = 2\rho i$ pentru un domeniu în care :

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho\,;\; e = 6\rho \text{ și } r = \frac{\rho}{100}.$$

Rezultă după un calcul simplu

$$d = 3\rho\,;\; a = 2\sqrt{2}\,\rho\,;\; \alpha_1 = -1{,}758\,;\; \alpha_2 = 1{,}758.$$

Din simetria cazului ales deducem $b = 0$.

Pentru determinarea constantelor C_1 și k avem relația $\dfrac{\pi}{1{,}758} = \dfrac{K}{K'} = 1{,}78.$

Pătratul modulului k este deci [6]

$$k^2 = 0{,}943 \text{ iar } K = 2{,}82075 \text{ şi } C_1 = \frac{\alpha_1}{K} = 0{,}619.$$

Funcţia de reprezentare conformă are forma :

$$Z = \operatorname{sn} 1{,}603 \ln \frac{2\sqrt{2}\,\rho + z}{2\sqrt{2}\,\rho - z}.$$

Potenţialul complex al mişcării în punctul $z_p{}^* = (x_p + r) + iy_p$ va fi

$$[F(z)]_{z_p^*} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn}(0{,}0465 + 0{,}225i) - \overline{\operatorname{sn} 2{,}073i}}{\operatorname{sn}(0{,}0465 + 0{,}225i) - \operatorname{sn} 2{,}073i}$$

Făcînd calculele se găseşte :

$$\frac{q}{\pi k^* H} = 0{,}344.$$

Acest rezultat concordă cu valoarea debitului pentru semiplan în sensul că el este mai mare decît debitul unui puţ perfect plasat la distanţa 2ρ de frontiera de alimentare într-un semiplan, care este dat de formula :

$$q = \frac{2\pi k^* H}{\ln \dfrac{2D}{r}}$$

de unde

$$\frac{q}{\pi k^* H} = 0{,}33,$$

în care D este distanţa de la centrul puţului la frontiera domeniului de alimentare, deci la noi $D = 2\rho$ [1].

Primită la redacţie la 16 ianuarie 1965

Institutul Pedagogic de 3 ani Piteşti

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Petrescu, *Asupra debitului puţurilor arteziene în cîteva cazuri particulare*. G.M.F.A., *9*, 331—337 (1964).
2. Şt. I. Gheorghiţă, *Aplicaţii ale coordonatelor bipolare la mişcări sub baraje*, G.M.F.A., *5*, 232 (1963).
3. Şt. I. Gheorghiţă, *Două aplicaţii ale coordonatelor bipolare în hidrodinamica lichidelor viscoase*. G.M.F.A., *4*, 194 (1954).
4. Я. С. Уфлянд, *Биполярные координаты в теории упругости*. Москва, 1950.
5. И. А. Чиарный, *Основы подземной гидравлики*. Москва, 1960.
6. Fritz Oberhettinger und W. Magnus, *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik*. Berlin, 1949, p. 144.

ASUPRA SPAȚIULUI-TIMP DE SITTER

DE

S. IANUȘ

În această lucrare se dau cîteva proprietăți geometrice ale spațiului-timp De Sitter. Se arată că este un spațiu Einstein, se calculează tensorul formei fundametal de categoria a II-a și se obține apoi o reprezentare parametrică a spațiului considerat într-un spațiu E_5 pseudoeuclidian cu 5 dimensiuni.

1. În lucrarea de față vom da cîteva proprietăți geometrice ale spațiului-timp De Sitter a cărui metrică [1] se poate scrie, într-un anumit sistem de coordonate, sub forma :

$$- \mathrm{d}s^2 \equiv g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \equiv \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) - \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\mathrm{d}t^2, \tag*{1)}$$

$$i,\ j,\ k,\ l = 1,\dots,4\,;\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi,\ x^4 = t,$$

unde t este timpul, r raza vectoare, θ și φ unghiurile polare iar R este o constantă.

Calculînd simbolii lui Christoffel de speța a II-a obținem următoarele valori :

$$\begin{gathered}
\left|\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right| = \frac{r}{R^2\cdot h^2},\quad \left|\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}2\\21\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}3\\13\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}3\\31\end{matrix}\right| = \frac{1}{r},\\
\left|\begin{matrix}3\\23\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}3\\32\end{matrix}\right| = \operatorname{cotg}\theta\ \left|\begin{matrix}4\\14\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}4\\41\end{matrix}\right| = -\frac{r}{R^2h^2}\left|\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right| = -rh^2,\\
\left|\begin{matrix}1\\33\end{matrix}\right| = -rh^2\sin^2\theta\left|\begin{matrix}1\\44\end{matrix}\right| = -\frac{rh^2}{R^2}\left|\begin{matrix}2\\33\end{matrix}\right| = -\sin\theta\cos\theta,
\end{gathered} \tag{2}$$

ceilalți fiind toți nuli ; am notat $h^2 = 1 - \frac{r^2}{R^2}\cdot$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 7, p. 1161–1168, BUCUREȘTI, 1965

Dacă notăm cu R_{ijkl} componentele tensorului de curbură, rezultă uşor că cele cu cel puţin 3 indici distincţi sînt nule iar cele cu doi indici distincţi R_{ijij} $(i \neq j)$ sînt date de formulele :

$$R_{ij\,ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{jj}}{\partial x^i \partial x^j}\right) + \left|\begin{matrix} r \\ ij \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} r \\ ij \end{matrix}\right| g_{rr} - \left|\begin{matrix} r \\ ii \end{matrix}\right| \left|\frac{r}{jj}\right| g_{rr}$$

$$R_{ij\,ij} = -R_{ji\,ij} = -R_{ij\,ji}, \qquad (i \neq j).$$

Înlocuind componentele tensorului fundamental al metricii (1) şi simbolii lui Christoffel de speţa a II-a (2) obţinem 6 componente nenule distincte (abstracţie făcînd de semn) după cum urmează :

$$(3) \qquad \begin{array}{lll} R_{12\,12} = \dfrac{r^2}{R^2 h^2}, & R_{13\,13} = \dfrac{r^2}{R^2 h^2}\sin^2\theta, & R_{14\,14} = -\dfrac{1}{R^2}, \\[2ex] R_{23\,23} = \dfrac{r^4}{R^2}\sin^2\theta, & R_{24\,24} = -\dfrac{r^2 h^2}{R^2}, & R_{34\,34} = -\dfrac{r^2 h^2}{R^2}\sin^2\theta. \end{array}$$

Să arătăm că :

Spaţiul-timp De Sitter este un spaţiu de tip Einstein.

Pentru aceasta trebuie să dovedim că

$$(4) \qquad R_{ij} = \frac{\overline{R}}{4} g_{ij},$$

unde R_{ij} este tensorul lui Ricci dat de formula $R_{ij} = g^{ab} R_{iajb}$ şi $\overline{R}$ este scalarul de curbură dat de formula $\overline{R} = g^{ii} R_{ii}$ în care g^{ij} sînt minorii algebrici normalizaţi ai matricei asociate tensorului fundamental g_{ij}.

În cazul nostru obţinem

$$R_{11} = \frac{3}{R^2 h^2}, \quad R_{22} = \frac{3r^2}{R^2}, \quad R_{33} = \frac{3r^2}{R^2}\sin^2\theta, \quad R_{44} = -\frac{3h^2}{R^2}, \text{ şi } \overline{R} = \frac{12}{R^2}.$$

Relaţiile (4) se verifică imediat.

2. După cum a arătat Eisland [1], spaţiul-timp De Sitter este de clasă 1, deci se poate scufunda într-un spaţiu pseudo-euclidian cu cinci dimensiuni, E_5. Se ştie [3] că un spaţiu cu metrică riemanniană este de clasă 1, dacă există tensorul dublu covariant b_{ij}, numit tensorul formei fundamentale de-a doua categorie corespunzător metricii (1), astfel ca să satisfacă ecuaţiile lui Gauss :

$$(5) \qquad R_{ijkl} = e(b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{jk}),$$

unde $e = \pm 1$, iar derivatele covariante în raport cu conexiunea metricii (1) să fie simetrice, adică să satisfacă ecuaţiile lui Codazzi :

$$(6) \qquad b_{ij,k} = b_{ik,j}.$$

Dacă notăm $R^{kl}_{ij} = g^{ka} g^{lb} R_{ab\,ij}$ şi $b^i_j = g^{ik} b_{kj}$, ecuaţiile lui Gauss (5) devin

$$R^{kl}_{ij} = e\,(b^k_i b^l_j - b^l_i b^k_j). \tag{7}$$

Avem 20 de ecuaţii distincte, dintre care 6 au membrul stîng nenul corespunzătoare la doi indici distincţi.

Se obţine uşor $R^{ij}_{ij} = \frac{1}{R^2}$ pentru $i \neq j$ şi din (7) rezultă :

$$b^i_i\, b^j_j - b^j_i\, b^i_j = e\,\frac{1}{R^2}\cdot \tag{8}$$

Să demonstrăm că :

Tensorul b^i_j *are forma canonică*

$$b^i_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{9_1}$$

$$b^i_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, 4,\ i \neq j. \tag{9_2}$$

Într-adevăr, să presupunem că există un indice i_1 astfel ca $b^{i_1}_{i_1} = 0$; atunci rezultă din (8) că pentru $j \neq i_1$ avem $-b^j_{i_1} b^{i_1}_j = e\,\frac{1}{R^2}$, sau mai putem scrie $-g_{jj}\, g^{i_1 i_1}\, (b^j_{i_1})^2 = e\,\frac{1}{R^2}$ de unde rezultă că $b^j_{i_1} \neq 0$, or $j \neq i_1$.

Pe de altă parte considerînd ecuaţia lui Gauss pentru trei indici distincţi $i_1 \neq j_1 \neq j_2$ obţinem

$$b^{i_1}_{i_1}\; b^{j_2}_{j_1} - b^{j_2}_{i_1}\; b^{i_1}_{j_1} = 0$$

şi cum $b^{i_1}_{i_1} = 0$ rezultă că $b^{j_2}_{i_1} = 0$, sau $b^{i_1}_{j_1} = 0$, deci ajungem la o contrazicere. Indicele i_1 fiind ales arbitrar, (9_1) este demonstrată. Pentru a demonstra (9_2) considerăm ecuaţiile :

$$b^i_i\, b^k_l - b^k_i\, b^i_l = 0$$

$$b^l_l\, b^k_i - b^k_l\, b^l_i = 0$$

$$b^i_i\, b^l_l - b^l_i\, b^i_l = e\,\frac{1}{R^2}$$

unde $i \neq l \neq k$.

Din primele două ecuaţii obţinem :

$$b^k_l\, b^k_i\, (b^i_i\, b^l_l - b^l_i\, b^i_l) = 0$$

şi ţinînd cont de-a treia ecuaţie rezultă $b^k_l\, b^k_i = 0$ $(i \neq l \neq k)$ ceea ce arată (9_2).

Pentru a determina pe e presupunem că $e = -1$ şi fixăm indicele i_1. Există atunci indicii j' şi j'' diferiţi de i_1 astfel ca să avem

$$b^{i_1}_{i_1}\, b^{j'}_{j'} = -\frac{1}{R^2}, \quad b^{i_1}_{i_1}\, b^{j''}_{j''} = -\frac{1}{R^2}, \quad b^{j'}_{j'}\, b^{j''}_{j''} = -\frac{1}{R^2}\cdot$$

Din primele două ecuaţii rezultă că $b^{j'}_{j'}$ şi $b^{j''}_{j''}$ au acelaşi semn, ceea ce contrazice a treia ecuaţie.

Prin urmare $e = +1$ şi b^i_i au toţi acelaşi semn.

Îi considerăm pe toţi pozitivi şi din (8) rezultă

$$b^i_i = \frac{1}{R}. \tag{10}$$

Revenind la notaţia făcută mai înainte, obţinem

$$\begin{gathered} b_{11} = \frac{1}{Rh^2}, \quad b_{22} = \frac{r^2}{R}, \\ b_{33} = \frac{r^2}{R}\sin^2\theta, \quad b_{44} = -\frac{h^2}{R}. \end{gathered} \tag{11}$$

3. Ne propunem acum să determinăm reprezentarea parametrică a spaţiului-timp De Sitter scufundat într-un spaţiu pseudoeuclidian E_5, folosind metoda dată de T. Fujitani, M. Ikeda şi M. Matsumito [4] pentru cazul staţionar al spaţiului-timp Schwarschild.

Fie $\vec{X}(X^1, X^2, X^3, X^4, X^5)$ vectorul unui punct curent al spaţiului-timp De Sitter scufundat în spaţiul pseudoeuclidian E_5 şi $\vec{\xi}$ vectorul unitar normal.

Avem condiţiile de izometrie şi ortogonalitate:

$$< \vec{X}_i, \vec{X}_j > = g_{ij} \tag{12}$$

$$<\vec{\xi}, \vec{\xi}> = +1, \qquad i, j = 1,\dots, 4, \tag{13}$$

$$< \vec{\xi}, \vec{X}_i > = 0, \tag{14}$$

unde $<\ ,\ >$ reprezintă produsul scalar şi $X_i = \partial/\partial x^i$.

Formulele lui Gauss şi Weingarten se scriu sub forma:

$$\vec{X}_{i,j} = eb_{ij}\,\vec{\xi}, \tag{15}$$

$$\vec{\xi}_{,j} = -\,g^{ik}\,b_{ij}\,\vec{X}_k. \tag{16}$$

$$i, j, = 1,\dots, 4.$$

Ecuaţiile (15) pentru $(i, j) = (2, 4)$ şi $(i, j) = (3, 4)$ devin

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\theta\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\varphi\partial t} = 0$$

de unde rezultă că $\vec{X}$ este de forma

$$\vec{X} = \vec{A}\,(t, r) + \vec{P}\,(r, \theta, \varphi). \tag{17}$$

Dacă considerăm funcția $\vec{P}(r, \theta, \varphi)$ de forma $\vec{P}(r, \alpha, \varphi) = M(r). \vec{N}(\theta, \varphi)$ formulele Gauss scrise pentru $(i, j) = (1, 2)$, $(i, j) = (1, 3)$ și $(i, j) = (2, 3)$ ne dau ecuațiile :

$$\frac{\partial M}{\partial r}\frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta} - Mr^{-1}\frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial r}\frac{\partial \vec{N}}{\partial \varphi} - Mr^{-1}\frac{\partial \vec{N}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$M\frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta \partial \varphi} - M\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial \vec{N}}{\partial \varphi} = 0.$$

Din aceste ecuații rezultă că $\vec{X}$ este de forma

$$\vec{X}(r, \theta, \varphi, t) = \vec{A}(r, t) + r(\vec{B}(\theta) + \sin\theta\, \vec{C}(\varphi)). \tag{18}$$

Pentru $i = j = 2$ și $i = j = 3$, ecuațiile (15) ne dau :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \theta^2} + h^2 r \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} = \frac{r^2}{R}\vec{\xi}, \\ &\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \varphi^2} + h^2 r \sin^2\theta \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} + \sin\theta\cos\theta \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} = \frac{r^2 \sin^2\theta}{R}\vec{\xi}. \end{aligned} \tag{19}$$

Înlocuind în ecuațiile (19) funcția $\vec{X}(r, \theta, \varphi, t)$ dată de (18), înmulțind apoi prima ecuație cu $\sin^2\theta$, scăzîndu-le și separînd variabilele, obținem ecuația :

$$\sin\theta \frac{\partial^2 \vec{B}(\theta)}{\partial \theta^2} - \cos\theta \frac{\partial \vec{B}}{\partial \theta} = \vec{C}(\varphi) + \frac{\partial^2 \vec{C}(\varphi)}{\partial \varphi^2} \cdot \tag{20}$$

Evident, ambii membri ai ecuației trebuie să fie egali cu un același vector constant. Rezultă astfel două ecuații diferențiale care prin integrare ne dau

$$\vec{C}(\varphi) = \sin\varphi\, \vec{a} + \cos\varphi\, \vec{b} + \vec{d},$$

$$\vec{B}(\varphi) = -\sin\theta \vec{d} + \cos\theta \vec{c} + \vec{e}.$$

Înlocuind pe $\vec{B}(\theta)$ și $\vec{C}(\varphi)$ în (18) și înglobînd vectorul constant $\vec{e}$ în funcția $\vec{A}(t, r)$, obținem :

$$\vec{X}(r, \theta, \varphi, t) = \vec{A}(t, r) + r(\sin\theta \sin\varphi \vec{a} + \sin\theta \cos\varphi \vec{b} + \cos\theta \vec{C}), \tag{21}$$

unde $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, sînt trei vectori constanți pe care-i vom determina folosind condițiile de izometrie și ortogonalitate.

Din condiţiile (12) rezultă ecuaţiile

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&< \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} > = r,\\
&< \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} > = 0,\\
&< \frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} > r \sin^2\theta,
\end{aligned}
$$

unde am notat cu $\vec{S}$ expresia

$$
(23)\qquad \vec{S}(\theta, \varphi) = \sin\theta \sin\varphi\, \vec{a} + \sin\theta \cos\varphi\, \vec{b} + \cos \vec{c}.
$$

Înlocuind pe $\vec{S}(\theta, \varphi)$ din (23) în (22), obţinem în cele din urmă

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&< \vec{a}, \vec{a} > = +1, \quad < \vec{b}, \vec{b}, > = +1, \quad < \vec{c}, \vec{c} > = +1\\
&< \vec{a}, \vec{b} > = 0 \quad < \vec{b}, \vec{c} > = 0 \quad < \vec{a}, \vec{c} > = 0.
\end{aligned}
$$

De aici rezultă că vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sînt unitari şi ortogonali doi cîte doi. Putem considera că ei sînt chiar primii trei versori ai axelor de coordonate ai spaţiului pseudoeuclidian E_5.

Deci $\vec{a} = \vec{e}_1$, $\vec{b} = \vec{e}_2$, $\vec{c} = \vec{e}_3$.

Din (23) rezultă că vectorii $\partial\vec{S}/\partial\theta$ şi $\partial\vec{S}/\partial\varphi$ sînt în hiperplanul determinat de vectorii $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Dacă punem $(i, j) = (1, 2)$ şi $(i, j) = (1, 3)$ în (12), obţinem ecuaţiile :

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\partial \vec{A}\,(r, t)}{\partial r} + \vec{S}(\theta, \varphi), \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} > = 0\\
&< \frac{\partial \vec{A}(r, t)}{\partial r} + \vec{S}(\theta, \varphi), \frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} > = 0
\end{aligned}
$$

şi înlocuind pe $\vec{S}(\theta, \varphi)$ din (23) rezultă uşor

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\partial \vec{A}(r, t)}{\partial r}, \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} > = 0\\
&< \frac{\partial A(r, t)}{\partial r}, \frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} > = 0.
\end{aligned}
$$

Deci putem considera $\vec{A}(r, t)$ ca fiind un vector în planul determinat de vectorii $\vec{e}_4$ şi $\vec{e}_5$ (eventual printr-o translaţie).

Să trecem la determinarea funcției vectoriale $\vec{A}(t, r)$. Pentru $(i, j) = (1, 4)$ formula lui Gauss ne dă

$$\frac{\partial^2 \vec{A}(r, t)}{\partial r \partial t} + \frac{r}{R^2 h^2} \frac{\partial \vec{A}(r, t)}{\partial t} = 0. \tag{25}$$

Integrînd această ecuație obținem

$$\vec{A}(t, r) = h\vec{T}(t) + \vec{\mathcal{L}}(r) \tag{26}$$

constanta de integrare fiind inclusă în funcția $\vec{T}(t)$.

Pentru indicii $i = j = 4$ formula lui Gauss ne dă

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} + \frac{h^2 r}{R^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} = -\frac{h^2}{R} \vec{\xi}. \tag{27}$$

Pe de altă parte, formula lui Weingarten ne dă

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}. \tag{28}$$

Derivînd ecuația (27) în raport cu t și ținînd cont de ecuațiile (25) și (28) obținem

$$\dddot{\vec{T}} - \frac{1}{R^2} \vec{T} = 0, \tag{29}$$

unde punctul înseamnă derivata în raport cu timpul.

Soluția acestei ecuații este

$$\vec{T}(t) = R \operatorname{sh} \frac{t}{R} \vec{m} + R \operatorname{ch} \frac{t}{R} \vec{n} \tag{30}$$

dacă produsul dintre constanta de integrare și funcția h este inclus în funcția $\vec{\mathcal{L}}(r)$.

Condițiile de izometrie (12), pentru $(i, j) = (1, 1)$, $(i, j) = (1, 4)$ și $(i, j) = (4, 4)$, ne dau

$$< \frac{\partial \vec{A}(t, r)}{\partial r} + \vec{S}(\theta, \varphi), \quad \frac{\partial \vec{A}(t, r)}{\partial r} + \vec{S}(\theta, \varphi) > = \frac{R^2}{R^2 - r^2}, \tag{31}$$

$$< \frac{\partial \vec{A}(t, r)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{A}(t, r)}{\partial r} + \vec{S}(\theta, \varphi) > = 0, \tag{32}$$

$$< \frac{\partial \vec{A}(t, r)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{A}(t, r)}{\partial t} > = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{33}$$

Înlocuind pe $\vec{T}(t)$ din (30) în (33) găsim că

$$< \vec{m}, \vec{m} > = -1, \quad < \vec{n}, \vec{n} > = +1, \quad < \vec{m}, \vec{n} > = 0. \tag{34}$$

Vom lua $\vec{m} = e_4$ şi $\vec{n} = \vec{e}_5$.

Înlocuind pe $\vec{S}(\theta, \varphi)$ din (23) şi pe $\vec{T}(t)$ din (30) în ecuaţiile (31) şi (32) şi ţinînd cont de (34) găsim că $\vec{\mathcal{E}}(r)$ este un vector ortogonal pe $\vec{e}_4$ şi $\vec{e}_5$. Pe de altă parte el este prin ipoteză ortogonal cu $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ şi $\vec{e}_3$, deci este vectorul nul.

Prin urmare, funcţia de scufundare este

$$\vec{X}\,(r, \theta, \varphi, t) = r(\sin\theta \sin\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3) + $$
$$+ R\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{R}\,\vec{e}_4 + R\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{R}\,e_5$$

unde

$$< e_i, e_i > = +1, \; i = 1, 2, 3, 5$$
$$< e_4, e_4 > = -1, \; < e_i, e_j > = 0 \;\; i \neq j \;\; i, j = 1, \ldots, 4.$$

Putem enunţa acum următorul rezultat:

TEOREMĂ. *Spaţiul-timp De Sitter se poate scufunda într-un spaţiu pseudoeuclidian cu cinci dimensiuni E_5 de signatură $+++-+$ avînd reprezentarea parametrică:*

$$X^1 = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$X^2 = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$X^3 = r\cos\theta,$$
$$X^4 = \sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{sh}\frac{t}{R},$$
$$X^5 = \sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{R}.$$

Primită la redacţie la 3 martie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. EISLAND, Trans. Amer. Math. Soc., 213 (1925).
2. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială.* vol. I, Bucureşti, 1962.
3. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială,* vol. II, Bucureşti, 1964.
4. T. FUJITANI, M. IKEDA, M. MATSUMOTO, Journ. of Math. Kyoto University, **I,** 43, (1963).

ASUPRA MIŞCĂRII SUBSONICE ÎN JURUL UNUI CILINDRU CIRCULAR

DE

DAN SOCOLESCU

În lucrare se studiază cu ajutorul celor trei variante ale metodei hodografice aproximative a lui Ciaplîghin mişcarea subsonică în jurul cilindrului circular. Din compararea rezultatelor obţinute, rezultă că varianta dată de Caius Iacob conduce la obţinerea de valori intermediare celor obţinute prin celelalte două variante.

1. Mişcarea subsonică a unui fluid perfect, compresibil în jurul unui cilindru circular a constituit obiectul a numeroase cercetări.

Pentru determinarea acestei mişcări s-au folosit metode de aproximaţie directe, care folosesc ca variabile coordonatele planului fizic al mişcării şi metode de aproximaţie hodografice, ce utilizează ca variabile coordonatele planului hodografic.

În această lucrare vom folosit metoda de aproximaţie hodografică a lui Ciaplîghin, aşa cum a fost ea dezvoltată în [1].

Mişcarea în jurul cilindrului circular nu a fost studiată decît în două din variantele acestei metode [2], [3], [4].

În cele ce urmează ne propunem reexaminarea şi tratarea unitară a mişcării în jurul cilindrului circular folosind simultan cele trei variante cunoscute şi în special compararea rezultatelor obţinute prin varianta coardei dată de C. Iacob, cu cele obţinute prin celelalte două variante.

2. În metoda lui Ciaplîghin se înlocuieşte mişcarea fluidului real supus legii adiabatice $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$ prin mişcarea unui fluid fictiv supus unei legi liniare :

$$p = C\frac{1}{\rho} + C', \tag{1}$$

unde C, C' sînt constante arbitrare.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 1169–1176, BUCUREŞTI, 1965

Această aproximaţie conduce în ultimă instanţă la o corespondenţă între mişcarea fluidă compresibilă din planul (z) şi o mişcare fluidă incompresibilă din planul (Z) [1], p. 1060.

Notînd potenţialul complex al mişcării incompresibile cu $f(Z)$, corespondenţa planelor fizice va fi dată de :

$$\mathrm{d}z = C_1 \mathrm{d}Z + C_2 \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\right)^2}\, \mathrm{d}Z, \tag{2}$$

unde C_1, C_2 sînt constante ce depind de alegerea lui C, C'. Considerarea în planul (Z) a unui cerc $|Z| = 1$, conduce, conform relaţiei (2), la obţinerea în planul (z) a unui obstacol cvasicircular.

Notînd cu V modulul vitezei complexe în planul (z), iar cu $V^{(0)}$ modulul vitezei în planul (Z), relaţia de legătură dintre aceste viteze va fi de forma :

$$\frac{1}{V} = \frac{C_1}{V^{(0)}} + C_2 V^{(0)}. \tag{3}$$

Alegerea coeficienţilor C, C' a condus la considerarea a trei variante :

varianta Ciaplîghin-Demtchenko care aproximează curba adiabatică prin tangenta la curbă în punctul de viteză nulă ;

varianta Kármán-Tsien care aproximează curba adiabatică prin tangenta la curbă în punctul de viteză $V = V_1$ — viteza la infinit ;

varianta Caius Iacob care aproximează curba adiabatică printr-o coardă dusă prin punctele de viteză $V = 0$, $V = V_1$.

3. Fie acum în planul (Z) o mişcare incompresibilă cu viteza la infinit $\widetilde{V}_1$, perturbată de un obstacol circular de rază unitate, centrat în origine.

Alegem axa Ox paralelă cu viteza $\widetilde{V}_1$.

Potenţialul complex al mişcării va fi :

$$f(Z) = \widetilde{V}_1 \left(Z + \frac{1}{Z}\right). \tag{4}$$

Din (2), (4) se obţin ecuaţiile parametrice ale obstacolului cvasicircular din planul (Z) sub forma :

$$\begin{aligned} x &= (C_1 + 4C_2\widetilde{V}_1^2)\cos\sigma - \frac{4}{3} C_2\widetilde{V}_1^2\cos^3\sigma, \\ y &= C_1 \sin\sigma + \frac{4}{3} C_2\widetilde{V}_1^2\sin^3\sigma. \end{aligned} \tag{5}$$

Relaţiile (5) ne arată că obstacolul cvasicircular obţinut este simetric faţă de axele de coordonate.

Dacă notăm cu c_0 — viteza sunetului în punctul de viteză nulă iar cu c_1 — viteza sunetului la infinit, putem introduce numărul lui Mach $M_1 = \frac{V_1}{c_1}$, respectiv numărul lui Ciaplîghin $M_0 = \frac{V_1}{c_0}$.

Cele două numere se găsesc în relaţiile :

$$M_0 = \frac{M_1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}}, \qquad M_1 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}}. \tag{6}$$

În funcţie de numerele Mach, respectiv Ciaplîghin, putem exprima coeficienţii C_1, C_2 în fiecare din cele trei variante :

	Varianta Ciaplîghin-Demtchenko	Varianta Kármán-Tsien	Varianta Caius Iacob
$C_1 =$	$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + M_0^2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}\right)$	$\frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}\right]$
$C_2 =$	$\frac{1}{2\tilde{V}_1^2}\left(1 - \sqrt{1 + M_0^2}\right)$	$\frac{1}{2\tilde{V}_1^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}\right)$	$\frac{1}{2\tilde{V}_1^2}\left[1 - \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}\right]$

Din motive de simetrie vom nota

$$C_1' = C_1, \qquad C_2' = C_2 \tilde{V}_1^2. \tag{7}$$

Înlocuind expresiile coeficienţilor C_1, C_2 în realţiile (5), obţinem :

Varianta Ciaplîghin-Demtchenko

$$x_1 = \left[\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{1 + M_0^2}\right]\cos\sigma - \frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{1 + M_0^2}\right)\cos^3\sigma$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + M_0^2}\right)\sin\sigma + \frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{1 + M_0^2}\right)\sin^3\sigma$$

cu semiaxele :

$$a_1 = \frac{11}{6} - \frac{5}{6}\sqrt{1 + M_0^2},$$

$$b_1 = \frac{7}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{1 + M_0^2}.$$

Varianta Kármán-Tsien

$$x_2=\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}}\right)\cos\sigma-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}}\right)\cos^3\sigma$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}}\right)\sin\sigma+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}}\right)\sin^3\sigma$$

cu semiaxele :

$$a_2=\frac{11}{6}-\frac{5}{6}\,\frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}}$$

$$b_2=\frac{7}{6}-\frac{1}{6}\,\frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}}$$

Varianta Caius Iacob

$$x_3=\left[\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}\right]\cos\sigma+\frac{2}{3}\left[\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}-\right.$$
$$\left.-1\right]\cos^3\sigma$$

$$y_3=\frac{1}{2}\left[1+\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}\right]\sin\sigma-\frac{2}{3}\left[\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}-\right.$$
$$\left.-1\right]\sin^3\sigma$$

cu semiaxele :

$$a_3=\frac{11}{6}-\frac{5}{6}\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$b_3=\frac{7}{6}-\frac{1}{6}\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}.$$

4. Pentru simplificarea notaţiilor vom scrie ecuaţiile obstacolelor cvasicirculare sub forma :

$$\begin{aligned} x_i &= c_i\cos\sigma+e_i\cos^3\sigma & & a_i=c_i+e_i \\ & \qquad\text{cu semiaxele} & & i=1,2,3. \\ y_i &= d_i\sin\sigma-e_i\sin^3\sigma & & b_i=d_i-e_i \end{aligned} \tag{8}$$

Avem satisfăcute inegalităţile :

$$\sqrt{1+M_0^2} < \left(1-\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} < \frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}}. \tag{9}$$

În ipoteza $M_1 \leqslant 0{,}8$ rezultă, ţinînd seama de (9) :

$$\begin{array}{ll} c_1 > c_3 > c_2 > 0 & \\ e_2 > e_3 > e_1 > 0 & a_1 > a_3 > a_2 > 0, \\ d_2 > d_3 > d_1 > 0 & b_1 > b_3 > b_2 > 0. \end{array} \tag{10}$$

Datorită simetriei obstacolelor cvasicirculare, vom limita domeniul de variaţie al lui σ la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Să intersectăm cele trei obstacole cvasicirculare cu dreapta $y = mx$ şi să notăm cu σ_1, σ_2, σ_3 unghiurile corespunzătoare celor trei puncte de intersecţie.

Vom obţine ecuaţiile :

$$F_i(\mathrm{tg}\sigma) \equiv b_i\,\mathrm{tg}^3\sigma - mc_i\,\mathrm{tg}^2\sigma - e_i\,\mathrm{tg}\sigma - ma_i = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{11}$$

care admit respectiv cîte o singură soluţie pozitivă.

În cazurile limită, cînd dreapta $y = mx$ devine $y = 0$, respectiv $x = 0$, vom obţine soluţiile :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \text{respectiv} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Excluzînd cazurile $m = 0$, $m = \infty$, din compararea ecuaţiilor (11) rezultă :

$$\mathrm{tg}\sigma_1 > \mathrm{tg}\sigma_3 > \mathrm{tg}\sigma_2. \tag{13}$$

În aceste condiţii, din (13) rezultă

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_3 \geqslant \sigma_2 \tag{14}$$

egalitatea subzistînd numai în cazurile limită (12).

Să notăm cu $r_i^2 = x_i^2(\sigma_i) + y^2(\sigma_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ pătratul distanţei calculat pe raza vectoare.

Lucrînd în aproximaţia lui M_0^4, vom obţine :

$$r_1^2 - r_3^2 = \frac{2}{3}\left(\sin^2\sigma_1 - \sin^2\sigma_3\right)M_0^2 + E_1\left(\sigma_1, \sigma_3\right)M_0^4,$$

$$r_3^2 - r_2^2 = \frac{2}{3}\left(\sin^2\sigma_3 - \sin^2\sigma_2\right)M_0^2 + E_2\left(\sigma_2, \sigma_3\right)M_0^4,$$

unde $E_1(\sigma_1\,;\,\sigma_3)$, $E_2(\sigma_2\,;\,\sigma_3)$ sînt expresii esențial pozitive date de relațiile :

$$E_1(\sigma_1,\sigma_3)=\frac{5(\gamma+1)}{24}-\frac{1}{3}\sin^4\sigma_1-\frac{\gamma+1}{6}\sin^2\sigma_3+\frac{1}{3}\sin^4\sigma_3, \tag{16}$$

$$E_2(\sigma_2,\sigma_3)=\frac{5(\gamma+1)}{24}-\frac{\gamma+1}{3}\sin^2\sigma_2+\frac{1}{3}\sin^4\sigma_2+\frac{\gamma+1}{6}\sin^2\sigma_3-\frac{1}{3}\sin^4\sigma_3.$$

Conform cu (14) rezultă :

$$r_1>r_3>r_2. \tag{17}$$

Relația (17) exprimă faptul că cele trei obstacole cvasicirculare nu se intersectează, iar obstacolul cvasicircular corespunzător variantei a treia ocupă poziția intermediară.

5. Să considerăm acum cazul particular în care $M_1 = 0{,}4$. Calculînd valorile coeficienților C_1, C_2 în cazul fiecărei variante, ecuațiile parametrice (5) devin :

Varianta Ciaplîghin - Demtchenko :

$$\begin{array}{lcl} x_1 = 0{,}88795\cos\sigma + 0{,}0498\cos^3\sigma & & a_1 = 0{,}93775, \\ & \text{cu semiaxele} & \\ y_1 = 1{,}03735\sin\sigma - 0{,}0498\sin^3\sigma & & b_1 = 0{,}98755. \end{array}$$

Varianta Kármán - Tsien :

$$\begin{array}{lcl} x_2 = 0{,}86335\cos\sigma + 0{,}06037\cos^3\sigma & & a_2 = 0{,}92372, \\ & \text{cu semiaxele} & \\ y_2 = 1{,}04555\sin\sigma - 0{,}06037\sin^3\sigma & & b_2 = 0{,}98518. \end{array}$$

Varianta Caius Iacob

$$\begin{array}{lcl} x_3 = 0{,}877507\cos\sigma + 0{,}054441\cos^3\sigma & & a_3 = 0{,}931948, \\ & \text{cu semiaxele} & \\ y_3 = 1{,}040831\sin\sigma - 0{,}054441\sin^3\sigma & & b_3 = 0{,}98630. \end{array}$$

6. *Calculul distribuției vitezelor pe obstacolul cvasicircular.* Modulul vitezei pe obstacolul circular este dat de

$$V^{(0)}\Big|_{|Z|=1}=\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\right|_{|Z|=1}=2\widetilde{V}_1\left|\sin\sigma\right|\cdot$$

Din (3) rezultă distribuția modulului vitezei pe obstacolul cvasicircular :

$$\frac{1}{V}=\frac{C_1}{2\widetilde{V}_1|\sin\sigma|}+2C_2\widetilde{V}_1\left|\sin\sigma\right|\cdot \tag{18}$$

Punctele de viteză maximă se obțin pentru $\sigma=\frac{\pi}{2}$ și $\sigma=\frac{3\pi}{2}\cdot$ Din (7) și (18) rezultă :

$$\frac{V_{\max}}{\widetilde{V}_1}=\frac{2}{C_1'+4C_2'}\,. \tag{19}$$

Cunoscînd valorile coeficienţilor C_1', C_2' precum şi relaţia de legătură dintre $\widetilde{V}_1$ şi V_1 în cazul fiecărei variante, obţinem viteza maximă.

În tabelul de mai jos sînt prezentate valorile obţinute pentru V_{max} şi cele 3 variante, care sînt comparate şi cu valorile obţinute prin alte metode, pe care le extragem din lucrările lui I. Imaï [5], D.D. Meksyn [6] şi A.B. Tayler [7].

Am adoptat pentru numărul Mach valoarea $M_1 = 0{,}4$.

Tabel

	Varianta Ciaplîghin	Varianta Kármán-Tsien	Varianta Caius Iacob	Imaï	Woods	Tayler	Meksyn
$\frac{V_{max}}{V_1}$	2,2523	2,3165	2,2791	2,284	2,42	2,54	2,44

7. *Determinarea numărului Mach critic.* În mişcarea subsonică $V_{max}^2 = c^2 = c_1^2\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{V_{max}^2 - V_1^2}{c_1^2}\right)$.

Rezultă :

$$V_{max}^2 = \frac{2c_1^2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\, M_1^2\right). \tag{20}$$

Din (19) şi (20) rezultă ecuaţia pentru determinarea numărului Mach critic :

$$\frac{\sqrt{2 + (\gamma - 1)\, M_1^2}}{\sqrt{\gamma + 1}} = \frac{\widetilde{V}_1}{c_1}\,\frac{2}{C_1' + 4C_2'}. \tag{21}$$

Particularizînd coeficienţii C_1', C_2' şi dependenţa dintre $\widetilde{V}_1$, respectiv V_1, conform variantelor studiate, se obţin ecuaţiile pentru determinarea numărului Mach critic pentru fiecare variantă a metodei.

Varianta Ciaplîghin-Demtchenko. Din (6), (21) rezultă ecuaţia :

$$\frac{8\gamma - 1}{16}\, M_0^{*2} - \frac{5\sqrt{2\gamma + 2}}{4}\, M_0^* + 1 = 0.$$

Singura soluţie convenabilă este :

$$M_0^* = 0{,}40253.$$

Din a doua relaţie (6) rezultă :

$$M_1^* = 0{,}40929.$$

Varianta Kármán - Tsien. Notînd $\lambda = \sqrt{1 - M_1^2}$, din (21) rezultă ecuaţia :

$$(41 - 9\gamma)\lambda^4 + 30(\gamma - 1)\lambda^3 + 18\lambda^2 - 30(\gamma + 1)\lambda + 9(\gamma + 1) = 0.$$

Singura soluție convenabilă satisface inegalitatea :

$$0{,}91651 < \lambda^* < 0{,}91652.$$

Rezultă :

$$0{,}39998 < M_1^* < 0{,}40001.$$

Varianta Caius Iacob. Din (6), (21) rezultă ecuația

$$0{,}375\gamma M_0^4 + 1{,}5\, M_0^2 + 2\sqrt{2\gamma + 2}\; M_0 - 2 = 0.$$

Singura soluție pozitivă satisface inegalitatea

$$0{,}3984 < M_0^* < 0{,}3985.$$

Din a doua relație (6) rezultă :

$$0{,}40496 < M_1^* < 0{,}40506.$$

8. *Concluzii.* Din cele de mai sus rezultă, la fel ca în cazul deja studiat de Ko Tamada, că metoda lui Ciaplîghin conduce în toate cele trei variante studiate la rezultate mult mai în acord cu realitatea, decît dacă se ține seama de distorsiunea obstacolului, la care conduce formula (2). Se știe că dacă s-ar ține seama de această distorsiune am obține $0{,}4153 < M_1^* < 0{,}4159$ [8].

Avem de-a face aici cu o suprapunere a două efecte contrarii care au fost deja puse în evidență de H.S. Tsien într-un caz particular [9].

Primită la redacție la 13 februarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, București, 1961.
2. C. Iacob, *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles.* Portugaliae mathematica, **1** (1939).
3. H.S. Tsien, *Two dimensional Subsonic Flow of Compressible Fluids.* Journal of Aero. Sc., **6**, 399–407 (1939).
4. Ko Tamada, *Application of the Hodograph Method to the flow of a compressible fluid past a circular Cylinder,* Proc. of Phys. Math. Society of Japan, **22**, 208–219 (1940).
5. I. Imaï, *Compressible Fluid Flow past a Circular Cylinder.* Proc. of Phys. Math. Society of Japan, **23**, 180–194 (1941).
6. D.D. Meksyn, *Integration of the equations of transonic flow in two dimensions.* Proc. Royal Soc., **220**, 239–254 (1953).
7. A.B. Tayler, *A rapidly convergent procedure for solving the equations of subsonic potential flow.* Proc. Royal Soc., **255**, 101–113 (1960).
8. C. Iacob, *Studiul comparat al variantelor metodei de aproximație a lui S.A. Ciaplighin în problema mișcării subsonice în jurul unui cilindru circular.* Bul. științ. Acad. R.P.R., **3**, 293–302 (1951).
9. Y. H. Kuo–W.R. Sears, *Plane Subsonic and Transonic Potential Flows*, in *General Theory of High Speed Aerodynamics*, vol. VI, p. 509.

RECENZIE

SOLOMON MARCUS, *Gramatici și automate finite*. Editura Academiei R.P.R., București, 1964, 255 p.

În ultima vreme, diferite clase de mașini Turing sînt adoptate ca modele ale gramaticilor limbilor naturale. Cartea de față studiază, din acest punct de vedere, cel mai particular tip de mașină Turing, mașina de tipul automatului finit. În capitolul I se prezintă gramaticile cu un număr finit de stări, introduse și studiate de N. Chomsky și G. Miller. În capitolul II se dau condiții ca limba generată de o gramatică cu un număr finit de stări să fie infinită și se reconsideră unele rezultate ale lui Chomsky, stabilite de acesta pe o cale defectuoasă. Capitolul III este consacrat prezentării automatelor finite, în versiunea Rabin-Scott. În acest capitol se remarcă în special paragrafele 7—11, în care se introduce, în studiul automatelor finite, aparatul matematic din teoria analitică a gramaticii, inițiată de O.S. Kulagina. Se dau noi criterii de reprezentabilitate a unui eveniment în automate finite și se valorifică, în studiul evenimentelor reprezentabile în automate finite, ideea de distribuție, fundamentală în lingvistica descriptivă. În capitolul IV se stabilește echivalența dintre automatele finite și gramaticile cu un număr finit de stări, pornindu-se de la lucrările lui V. Bar-Hillel. Tot aici se prezintă ierarhia de gramatici ale constituienților imediați, ierarhie construită de Chomsky, și se stabilește locul, în această ierarhie, a gramaticilor cu un număr finit de stări. Capitolul V este consacrat expunerii evenimentelor regulate în sensul lui Kleene și grafurilor finite, orientate și marcate, studiate de Karel Čulik. Atrage atenția în mod deosebit capitolul VI, consacrat aplicațiilor gramaticilor cu un număr finit de stări în studiul limbilor naturale; aici se delimitează diferite porțiuni infinite ale limbilor naturale, care pot fi generate cu ajutorul unui automat finit. Ultimul capitol, VII, conține un mare număr de observații relative la probleme nerezolvate, completări bibliografice, semnificații lingvistice etc. Cartea se încheie cu o bibliografie de aproape 400 de titluri, conținînd cele mai recente lucrări din domeniul gramaticilor generative și al teoriei automatelor finite.

Consacrată unuia dintre cele mai actuale domenii ale științei, cartea *Gramatici și automate finite*, în ciuda timpului relativ scurt care s-a scurs de la apariția ei, a și stîrnit interesul specialiștilor din numeroase țări. În recenzia apărută în ,,Voprosî iazîkoznania'', nr. 1, 1965, se dă o deosebită apreciere semnificațiilor lingvistice ale rezultatelor expuse în această carte și, îndeosebi, împletirii modelelor analitice cu cele generative, împletire care este una dintre ideile originale ale cărții. În recenzia apărută în ,,Novîe knigi za rubejom'', nr. 4, 1965, se recomandă traducerea acestei cărți în limba rusă iar în recenzia din ,,Canadian mathematical bulletin'', nr. 4, 1965 se recomandă traducerea ei în limba engleză.

C. Crăciun

CONGRESUL INTERNAŢIONAL AL MATEMATICIENILOR
MOSCOVA – 1966

(Prima informare)

Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. are onoarea de a anunţa că între 16–26 august 1966 va avea loc la Moscova Congresul Internaţional al Matematicienilor.

Reuniunile zilnice ale diverselor secţii ale Congresului vor fi consacrate scurtelor comunicări ale membrilor acestui Congres. În afară de acestea se vor include în programul ştiinţific al Congresului şi rapoarte (avînd o durată de 30 pînă la 60 de minute) ale invitaţilor.

Matematicienii care doresc să prezinte comunicări (avînd o durată de 10 pînă la 15 minute) pot aduce aceasta la cunoştinţă după primirea celei de-a doua informări.

Congresul va cuprinde cincisprezece secţii :

1. Logică matematică şi fundamentele matematicii
2. Algebră
3. Teoria numerelor
4. Analiză clasică
5. Analiză funcţională
6. Ecuaţii diferenţiale ordinare
7. Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale
8. Topologie
9. Geometrie
10. Geometrie algebrică şi varietăţi complexe
11. Calculul probabilităţilor şi statistică
12. Matematici aplicate şi fizică matematică
13. Probleme matematice ale sistemelor de control
14. Matematică numerică
15. Istoria matematicii şi probleme de învăţămînt.

Limbile utilizate la lucrările Congresului vor fi franceza, germana, engleza şi rusa.

Orice corespondenţă va fi adresată într-una din limbile susmenţionate.

Informaţii suplimentare cu privire la Congres şi la condiţiile de participare se pot obţine de la :

Secretariatul Congresului Internaţional al Matematicienilor.
Universitatea din Moscova, Moscova, V-234, U.R.S.S.

SIMPOZIONUL INTERNAȚIONAL
ASUPRA
ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ȘI SISTEMELOR DINAMICE

Între 27 și 30 decembrie 1965 va avea loc la Universitatea din Puerto Rico, Colegiul Agriculturii și Artelor Mecanice, Mayaguez, Puerto Rico, un simpozion internațional asupra ecuațiilor diferențiale și sistemelor dinamice. Scopul acestui simpozion este de a discuta dezvoltarea ulterioară, în cadrul teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare și a temelor apropiate, a rezultatelor expuse la „Simpozionul internațional asupra ecuațiilor diferențiale neliniare și mecanicii neliniare", ținut în 1961 la Academia Forțelor Aeriene ale Statelor Unite ale Americii, Colorado Springs, Colorado.

Un număr de invitați de onoare vor conduce desfășurarea lucrărilor din următoarele domenii : oscilații, stabilitate și control, fenomene de ereditate, teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale ordinare, precum și unele teme speciale din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. De asemenea va exista un număr limitat de comunicări relative la temele menționate mai sus.

Acest simpozion va fi organizat, în colaborare, de către Oficiul de Cercetări Științifice ale Forțelor Aeriene, Universitatea din Puerto Rico și Brown University.

Informații suplimentare se pot obține de la

Center for Dynamical Systems, Brown University, Providence, Rhode Island.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1963

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 309 p., 15 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systémes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Oeuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

1966 FEB -4

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 7, P. 995–1180, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informaţia" – c. 2488 | 43831 | **Lei 12.**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

8

TOMUL 17

1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. Gr. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU — membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1966.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.
Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție, pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47 București
Revista apare de 10 ori pe an

TOM. 17, Nr. 8

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Asupra teoremei lui Weierstrass de aproximare a funcţiilor continue de mai multe variabile prin polinoame 1183
L. LIVOVSCHI, Minimizarea automatelor asincrone 1189
VIORICA IACOB, Generalizarea unei formule de cvadratură a lui F. Tricomi 1221
DAN PASCALI, Teoremele de scufundare Sobolev-Kondraşev . . 1231
OLEG ARAMĂ, Asupra unor evaluări ale funcţiilor derivabile, cu aplicaţii la studiul problemei polilocale (II) 1263
MIHAI ŞABAC, O caracterizare a topologiilor local convexe în care aplicaţiile liniare şi mărginite sînt continue 1277
DUMITRU RIPIANU, Asupra problemei bilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare 1281
GH. N. RIZESCU şi N. N. TEODORESCU, Asupra generalizării formulelor lui Frenet 1297
MARINA PORICEL, Corecţii de compresibilitate la mişcarea subsonică în jurul unui obstacol eliptic 1305
ION D. ION, Radical Baer-Mac Coy şi radical Jacobson pentru semigrupuri reticulate 1321
NICOLAE POPA, Obiecte injective în categoria spaţiilor ordonate arhimediene cu elemente axiale 1333
GHEORGHE LUSZTIG, Model de geometrie afină plană peste un corp finit 1337

RECENZII 1341

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 8, P. 1181–1342, BUCUREŞTI, 1965

ASUPRA TEOREMEI LUI WEIERSTRASS DE APROXIMARE A FUNCŢIILOR CONTINUE DE MAI MULTE VARIABILE PRIN POLINOAME

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ o funcţie continuă pe compactul I: $1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_p \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $x_p \geqslant 0$. Se arată că şirul de polinoame

$$B_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\substack{\alpha_0 + \ldots + \alpha_p = n \\ \alpha_i \in N,\ \alpha_i \geqslant 0}} f\left(\frac{\alpha_1}{n}, \frac{\alpha_2}{n}, \ldots, \frac{\alpha_p}{n}\right) \frac{n!}{\alpha_0!\,\alpha_1! \ldots \alpha_p!} x_1^{\alpha_1} \ldots$$

$$\ldots x_p^{\alpha_p} (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_p)^{\alpha_0}$$

converge uniform pe I către $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Pentru $p = 1$, B_n sînt polinoamele lui S. Bernştein.

În această notă ne propunem să demonstrăm următoarea

TEOREMĂ. *Fie* $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *o funcţie continuă pe compactul* I : $1 - x_1 - \ldots - x_p \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_p \geqslant 0$; *şirul de polinoame*

$$B_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n \\ \alpha_i \in N,\ \alpha_i \geqslant 0}} f\left(\frac{\alpha_1}{n}, \frac{\alpha_2}{n}, \ldots, \frac{\alpha_p}{n}\right) \frac{n!}{\alpha_0!\,\alpha_1! \ldots \alpha_p!} \times$$

$$\times x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p} (1 - x_1 - x_2 \ldots - x_p)^{\alpha_0}$$

converge uniform pe I *către* $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

ST. CERC. MAT., TOM 17, Nr. 8, P. 1183 – 1187, BUCUREŞTI, 1965

Demonstraţie. Pentru n întreg avem succesiv

$$(1)\qquad (x + x_1 + \ldots + x_p)^n = \sum_{\alpha} \frac{n!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_p!}\, x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

$$(2)\qquad n x_k (x_0 + x_1 + \ldots + x_p)^{n-1} = \sum_{\alpha} \frac{n!\,\alpha_k}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_p!}\, x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

$$(3)\qquad n x_k (x_0 + x_1 \ldots + x_p)^{n-1} + n(n-1) x_k^2 (x_0 + x_1 + \ldots + x_p)^{n-2} =$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{n!\,\alpha_k^2}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_p!}\, x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}.$$

Dacă punem $x_0 = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_p$, relaţiile (1), (2), (3) se transformă în

$$(1')\qquad 1 = \sum_{\alpha} \frac{n!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

$$(2')\qquad n x_k = \sum_{\alpha} \frac{n!\,\alpha_k}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

$$(3')\qquad n x_k + n(n-1) x_k^2 = \sum_{\alpha} \frac{n!\,\alpha_k^2}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, p$. Dacă înmulţim pe (1′) cu $n^2 x_k^2$, pe (2′) cu $-2nx_k$ şi adunăm totul la (3′) obţinem

$$(4)\qquad n x_k (1 - x_k) = \sum_{\alpha} (\alpha_k - n x_k)^2 \frac{n!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}$$

şi însumînd în raport cu $k = 1, 2, \ldots, p$, în (4) avem

$$n \sum_{k=1}^{p} x_k (1 - x_k) =$$

$$= \sum_{\alpha} \left[\sum_{1}^{p} (\alpha_k - n x_k)^2 \right] \frac{n!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}.$$

Fie $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un punct fix însă arbitrar în compactul I; să notăm

$$(5)\qquad S'(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\alpha'} \frac{n!}{\alpha_0!\ldots\alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}$$

însumarea întinzîndu-se la numerele $\alpha_0 = n - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ care îndeplinesc condiţiile

$$\left| \frac{\alpha_i}{n} - x_i \right| < \delta, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

δ fiind un număr pozitiv arbitrar. Să notăm

$$(6) \quad S''(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\alpha''} \frac{n!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}$$

suma termenilor din (1′) care nu sînt cuprinşi în (5).

Pentru termenii din $S''(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ avem

$$\left| \frac{\alpha_i}{n} - x_i \right| \geqslant \delta, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

şi conform acestor inegalităţi deducem

$$S''(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\alpha''} \frac{n!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{\alpha} (\alpha_i - n x_i)^2 \frac{n!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p \delta^2 n^2} \sum_{\alpha} \left[\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - n x_i)^2 \right] \frac{n!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p}.$$

Avem evident

$$S''(x_1, x_2, \ldots, x_p) \geqslant 0$$

$$S'(x_1, x_2, \ldots, x_p) + S''(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 1$$

iar din (4), deoarece

$$0 \leqslant x_k(1 - x_k) \leqslant \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right), (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I, \; p \geqslant 2$$

avem şi

$$(7) \qquad S''(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant \frac{1}{\delta^2 n} \cdot \frac{p-1}{p^2}.$$

Să arătăm acum că şirul $B_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ converge uniform pe I către $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Avem

$$(8) \quad |B_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) - f(x_1, x_2, \ldots, x_p)| = \left| \sum_{\alpha} \left[f\left(\frac{\alpha_1}{n}, \ldots, \frac{\alpha_p}{n}\right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - f(x_1, \ldots, x_p) \right] \frac{n!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_p!} (1 - x_1 - \ldots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p} \right|$$

şi din continuitatea uniformă a funcţiei f pe I rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_p^1) - f(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_p^2)| < \varepsilon,$$

pentru orice $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_p^1) \in I$, $(x_1^1, x_2^2, \dots, x_p^2) \in I$, dacă

$$| x_i^1 - x_i^2 | < \delta, \qquad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Avem, pentru $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in I$,

$$| B_n(x_1, x_2, \dots, x_p) - f(x_1, x_2, \dots, x_p) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{n}, \frac{\alpha_2}{n}, \dots, \frac{\alpha_p}{n}\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_p) \right| \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \dots \alpha_p!} \times$$

$$\times (1 - x_1 - \dots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha'} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{n}, \frac{\alpha_2}{n}, \dots, \frac{\alpha_p}{n}\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_p) \right| \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \dots \alpha_p!} \times$$

$$\times (1 - x_1 - \dots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} +$$

$$+ \sum_{\alpha''} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{n}, \frac{\alpha_2}{n}, \dots, \frac{\alpha_p}{n}\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_p) \right| \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \dots \alpha_p!} \times$$

$$\times (1 - x_1 - \dots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p}$$

însă

$$\sum_{\alpha'} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{n}, \frac{\alpha_2}{n}, \dots, \frac{\alpha_p}{n}\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_p) \right| \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \dots \alpha_p!} \times$$

$$\times (1 - x_1 - \dots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{\alpha} \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \dots \alpha_p!} (1 - x_1 - \dots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p} = \varepsilon$$

în virtutea relației (1′). Deoarece $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ este continuă pe I, este mărginită de un număr M. Putem scrie

$$\sum_{\alpha''} \left| f\left(\frac{\alpha_1}{n}, \frac{\alpha_2}{n}, \dots, \frac{\alpha_p}{n}\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_p) \right| \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \dots \alpha_p!} \times$$

$$\times (1 - x_1 - \dots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{\alpha''} \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \dots \alpha_p!} (1 - x_1 - \dots - x_p)^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} \leqslant \frac{2M}{\delta^2 n} \cdot \frac{p-1}{p^2},$$

iar pentru $n > \dfrac{2M}{\delta^2} \dfrac{p-1}{p^2 \varepsilon}$, obținem

$$| B_n(x_1, x_2, \dots, x_p) - f(x_1, x_2, \dots, x_p) | < \varepsilon$$

dacă $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I$. Convergenţa este uniformă deoarece δ, M, p sînt independenţi de punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I$. Teorema este demonstrată.

Pentru $p = 1$, polinoamele B_n sînt polinoamele lui S. Bernştein.

Primită la redacţie la 12 octombrie 1964

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti.

MINIMIZAREA AUTOMATELOR ASINCRONE

DE

L. LIVOVSCHI

Se expune un procedeu unic de minimizare a automatelor asincrone. Procedeul propus este puțin laborios, permite identificarea ușoară a tuturor soluțiilor minimale și este aplicabil și automatelor sincrone.

În lucrarea [1] se studiază minimizarea diferitelor tipuri de automate asincrone cu ajutorul unor metode elaborate de autori. Pentru fiecare tip de automat se recomandă o metodă proprie de minimizare, dar diferitele metode propuse au multe trăsături comune.

În lucrarea de față ne propunem să arătăm că pentru minimizarea automatelor asincrone se poate utiliza un procedeu unic [3].

Procedeul pe care-l propunem este mai puțin laborios decît metodele expuse în lucrarea [1].

1. AUTOMATE ASINCRONE MIXTE

Un automat asincron se numește *mixt* dacă drept semnale de comandă, intermediare și executive, se utilizează semnale de tip diferit, adică impulsuri, semnale potențiale, oscilații de diferite frecvențe și altele.

Alegerea tipului semnalelor nu este arbitrară. Într-adevăr, dacă notăm cu K, Z, W variabilele care descriu semnalele de comandă, intermediare și executive, evoluția automatului este descrisă de două funcții de forma [2]

$$W_N = f(K_N, Z_N), \tag{1_1}$$

$$Z_{N+1} = g(K_N, Z_N). \tag{1_2}$$

Pentru realizarea fizică a funcțiilor (1) se utilizează diferite tipuri de circuite.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 8, P. 1189–1219, BUCUREȘTI, 1965

Tipul circuitelor depinde de tipul semnalelor de comandă, intermediare și executive. Vom conveni ca semnalele de comandă și intermediare să le numim *compozabile* iar semnalele executive și intermediare *realizabile*, dacă există circuite care permit realizarea fizică a funcţiilor (1). Drept exemplu de semnale *necompozabile* (în circuitele utilizate în automatele asincrone) cităm impulsurile. Dimpotrivă, semnalele potenţiale sînt compozabile atît între ele cît și cu impulsurile. Cu ajutorul circuitelor cu relee și contacte se realizează semnale potenţiale dar nu se realizează (de obicei) impulsuri.

2. REPREZENTAREA EVOLUŢIEI UNUI AUTOMAT

Fie un șir de semnale de comandă

$$K^1, K^2, \ldots, K^i, \ldots \tag{2}$$

Aceste semnale sînt în general de tip diferit.

Șirului (2) îi corespunde un șir de semnale executive. Corespondenţa dintre cele două șiruri este de forma

$$\begin{array}{l} K^1, K^2, \ldots, K^i, K^{i+1}, K^{i+2}, \ldots, K^j, K^{j+1}, -, -, - \\ W^1, W^2, \ldots, W^i, -, -, \ldots, -, W^{j+1}, W^{j+2}, W^{j+3}, \ldots \end{array} \tag{3}$$

unde există valori ale lui K cărora nu le corespund semnale la ieșire și valori ale lui W cărora nu le corespund semnale la intrare. În primul caz semnalele K^i nu provoacă semnale executive, iar în al doilea caz automatul are o evoluţie autonomă.

Pentru uniformitatea scrierii putem nota cu K^0 și W^0 locurile rămase libere în (3). Corespondenţa (3) poate fi reprezentată atunci printr-un graf de forma din figura 1.

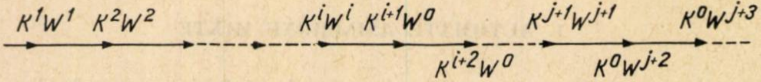


Fig. 1

Vom mai nota nodurile grafului din figura 1 și cu valorile (presupuse deocamdată distincte) variabilei Z astfel încît un arc să fie notat în origine și extremitate respectiv cu valorile Z_N și K_N, care intră ca argumente în (1). În acest mod în extremitatea unui arc vor apare valorile lui W_N și Z_{N+1} din membrii din stînga ai ecuaţiilor (1).

Elementele produsului cartezian

$$K_N \times Z_N$$

al domeniilor de variaţie al variabilelor K și Z (unde valorile lui K și Z sînt luate la același moment N) se numesc *stări* ale automatului. Este ușor de recunoscut că arcele grafului din figura 1 reprezintă stări ale automatului.

Fie acum un şir de perechi $K_N W_N$.

Un asemenea şir va fi numit *elementar*.

Un şir elementar este în general de forma

$$(4) \qquad K^1 W^1, K^2 W^2, \dots, K^s W^s (K^{s+1} W^{s+1}, \dots, K^{s+n} W^{s+n}),$$

unde în paranteză este reprezentat ciclul de perechi cu care trebuie să se termine şirul considerat, dacă numărul de valori al variabilelor K şi W este finit. Graful şirului (4) este arătat pe figura 2 a). Dacă ciclul conţine o singură pereche KW, atunci graful său reprezentativ este cel din figura 2 *f*).

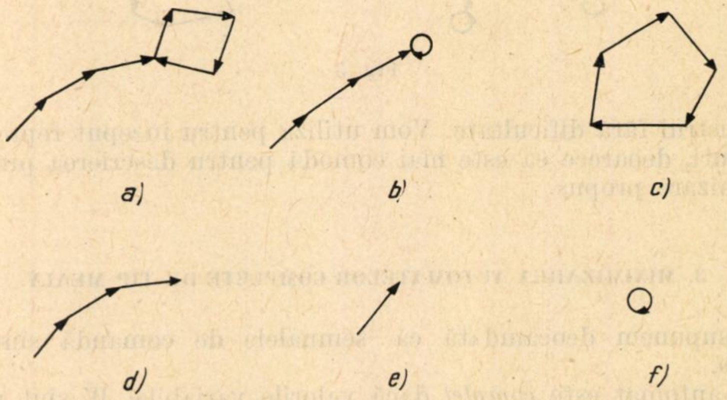


Fig. 2

Un şir elementar poate să nu conţină partea iniţială sau ciclul terminal.

Grafurile corespunzătoare sînt arătate pe figurile 2 c) şi 2 d). În sfîrşit, un şir elementar poate să conţină o singură pereche KW (fig. 2 e)) sau un ciclu cu o singură valoare KW (fig. 2f)).

Fie acum nodurile grafurilor reprezentative ale şirurilor elementare. Vom conveni să zicem că un nod este ***stabil*** dacă el este fie nodul terminal al grafului din figura 2 b), fie nodul grafului din figura 2 f). În toate celelalte cazuri vom zice că un nod este ***nestabil***. Nodurile stabile sînt notate cu un cerc reprezentînd un arc a cărui origine şi extremitate coincid, iar nodurile nestabile sînt notate cu un punct.

Dacă semnalele de comandă sînt potenţiale, atunci un nod nestabil este extremitatea unor arce cărora le corespund stări $K_N Z_n$ de durată limitată. Un nod stabil este extremitatea unor arce cărora le corespund stări $K_N Z_N$ care pot avea o durată oricît de mare.

Dacă semnalele de comandă sînt impulsuri, atunci un nod nestabil este extremitatea unor arce cărora le corespund stări $K_N Z_N$ care se realizează o singură dată. Un nod stabil este extremitatea unor arce cărora le corespund stări $K_N Z_N$ care se realizează de ori de cîte ori dorim.

Programul unui automat poate fi reprezentat în modul descris printr-un graf. Acest graf nu este în general conex și este format de obicei din șiruri elementare avînd noduri și arce comune (fig. 3).

Un mod mai compact de a reprezenta programul unui automat îl constituie tabloul de tranziții al lui D.A. Huffman [5]. Dacă se cunoaște graful care reprezintă programul unui automat, tabloul tranzițiilor se

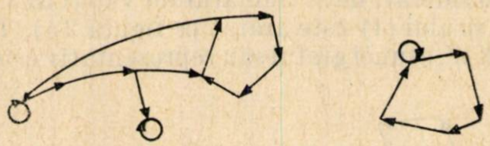


Fig. 3

poate construi fără dificultate. Vom utiliza pentru început reprezentarea prin grafuri, deoarece ea este mai comodă pentru descrierea procedeului de minimizare propus.

3. MINIMIZAREA AUTOMATELOR COMPLETE DE TIP MEALY

Presupunem deocamdată că semnalele de comandă sînt de un *singur tip*.

Un automat este *complet* dacă valorile variabilei W sînt precizate în toate nodurile grafului automatului.

Procedeul de minimizare comportă următoarele etape :

a) *Contopirea șirurilor identice de perechi* KW. Fie două noduri ale grafului unui automat, notate cu aceleași valori ale variabilelor K și W. Presupunem că și valorile lui Z din cele două noduri sînt egale.

Suprapunem nodurile considerate. Dacă în extremitățile arcelor care diverg din nodul obținut, variabilele K și W au aceleași valori, contopim nodurile respective și continuăm în mod asemănător. Procesul se întrerupe în cazul cînd la o etapă oarecare, în extremitățile arcelor divergente din ultimul nod obținut prin contopire, avem

$$K^i W^i \neq K^{i'} W^{j'} .$$

Dacă

$$K^i \neq K^j ,$$

nodurile contopite pot fi notate cu aceleași valori ale variabilei Z. În acest caz arcele contopite reprezintă stări $K_W Z_N$ identice.

Dacă

$$K^i = K^j, \; W^j \neq W^{j'} ,$$

atunci nodurile contopite nu pot fi notate cu aceleași valori ale variabilei Z. În acest caz arcele contopite nu reprezintă stări $K_N Z_N$ identice și prin urmare contopirea nu se poate realiza.

Într-adevăr, să notăm cu Z^{j-1} și $Z^{j'-1}$ valorile lui Z din originile arcelor în ale căror extremități avem

$$K^i W^j \neq K^{i'} W^{j'} .$$

În cazul $K^i = K^{i'}$ din (1) rezultă

$$Z^{j-1} \neq Z^{j'-1}$$

căci altfel ar trebui să avem și $W^j = W^{j'}$.

În mod asemănător deducem inegalitățile

$$Z^{j-2} \neq Z^{j'-2}$$
$$Z^{j-3} \neq Z^{j'-3}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

pînă la valorile lui Z din prima pereche de noduri presupuse identice.

Dacă $K^i \neq K^{i'}$, atunci din (1) deducem că se poate lua

$$Z^{j-1} = Z^{j'-1}$$
$$Z^{j-2} = Z^{j'-2}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Procesul de contopire se repetă pînă cînd nu mai rămîn noduri a căror identificare n-a fost încercată. Evident că acest proces este finit.

b) *Determinarea mulțimilor de valori neegale ale variabilei Z.* Fie două noduri i și j ale grafului obținut după efectuarea tuturor contopirilor.

Fiecărui nod îi asociem o expresie de forma

$$i = K^i Z^{i_1},\ K^i Z^{i_2}, \dots, K^i Z^{i_{p_i}},\ \varepsilon K^i Z^i \tag{5}$$

unde $Z^{i_1}, Z^{i_2}, \dots, Z^{i_{p_i}}$ sînt valorile lui Z din originile arcelor convergente în nodul i, iar $\varepsilon = 1$ sau 0 după cum există sau nu arce convergete în nodul i, în originea și extremitatea cărora Z are aceeași valoare.

Se poate arăta că expresiile i definite mai sus sînt distincte între ele, adică toate perechile $K_N Z_N$ ale unei expresii i sînt distincte de toate perechile $K_N Z_N$ ale unei expresii j.

Afirmația este evidentă dacă $K^i \neq K^j$.

În cazul $K^i = K^j$ avem de considerat două subcazuri și anume:

I) $\qquad W^i \neq W^j ,$

II) $\qquad W^i = W^j .$

În primul subcaz, din (1) deducem

$$\begin{aligned} & Z^{i_1} \sim Z^{i_2} \sim \ .\ .\ .\ .\ .\ \sim Z^{i_{p_i}} \sim \varepsilon Z^i \neq \\ & \neq Z^{j_1} \sim Z^{j_2} \sim \ .\ .\ .\ .\ .\ \sim Z^{j_{p_j}} \sim \varepsilon Z^j \end{aligned} \tag{6}$$

unde semnul $\sim$ înseamnă „poate fi egal” iar relația pe care o reprezintă este o relație de echivalență. Mai observăm că toate valorile lui Z din stînga semnului $\neq$ sînt diferite de toate valorile lui Z din dreapta semnului $\neq$.

În al doilea subcaz, deducem, de asemenea, relația (6), căci în caz contrar nodurile i și j ar fi (contrar ipotezei) superpozabile.

Procedînd în mod asemănător cu toate perechile de expresii (5) vom obține un sistem de mulțimi de valori ale lui Z

$$(7) \qquad M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_{mi}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

unde valorile lui Z dintr-o mulțime sînt distincte de valorile lui Z din toate celelalte mulțimi. Vom conveni să scriem

$$(8) \qquad M_{i_1} \neq M_{i_2} \neq \ldots\ldots \neq M_{i_{mi}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

c) *Determinarea mulțimilor maximale de valori ale lui Z care pot fi egale.* Presupunem valorile lui Z ordonate.

Construim mulțimile de perechi de valori ale lui Z neseparate în relațiile (8) prin semnul $\neq$. Aceste mulțimi vor fi de forma :

$$(9) \qquad M^{i,j} = (Z^i, Z^j) \quad , \quad i < j.$$

Căutăm în sistemul de mulțimi (9) grupuri de cîte trei mulțimi notate

$$M^{i,j}, M^{j,k}, M^{i,k}$$

și construim cu ajutorul lor sistemul de mulțimi

$$(10) \qquad M^{i,j,k} = (Z^i, Z^j, Z^k).$$

Căutăm în sistemul de mulțimi (10) grupuri de cîte patru mulțimi notate

$$M^{i,j,k}, M^{i,j,1}, M^{j,k,1} \quad M^{i,k,1}$$

și construim cu ajutorul lor sistemul de mulțimi

$$(11) \qquad M^{i,j,k,1} = (Z^i, Z^j, Z^k, Z^1).$$

În general, dacă s-a construit sistemul de mulțimi formate din cîte n elemente, se caută

$$C^n_{n+1} = n + 1$$

asemenea mulțimi ale căror elemente să fie notate cu cele

$$C^n_{n+1} = n + 1$$

combinări ale acelorași $n + 1$ exponenți ai lui Z.

Presupunînd toate sistemele (9), (10), (11) etc. construite, eliminăm mulțimile conținînd n elemente care au fost utilizate la construirea mulțimilor conținînd $n + 1$ elemente. Va rămîne un sistem de mulțimi pe care-l notăm

$$(12) \qquad S(M_1, M_2, \ldots, M_S).$$

d) *Determinarea mulțimilor maximale care conțin împreună toate valorile cu Z.* Se construiesc [4] disjuncțiile de mulțimi M_i din S în care intră valorile Z^1, $Z^2, \ldots$ ale variabilei Z, adică

$$
\begin{aligned}
&M_1^1 \cup M_2^1 \cup \ldots \cup M_{n_1}^1 , \\
(13) \qquad &M_1^2 \cup M_2^2 \cup \ldots \cup M_{n_2}^2 , \\
&. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
&M_1^m \cup M_2^m \cup \ldots \cup M_{n_m}^m ,
\end{aligned}
$$

unde m reprezintă numărul de valori distincte ale lui Z. Se construiește apoi forma conjunctivă

$$
\begin{aligned}
(14) \qquad F = (M_1^1 \cup M_2^1 \cup \ldots \cup M_{n_1}^1)(M_1^2 \cup M_2^2 \cup \ldots \cup M_{n_2}^2) \ldots \\
\ldots (M_1^m \cup M_2^m \cup \ldots \cup M_{n_m}^m) .
\end{aligned}
$$

Forma F se dezvoltă ținînd seama de identitățile

$$
\begin{gathered}
(A \cup B)(A \cup C) = A \cup BC , \\
A(A \cup C) = A .
\end{gathered}
$$

Se obține o formă disjunctivă F_d fiecare termen al ei fiind un produs de mulțimi care conțin împreună toate valorile lui Z. Fie p numărul minim de factori care apar în termenii lui F_d. Variabila Z poate avea p valori distincte, care se obțin egalînd valorile lui Z dintr-o aceeași mulțime. Dacă aceeași valoare a lui Z apare în mulțimi M_i^j diferite, ea se consideră (pe rînd) element al unei singure asemenea mulțimi.

Menționăm că pentru determinarea numărului minim de mulțimi M_i^j, care conțin împreună toate valorile lui Z se poate utiliza și algoritmul lui Mac Kluskey [1].

După ce numărul minim de valori ale lui Z a fost determinat, se trece la operația de codificare (asignare) iar apoi se efectuează sinteza structurală a automatului.

4. MINIMIZAREA AUTOMATELOR COMPLETE DE TIP MOORE

În automatele Moore variabila W se realizează printr-o funcție de forma

$$(1') \qquad W_N = f(Z_N) .$$

Ținînd seama de (12), deducem

$$(15) \qquad W_N = f(g(K_{N-1}, Z_{N-1}))$$

ceea ce coincide ca formă cu (1_1). Prin urmare un automat Moore poate fi interpretat drept un caz particular de automate Mealy.

Fiind dat programul de funcționare al unui automat, pentru realizarea lui printr-un automat Moore este suficient să impunem valorilor lui Z condiţia ca la valori distincte ale lui W să corespundă valori distincte ale lui Z :

(16) $$W^i \neq W^j, \quad Z^i \neq Z^j .$$

Procesul de minimizare va comporta etapele descrise mai sus, dar pe lîngă sistemul de inegalităţi (8) vom mai avea un sistem de inegalităţi dedus din condiţiile (16).

5. MINIMALIZAREA AUTOMATELOR PARŢIALE

În automatele parţiale valorile variabilei W nu sînt precizate pentru toate valorile lui K. În şirurile $K^i\, W^i$ apar şi perechi de forma

(17) $$K^j\, W^{\sim},$$

unde semnul $\sim$ înseamnă „orice valoare”.

Dacă în şirurile de perechi $K^i\, W^i$ nu mai apare nici un termen cu

$$K^i = K^j ,$$

se poate înlocui $W^{\sim}$ cu oricare dintre valorile lui.

Dacă în şirurile de perechi $K^i\, W^i$ apar termeni de forma

(18) $$K^j\, W^{j_1},\ K^j\, W^{j_2}, \ldots, K^j\, W^{j_n}$$

efectuăm contopirea nodurilor după cum urmează :

Presupunînd

(19) $$K^j\, W^{\sim} = K^j\, W^{j_1}$$

deci

$$W^{\sim} = W^{j_1}$$

efectuăm în mod obişnuit contopirea. Acest proces or se încheie la o pereche oarecare $K^l\, W^l$, or se ajunge la perechile

(20) $$K^j\, W^{\sim}\ ,\ \ K^j\, W^{j_k}$$

unde

$$W^{j_k} \neq W^{j_1}.$$

Dacă perechea $K^j\, W^{\sim}$ din (20) reprezintă un nod distinct de cel care corespunde lui $K^j W^{\sim}$ din (17), luăm în (20)

$$W^{\sim} = W^{j_k}$$

şi continuăm procesul.

Dacă perechea $K^j\, W^{\sim}$ din (20) reprezintă nodul din (17), dedublăm acest nod în nodurile

$$K^j\, W^{j_1}\ ,\ \ K^j\, W^{j_k}$$

şi continuăm procesul începînd de la nodul $K^j\, W^{j_k}$.

Figura 4 ilustrează cele două situaţii.

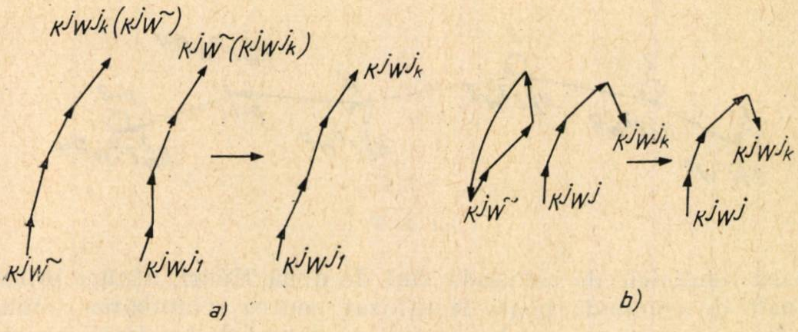
Drept rezultat al efectuării contopirii vom obţine un şir de egalităţi între valorile variabilei Z, de forma

$$Z^i = Z^j$$

$$Z^l = Z^m \text{ etc.}$$

Să presupunem că avem trei egalităţi de forma

$$Z^i = Z^j,\ Z^i = Z^k,\ Z^i = Z^k.$$



$\kappa^j w^{j_k} (\kappa^j w^{\sim})$
$\kappa^j w^{\sim} (\kappa^j w^{j_k})$
$\kappa^j w^{j_k}$
$\kappa^j w^{\sim}$
$\kappa^j w^{j_1}$
$\kappa^j w^{j_1}$
a)
$\kappa^j w^{j_k}$
$\kappa^j w^{j_k}$
$\kappa^j w^{\sim}$
$\kappa^j w^j$
$\kappa^j w^j$
b)

Fig. 4

Atunci vom lua

$$Z^i = Z^j = Z^k.$$

Dacă însă avem numai

$$Z^i = Z^j,\ Z^i = Z^k,$$

atunci vom considera dedublat nodul notat Z^i în două noduri notate Z^j, Z^k.

În mod analog dacă se obţin trei egalităţi de forma

$$Z^i = Z^j,\ Z^i = Z^k,\ Z^i = Z^l$$

vom considera nodul notat Z^i multiplicat în trei alte noduri, notate cu Z^j, Z^k, Z^l.

Se vede uşor că numărul de noduri obţinut după contopire nu este mai mare decît numărul iniţial de noduri. Într-adevăr, dedublarea unui nod permite contopirea măcar a altor două noduri. În cazul multiplicării unui nod, numărul final de noduri este de asemenea mai mic decît cel iniţial.

În general se pot obţine mai multe soluţii ale procesului de contopire şi anume atîtea soluţii cîte se pot construi plecînd de la toate relaţiile de forma (19). În acest caz, la determinarea numărului minim de valori ale lui Z trebuie cercetate toate aceste soluţii.

În concluzie, în urma contopirii se obţin mai puţine perechi $K^i W^i$, adică un program de funcţionare mai simplu al automatului ce urmează a fi construit.

6. CAZUL A DOUĂ TIPURI DE SEMNALE DE COMANDĂ

În automatele în care semnalele de comandă sînt de un singur tip, acelaşi semnal de comandă poate provoca atît schimbarea semnalelor intermediare, adică schimbarea valorii lui Z, cît şi schimbarea semnalelor executive, adică schimbarea valorii variabilei W.

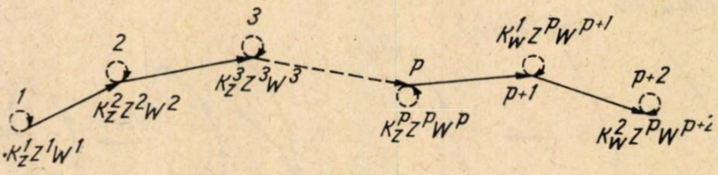


Fig. 5

Dacă semnalele de comandă sînt de două tipuri, atunci primul tip de semnale de comandă poate fi utilizat pentru schimbarea semnalelor intermediare şi eventual a celor executive, iar al doilea tip de semnale de comandă poate fi utilizat pentru schimbarea numai a semnalelor executive.

Dacă notăm cele două tipuri de semnale cu K_Z şi K_W, în graful automatului vor apare şiruri de arce de forma din figura 5.

Procedeul de minimizare descris mai sus poate fi uşor adaptat la cazul automatelor cu semnale de comandă de două tipuri şi care funcţionează în modul descris mai sus.

Etapele procesului de minimizare sînt aceleaşi ca mai sus dar trebuie avută în vedere următoarea observaţie.

Valorile lui Z din toate nodurile se presupun iniţial distincte şi se verifică dacă sistemul de inegalităţi (6) este satisfăcut în cazul cînd Z ia aceleaşi valori în originile arcelor ale căror extremităţi sînt notate cu K_W şi formează un subgraf conex. În caz afirmativ, programul dat este *realizabil* printr-un automat în care comenzile K_W nu schimbă valoarea lui Z. În caz contrar, programul dat este *nerealizabil*. După ce s-a stabilit dacă un program este realizabil, se continuă în mod obişnuit considerînd egale valorile lui Z din originile arcelor notate în extremităţi cu K_W şi făcînd parte din acelaşi subgraf conex.

O situaţie particulară frecvent întîlnită este aceea în care comenzile K_Z şi K_W alternează. Graful automatului este de forma din figura 6.

În acest caz programul automatului este întotdeauna realizabil.

Într-adevăr, pentru două noduri succesive i şi i' expresiile (5) sînt de forma

$$i = K_Z^i Z^i, \ldots$$

$$i' = K_W^i Z^i, K_W^i Z^{i'}, \ldots$$

unde termenii nescrişi conţin valori ale lui Z diferite de Z^i şi $Z^{i'}$. Deoarece $K_Z^i \neq K_W^i$, deducem că vom avea $i \neq i'$ chiar dacă $Z^i = Z^{i'}$.

Adesea semnalele de comandă alternative sînt dependente între ele, adică de forma

$$K^i,\ K^{i \to j},\ K^j,\ K^{j \to l},\ K^l, \ldots$$

Această situaţie are loc dacă $K^{i \to j}$ reprezintă de exemplu impulsuri provocate de schimbarea semnalului potenţial K^i în K^j. În acest caz, dacă pentru unul dintre tipurile de semnale nu apar semnale executive, contopirea nodurilor se poate efectua comparînd numai perechile KW în care există W.

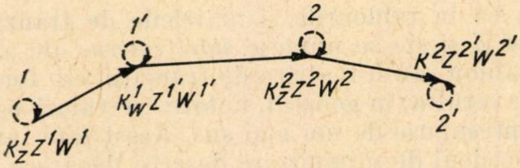


Fig. 6

Într-adevăr, presupunînd că avem semnale executive pentru $K^{i \to j}$ din identitatea nodurilor

$$K^{i \to j}\, W^{i \to j} = K^{i' \to j'}\, W^{i' \to j'},$$

$$K^{j \to l}\, W^{j \to l} = K^{j' \to l'}\, W^{j' \to l'},$$

deducem identitatea nodurilor intermediare

$$K^j\, W^0 = K^{j'}\, W^0,$$

unde am notat cu W^0 faptul că nu există semnal executiv.

În mod analog, din

$$K^i\, W^i = K^{i'}\, W^{i'}$$

$$K^j\, W^j = K^{j'}\, W^{j'}$$

deducem

$$K^{i \to j}\, W^0 = K^{i' \to j'}\, W^0.$$

Dacă semnalele de comandă sînt de două tipuri şi ele sînt folosite atît pentru schimbarea semnalelor intermediare cît şi pentru schimbarea semnalelor executive, minimizarea se efectuează în mod obişnuit.

În cazul cînd cele două tipuri de semnale alternează, rămîne valabilă observaţia de mai sus şi anume : două noduri succesive ale grafului automatului pot fi notate cu aceeaşi valoare a lui Z.

7. ALTE MODURI DE REPREZENTARE A PROGRAMULUI UNUI AUTOMAT

Reprezentarea funcţionării unui automat printr-un graf are, după cum am mai amintit, avantajul de a fi ilustrativă, în special în cazul automatelor cu număr mic de stări. Pentru automatele complexe reprezentarea grafică este prea voluminoasă şi prin urmare greu de urmărit. Mai compacte sînt reprezentările prin tablouri de tranziţii [5] şi matrici de tranziţii [6].

Modurile de reprezentare citate sînt complete şi echivalente, în sensul că şirurile $K^i W^i$ pe care ele le definesc pentru un automat dat sînt identice.

Menţionăm că în tablourile şi matricile de tranziţii sînt notate şi valorile variabilei Z şi ele se numesc *stări interne* ale automatului. Dacă se transcrie un tablou sau o matrice de tranziţii sub formă de graf, unele noduri ale lui vor rezulta, în general, notate cu valori egale ale variabilei Z, contrar celor presupuse de noi mai sus. Acest fapt nu introduce nici o schimbare în procedeul de minimizare descris, deoarece în acest procedeu se determină inegalităţi între mulţimi de valori ale lui Z. O aceeaşi valoare a lui Z nu poate apare în mulţimi distincte, decît în cazul cînd în programul automatului scris sub formă de tablou sau matrice de tranziţii ar apărea o nedeterminare, situaţie despre care presupunem că nu are loc. În caz contrar, prin dedublarea unor stări interne, nedeterminările pot fi eliminate.

La punctul 5 am considerat cazul automatelor parţiale în care valorile variabilei W nu sînt precizate pentru toate valorile lui K. Tot parţiale sînt şi automatele în al căror program de funcţionare nu sînt precizate toate valorile variabilei Z. În asemenea cazuri stările pentru care valorile lui Z nu sînt precizate se notează cu valori distincte ale lui Z.

8. CLASE DE AUTOMATE ASINCRONE

În lucrarea [1] se studiază automate asincrone în care semnalele la intrare şi ieşire sînt atît potenţiale cît şi impulsuri. Impulsurile de comandă pot apare la fiecare schimbare a unui semnal de comandă potenţial.

Realizarea impulsurilor de comandă are loc într-un bloc de diferenţiere (fig. 7). Se presupune că elementele intermediare ale automatului pot fi comandate atît de impulsuri cît şi de semnale potenţiale. Semnalele la ieşirile elementelor intermediare se presupun potenţiale.

Vom conveni să notăm perechile de valori ale variabilelor K şi W care descriu semnalele de comandă şi semnalele la ieşirile automatului, după cum urmează

$$(21) \qquad K^1 W^1,\ K^{1\to 2} W^{1\to 2},\ K^2 W^2, \dots$$
$$\dots, K^i W^i,\ K^{i\to i+1} W^{i\to i+1},\ K^{i+1} W^{i+1}, \dots$$

unde

$$K^i,\ W^i$$

reprezintă semnale potențiale iar

$$K^{i\to i+1},\ W^{i\to i+1}$$

reprezintă impulsuri.

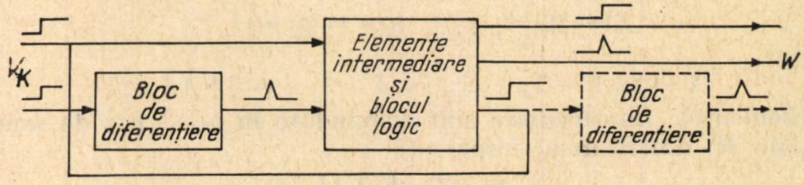


Fig. 7

Un mod mai simplu de a reprezenta șirul (21) este

$$(21') \qquad 1,1\,;\ 1\to 2,\ 1\to 2\,;\ 2,2\,;\ 2\to 3,\ 2\to 3\,;\ \ldots$$

dacă facem convenția că termenii unei perechi reprezintă respectiv valorile variabilelor K și W.

Automate asincrone particulare. În conformitate cu [1] elementele intermediare comandate de semnale potențiale le vom numi de tip A iar elementele intermediare comandate de impulsuri, de tip B.

În funcție de tipul elementelor intermediare și de natura semnalelor la ieșirile automatului se pot considera automatele asincrone particulare din tabloul 1.

Tabloul 1

Natura semnalelor de comandă a elementelor intermediare	Natura semnalelor la ieșirile automatului	
	Potențiale	Impulsuri
Potențiale	Aut. potențiale de tip A	Aut. impuls-potențiale de tip A
Impulsuri	Aut. potențiale de tip B	Aut. impuls-potențiale de tip B

Șirurile de perechi KW pentru automatele din tabloul 1 au următoarele forme particulare.

Automate potențiale de tip A :

$$(22) \qquad K^1 W^1,\ K^2 W^2,\ \ldots,\ K^i W^i,\ \ldots$$

sau

$$(22') \qquad 1,1\,;\ 2,2\,;\ \ldots,\ i,i\,;\ \ldots$$

În acest caz, elementele intermediare sînt comandate de semnalele K^i.

Automate potențiale de tip B :

(23) $K^1 W^1,\ K^2 W^2,\ \dots,\ K^i W^i,\ \dots$

sau

(23′) $1,1\ ;\ 2,2\ ;\ \dots,\ i,i\ ;\ \dots$

Elementele intermediare sînt comandate în acest caz de impulsurile $K^{i\to i+1}$.

Automate impuls-potențiale de tip A :

(24) $K^{1\to 2}\,W^{1\to 2},\ \dots,\ K^{i\to i+1}\,W^{i\to i+1},\ \dots$

sau

(24′) $1\to 2,\ 1\to 2\ ;\ \dots\ ;\ i\to i+1,\ i\to i+1\ ;\ \dots$

Elementele intermediare sînt comandate în acest caz de semnalele potențiale K^i dintre două impulsuri

$$K^{i-1\to i},\ K^{i\to i+1}.$$

Automate impuls-potențiale de tip B :

(25) $K^{1\to 2}\,W^{1\to 2},\ \dots,\ K^{i\to i+1},\ W^{i\to i+1}$

sau

(25′) $1\to 2,\ 1\to 2\ ;\ \dots\ ;\ i\to i+1,\ i\to i+1\ ;\ \dots$

În acest caz elementele intermediare sînt comandate de impulsurile $K^{i\to i+1}$.

Automate asincrone generalizate. În aceste automate atît semnalele de comandă cît și cele executive sînt impulsuri și semnale potențiale. Un semnal de comandă potențial provoacă la ieșire un semnal executiv potențial, iar un semnal de comandă sub formă de impuls provoacă la ieșire un semnal executiv sub formă de impuls.

Elementele intermediare pot fi de tip *A* sau de tip *B*. În primul caz ele sînt comandate de semnalele de comandă potențiale, iar în al doilea caz sînt comandate de impulsurile de comandă.

Vom studia acum cîteva exemple pentru ilustrarea procedeului de minimizare propus. Exemplele sînt luate din lucrarea [1].

9. EXEMPLE

Exemplul 1. Considerăm un automat potențial de tip *A* a cărui funcționare este descrisă prin tabloul de tranziții 2.

Tabloul 2

		K			
		1	2	3	
	1	1,00	2	—	
	2	3	$2,\sim\sim$	9	
	3	3,11	6	—	
	4	7	4,00	9	
Z	5	$5,\sim 0$	4	—	
	6	7	6,11	—	
	7	$7,\sim\sim$	8	—	
	8	6	$8,\sim\sim$	9	
	9	1	—	9,11	*Z, W*

Coloanele tabloului sînt notate cu valorile variabilei K. Rîndurile tabloului sînt notate cu valorile variabilei Z iar la intersecțiile liniilor și coloanelor sînt trecute valorile lui Z (la momentul $N + 1$) și valorile variabilei W. În exemplul considerat automatul are două ieșiri, așa încît prin valori ale lui W înțelegem perechile de valori ale variabilelor care descriu stările celor două ieșiri. Nodurile grafului automatului studiate sînt toate stabile. Lor le corespund locurile din tablou unde sînt notate și valorile lui W.

a) *Contopirea șirurilor identice de perechi* KW. Din prima coloană deducem că am putea lua

$$(26) \qquad 1) - K^1 W^{00} Z^1 = K^1 W^{\sim 0} Z^5 = K^1 W^{00} Z^{1=5}$$

egalitate care implică următorul șir de egalități

$$(26') \qquad \left\{ \begin{array}{ll} 2) & K^2 W^{\sim\sim} Z^2 = K^2 W^{11} Z^4 = K^1 W^{11} Z^{2=4} \\ 3) & K^1 W^{11} Z^3 = K^1 W^{\sim\sim} Z^7 = K^1 W^{11} Z^{3=7} \\ 4) & K^2 W^{11} Z^6 = K^2 W^{\sim\sim} Z^8 = K^2 W^{11} Z^{6=8} \\ 5) & K^1 W^{\sim\sim} Z^7 = K^1 W^{\sim 0} Z^5 = K^1 W^{\sim 0} Z^{5=7} \\ 6) & K^2 W^{00} Z^4 = K^2 W^{\sim\sim} Z^8 = K^2 W^{00} Z^{4=8} \\ 7) & K^1 W^{\sim\sim} Z^7 = K^1 W^{\sim 0} Z^5 = K^1 W^{\sim 0} Z^{5=7} \end{array} \right.$$

și după cum se vede șirul de egalități se încheie cu un ciclu. Examinînd ultima coloană a egalităților de mai sus constatăm două contradicții între 3) și 5) și 4) și 6). Aceste două contradicții pot fi evitate dacă dedublăm nodurile

$$K^1 W^{\sim\sim} Z^7, \; K^2 W^{\sim\sim} Z^8$$

înlocuindu-le cu

$$K^1 W^{\sim\sim} Z^{7_1}, \; K^1 W^{\sim\sim} Z^{7_2}$$

$$K^2 W^{\sim\sim} Z^{8_1}, \; K^2 W^{\sim\sim} Z^{8_2}$$

și dacă luăm

$$K^1 W^{\sim\sim} Z^{7_1} = K^1 W^{11} Z^{7_1=3}$$

$$K^1 W^{\sim\sim} Z^{7_2} = K^1 W^{\sim 0} Z^{7_2=5},$$

$$K^2 W^{\sim\sim} Z^{8_1} = K^2 W^{11} Z^{8_1=6},$$

$$K^2 W^{\sim\sim} Z^{8_2} = K^2 W^{00} Z^{8_2=4}.$$

Se verifică apoi că dacă s-ar lua

$$K^1 W^{00} Z^1 = K^1 W^{\sim\sim} Z^7$$

s-ar ajunge la contradicția

$$K^1 W^{11} Z^3 = K^1 W^{\sim 0} Z^5.$$

Aceeași contradicție se obține dacă se ia

$$K^2 W^{\sim\sim} Z^2 = K^2 W^{\sim\sim} Z^8.$$

Vom avea deci între valorile lui Z egalitățile (omitem litera Z)

$$1 = 5,\ 2 = 4,\ 3 = 7_1,\ 6 = 8_1,\ 5 = 7_2,\ 4 = 8_2. \tag{27}$$

Constatăm că valorile Z^5 și Z^4 apar în (27) de cîte două ori. Deoarece

$$Z^1 \neq Z^7,\ Z^2 \neq Z^8,$$

rezultă că cele două valori Z^5 și cele două valori Z^4 trebuie considerate distincte (ceea ce revine la dedublarea nodurilor corespunzătoare). Obținem în definitiv egalitățile

$$1 = 5_1,\ 2 = 4_1,\ 3 = 7_1,\ 6 = 8_1,\ 5 = 7_2,\ 4 = 8_2. \tag{27'}$$

Valorile lui Z vor fi notate acum

$$Z^1,\ Z^2,\ Z^3,\ Z^4,\ Z^5,\ Z^6,\ Z^9.$$

Se obține tabloul de tranziții 3.

Tabloul 3

		K			
		1	2	3	
Z	$1 = 5_1$	1,00	2	—	
	$2 = 4_1$	3	2,00	9	
	$3 = 7_1$	3,11	6	—	
	$4 = 8_2$	5	4,00	9	
	$5 = 7_2$	5,0	4	—	
	$6 = 8_1$	5	6,11	9	
	9	1	—	9,11	Z, W

În tablou valorile lui W au fost completate așa cum sînt implicate de egalitățile (26).

b) *Determinarea mulțimilor de valori inegale ale lui* Z. Pentru exemplul studiat expresiile (5) sînt (în acest caz toate nodurile grafului automatului sînt stabile)

$$1 = K^1(Z^1, Z^9), \quad 2 = K^2(Z^1, Z^2), \quad 9 = K^3(Z^2, Z^4, Z^6, Z^9)$$

$$3 = K^1(Z^2, Z^3), \quad 4 = K^2(Z^4, Z^5),$$

$$5 = K^1(Z^4, Z^5, Z^6), \quad 6 = K^2(Z^3, Z^6),$$

unde valorile lui K au fost scoase, pentru simplificare, în factor.

Comparînd expresiile de mai sus deducem

$$Z^2 \sim Z^9 \neq Z^2 \sim Z^3 \neq Z^4 \sim Z^5 \sim Z^6,$$

$$Z^1 \sim Z^2 \neq Z^4 \sim Z^5 \neq Z^3 \sim Z^6$$

sau mai simplu (omitem litera Z)

$$\begin{aligned} &1 \sim 9 \neq 2 \sim 3 \neq 4 \sim 5 \sim 6, \\ &1 \sim 2 \neq 4 \sim 5 \neq 3 \sim 6. \end{aligned} \tag{28}$$

c) *Determinarea mulțimilor maximale ale lui Z care pot fi egale.* Comparînd inegalitățile (23) deducem mulțimile $M^{i,j}$

$$M^{1,9} = (1, 9), \quad M^{4,5} = (4, 5). \tag{29}$$

Se vede că nu avem mulțimi $M^{i,j,k}$.
Mulțimile maximale sînt

$$(1, 9),\ (2),\ (3),\ (4, 5),\ (6).$$

d) *Determinarea mulțimilor care conțin împreună toate valorile lui Z.* Se verifică direct că mulțimile (29) conțin, numai luate împreună, toate valorile lui Z.

Notînd mulțimile (29) cu valorile

$$Z^1,\ Z^2,\ Z^3,\ Z^4,\ Z^5$$

ale lui Z, obținem tabloul 4 de tranziții minimal.

Tabloul 4

		K			
		1	2	3	
Z	1	1,00	2	1,11	
	2	3	2,00	1	
	3	3,11	5	—	
	4	4,∼0	4,00	1	Z, W
	5	4	5,11	1	

În cazul cînd automatul este de tip Moore, în afară de inegalitățile (28), din tabloul 3, mai avem (în loc de $W^{\sim 0}$ luăm W^{00})

$$1 \sim 2 \sim 4 \sim 5 \neq 3 \sim 6 \sim 9. \tag{30}$$

Obținem atunci mulțimile maximale

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4, 5),\ (6),\ (9). \tag{31}$$

Notînd aceste mulțimi cu $Z^1, \ldots, Z^6$, deducem tabloul 5 de tranziții minimal.

Tabloul 5

		K			
		1	2	3	
Z	1	1,00	2	—	
	2	3	2,00	6	
	3	3,11	5	—	
	4	4,00	4,00	—	
	5	4	5,11	6	
	6	1	—	6,11	Z, W

Observație. Aceleași rezultate se obțin dacă notăm mulțimile de valori egale din (27) cu valori distincte ale lui Z, fără a mai scoate în evidenţă dedublările nodurilor 4 şi 5. Valorile lui Z şi W din tabloul tranziţiilor se completează urmărind tabloul iniţial al tranziţiilor şi şirul de implicaţii (26).

Exemplul 2. Considerăm un automat potenţial de tip B a cărui funcţionare este descrisă prin tabloul de tranziţii 6.

Tabloul 6

$K^{i\to j}$

		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	
	1	2	4	9					$(0\sim)$	$(0^{\sim})$				
	2	(10)			3	7					10			
	3		(11)		(11)		6		1		2			
	4						9		8				(~ 1)	
Z	5					6						(11)		
	6					(11)	(11)			8		5	4	
	7			$(0^{\sim})$		$(0\sim)$				8		5	4	
	8		3	7					(01)	(01)				
	9			(~ 1)			(~ 1)			1			3	$Z\,(W)$

În legătură cu modul de completare al tabloului 6 observăm următoarele. Valorile lui Z sînt notate în mod obişnuit iar valorile lui W sînt notate în paranteze. Ele apar în tablou în dreptul impulsurilor după care urmează semnalul potenţial K^j sub acţiunea căruia W ia valoarea notată. Aşa, de exmplu, $W^{0^\sim}$ apare dacă automatul se află în starea 1, iar comanda este semnalul potenţial K^1. Acest semnal apare după impulsul $K^{3\to 1}$ care schimbă starea internă a automatului din Z^3 în Z^1. De asemenea $W^{0^\sim}$ apare şi dacă avem $Z = Z^1$, $K = K^1$ după ce sub acţiunea comenzii $K^{4\to 1}$ automatul a trecut din starea internă Z^9 în starea internă Z^1. Prin urmare două noduri (ale grafului automatului) care reprezintă perechi KW succesive notate cu

$$K^{i\to j}\,W^k,\ K^j\,W^l$$

pot fi notate cu aceeaşi valoare a lui Z.

a) *Contopirea.* Pentru simplificarea scrierii vom nota operaţia de comparare a două noduri în felul următor

$$\frac{Z^i = Z^j}{K^i\,W^i = K^j\,W^j}.$$

Deoarece se compară întotdeauna noduri cu aceeaşi valoare a lui K, avem

$$K^i = K^j$$

şi mai putem scrie

$$\frac{Z^i = Z^j}{W^i = W^j}.$$

Dacă omitem şi literele Z şi W obţinem

$$\frac{i = j}{i = j}. \tag{32}$$

Utilizînd notația (32) deducem șirul de implicații (în virtutea celor spuse la punctul 6, identitatea nodurilor în care apar semnale executive implică în acest caz identitatea nodurilor intermediare în care nu apar semnale executive)

$$\begin{tikzcd}
\frac{1=8}{0\sim\,=01} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \frac{3=4}{11=\sim1} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \frac{1=8}{0\sim\,=01} & \\
& \frac{7=9}{0\sim\,=\sim1} & \frac{6=9}{11=\sim1} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \frac{1=8}{0\sim\,=01} \\
& & & \frac{3=4}{11=\sim1}.
\end{tikzcd}$$

Dacă se dublează nodul notat cu Z^9, obținem contopirile

$$\frac{1=8}{01},\quad \frac{3=4}{11},\quad \frac{7=9_1}{01},\quad \frac{6=9_2}{11}. \tag{33}$$

Tabloul tranzițiilor este cel din tabloul 7.

Tabloul 7

$K^{i\to j}$

		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	
	$1=8$	2	3	7					(01)	(01)				
	2	(10)			3	7					(10)			
	$3=4$		(11)		(11)		6		1		2		(11)	
Z	5					6						(11)		
	$6=9_2$			(11)		(11)	(11)			1		5	3	
	$7=9_1$			(01)		(01)				1		5	5	$Z(W)$

b) *Mulțimile de valori inegale ale lui Z.* În cazul de față schimbarea stărilor interne ale automatului este provocată de impulsurile

$$K^{i\to j}.$$

Semnalele potențiale K^j mențin starea internă.

Pentru simplificarea scrierii vom omite literele în relațiile (5) și vom trece în factor valorile egale $K^{i_j\to i}$ și K^i, adică vom obține relații de forma

$$\begin{aligned} i &= \bigcup i_j \to i\,(i_1,\, i_2,\, \ldots\, i_{n_i},\, \varepsilon_i)\,, \\ i &= \bigcup i\,(i_1,\, i_2,\, \ldots\, i_{n_i},\, \varepsilon_i)\,. \end{aligned} \tag{5'}$$

Din tabloul 7 deducem

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = 3 \rightarrow 1(3) \cup 4 \rightarrow 1(6,7) \\ 3 = 1 \rightarrow 2(1) \cup 3 \rightarrow 2(3) \\ 3 = 1 \rightarrow 3(1) \cup 2 \rightarrow 3(2) \\ 5 = 4 \rightarrow 2(6,7) \\ 6 = 3 \rightarrow 4(3) \cup 2 \rightarrow 4(5) \\ 7 = 1 \rightarrow 4(1) \cup 2 \rightarrow 4(2) \end{array}\right. \tag{34}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = 1(1) \\ 2 = 2(2) \\ 3 = 3(3) \\ 5 = 2(5) \\ 5 = 4(6) \\ 7 = 4(7). \end{array}\right. \tag{34'}$$

Observăm că relaţiile (34′) exprimă faptul că semnalale K^i menţin starea internă.

Din relaţiile (34) şi (34′) se obţine

$$2 \neq 5, \quad 6 \neq 7. \tag{35}$$

c) *Determinarea mulţimilor maximale de valori ale lui Z.* Mulţimile $M^{i,j}$ sînt

$$\begin{array}{llll} 1,2^{\vee} & 2,3^{\vee} & 3,5^{\vee} & 5,6^{\vee} \\ 1,3^{\vee} & 2,6^{\vee} & 3,6^{\vee} & 5,7^{\vee} \\ 1,5^{\vee} & 2,7^{\vee} & 3,7^{\vee} & \\ 1,6^{\vee} & & & \\ 1,7^{\vee} & & & \end{array}$$

Mulţimile $M^{i,j,k}$ sînt (mulţimile $M^{i,j}$ utilizate sînt notate cu $\vee$)

$$\begin{array}{lll} 1,2,3^{\vee} & 2,3,6^{\vee} & 3,5,6^{\vee} \\ 1,2,6^{\vee} & 2,3,7^{\vee} & 3,5,7^{\vee} \\ 1,2,7^{\vee} & & \\ 1,3,5^{\vee} & & \\ 1\ 3,6^{\vee} & & \\ 1,3,7^{\vee} & & \\ 1,5,6^{\vee} & & \\ 1,5,7^{\vee}. & & \end{array}$$

Mulţimile $M^{i,j,k,1}$ sînt

$$\begin{array}{ll} 1,2,3,6, & 1,3,5,6, \\ 1,2,3,7, & 1,3,5,7. \end{array}$$

Mulţimile maximale sînt :

$$M_1 = (1,2,3,6), \quad M_2 = (1,2,3,7), \quad M_3 = (1,3,5,6), \quad M_4 = (1,3,5,7).$$

d) *Determinarea mulţimilor maximale care conţin împreună toate valorile lui Z.* Avem :

$$F = (M_1 + M_2 + M_3 + M_4)(M_1 + M_2)(M_1 + M_2 + M_3 + M_4)(M_3 + M_4)$$
$$(M_1 + M_3)(M_2 + M_4) = (M_1 + M_2)(M_3 + M_1 M_4)(M_2 + M_4) =$$
$$= (M_2 + M_1 M_4)(M_3 + M_1 M_4) = M_1 M_4 + M_2 M_3 .$$

Alegem soluţia

$$M_1 M_4$$

adică

$$(1,2,3,6), \quad (1,3,5,7)$$

şi eliminăm pe 3 din prima mulţime şi pe 1 din a doua. Obţinem

$$(1,2,6), \quad (3,5,7).$$

Asociind acestor două mulţimi o variabilă Z cu două valori 1 şi 3, obţinem tabloul final de tranziţii (tabloul 8).

Tabloul 8

$K^{i \to j}$

Z		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	
	1	1(10)	3	3(11)	3	3(11)	(11)		(01)	1(01)	(10)	3	3	
	3		(11)	(01)	(11)	1(01)	1		1	1	1	3(11)	3(11)	$Z(W)$

În cazul cînd automatul este de tip Moore, în afară de inegalităţile
(35) din tabloul 7 mai deducem

$$1 \sim 7 \neq 2 \neq 3 \sim 5 \sim 6 . \tag{36}$$

Împreună cu inegalităţile (35) obţinem

$$1 \sim 7, \ 2, \ 3 \sim 5 \sim 6 .$$

Mulţimile maximale sînt

$$(1,7), \ (2), \ (3,5,6).$$

Notăm aceste mulţimi cu valorile 1,2,3 ale unei variabile Z şi obţinem tabloul de tranziţii 9.

Tabloul 9

$K^{i \to j}$

Z		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	
	1	2	3	1(01)		(01)			(01)	1(01)		3	3	
	2	(10)			3	1					(10)			
	3		(11)	(11)	(11)	3(11)	3(11)		1	1	2	3(11)	3(11)	$Z(W)$

Menţionăm că pentru exemplul considerat în lucrarea [1] se dă o soluţie minimală cu patru stări interne.

Exemplul 3. Să se minimizeze un automat impuls-potenţial de tip A a cărui funcţionare este descrisă prin tabloul 10.

Tabloul 10

		$K^{i\to j}$												K^j			
		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	1	2	3	4
	1		$0\sim$	11										1	—	2	9
	2								11		$1\sim$			4	3	2	—
	3					$\sim\sim$								—	3	—	5
	4		~ 1											4	—	6	—
	5											~ 0		—	7	—	5
	6								00		$1\sim$			1	7	6	—
Z	7					11		$\sim\sim$						8	7	—	5
	8	$0\sim$		00										8	3	—	9
	9												$\sim\sim$	—	—	10	9
	10								$1\sim$					1	—	10	—
		W												Z			

Impulsurile de comandă $K^{i\to j}$ provoacă semnalele executive W^i, dar menţin stările interne ale automatului. Semnalele potenţiale K^j pot schimba starea internă a automatului, dar nu provoacă semnale executive.

De exemplu, dacă automatul este în starea internă Z^2 şi are loc succesiunea de semnale de comandă K^3, K^1, atunci impulsul $K^{3\to 1}$ provoacă semnalul executiv W^{11}, iar comanda K^1 schimbă starea internă a automatului din Z^2 în Z^4. Prin urmare două noduri (ale grafului automatului) care reprezintă perechi KW succesive

$$K^i W^0, \quad K^{i\to j} W^k$$

(unde am notat cu W^0 faptul că nu există semnal executiv) pot fi notate cu aceeaşi valoare a lui Z.

a) *Contopirea.* Urmărind coloanele celor două părţi ale tabloului recunoaştem şirurile identice de perechea $K^{i\to j} W^j$.

În virtutea observaţiei de la punctul 6, identitatea nodurilor în care apar semnale executive implică identitatea nodurilor în care nu apar asemenea semnale.

Avem

$$\frac{1=4}{} \Rightarrow \frac{2=6}{0\sim\;=\;\sim 1} \Rightarrow \frac{\begin{matrix}1=4\\ 3=7\end{matrix}}{\begin{matrix}11\;=00\\ 1\sim\;=1\sim\end{matrix}} \times, \quad \frac{1=8}{} \Rightarrow \frac{9=9}{11=00}\times, \quad \frac{4=8}{} \Rightarrow \vee$$

$$\frac{3=7}{} \Rightarrow \frac{5=5}{\sim\sim\;=11} \vee, \quad \frac{2=6}{} \Rightarrow \frac{\begin{matrix}1=4\\ 3=7\end{matrix}}{\begin{matrix}11\;=00\\ 1\sim\;=1\sim\end{matrix}} \times, \quad \frac{2=10}{} \Rightarrow \frac{1=4}{11=1\sim} \times,$$

$$\frac{6=10}{} \Rightarrow \frac{}{00=1\sim} \times, \quad \frac{5=9}{} \Rightarrow \frac{}{} \vee .$$

Am notat cu × faptul că s-a obținut o contradicție iar cu $\vee$ faptul că se pot efectua contopirile anterioare acestui semn.

Așadar pot fi contopite nodurile

$$K^2Z^3,\ K^2Z^7;\ K^1U^4,\ K^9Z^8;\ K^4Z^5,\ K^4Z^9.$$

Obținem tabloul 11.

Tabloul 11

$K^{i\to j}$

		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	1	1	3	4
	1		0∼	11										1	–	2	5
	2								11		1∼			4	3	2	–
	3=7					11								4	3	–	5
Z	4=8	0∼	∼1	00										4	3	6	5
	5=9											∼0	∼∼	–	3	10	5
	6								00		1∼			1	3	6	–
	10								1∼					1	–	10	–
									W						Z		

b) *Mulțimile de valori inegale ale lui Z*. Expresiile (6) se scriu în acest caz

$$(37)\qquad \begin{cases} 1 = 1\,(1,6,10) & 5 = 4\,(1,3,4,5) \\ 2 = 3\,(1,2) & 6 = 3\,(4,6) \\ 3 = 2\,(2,3,4,5,6) & 10 = 3\,(5,10) \\ 4 = 1\,(2,3,4) & \end{cases}$$

$$(37')\qquad \begin{cases} 1 = 1\to 3\,(1) \cup 1\to 4\,(1) & 5 = 4\to 2\,(5) \cup 4\to 3\,(5) \\ 2 = 3\to 1\,(2) \cup 3\to 2\,(2) & 6 = 3\to 1\,(6) \cup 3\to 2\,(6) \\ 3 = 2\to 4\,(3) \cup 2\to 1\,(3) & 10 = 3\to 1\,(10) \\ 4 = 1\to 2\,(4) \cup 1\to 3\,(4) \cup 1\to 4\,(4) & \end{cases}$$

Deducem inegalitățile

$$(38)\qquad \begin{cases} 1 \sim 6 \sim 10 \neq 2 \sim 3 \sim 4 \\ 1 \sim 2 \neq 4 \sim 6 \neq 5 \sim 10 \\ 1 \neq 4,\quad 2 \neq 6 \neq 10 \end{cases}$$

c) *Mulțimile maximale* Mulțimile $M^{i,j}$ sînt

$$\begin{matrix} 2,3 & 3,4 & 5,10 \\ & 3,5 & \end{matrix}$$

Mulțimi $M^{i,j,k}$ nu există.

Mulțimile maximale sînt atunci

$$(39)\qquad (1),\ (2,3),\ (3,4),\ (6),\ (5,10),\ (3,5).$$

d) *Mulţimi maximale care conţin toate valorile lui Z.* Avem

$$F = M_1 M_2 (M_2 + M_3 + M_6) M_3 (M_5 + M_6) M_4 =$$

$$M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 + M_1 M_2 M_3 M_4 M_6 .$$

În cazul primei variante repartizînd starea Z^3 mulţimii M_2 obţinem soluţia

$$(1),\ (2,3),\ (4),\ (6),\ (5,10).$$

Notăm ultimele mulţimi cu valorile 1,2,3,4,5 ale lui Z şi obţinem tabloul final 12.

Tabloul 12

$K^{i \to j}$

		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	1	2	3	4
	1		0∼	11										1	—	2	5
	2					11		∼∼	11		1∼			3	2	2	5
Z	3	0∼	∼1	00										3	2	4	5
	4								00		1∼			1	2	4	—
	5								1∼			∼0	∼∼	1	2	5	5
									W						Z		

Automatul de tipul considerat nu poate fi realizat ca automat Moore, deoarece stările lui interne sînt reprezentate prin semnale potenţiale, iar semnalele executive sînt impulsuri.

Menţionăm totuşi că un automat cu o funcţionare similară cu a unui automat Moore se poate construi. Pentru aceasta este suficient să se considere pe figura 7 şi porţiunea punctată. Punînd condiţia ca fiecărui semnal executiv să-i corespundă schimbarea valorii lui Z iar la semnale executive distincte să corespundă schimbări distincte ale stărilor interne se obţine un sistem de inegalităţi care se adaugă la inegalităţile obţinute în presupunerea că automatul este de tip Mealy.

Din tabloul 7 deducem că pentru ca fiecărui semnal W să-i corespundă schimbări ale stărilor interne, este necesar ca (omitem litera Z)

$$1 \neq 2,\ 1 \neq 5,\ 2 \neq 3,\ 1 \neq 4,\ 3 \neq 4,\ 3 \neq 5,\ 4 \neq 5,\ 4 \neq 6,\ 5 \neq 10,$$

$$6 \neq 3,\ 1 \neq 10.$$

Din condiţia ca la semnale executive distincte să corespundă schimbări distincte ale stărilor interne, deducem inegalităţile :

$$2 \neq 5,\ 3 \neq 6,\ 5 \neq 6,\ 1 \neq 3.$$

Împreună cu (38) avem

$$1 \neq 2 \neq 3 \neq 4 \neq 5 \neq 10 \neq 6.$$

Automatul poate fi construit în conformitate cu tabloul 11 completînd schema din figura 7 cu partea punctată. Blocul de diferenţiere al semnalelor de comandă nu mai este evident necesar.

Exemplul 4. Să se minimizeze un automat impuls-potențial de tip B a cărui funcționare este dată de tabloul 13.

Tabloul 13

$K^{i\to j}$

		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3
Z	1	11,2	01,3										
	2					01,6		~1,4					
	3								10,5				
	4	11,2	01,3										
	5		0~,7	00,6									
	6											~1,8	
	7								01,4				
	8				11,7	01,9		1~,1					
	9									0~,1			

WZ

În acest caz impulsurile de comandă provoacă atît schimbarea semnalelor intermediare (care sînt semnale potențiale), cît și apariția semnalelor executive (care sînt impulsuri).

a) *Contopirea.* În acest caz avem un singur tip de semnale de comandă așa încît contopirea se face în mod obișnuit.

$$\frac{6=9}{01=01,}\vee,\qquad \frac{3=7}{01=0\sim}\Rightarrow\frac{5=4}{10=01}\times$$

$$\frac{4=1}{\sim 1=1\sim}\vee.$$

Prin urmare pot fi contopite nodurile

$$K^{2\to 4}Z^{6},\ K^{2\to 4}Z^{9};\ K^{2\to 1}Z^{4},\ K^{2\to 1}Z^{1}.$$

Obținem tabloul 14.

Tabloul 14

$K^{i\to j}$

		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3
Z	1=4	11,2	01,3										
	2					01,6		~1,1					
	3								10,5				
	5		0~,7	00,6									
	6=9									0~,1		~1,8	
	7								01,1				
	8				11,7	01,6		1~,1					

WZ

b) *Mulțimile de valori inegale ale lui Z*. Expresiile (5′) sînt (în acest caz toate nodurile grafului automatului sînt nestabile)

$$(40)\quad \begin{cases} 1 = 2 \rightarrow 1\,(2,8) \cup 4 \rightarrow 1\,(6) \cup 3 \rightarrow 1\,(7), \\ 2 = 1 \rightarrow 2\,(1), \\ 3 = 1 \rightarrow 3\,(1), \\ 5 = 3 \rightarrow 1\,(3), \\ 6 = 2 \rightarrow 4\,(2,8) \cup 1 \rightarrow 4\,(5), \\ 7 = 1 \rightarrow 3\,(5) \cup 2 \rightarrow 3\,(8), \\ 8 = 4 \rightarrow 2\,(6). \end{cases}$$

Deducem :

$$(41)\qquad 3 \neq 7\,, \quad 1 \neq 5\,.$$

c) *Mulțimile maximale*. Pentru determinarea mulțimilor maximale putem proceda în cazul de față astfel. Din (41) deducem că sînt permise următoarele grupări :

$$(42_1)\qquad (1,3) \text{ și } (5,7)$$

sau

$$(42_2)\qquad (3,5) \text{ și } (1,7).$$

Repartizînd valorile 2, 6, 8 ale lui Z în toate modurile posibile între cele două perechi de grupări de mai sus, vom obține toate mulțimile maximale. Pentru aceasta observăm că trei valori ale lui Z se pot grupa în două grupări într-un număr de

$$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 3 + 1 = 7.$$

În cazul examinat aceste grupe sînt :

$$(43)\qquad 2 \quad 6 \quad 8 \quad 2,6 \quad 2,8 \quad 6,8 \quad 2,6,8.$$

Nu construim mulțimile maximale deoarece minimizarea se poate realiza fără a le cunoaște efectiv.

d) *Mulțimile maximale care conțin toate valorile lui Z*. Din (42_1) și (42_2) deducem că numărul minim de mulțimi maximale care cuprind toate valorile lui Z nu poate fi mai mic de două. Vom obține toate soluțiile dacă vom asocia grupările (43) cu grupările (42_1) sau (42_2), astfel încît cele două mulțimi obținute să cuprindă toate valorile lui Z. Obținem :

(1,3),	(5,7,2,6,8) ;	(3,5),	(1,7,2,6,8) ;
(1,3,2),	(5,7,6,8) ;	(3,5,2),	(1,7,6,1) ;
(1,3,6),	(5,7,2,8) ;	(3,5,6),	(1,7,2,8) ;
(1,3,8),	(1,5,7,2,6) ;	(3,5,8),	(1,7,6,8) ;
(1,3,2,6),	(5,7,8) ;	(3,5,2,6),	(1,7,8) ;
(1,3,2,8),	(5,7,6) ;	(3,5,2,8),	(1,7,6) ;
(1,3,6,8),	(5,7,2) ;	(3,5,6,8),	(1,7,2) ;
(1,3,2,6,8),	(5,7) ;	(3,5,2,6,8),	(1,7) ;

şi notînd prima mulţime cu Z^1 iar a doua ca Z^2 obţinem tabloul final de tranziţii (tabloul 15).

Tabloul 15

$K^{i\to j}$

		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3
Z	1	11,1	01,1		11,2	01,1		11,1	10,2	0∼,1		∼1,1	
	2		0∼,2	00,1					01,1				

WZ

Pentru realizarea automatului studiat ca automat Moore procedăm ca în exemplul precedent. Din tabloul 14 obţinem condiţiile ca semnalelor executive să le corespundă schimbări ale stărilor interne. Avem (omitem litera Z)

$$1 \neq 2,\ 1 \neq 3,\ 2 \neq 6,\ 3 \neq 5,\ 5 \neq 6,\ 5 \neq 7,\ 6 \neq 1,\ 6 \neq 8,\ 7 \neq 1,$$
$$8 \neq 7,\ 8 \neq 1.$$

Din condiţia ca la semnale diferite să corespundă schimbări diferite ale variabilei Z deducem

$$2 \neq 3,\ 6 \neq 7,\ 6 \neq 1.$$

Împreună cu (41) deducem mulţimile maximale. Mai întîi mulţimile $M^{i,j}$ sînt

$$1,5\ ;\ 2,5^{\vee}\ ;\ 3,6\ ;\ 5,8^{\vee}$$
$$2,7\ ;\ 3,7$$
$$2,8^{\vee}\ ;\ 3,8.$$

Mulţimile M^{ijk} sînt

$$2,5,8.$$

Mulţimile maximale sînt deci

$$(1,5),\ (2,5,8),\ (2,7),\ (3,6),\ (3,7),\ (3,8).$$

Forma F este

$$F = M_1(M_2 + M_3)(M_4 + M_5 + M_6)\,M_2M_4\,(M_3 + M_5)(M_2 + M_6) =$$
$$= M_1\,M_2\,M_4\,(M_3 + M_5).$$

Pentru varianta

$$M_1\,M_2\,M_3\,M_4$$

după repartizarea lui 2 în M_2, avem

$$(1),\ (2,5,8),\ (7),\ (3,6)$$

Obţinem tabloul 16.

Tabloul 16

$K^{i\to j}$

Z	1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3
1	11,2	01,3										
2=5=8		0∼,7	00,3	11,7	01,3		11,1					
3=6								10,2	0∼,1		∼1,2	
7								01,1				

WZ

În exemplul studiat ambele blocuri de diferenţiere din figura 7 sînt necesare.

Exemplul 5. Să se minimizeze un automat generalizat a cărui funcţionare este descrisă prin tabloul de tranziţii 17.

Tabloul 17

Z	$K^{i\to j}$: 1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	K^{i}: 1	2	3	4
1	∼∼,2	∼1,4											00,1	2	4	—
2					11,5		0∼,3						3	∼1,2	—	5
3		00,4											11,3	—	4	—
4								00,7					7	—	10,4	—
5									00,3			∼1,6	3	—	6	10,5
6								00,7		1∼,8			7	8	1∼,6	—
7	1∼,2	∼0,6	00,5										∼∼,7	2	6	5
8							∼0,1						1	01,8	—	—

W_i, Z W_p, Z

În prima parte a tabloului sînt trecute semnalele W sub formă de impulsuri. În a doua parte a tabloului sînt trecute semnalele potenţiale.

a) *Contopirea.* În acest caz contopirea trebuie efectuată prin compararea nodurilor succesive (ale grafului automatului).

Urmărind tabloul 16 deducem :

$$\frac{1=7}{00_p=\sim\sim_p}\Rightarrow\frac{\begin{matrix}2=2\\4=6\end{matrix}}{\begin{matrix}\sim\sim_i=1\sim_i\\\sim 1_i=\sim 0_i\end{matrix}}\times,\ \frac{3=7}{11_p=\sim\sim_p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4=6}{00_i=\sim 0_i}\vee,\ \frac{2=8}{\sim 1_p=01_p}\Rightarrow\frac{3=1}{0\sim_i=\sim 0_i}\Rightarrow\frac{3=1}{11_p=00_p}\times\frac{4=6}{10_p=1\sim_p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{7=7}{00_i=00_i}\vee.$$

Cu indicii *p*, *i* am notat semnalele potenţiale şi impulsurile.

Rezultă că pot fi contopite nodurile 4 cu 6 şi 3 cu 7. Obţinem tabloul de tranziţii 18.

Tabloul 18

		$K^{i\to j}$												K^i			
		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	1	2	3	4
Z	1	~~,2	~1,4											00,1	2	4	—
	2					11,5		0~,3						3	~1,2	—	5
	3=7	1~,2	00,4	00,5										11,3	2	4	5
	4=6								00,3		1~,8			3	8	10,4	—
	5									00,3			~1,4	3	—	4	10,5
	8							01,1						1	11,8	—	—
		W_i Z												W_p Z			

b) *Mulţimile de valori neegale ale lui Z.* Dacă elementele intermediare sînt de tip A, din a doua parte a tabloului 18 deducem expresiile

$$1 = 1\,(1,8) \qquad 5 = 4\,(2,3,5)$$
$$2 = 2\,(1,2)$$
$$3 = 1\,(2,3,4,5) \qquad 8 = 2\,(4,6)$$
$$4 = 3\,(1,3,4,5).$$

Din prima parte a tabloului avem

$$1 = 1 \to 2\,(1) \cup 1 \to 3\,(1) \qquad 5 = 4 \to 1\,(5) \cup 4 \to 3\,(5),$$
$$2 = 2 \to 4\,(2) \cup 2 \to 1\,(2) \qquad 8 = 2 \to 1\,(8),$$
$$3 = 1 \to 2\,(3) \cup 1 \to 3\,(3) \cup 1 \to 4\,(3),$$
$$4 = 2 \to 1\,(4) \cup 3 \to 2\,(4).$$

Observăm că nodurile grafului automatului notate cu K^j sînt stabile iar cele notate cu $K^{i\to j}$ sînt nestabile.

Obţinem apoi inegalităţile

$$1 \sim 8 \neq 2 \sim 3 \sim 4 \sim 5,\ 1 \neq 3,\ 2 \neq 4,\ 2 \neq 8$$
$$1 \sim 2 \neq 4 \sim 8$$

din care deducem că variabila Z trebuie să aibe cel puţin trei valori distincte deoarece avem

$$1 \neq 2 \neq 8.$$

Dacă elementele intermediare sînt de tip B, din prima parte a tabloului 18 deducem expresiile

$$1 = 2 \to 1\,(8) \qquad 4 = 1 \to 3\,(1,3) \cup 4 \to 3\,(5),$$
$$2 = 1 \to 2\,(1,3) \qquad 5 = 1 \to 4\,(3) \cup 2 \to 4\,(2),$$
$$3 = 2 \to 1\,(2) \cup 3 \to 1\,(4) \cup 4 \to 1\,(5)\ 8 = 3 \to 2\,(4).$$

Din a doua parte a tabloului avem

$$1 = 1\,(1), \quad 5 = 4\,(5),$$
$$2 = 2\,(2), \quad 8 = 2\,(8),$$
$$3 = 1\,(3),$$
$$4 = 3\,(4).$$

Obţinem inegalităţile

$$8 \neq 2,\ 1 \neq 3.$$

c) *Mulţimile maximale.* Presupunem automatul realizat cu elemente intermediare de tip B.

Aceste mulţimi pot fi construite ca şi în exemplul precedent.

Avem mai întîi grupările

$$(1,8) \text{ şi } (2,3) \tag{44_1}$$

sau

$$(1,2) \text{ şi } (3,8). \tag{44_2}$$

Celelalte valori ale lui Z pot fi grupate astfel

$$4 \quad 5 \quad 4,5. \tag{45}$$

Fără a construi efectiv mulţimile maximale, trecem la punctul următor.

d) *Mulţimile maximale care conţin toate valorile lui Z.* Putem construi aceste mulţimi asociind celor două grupări (44_1) sau (44_2) una dintre grupările (45) şi complementara ei faţă de mulţimea

$$(4,5).$$

Obţinem mulţimile maximale

$$(1, 8), \quad (2, 3, 4, 5); \qquad (1, 2), \quad (3, 8, 4, 5);$$
$$(1, 8, 4), \quad (2, 3, 5); \qquad (1, 2, 4), \quad (3, 8, 5);$$
$$(1, 8, 5), \quad (2, 3, 4); \qquad (1, 2, 5), \quad (3, 8, 4);$$
$$(1, 8, 4, 5), (2, 3); \qquad (1, 2, 4, 5), (3, 8).$$

Alegem soluţia

$$(1, 8, 4), \quad (2, 3, 5).$$

Tabloul de tranziţii final este cel din tabloul 19.

Tabloul 19

		$K^{j \to j}$												K^i			
		1→2	1→3	1→4	2→3	2→4	3→4	2→1	3→1	4→1	3→2	4→2	4→3	1	2	3	4
Z	1	~~,2	~1,1					01,1	00,1		~1,1			00,1	11,1	10,1	—
	2	1~,2	00,1	00,2		11,2		0~,2		00,2			~1,1	11,2	~1,2	—	10,2
		$W_i\ Z$												$W_p\ Z$			

Automatul studiat poate fi realizat şi ca automat Moore. Modul de lucru rezultă din exemplele precedente.

10. CONCLUZII

După cum rezultă din cele expuse mai sus, pentru minimizarea automatelor asincrone se poate utiliza un procedeu unic, expus la punctele 3—6 din lucrare.

Menţionăm că acelaşi procedeu poate fi utilizat şi pentru minimizarea automatelor sincrone comandate prin impulsuri [3].

Procedeul descris a fost expus pentru prima dată într-o comunicare anterioară[1]. În forma expusă în această comunicare, etapa d) de la punctul 3, constă în identificarea soluţiei din combinările cîte 1,2,... a mulţimilor maximale. La sugestia lui Gh. Ioanin pentru această etapă am adoptat ulterior algoritmul descris în [4], ([3]).

Un procedeu de minimizare diferit şi aparţinînd lui Gh. Ioanin este expus în [7].

Primită la redacţie la 21 aprilie 1965

Institutul de Petrol, Gaze şi Geologie,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. В. И. Лазарев, Е. И. Пиил, Синтез асинхронных конечных автоматов, Москва, 1964.
2. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*, Edit. tehnică, 1959.
3. L. Livovschi, *Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice*, Edit. Acad. R.P.R., 1963.
4. P. Naslin, *Circuits à relais et automatismes à séquences*, Paris, Dunod, 1958.
5. D. A. Huffman, *The Synthesis of Sequential Switching Circuits* Inst., **25**, *3*, *4* (1954).
6. D. D. Aufenkam, *Analysis of Sequential Machines II.* IRE Trans VEC, *7* şi *4* (1958).
7. Gh. Ioanin, *Asupra minimului de stări a schemelor în mai mulţi timpi.* Comunicare la Congresul IFAC, Moscova 1962 (sub tipar).

---

[1] *Determinarea numărului minim de stări ale unui automat finit.* Comunicare la Sesiunea asupra problemelor teoretice şi practice privitoare la automatizările industriale, noiembrie, 1961.

GENERALIZAREA UNEI FORMULE DE CVADRATURĂ A LUI F. TRICOMI

DE

VIORICA IACOB

În această lucrare se generalizează o formulă de cvadratură propusă de F. Tricomi pentru calculul integralelor simple (1) și se dă expresia corespunzătoare (7) a restului. Această expresie poate fi majorată cu ajutorul oscilației $\Omega^{(r)}$ a derivatei $f^{(r)}(x)$ a funcției de integrat $f(x)$, în intervalul $[a, b]$.

Se dă apoi o condiție suficientă pentru ca formula de cvadratură (6), dedusă dintr-o formulă de cvadratură dată (1), să constituie o formulă ameliorată.

În sfîrșit, se consideră diverse cazuri particulare de formule de cvadratură deduse din formula lui Simpson și din formula trapezelor. Formulele date sînt ilustrate pe un exemplu.

1. Fie o funcție $f(x)$ de clasa $C_r\,[a, b]$, adică continuă împreună cu derivatele sale de primele r ordine în intervalul închis $[a, b]$. Pentru calculul numeric al integralei

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

se utilizează în general relația

$$I = A_p + R_p, \tag{2}$$

unde A_p este o expresie de forma

$$A_p = \sum_{j=0}^{p} c_j f(x_j).$$

Aici x_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, p)$ sînt nodurile considerate în intervalul $[a, b]$, cu $x_0 = a$, $x_p = b$, iar R_p este restul formulei de cvadratură. Constantele c_j sînt cunoscute și depind de alegerea formulei de cvadratură.

ST. CERC. MAT. TOM. 17, Nr. 8 P. 1221–1230, BUCUREȘTI, 1965

În cele ce urmează vom presupune nodurile echidistante. Notînd prin

$$\omega_p = \frac{b-a}{p}$$

lungimea comună a intervalelor dintre două noduri consecutive, se știe că restul are în general expresia

$$R_p = \alpha\, p\omega^{r+1} f^{(r)}(\xi), \tag{3}$$

unde α este o constantă absolută, iar ξ un punct din intervalul deschis (a, b).

O metodă generală foarte elegantă pentru determinarea formei restului în formulele de cvadratură a fost dată de D. V. Ionescu [1].

În această lucrare vom extinde un procedeu folosit de F. Tricomi [2] pentru a deduce din (2) și (3) o nouă formulă de cvadratură, împreună cu expresia corespunzătoare a restului.

2. Să scriem relația (2) pentru cazul cînd intervalul $[a, b]$ a fost divizat întîi în p părți egale și apoi în q părți egale, luînd $q > p$. Avem

$$\begin{aligned} I &= A_p + \alpha p\omega_p^{r+1} f^{(r)}(\xi_1), \\ I &= A_q + \alpha q\omega_q^{r+1} f^{(r)}(\xi_2), \end{aligned} \tag{4}$$

cu

$$\xi_1 \in (a, b),\ \xi_2 \in (a, b),\ \omega_p = \frac{b-a}{p},\quad \omega_q = \frac{b-a}{q} = \frac{p}{q}\,\omega_p .$$

Din relațiile (4) s-ar deduce imediat valoarea lui I în cazul cînd $f(x)$ ar fi un polinom de gradul N, cu $N \leqslant r$. Am avea în acest caz $f^{(r)}(\xi_1) = f^{(r)}(\xi_2)$ și deci

$$I - A_q = \alpha\, q\omega_q^{r+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{r+1} f^{(r)}(\xi_2) = \left(\frac{p}{q}\right)^r (I - A_p),$$

de unde

$$I = \frac{A_q - t^r A_p}{1 - t^r},\quad t = \frac{p}{q}. \tag{5}$$

Obținem astfel formula

$$I = A_q + \frac{t^r}{1-t^r}(A_q - A_p), \tag{5'}$$

care este valabilă pentru orice polinom de grad $N \leqslant r$.

Acest fapt sugerează ca pentru o funcție $f(x)$ oarecare din clasa $C_r\,[a, b]$ să scriem

$$I = A_q + \frac{t^r}{1-t^r}(A_q - A_p) + R_{p,q}, \tag{6}$$

unde $R_{p,q}$ este restul formulei de cvadratură (6).

Avem, conform lui (4) și (6),

$$R_{p,q} = I - A_q - \frac{t^r}{1-t^r}(A_q - A_p) = \alpha q \omega_p^{r+1} t^{r+1} f^{(r)}(\xi_2) - \frac{t^r}{1-t^r}(A_q - A_p).$$

Pe de altă parte, din (4) rezultă prin scădere

$$A_q - A_p = \alpha \omega_p^{r+1}[p f^{(r)}(\xi_1) - q t^{r+1} f^{(r)}(\xi_2)].$$

Obținem astfel o expresie interesantă a restului

$$R_{p,q} = \frac{\alpha p \omega_p^{r+1} t^r}{1-t^r}[f^{(r)}(\xi_2) - f^{(r)}(\xi_1)], \tag{7}$$

care poate fi majorată în funcție de oscilația $\Omega^{(r)}$ a lui $f^{(r)}(x)$ în $[a, b]$. Avem

$$|R_{p,q}| < \frac{|\alpha| p \omega_p^{r+1} t^r}{1-t^r} \Omega^{(r)}. \tag{8}$$

În cazul particular cînd $q = 2p$, avem $t = 2^{-1}$. Regăsim astfel formula lui F. Tricomi

$$I = A_{2p} + \frac{A_{2p} - A_p}{2^r - 1} + R_{p,2p}, \tag{9}$$

cu

$$R_{p,2p} = \frac{\alpha p \omega_p^{r+1}}{2^r - 1}[f^{(r)}(\xi_2) - f^{(r)}(\xi_1)]. \tag{10}$$

3. Cu titlu de aplicație să considerăm formula de cvadratură a lui Simpson. În acest caz [3] (p. 472), avem $p = 2n$ și

$$I = A_{2n} + R_{2n},$$

unde

$$A_{2n} = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}^{(n)}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}^{(n)})\right].$$

S-a notat

$$x_j^{(n)} = a + j\frac{b-a}{2n}, \quad (j = 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

Expresia restului este

$$R_{2n} = \frac{-n\omega_p^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \omega_p = \frac{b-a}{2n}.$$

Luînd $q = 2m$, cu $m > n$, și observînd că în cazul actual $r = 4$, formula (6) devine

$$I = A_{2m} + \frac{t^4}{1-t^4}(A_{2m} - A_{2n}) + R_{p,2p}. \tag{11}$$

Pe de altă parte, comparînd cu (3) avem $\alpha = -\frac{1}{180}\cdot$ În consecință, limitarea restului este în general dată de

$$|R_{p,q}| < \frac{1}{90}\,\frac{t^4}{1-t^4}\,n\omega_p^5\,\Omega^{(4)}. \tag{12}$$

Dacă $q=2p$, deci $m=2n$, avem $t=1/2$ și limitarea precedentă se reduce la

$$|R_{p,2p}| < \frac{n\,\omega_p^5}{1\,350}, \tag{12'}$$

rezultat care a fost dat de F. Tricomi.

Să luăm de exemplu $n=1$, $m=2$, deci $p=2$ și $q=4$. Avem

$$A_2 = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right],$$

$$A_4 = \frac{b-a}{12}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Formula de cvadratură (11) devine

$$\begin{aligned} I = \frac{b-a}{90}\Big\{7\,[f(a)+f(b)] + 32\Big[f\Big(\frac{3a+b}{4}\Big) + {} \\ + f\Big(\frac{a+3b}{4}\Big)\Big] + 12f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big\} + R, \end{aligned} \tag{13}$$

unde

$$|R| < \frac{(b-a)^5}{2^5\cdot 1350}\,\Omega^4.$$

4. Ca alt exemplu să luăm prima formulă de cvadratură a trapezelor. Avem în acest caz [1] (p. 27)

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{p}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{p-1} f(x_j^{(p)})\right] + R, \tag{14}$$

unde $x_j^{(p)}$ sînt abscisele punctelor de subdiviziune,

$$x_j^{(p)} = a + \frac{b-a}{p}\,j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p-1). \tag{15}$$

Expresia restului este dată de

$$R = \sum_{j=1}^{p} R^{(j)}, \tag{16}$$

unde

$$R^{(j)} = -\int_{x_{j-1}^{(p)}}^{x_j^{(p)}} \frac{(t - x_{j-1}^{(p)})(x_j^{(p)} - t)}{2} f''(t)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{12\,p^3} f''(\xi_j),$$

cu $\xi_j \in (x_{j-1}^{(p)}, x_j^{(p)})$.

Avem astfel, conform lui (16),

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12\,p^3} \sum_{j=1}^{p} f''(\xi_j) = -\frac{p}{12}\,\omega_p^3 f''(\xi), \tag{17}$$

deoarece $f''(x)$ fiind o funcţie continuă în $[a, b]$, putem să scriem

$$\sum_{j=1}^{p} f''(\xi_j) = p f''(\xi),$$

cu $\xi \in (a, b)$.

Expresia restului dată de (17) este de forma (3), unde $r = 2$ şi $\alpha = 1/12$.

Punînd

$$A_p = \omega_p \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{p-1} f(x_j^{(p)})\right], \tag{18}$$

se deduce astfel formula de cvadratură

$$I = A_q + \frac{t^2}{1 - t^2}(A_q - A_p) + R_{p,q}, \quad t = \frac{p}{q} \tag{19}$$

cu limitarea restului

$$|R_{p,q}| < \frac{1}{12}\, p\,\omega_p^3 \frac{t^2}{1 - t^2}\, \Omega^{(2)}. \tag{20}$$

În particular, dacă $q = 2p$, avem

$$I = A_{2p} + \frac{1}{3}(A_{2p} - A_p) + R, \tag{21}$$

cu limitarea restului

$$|R| < \frac{1}{36}\, p\,\omega_p^3\, \Omega^{(2)}. \tag{22}$$

Să luăm $p = 1$, $q = 2$. În acest caz avem

$$A_1 = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

$$A_2 = \frac{b - a}{2}\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f\left(\frac{a + b}{2}\right)\right].$$

Formula (21) conduce deci la

$$I = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] + R, \tag{23}$$

cu limitarea restului dată de

$$|R| < \frac{1}{36}(b-a)^3\,\Omega^2. \tag{24}$$

Se va observa că expresia apropiată obţinută coincide cu aceea dată de formula lui Simpson, cînd $p = 2$, însă cu o altă limitare a restului.

5. Să considerăm de asemenea a doua formulă a trapezelor [1] (p. 29). În acest caz, avem

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{p}\left[f(X_1^{(p)}) + \ldots + f(X_p^{(p)})\right] + R, \tag{25}$$

unde punctele $X_j^{(p)}$ sînt abscisele mijloacelor segmentelor egale determinate prin punctele de subdiviziune $x_j^{(p)}$ date de (15). Avem deci

$$X_j^{(p)} = a + \frac{b-a}{p}j - \frac{b-a}{2p}, \quad (j = 1, 2, \ldots, p). \tag{26}$$

Acum expresia restului este dată de

$$R = \sum_{j=1}^{p} R^{(j)}, \tag{27}$$

unde

$$R^{(j)} = \int_{x_{j-1}^{(p)}}^{x_j^{(p)}} \varphi_j(x)\, f''(x)\,\mathrm{d}x,$$

cu

$$\varphi_j(x) = \frac{(x - x_{j-1}^{(p)})^2}{2} \quad \text{pentru } x_{j-1}^{(p)} \leqslant x \leqslant X_j^{(p)},$$

$$\varphi_j(x) = \frac{(x_j^{(p)} - x)^2}{2} \quad \text{pentru } X_j^{(p)} \leqslant x \leqslant x_j^{(p)}.$$

Rezultă de aici

$$R^{(j)} = f''(\xi_1)\int_{x_{j-1}^{(p)}}^{x_j^{(p)}} \varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(x_j^{(p)} - x_{j-1}^{(p)})^3}{24} f''(\xi_j), \tag{28}$$

cu $\xi_j \in (x_{j-1}^{(p)}, x_j^{(p)})$.

Prin urmare, din (27) şi (28) se deduce, în virtutea continuităţii lui $f''(x)$,

$$R = \frac{p\,\omega_p^3}{24} f''(\xi), \tag{29}$$

cu $\xi \in (a, b)$.

În cazul de față avem deci $r = 2$ și $\alpha = 1/24$. Punînd

$$A_p = \omega_p\,[f(X_1^{(p)}) + \ldots + f(X_p^{(p)})], \tag{30}$$

avem formula de cvadratură

$$I = A_q + \frac{t^2}{1-t^2}(A_q - A_p) + R_{p,q}, \quad t = \frac{p}{q}, \tag{31}$$

cu limitarea restului

$$|R_{p,q}| < \frac{p\,\omega_p^3}{24}\cdot\frac{t^2}{1-t^2}\,\Omega^{(2)}. \tag{32}$$

În cazul cînd $q = 2p$, avem astfel o limitare

$$|R_{p,2p}| < \frac{1}{72}\,p\,\omega_p^3\,\Omega^{(2)} \tag{33}$$

mai satisfăcătoare decît (22):

Să luăm $p = 1$, $q = 2$. În acest caz

$$A_1 = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$A_2 = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right].$$

Formula (30) ne conduce la

$$I = \frac{b-a}{3}\left\{2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} + R, \tag{34}$$

unde

$$|R| < \frac{(b-a)^3}{72}\,\Omega^{(2)}. \tag{35}$$

6. Pentru ca formula de cvadratură (6) să fie avantajoasă, va trebui evident ca ea să conducă la o limitare a restului $R_{p,q}$ mai bună ca cea relativă atît la R_p, cît și la R_q.

Să notăm $M^{(r)} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(r)}(x)| \neq 0$. Circumstanța menționată va avea sigur loc dacă avem inegalitățile

$$|\alpha|\,p\,\omega_p^{r+1}\,\frac{t^r}{1-t^r}\,\Omega^{(r)} < |\alpha|\,p\,\omega_p^{r+1}\,M^{(r)},$$

$$|\alpha|\,p\,\omega_p^{r+1}\,\frac{t^r}{1-t^r}\,\Omega^{(r)} < |\alpha|\,q\,\omega_q^{r+1}\,M^{(r)} = |\alpha|\,p\,\omega_p^{r+1}\,t^r\,M^{(r)}.$$

Rezultă de aici că trebuie să avem în acelaşi timp

$$t^r < \frac{M^{(r)}}{\Omega^{(r)} + M^{(r)}}, \quad t^r < \frac{M^{(r)} - \Omega^{(r)}}{\Omega^{(r)}}.$$

Să punem

$$w^{(r)} = \frac{\Omega^{(r)}}{M^{(r)}}$$

şi să observăm că $0 \leqslant w^{(r)} \leqslant 2$, deoarece $\Omega^{(r)} \leqslant 2M^{(r)}$. Condiţiile suficiente de mai sus revin deci la

$$t^r < \frac{1}{1 + w^{(r)}}, \quad t^{(r)} < 1 - w^{(r)}. \tag{36}$$

Dacă prima are loc, atunci formula de cvadratură (6) este sigur mai avantajoasă decît cea care conduce la valoarea A_p pentru I, iar dacă a doua condiţie are loc, atunci ea este cu siguranţă mai avantajoasă decît cea care conduce la valoarea A_q. Condiţia a doua este mai restrictivă şi ea atrage pe prima, deoarece

$$1 - w^{(r)} < \frac{1}{1 + w^{(r)}}.$$

Rămîne deci unica condiţie

$$t^r < 1 - w^{(r)} \tag{37}$$

şi ea presupune că $w^{(r)} < 1$.

Prin urmare, ori de cîte ori $0 \leqslant w^{(r)} < 1$, aplicarea formulei (6) este cu siguranţă avantajoasă dacă t este ales convenabil conform lui (37). În afară de aceasta, expresia restului $R_{p,q}$, dată de (7), are un interes teoretic evident.

Inegalitatea

$$w^{(r)} < 1 \tag{38}$$

are loc de exemplu dacă avem $f^{(r)}(x) > 0$ în intervalul $[a, b]$. De asemenea, ea are loc dacă $f^{(r)}(x) < 0$ în $[a, b]$.

Rezultă de aici faptul că formula de integrare aproximativă (6) are şi un interes practic. În plus ea poate conduce la rezultate utile chiar dacă inegalitatea (37) nu are loc, după cum va arăta exemplul tratat la punctul **7**. Ar fi de aceea interesant de a se da o nouă expresie restului $R_{p,q}$, ţinîndu-se seamă de metoda generală dezvoltată recent de D. V. Ionescu [4].

7. Cu titlu de aplicaţie, să considerăm integrala clasică

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398163397\ldots,$$

care servește la calculul numeric al lui π. În cazul de față

$$f(x) = (1 + x^2)^{-1},\ f'(x) = -2x(1 + x^2)^{-2},\ f''(x) = (6x^2 - 2)(1 + x^2)^{-3},$$

$$f'''(x) = 24x(1 - x^2)(1 + x^2)^{-4},\ f^{(IV)}(x) = 24(5x^4 - 10x^2 + 1)(1 + x^2)^{-5},$$

$$f^{(V)}(x) = -240x(3x^4 - 10x^2 + 3)(1 + x^2)^{-6}.$$

Dacă aplicăm prima formulă a trapezului (14) găsim pentru $p = 1$, $q = 2$,

$$A_1^{(I)} = 0{,}75,$$

$$A_2^{(I)} = 0{,}775,$$

astfel că formula (6), adică (23), conduce la

$$I = A_2^{(I)} + \frac{1}{3}(A_2^{(I)} - A_1^{(I)}) + R = \frac{47}{60} + R = 0{,}78333\ldots + R.$$

Avem acum $\Omega^{(2)} = \max\limits_{[0,1]} |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| = \frac{5}{2}$, de unde, conform lui (24), limitarea restului

$$|R| < \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{36} < 0.07.$$

În realitate, cum formula de cvadratură (23) coincide cu cea a lui Simpson pentru $p = 2$, $n = 1$, utilizînd limitarea restului corespunzător formulei lui Simpson, avem

$$|R| < \frac{1}{90}\, \frac{1}{2^5}\, M^{(4)} = \frac{24}{2\,880} < 0{,}0084,$$

deoarece $M^{(4)} = 24$.

În acest caz, deci, prima formulă a trapezului modificată ne conduce la un rezultat avantajos, deși avem

$$\Omega^{(2)} = \frac{5}{2},\quad M^{(2)} = 2,\quad w^{(2)} = \frac{\Omega^{(2)}}{M^{(2)}} = \frac{5}{4} > 1.$$

Să considerăm acum a doua formulă a trapezului. În acest caz, avem

$$A_1^{(II)} = 0{,}8,$$

$$A_2^{(II)} = 0{,}790588,$$

în timp ce formula (6), adică (34), ne dă

$$I = A_2^{(II)} + \frac{1}{3}(A_2^{(II)} - A_1^{(II)}) + R = 0{,}787451\ldots + R.$$

În cazul de față este clar că formula (34) permite de asemenea ameliorarea rezultatului pe această cale, deși avem $w^{(r)} > 1$. Limitarea restului este dată de (35), de unde

$$|R| < \frac{5}{144} < 0{,}035.$$

În realitate în cazul de față avem $|R| < 0{,}003$.

În sfîrșit, să aplicăm formula lui Simpson ameliorată (13). În acest caz, formula lui Simpson pentru $p = 2$ și $q = 4$ ne dă succesiv [3] (p. 472)

$$A_2^{(III)} = A_1^{(I)} = 0{,}775,$$

$$A_4^{(III)} = \frac{8\,011}{10\,200} = 0{,}78539121\ldots$$

Eroarea la care conduce A_4 este mai mică decît 0,000007.

Dacă acum considerăm formula (13) se găsește

$$I = A_4^{(III)} + \frac{1}{15}(A_4^{(III)} - A_2^{(III)}) + R = 0{,}785528\ldots + R.$$

Limitarea restului este dată de

$$|R| < \frac{\Omega^{(4)}}{1\,350 \cdot 2^5} = \frac{273}{1\,350} \cdot \frac{1}{28} < 0{,}0008,$$

deoarece $\Omega^{(4)} = -f^{(4)}(0)f^{(4)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{273}{8}$.

În realitate, ținînd seamă de valoarea lui I, se vede că eroarea la care ne conduce formula (13) în acest caz este mai mică doar decît 0,00014, astfel încît ea este mai puțin avantajoasă decît formula lui Simpson care conduce la $A_4^{(III)}$.

Această circumstanță a fost posibilă deoarece avem

$$\frac{\Omega^{(4)}}{M^{(4)}} > 1.$$

Exemplul ne arată că formula (9), propusă de F. Tricomi, nu aduce întotdeauna o ameliorare a formulei de cvadratură inițiale.

Primită la redacție la 19 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Edit. tehnică, București, 1957.
2. F. Tricomi, *Sul resto delle formule di quadratura numerica migliorate col metode di „estrapolazione”*. Bolletino dell'Unione Matematica Italiana (3), **14**, 102–104 (1959).
3. C. Iacob, *Curs de matematici superioare*, Edit. tehnică, București, 1957.
4. D. V. Ionescu, *Generalizarea formulelor de cuadratură ale lui Simpson și Newton*, St. cerc. mat., **16**, *8*, 1001–1032 (1964).

TEOREMELE DE SCUFUNDARE SOBOLEV-KONDRAŞEV [1]

DE

DAN PASCALI

În lucrare se face o prezentare îmbunătăţită a spaţiilor lui Sobolev W_p^l, bazată pe rezultatele lui L. V. Kantorovici asupra operatorilor integrali în spaţiile L^p, în scopul unor demonstraţii rapide a teoremelor de scufundare Sobolev-Kondraşev.

Introducerea în 1938 de către S. L. Sobolev [15] a derivatelor generalizate a constituit unul din primii paşi în vederea aplicării rezultatelor analizei funcţionale la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale. Studiul spaţiilor de funcţii, care admit derivate generalizate, a fost continuat de V. I. Kondraşev [7] şi a căpătat o formă completă în monografia lui S. L. Sobolev [16], în 1950.

Datorită interesului deosebit de mare al acestor rezultate, mulţi matematicieni au reuşit să dea demonstraţii mai simple teoremelor de scufundare ale spaţiilor W_p^l. Printre acestea remarcăm, în 1956, lucrarea lui L. V. Kantorovici [5], care se bazează exclusiv pe studiul operatorilor integrali. Mai tîrziu, în 1958, E. D. Garber [3] dă o demonstraţie a complet-continuităţii operatorului de scufundare, utilizînd o transformare în integralele multiple datorită lui C. Morrey [12]. În acelaşi scop, P. Szeptycki [18], [19] porneşte de la anumite inegalităţi pentru ecuaţii eliptice stabilite de L. Nirenberg [14].

În prezenta lucrare, înlocuind raţionamentele prin inducţie ale lui L. V. Kantorovici, prin stabilirea unor reprezentări ale funcţiilor aparţinînd lui W_p^l şi bazîndu-ne pe rezultatele asupra operatorilor integrali din [5], [6], obţinem teoremele de scufundare Sobolev-Kondraşev şi complet-continuitatea operatorului de scufundare.

Acest procedeu permite, în plus, stabilirea unor rezultate relative la derivatele generalizate de ordin mai mic ca l.

---

[1] Lucrarea constituie o scurtă prezentare a expunerilor cu tema „Spaţiile lui Sobolev", ţinute în cadrul seminarului „Metode funcţionale în fizica matematică" de la Institutul de matematică, Bucureşti, în noiembrie-decembrie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 8, P. 1231–1261, BUCUREŞTI, 1965

1. Spaţiul L^p_D. Fie D un domeniu mărginit al spaţiului euclidian m-dimensional R^m.

DEFINIŢIA 1. O funcţie $u : D \to R$ se numeşte *p-integrabilă* $(p > 0)$ dacă :

1. u este măsurabilă pe D,
2. $|u|^p$ este integrabilă pe D.

Spaţiul liniar al funcţiilor p-integrabile pe D îl notăm prin L^p_D $(L^1_D = L_D)$. Considerăm egale funcţiile din L^p_D, care coincid aproape peste tot.

Numărul $p' > 0$ se numeşte conjugatul numărului p dacă

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Submulţimea elementelor din L^p_D, care sînt funcţii continue pe D, este densă în L^p_D.

a) *Cazul $p \geqslant 1$.* Acest caz este studiat amănunţit în [6], [9], [10], [13], [16], [17]. La baza structurii acestor spaţii stau inegalităţile lui Hölder şi Minkovski.

INEGALITATEA LUI HÖLDER. Dacă $u \in L^p_D$ şi $v \in L^{p'}_D$, atunci $uv \in L_D$ şi

$$\int_D |u(x)\, v(x)|\, dx \leqslant \left(\int_D |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D v(x)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

INEGALITATEA LUI MINKOWSKI. Dacă u, $v \in L^p_D$, atunci $u + v \in L^p_D$ şi

$$\left(\int_D |u(x) + v(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_D |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_D |v(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Plecînd de la inegalitatea lui Minkowski se constată uşor că L^p_D este un spaţiu Banach cu norma

$$\| u \|_{L^p_D} = \left(\int_D |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Deseori în aplicaţii se foloseşte inegalitatea lui Hölder generalizată ([6], [16]) : Dacă $u \in L^p_D$, $v \in L^q_D$, $w \in L^r_D$, unde numerele pozitive p, q, r sînt legate prin relaţia

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

atunci $uvw \in L_D$ şi

$$\int_D |u(x)\, v(x)\, w(x)|\, dx \leqslant \left(\int_D |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |v(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_D |w(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{2}$$

Notăm prin L^∞_D mulţimea funcţiilor măsurabile şi mărginite aproape peste tot în D. Această mulţime este un spaţiu Banach, în raport cu norma

$$\| u \|_{L^\infty_D} = \text{vrai} \max_{x \in D} |u(x)|. \tag{3}$$

Notaţia $\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in D} |u(x)|$ înseamnă marginea inferioară a mulţimii numerelor A, astfel ca mulţimea punctelor $x\in D$, pentru care $u(x) > A$ să fie de măsură nulă. Convergenţa în L_D^∞ este convergenţa uniformă aproape peste tot.

Mulţimea funcţionalelor liniare (mărginite) pe L_D^p se notează prin $(L_D^p)^*$. Forma elementelor lui $(L_D^p)^*$ este dată de :

TEOREMA 1. (Frechet-Riesz). *Fiecărui element* $f\in(L_D^p)^*$ *îi corespunde un element unic* $v\in L_D^{p'}$, *astfel încît*

$$f(u)=\int_D u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

pentru orice $u\in L_D^p$.

b) *Cazul* $0<p<1$. Acest caz este studiat în [2] şi [16]. Deoarece inegalităţile lui Hölder şi Minkowski sînt inversate, spaţiul liniar L_D^p, cu topologia definită de (1) este un spaţiu cvasinormat, în sensul din [11]. Inegalitatea lui Minkowski este înlocuită prin

$$\|u+v\|_{L_D^p}\leqslant 2^{\frac{1-p}{p}}\left(\|u\|_{L_D^p}+\|v\|_{L_D^p}\right).$$

M. Day [2] arată că nu există funcţionale neidentic nule definite pe asemenea spaţii.

Observaţia 1. Dacă $p>0$ şi $u\in L_D^p$, atunci $u\in L_D^q$ pentru orice q cu $0<q\leqslant p$ şi

$$\|u\|_{L_D^q}\leqslant\|u\|_{L_D^p}|D|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

unde $|D|=\operatorname{mes} D$.

2. Funcţii medii. Operatorul de mediaţie a fost studiat sistematic în lucrările lui V. A. Steklov şi S. L. Sobolev.

DEFINIŢIA 2. Funcţia $\omega_h(x,y)$ de două puncte x şi y ale spaţiului R^m şi parametrul numeric $h>0$ se numeşte *nucleu de mediaţie* dacă :

1°. $\omega_h(x,y)$ depinde numai de h şi de distanţa $r=|x-y|$.

2°. $\omega_h(x,y)>0$ dacă $r\leqslant h$ şi $\omega_h(x,y)=0$ dacă $r>h$.

3°. $\omega_h(x,y)$ este indefinit diferenţiabilă.

4°. Dacă notăm prin $C_h(x)$ hipersfera plină cu centrul în punctul x şi de rază h, atunci

$$\int_{C_h(x)}\omega_h(x,y)\,\mathrm{d}y=1.$$

Un exemplu simplu de nucleu de mediaţie este funcţia

$$\omega_h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{H_h}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{h^2-r^2}} & \text{dacă } r\leqslant h,\\ 0 & \text{dacă } r>h,\end{cases}$$

unde

$$H_h=\int_{C_h(x)}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{h^2-r^2}}\,\mathrm{d}y.$$

Fie $u(x)$ o funcţie sumabilă pe D. Prelungim pe $u(x)$ prin zero în exteriorul lui D. Să punem

$$u_h(x) = \int_D u(y)\,\omega_h(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Funcţia $u_h(x)$ se numeşte *funcţie medie* a lui $u(x)$. Operatorul de mediaţie este un operator liniar. Funcţia medie (5) este nulă în punctele x a căror distanţă pînă la domeniul D este mai mare ca h.

Proprietăţile funcţiei medii :

a) Funcţia $u_h(x)$ este continuă şi are derivate parţiale de orice ordin continue în tot planul. Derivatele parţiale ale lui $u_h(x)$ se obţin prin derivare sub semnul integralei în (5).

b) Dacă $u(x)$ este continuă în D, atunci $u_h(x)$ tinde uniform către $u(x)$ pentru $h \to 0$, pe orice subdomeniu D' strict interior lui D ($D' \subset \overline{D}' \subset D$).

c) Dacă $u(x) \in L_D^p$ ($p \geqslant 1$), atunci $\|u_h\|_{L_D^p} \leqslant \|u\|_{L_D^p}$.

d) Dacă $u(x) \in L_D^p$ ($p \geqslant 1$), atunci $\lim\limits_{h \to 0} \|u_h - u\|_{L_D^p} = 0$.

§1. OPERATORI INTEGRALI

În acest paragraf prezentăm principalele rezultate, obţinute de L. V. Kantorovici în [5] şi [6], asupra operatorilor integrali definiţi pe spaţiul L_D^p.

3. Fie domeniul m-dimensional D şi domeniul s-dimensional Ω, ambele mărginite. Să considerăm spaţiile L_D^p ($p \geqslant 1$), L_D^∞, L_Ω^q ($q \geqslant 1$), L_Ω^∞ cu normele (1) respectiv (3). Fără micşorarea generalităţii şi pentru simplificarea scrierii, putem presupune, pe baza inegalităţii (4), că $|D| = 1$.

Dacă funcţia nucleu $K(x, y)$ este sumabilă pe domeniul $(m + s)$-dimensional $D \times \Omega$, atunci

$$u(y) = \int_D K(x, y)\, v(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

defineşte un operator $u = Tv$ de la L_D^p la L_Ω^q.

Teorema 2. *Fie* $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $p \geqslant 1$ *şi* $q \geqslant 1$. *Dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii* :

1) $\left(\int_D |K(x, y)|^\sigma \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant C_1$ (*aproape pentru orice* $y \in \Omega$)

2) $\left(\int_\Omega |K(x, y)|^\tau \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{\tau}} \leqslant C_2$ (*aproape pentru orice* $x \in D$)

3) $q \geqslant p$, $q \geqslant \tau$ *şi îndeplinesc inegalitatea* $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

$$\left(1 - \frac{\tau}{q}\right) p' \leqslant \sigma$$

atunci operatorul integral $u = Tv$, *definit prin* (6), *este un operator liniar de la* L_D^p *la* L_Ω^q, *iar*

$$\|T\| \leqslant C_1^{1-\frac{\tau}{q}} C_2^{\frac{\tau}{q}}. \tag{7}$$

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe inegalitatea lui Hölder generalizată (2).

Observaţia 2. În cazul $q = \infty$, teorema se formulează : Operatorul liniar T transformă $L_D^p\,(p \geqslant 1)$ în L^∞, dacă este îndeplinită condiţia 1) pentru $\sigma \geqslant p'$, iar $\|T\| \leqslant C_1$.

TEOREMA 3. *Dacă condiţiile* 1) *şi* 2) *ale teoremei* 2 *sînt păstrate, iar condiţia* 3) *este îndeplinită într-o formă mai tare*

$$3')\ q \geqslant p,\ q > \tau,\ \left(1 - \frac{\tau}{q}\right) p' < \sigma,$$

atunci operatorul $u = Tv$, *definit de* (6), *este complet continuu de la* L_D^p *la* L_Ω^q.

4. Să considerăm că nucleul operatorului depinde de un parametru numeric t

$$u_t(y) = \int_D K_t(x, y)\, v(x)\, \mathrm{d}x, \quad (u_t = T_t v).$$

DEFINIŢIA 3. Nucleul $K_t(x, y)$ se numeşte *aproape continuu uniform* pentru $t = t_0$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $h > 0$ şi x, se determină un $\delta > 0$ şi o mulţime $e(x)$ astfel ca

$$|K_t(x, y) - K_{t_0}(x, y)| < \varepsilon$$

pentru $|t - t_0| < \delta$, $y \notin e(x)$, iar mes $e(x) < h$.

TEOREMA 4. Dacă nucleul operatorului integral T_t este aproape continuu uniform în t_0 şi pentru orice valoare a parametrului t sînt satisfăcute condiţiile teoremei 3 (C_1 şi C_2 nu depind de t), atunci operatorul integral T_t este tare continuu în t_0, adică

$$\lim_{t \to t_0} \|T_t - T_{t_0}\| = 0.$$

5. Operatori integrali de tip potenţial. Să presupunem că Ω este o varietate s-dimensională a domeniului D $(s \leqslant m)$ şi să considerăm

$$K(x, y) = \frac{B(x, y)}{|x - y|^\lambda}, \quad (\lambda < m), \tag{8}$$

unde $B(x, y)$ este o funcţie mărginită pentru $x \in \bar{D}$, $y \in \bar{\Omega}$ şi continuă pentru $x \neq y$. Pentru sumabilitatea în x cu exponentul σ şi în y cu exponentul τ, trebuie ca

$$\lambda\sigma < m \text{ şi } \lambda\tau < s.$$

Deoarece în locul lui σ şi τ putem lua numere oricît de apropiate de $\frac{m}{\lambda}$ şi $\frac{s}{\lambda}$, condiţia 3′) se scrie

$$\left(1-\frac{s}{\lambda q}\right)p' < \frac{m}{\lambda}\cdot$$

Rezolvînd în raport cu q şi ţinînd seama că $q \geqslant p$, obţinem

$$(9)\qquad q < \frac{sp}{\lambda p - m(p-1)} = \frac{sp}{m-(m-\lambda)p} \text{ iar } s > m-(m-\lambda)p.$$

În cazul particular $\lambda = m-1$

$$q < \frac{sp}{m-p} \text{ iar } s > m-p.$$

Dacă $m-(m-\lambda)\cdot p = 0$, atunci q este arbitrar.

Dacă considerăm nucleul $K(x+\Delta x, y)$ ca funcţie de parametru Δx, atunci prin excluderea unei vecinătăţi suficient de mici a punctului x, nucleul $K(x+\Delta x, y)$ este uniform continuu în parametrul Δx şi pe baza teoremei 4 conchidem

$$\lim_{\Delta x\to 0} \| u_{\Delta x} - u \|_{L^q_\Omega} = 0.$$

Prin urmare, am stabilit următorul rezultat :

TEOREMA 5. *Dacă condiţiile* (9) *sînt îndeplinite, atunci operatorul integral* T *cu nucleul* (8) *este complet continuu de la* L^p_D *la* L^q_Ω. *În plus, dacă varietatea* Ω *depinde continuu de translaţia* Δx, *atunci*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\int_\Omega |u(x+\Delta x)-u(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$

Teorema este adevărată şi pentru $q=\infty$. În acest caz condiţia din observaţia 2 se scrie

$$(m-\lambda)\,p > m$$

iar continuitatea tare

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sup_x \mid u(x+\Delta x)-u(x) \mid = 0,$$

de unde obţinem :

TEOREMA 6. *Dacă este îndeplinită condiţia* $(m-\lambda)\,p > m$, *atunci operatorul integral* T *cu nucleul* (8) *este complet continuu de la* L^p_D la C_Ω.

Demonstraţii directe pentru teoremele 5 şi 6 se găsesc în [16] şi [17].

Înlocuind condiţiile (9) prin condiţiile mai largi

$$(9')\qquad q \leqslant \frac{sp}{\lambda p - m(p-1)} \quad \text{iar} \quad s \geqslant m-(m-\lambda)\,p,$$

conform teoremei 2, operatorul T de tip potenţial din teoremele 5 şi 6 rămîne numai liniar.

6. În continuare stabilim, după L. V. Kantorovici, o reprezentare integrală, care stă la baza tuturor raţionamentelor următoare.

Dacă D este un domeniu m-dimensional convex şi $u(x)$ o funcţie cu derivate parţiale continue în D, atunci

$$(10)\qquad u(y) = \frac{1}{|D|}\int_D u(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m}\int_D \frac{B_k(x, y)}{|x-y|^{m-1}}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x,$$

unde $B_k(x, y)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ sînt funcţii mărginite pentru $x, y \in D$, continue pentru $x \neq y$ şi

$$(11)\qquad |B_k(x, y)| \leqslant \frac{\delta^m}{m\cdot|D|}$$

δ fiind diametrul domeniului D.

Demonstraţie. Fie y un punct fix al domeniului D şi $x = y + r\bar{\rho}$ un punct arbitrar din D, $\bar{\rho}$ fiind versorul direcţiei $\overline{xy}$ iar $r = |x-y|$. Evident,

$$(12)\qquad u(y) = u(x) - \int_0^r \frac{\partial u(x)}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho.$$

Înmulţind ambele părţi ale lui (12) cu $r^{m-1}\,\mathrm{d}r$ şi integrînd în lungul razei, care trece prin punctul y şi are direcţia $\bar{\rho}$, de la 0 pînă la $d = \mathrm{d}(\bar{\rho})$, unde $\mathrm{d}(\bar{\rho})$ este lungimea segmentului acestei raze între limitele domeniului D, avem

$$u(y)\int_0^d r^{m-1}\mathrm{d}r = \int_0^d u(x)\,r^{m-1}\mathrm{d}r - \int_0^d r^{m-1}\,\mathrm{d}r\int_0^r \frac{\partial u(x)}{\partial\rho}\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int_0^d u(x)\,r^{m-1}\,\mathrm{d}r - \int_0^d \frac{\partial u(x)}{\partial \rho}\left(\int_\rho^d r^{m-1}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int_0^d u(x) r^{m-1}\,\mathrm{d}r - \int_0^d \frac{d^m-\rho^m}{m}\,\frac{\partial u(x)}{\partial\rho}\,\frac{1}{\rho^{m-1}}\,\rho^{m-1}\mathrm{d}\rho.$$

Dacă schimbăm în ultima integrală variabila ρ cu variabila r şi înmulţim ambii termeni ai egalităţii cu elementul de unghi solid $\mathrm{d}\omega$ al hipersferei unitate m-dimensionale cu centrul în punctul x, atunci integrînd pe această suprafaţă şi ţinînd seama de egalitatea

$$\int_\omega \mathrm{d}\omega\int_0^d v(x)\,r^{m-1}\,\mathrm{d}r = \int_D v(x)\,\mathrm{d}x$$

obţinem

$$u(y)\cdot|D| = \int_D u(x)\,\mathrm{d}x - \int_D \frac{d^m - r^m}{m}\,\frac{\partial u(x)}{\partial r}\,\frac{1}{r^{m-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Deoarece $\dfrac{\partial u(x)}{\partial r} = \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_k}\cos(r, x_k)$, atunci, împărţind ambele părţi cu $|D|$ şi notînd

$$B(x, y) = \frac{d^m - r^m}{m \cdot |D|}, \quad B_k(x, y) = B(x, y) \cos(r, x_k), \tag{13}$$

obţinem reprezentarea (10). Din (13) rezultă inegalitatea (11).

DEFINIŢIA 4. Domeniul care conţine un subdomeniu convex D_1 astfel că pentru orice punct $y \in D$, porţiunea conică limitată de razele tangente din y la D_1 şi frontiera mai apropiată a lui D_1 să fie inclusă în întregime în D se numeşte domeniu *stelat* în raport cu subdomeniul D_1. (Pe fig. 1 această porţiune conică este notată prin D_2).

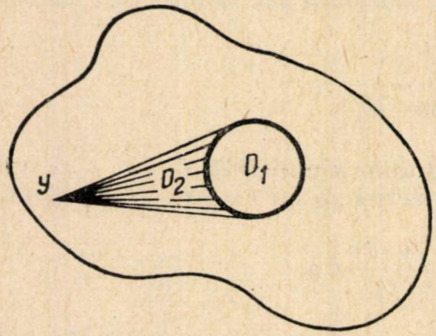


Fig. 1

Pentru un asemenea domeniu, reprezentarea (10) se scrie

$$u(y) = \frac{1}{|D_1|} \int_{D_1} u(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m} \int_{D_1 \cup D_2} \frac{B_k(x, y)}{|x-y|^{m-1}} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \mathrm{d}x \tag{14}$$

sau

$$u(y) = \frac{1}{|D_1|} \int_{D_1} u(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m} \int_{D} \frac{B_k(x, y)}{|x-y|^{m-1}} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \mathrm{d}x.$$

Reprezentarea (14) se obţine la fel ca (10), integrarea în raport cu r făcîndu-se pe segmentul determinat pe dreapta $\overline{xy}$ de frontiera lui D_1.

7. Inegalitatea lui Sobolev. *Dacă $u(x)$ este o funcţie cu derivate parţiale continue în domeniul convex D şi*

$$q \leqslant \frac{np}{n-p}, \tag{15}$$

atunci este adevărată inegalitatea

$$\|u - \mu(u)\|_{L^q_D} = \left(\int_D |u(y) - \mu(u)|^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant A \, \| \operatorname{grad} u \|_{L^p_D} = \tag{16}$$

$$= A \left(\int_D \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}},$$

unde $\mu(u)$ este valoarea medie a funcţiei $u(x)$ pe domeniul D

$$\mu(u) = \frac{1}{|D|} \int_D u(x)\, \mathrm{d}x.$$

iar A este o constantă.

Demonstrație. Pe baza reprezentării (10) avem

$$|u(y)-\mu(u)| = \left|\int_D \frac{B(x,y)}{|x-y|^{m-1}}\,\frac{\partial u(x)}{\partial r}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_D \frac{B(x,y)}{|x-y|^{m-1}}\,|\operatorname{grad} u|\,\mathrm{d}x\right|\cdot$$

Datorită condiției (15), operatorul cu nucleul

$$\frac{B(x,y)}{|x-y|^{m-1}}$$

reprezintă, conform teoremei 2, un operator liniar de la L^p_D la L^q_D. Atunci există o constantă A (cea din (7)), astfel ca

$$\|u-\mu(u)\|_{L^q_D} \leqslant A\,\|\operatorname{grad} u\|_{L^p_D}$$

şi inegalitatea (16) este stabilită.

Observația 3. Dacă $m < p$ adică $m-p < 0$, la fel ca în teorema 6, rezultă că funcția $u(x)$ este continuă în domeniul D.

Inegalitatea (16) este folosită şi sub forma

$$\|u\|_{L^q_D} \leqslant M\left(|\mu(u)| + \|\operatorname{grad} u\|_{L^p_D}\right), \tag{17}$$

care se obține din (16) pe baza inegalității lui Minkowski

$$\|u\|_{L^q_D} \leqslant \|u-\mu(u)\|_{L^q_D} + \|\mu(u)\|_{L^q_D} \leqslant A\,\|\operatorname{grad} u\|_{L^p_D} + |\mu(u)|\,|D|^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\|\operatorname{grad} u\|_{L^p_D} + |\mu(u)|\right),\quad M = \max\left(A,\ |D|^{\frac{1}{q}}\right).$$

Dacă $p = 2$, iar $m \geqslant 2$, atunci inegalitatea (17) are loc pentru $q = 2$ căci $2 < \frac{2m}{m-2}$, şi se scrie

$$\left(\int_D |u(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M_1\left\{\left|\int_D u(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left[\int_D \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

sau

$$\int_D |u(y)|^2\,\mathrm{d}y \leqslant M_2\left\{\left|\int_D u(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 + \left[\int_D \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\right]\right\}$$

cunoscută ca *inegalitatea lui Poincaré.*

Condiția de convexitate a domeniului D este esențială în demonstrarea inegalității lui Sobolev. Posibilitatea aplicării ei la domenii mai generale se bazează pe următorul rezultat al lui L. V. Kantorovici [5], [6] :

TEOREMA 7. *Dacă domeniul D este reuniunea a două domenii D_1 şi D_2, avînd intersecție de măsură pozitivă, şi pentru fiecare din domenii are loc inegalitatea* (16), *atunci ea este îndeplinită pentru întreg domeniul D.*

Altă clasă de domenii pentru care este valabilă inegalitatea lui Sobolev sînt domeniile stelate, introduse mai sus.

Dacă punctul y rămîne situat pe o varietate s-dimensională Ω a domeniului D, în membrul stîng al inegalităţilor (16) şi (17), $\| u \|_{L^q_D}$ va fi înlocuit prin $\| u \|_{L^q_\Omega}$.

§ 2. EXTINDEREA REPREZENTĂRII (10) LA FUNCŢII DE CLASĂ C^l_D.

8. Extinderea reprezentării (10) se bazează pe următorul rezultat cunoscut [17] (pag. 411—413):

TEOREMA 8. *Dacă* $B_1(x, y)$ *şi* $B_2(x, y)$ *sînt funcţii mărginite pentru* $x,y \in \overline{D}$ *şi continue pentru* $x \neq y$, *atunci integrala*

$$I(x, z) = \int_D \frac{B_1(x, y)\, B_2(y, z)}{| x-y |^\lambda\, | y-z |^\nu} \mathrm{d}y, \quad (\lambda < m, \ \nu < m)$$

pentru $x,z \in \overline{D}$ este reprezentabilă sub forma

$$I(x, z) = B(x, z)\, \psi(| x-z |),$$

unde $B(x, z)$ are aceleaşi proprietăţi ca şi $B_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ iar

$$\psi(\theta) = \begin{cases} \theta^{m-(\lambda+\nu)} & \text{pentru } \lambda + \nu < m, \\ 1 + |\ln \theta| & \text{pentru } \lambda + \nu = m, \\ 1 & \text{pentru } \lambda + \nu > m. \end{cases}$$

9. Dacă $u(x) \in C^2_D$, aplicînd derivatelor parţiale de ordinul întîi ale funcţiei $u(x)$ reprezentarea (10) şi înlocuindu-le în membrul drept al reprezentării (10) obţinem

$$u(y) = \mu(u) - \sum_{\alpha_1=1}^{m} b_{\alpha_1}(y)\, \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha_1}}\right) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2=1}^{m} \int_D \frac{B_{\alpha_1 \alpha_2}(x, y)}{| x-y |^{m-2}} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}} \mathrm{d}x,$$

unde

$$b_{\alpha_1}(y) = \int_D \frac{B_{\alpha_1} | x-y |}{| x-y |^{m-1}} \mathrm{d}x, \quad \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha_1}}\right) = \frac{1}{| D |} \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\alpha_1}} \mathrm{d}x$$

iar

$$\frac{B_{\alpha_1 \alpha_2}(x, y)}{| x-y |^{m-2}} = \int_D \frac{B_{\alpha_1}(x, z)\, B_{\alpha_2}(z, y)}{| x-z |^{m-1}\, | z-y |^{m-1}} \mathrm{d}z \ (\alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, \ldots, n).$$

În general, pentru $u(x) \in C^l_D$ avem

$$\begin{aligned} u(y) = \mu(u) &+ \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k=1}^{m} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(y)\, \mu\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_k}}\right) + \\ &+ (-1)^l \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l=1}^{m} \int_D \frac{B_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(x, y)}{| x-y |^{m-l}} \frac{\partial^l u(x)}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_l}} \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{18}$$

unde

$$\frac{B_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x,y)}{|x-y|^{m-k}}=\int_D \frac{B_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}(x,z)\,B_{\alpha_k}(z,y)}{|x-z|^{m-k+1}\,|z-y|^{m-1}}\,\mathrm{d}z,\quad (k=2,\ldots,l)$$

iar

$$b_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(y)=\int_D \frac{B_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x,y)}{|x-y|^{m-k}}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mu\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_k}}\right)=\frac{1}{|D|}\int_D \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_k}}\,\mathrm{d}x,\quad (k=1,2,\ldots,l-1).$$

Nucleele iterate $B_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x,y)$ sînt funcţii mărginite pentru $x, y \in \overline{D}$ şi continue pentru $x \neq y$. Pentru $m \leqslant k$, aceste nuclee sînt continue pe întreg domeniul D.

Ţinînd seama că $B_i(x,y) = B(x,y)\cos(r, x_i)$ şi interînd

$$\frac{B^{(k)}(x,y)}{|x-y|^{m-k}}=\int_D \frac{B^{(k-1)}(x,z)\,B(z,y)}{|x-z|^{m-k+1}\,|z-y|^{m-1}}\,\mathrm{d}z,\quad b^{(k)}(y)=\int_D \frac{B^{(k)}(x,y)}{|x-y|^{m-k}}\,\mathrm{d}x$$

$$(k=2,3,\ldots,l)\qquad\qquad (k=1,2,\ldots,l-1)$$

vom avea

$$|B_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x,y)| \leqslant |B^{(k)}(x,y)| \text{ şi } b_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(y) < |b^{(k)}(y)|. \tag{19}$$

Dacă notăm $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ iar prin

$$D^\alpha = D^\alpha_x = D^{\alpha_1}_{x_1} D^{\alpha_2}_{x_2} \ldots D^{\alpha_m}_{x_m} \text{ unde } D_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k},$$

formula de reprezentare (18) se scrie

$$u(y) = \mu(u) + \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha(y)\,\mu(D^\alpha u) +$$

$$+ (-1)^l \sum_{|\alpha|=l} \int_D \frac{B_\alpha(x,y)}{x-y^{m-l}}\,D^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x$$

sau făcînd încă convenţia că $D^0 u = u$ şi $b_0(y) = 1$,

$$u(y) = \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha(y)\,\mu(D^\alpha u) + (-1)^l \sum_{|\alpha|=l} \int_D \frac{B_\alpha(x,y)}{|x-y|^{m-l}}\,D^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{20}$$

10. Să notăm prin $\widetilde{W}^l_p = \widetilde{W}^l_p(D)$ spaţiul funcţiilor de clasă C^l_D cu norma

$$\|u\|_{\widetilde{W}^l_p} = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{|\alpha|=j} |\mu(D^\alpha u)| + \left\{\int_D \left[\sum_{|\alpha|=l} (Du)^2\right]^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{21}$$

Se verifică uşor că axiomele normei sînt îndeplinite.

Dacă $l = 1$, norma (21) se poate scrie

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^1} = |\mu(u)| + \|\operatorname{grad} u\|_{L_D^p}.$$

Dacă considerăm funcţia $u(x) \in \widetilde{W}_p^1$ ca element din L_D^q, atunci inegalitatea lui Sobolev (17) devine

$$\|u\|_{L_D^q} \leqslant M \|u\|_{\widetilde{W}_p^1}. \tag{22}$$

§ 3. DERIVATE GENERALIZATE

11. Spaţiul $\widetilde{W}_p^l(D)$ introdus mai sus este evident incomplet. Totuşi, dacă-i adăugăm funcţiile, care sînt derivabile în sens generalizat, acest spaţiu devine un spaţiu Banach.

Prin C_D^α, unde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ notăm clasa (spaţiul) funcţiilor $u(x)$ care admit derivata de tipul

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

continuă în domeniul D.

Fie $\overset{0}{C}{}_D^\alpha$ mulţimea funcţiilor de clasă C_D^α, cu suport compact conţinut în D. Dacă $u(x) \in C_D^\alpha$ şi $\varphi(x) \in \overset{0}{C}{}_D^\alpha$, formula de integrare prin părţi ne dă

$$\int_D [u(x) D^\alpha \varphi(x) + (-1)^{\alpha+1} \varphi(x) D^\alpha u(x)] \, dx = 0. \tag{23}$$

Definiţia 5. Dacă funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$ sînt sumabile pe orice subdomeniu D' strict interior domeniului D $(D' \subset \overline{D}' \subset D)$ şi pentru orice $\varphi(x) \in \overset{0}{C}{}_D^\alpha$ este satisfăcută relaţia

$$\int_D [u(x) D^\alpha \varphi(x) + (-1)^{|\alpha|+1} v(x) \varphi(x)] \, dx = 0, \tag{24}$$

funcţia $v(x)$ se numeşte *derivata generalizată* de tipul α a funcţiei $u(x)$ în domeniul D.

Din definiţia 5 rezultă imediat că o funcţie dată $u(x)$ poate avea cel mult o singură derivată generalizată de tipul α în D. Într-adevăr, fie $v_1(x)$ altă derivată generalizată de tipul α a lui $u(x)$ în D. Pentru $v_1(x)$ este valabilă relaţia (24). Prin scădere obţinem

$$\int_D [v(x) - v_1(x)] \, \varphi(x) \, dx = 0$$

de unde, ţinînd seama că funcţia $\varphi(x) \in \overset{0}{C}{}_D^\alpha$ este arbitrară, rezultă că $v(x)$ şi $v_1(x)$ sînt funcţii echivalente în D.

Dacă $u(x) \in C^{\alpha}_{D}$, atunci derivata generalizată de tipul α a funcţiei $u(x)$ va coincide cu derivata ei obişnuită de acelaşi tip. De aceea, mai departe, vom păstra şi pentru derivatele generalizate notaţia de mai sus $D^{\alpha} u(x) = v(x)$.

Din definiţia derivatei generalizate rezultă imediat următoarele proprietăţi:

a) Derivata generalizată $D^{\alpha} u(x)$ nu depinde de ordinea de derivare, căci relaţia (24) nu depinde de ordinea de derivare a lui $\varphi(x) \in \overset{0}{C}{}^{\alpha}_{D}$.

b) Derivarea generalizată este o operaţie liniară: Dacă $D^{\alpha} u_1 = v_1$, $D^{\alpha} u_2 = v_2$ şi c_1, c_2 sînt constante, atunci $D^{\alpha}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 D^{\alpha} u_1 + c_2 D^{\alpha} u_2$.

c) Dacă $D^{\alpha} u = v$, $D^{\gamma} v = w$ atunci $D^{\alpha+\gamma} u = w$, unde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$.

d) Funcţiile medii ale derivatelor generalizate coincid cu derivatele de acelaşi tip ale funcţiilor medii, în toate punctele domeniului D a căror distanţă pînă la frontiera lui D este mai mare ca raza de mediere.

Într-adevăr, înlocuind în definiţia 5 funcţia $\varphi(x)$ prin nucleul de mediaţie din definiţia 2, $\omega_h(x, y)$, putem scrie

$$\begin{aligned} D^{\alpha} u_h(x) &= \int_D u(y) D^{\alpha}_{x} \omega_h(x, y)\,\mathrm{d}y = (-1)^{|\alpha|} \int_D u(y) D^{\alpha}_{y} \omega_h(x, y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_D \omega_h(x, y)\, D^{\alpha} u(y)\,\mathrm{d}y = [D^{\alpha} u(x)]_h. \end{aligned} \tag{25}$$

Din această proprietate şi din proprietatea *d*) a funcţiilor medii rezultă imediat:

e) Dacă $u(x) \in L^{p}_{D}$ $(p \geqslant 1)$ şi $D^{\alpha} u(x) \in L^{q}_{D}$ $(q \geqslant 1)$, atunci pentru $h > 0$ funcţiile $\{u_h(x)\}$ converg către $u(x)$ în L^{p}_{D}, iar $\{[D^{\alpha} u(x)]_h\}$ converg către $D^{\alpha} u(x)$ în $L^{q}_{D'}$, pentru orice subdomeniu $D' \subset D$.

f) Dacă $u_1(x)$, $D^{1}_{x_k} u_1(x) \in L^{p}_{D}$ şi $u_2(x)$, $D^{1}_{x_k} u_2(x) \in L^{p'}_{D}$, atunci $D^{1}_{x_k}(u_1 u_2)$ există şi

$$D^{1}_{x_k}(u_1 u_2) = u_1 D^{1}_{x_k} u_2 + u_2 D^{1}_{x_k} u_1.$$

DEFINIŢIA 6. Dacă funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$ sînt sumabile pe orice subdomeniu D' strict interior domeniul D şi există un şir de funcţii $\{u_n(x)\}$ de clasă C^{α}_{D}, astfel încît $\{u_n(x)\}$ converge către $u(x)$ şi $\{D^{\alpha} u_n(x)\}$ către $v(x)$ în $L_{D'}$, funcţia $v(x)$ se numeşte *derivata generalizată* de tipul α a funcţiei $u(x)$ în domeniul D.

Definiţiile 5 şi 6 sînt echivalente.

Într-adevăr, dacă $D^{\alpha} u(x) = v(x)$, în sensul definiţiei 6, înlocuind în (23) pe $u(x)$ prin $u_n(x)$ iar pe $D^{\alpha} u(x)$ prin $D^{\alpha} u_n(x)$ şi trecînd la limită pentru $n \to \infty$, atunci $D^{\alpha} u(x) = v(x)$, în sensul definiţiei 5.

Reciproc, dacă $D^{\alpha} u(x) = v(x)$ în sensul definiţiei 5, în virtutea relaţiei (25) şi a convergenţei în L_D a funcţiilor medii, şirul $\{u_n(x)\}$ din definiţia 6 este dat de şirul de funcţii medii $\{u_{h_m}(x)\}$ cu $\lim\limits_{m \to \infty} h_m = 0$ $(u(x) = 0$ în exteriorul lui $D)$.

Observaţia 4. În cazul unei singure variabile independente, să arătăm echivalenţa între existenţa derivatei generalizate $D^{1} u(x)$ şi continuitatea absolută a funcţiei $u(x)$.

Pentru simplificare, vom presupune funcţia $u(x)$ definită pe $[0,1]$. Dacă $u(x)$ posedă derivata generalizată $D^1 u(x) = v(x)$ şi $v(x) \in L_{[0,1]}$, atunci pentru orice $\varphi(x)$ nulă în exteriorul intervalului $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ cu $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ avem egalitatea

$$\int_0^1 \left[u(x) \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + v(x)\,\varphi(x) \right] \mathrm{d}x = 0.$$

Fie $V(x) = \int_0^x (v(t)\,\mathrm{d}t$. Atunci integrînd prin părţi obţinem

$$\int_0^1 v(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 V(x) \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

şi prin urmare

$$\int_0^1 [u(x) - V(x)] \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

În virtutea arbitrarităţii lui $\varphi(x)$, care îndeplineşte doar condiţia $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = 0$ la extremităţile intervalului $[0,1]$, urmează că $u(x) - V(x) = C$, adică $u(x) = V(x) + C$ şi deci $u(x)$ este o funcţie absolut continuă.

Reciproc, dacă $u(x)$ este absolut continuă pe $[0,1]$, după cum se ştie [13], derivata $u'(x)$ este sumabilă pe $[0,1]$. Atunci formula de integrare prin părţi ne dă pentru orice funcţie $\varphi(x) \in \overset{0}{C}{}^1_{[0,1]}$

$$\int_0^1 u(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 u'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

care ne arată că $u'(x)$ este derivata generalizată a funcţiei $u(x)$.

Observaţia 5. Definiţiile derivatelor generalizate de tip α nu depind de existenţa derivatelor generalizate de ordin mai mic ca $|\alpha|$. Iată un exemplu de funcţie de două variabile $u(x_1, x_2)$ care are derivată generalizată de ordinul al doilea mixtă $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ şi nu posedă derivate generalizate de ordinul întîi. Fie $u(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ definită pe pătratul $0 \leqslant x_k \leqslant 1$ $(k = 1, 2)$, unde $f(x)$ este o funcţie continuă pe $[0,1]$. Presupunînd că $f(x)$ nu este o funcţie absolut continuă pe acest interval, conform observaţiei 4, funcţia $u(x_1, x_2)$ nu posedă derivate generalizate de ordinul întîi.

Derivata mixtă generalizată $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ există şi este identic zero. Într-adevăr, pentru orice funcţie $\varphi(x_1, x_2)$ cu suportul cuprins în pătratul $0 \leqslant x_k \leqslant 1$ $(k = 1, 2)$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \frac{\partial \left(f(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 = 0$$

şi analog pentru $f(x_2)$. Prin urmare

$$\int_0^1\int_0^1 [f(x_1)+f(x_2)]\, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 = 0,$$

de unde, conform definiţiei 5, rezultă $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2} = 0.$

12. Inegalitatea lui Sobolev (17) poate fi extinsă pentru funcţii care admit derivate parţiale de ordinul întîi generalizate p-sumabile în D. În virtutea inegalităţilor evidente

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \leqslant |\operatorname{grad}\, u| = \left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant m \max_k \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|$$

gradientul generalizat al funcţiei $u(x)$ este de asemenea p-sumabil în D.

Fie $\{D_n\}$ un şir de subdomenii $D_n \subset D$, care pentru $n \to \infty$ tind către domeniul D. Pentru n fix, aplicînd inegalitatea lui Sobolev funcţiei medii $u_h\,(x)$ pe D_n

$$\left(\int_{D_n} |u_h\,(x)|^q\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M\left[\left|\frac{1}{|D_n|}\int_{D_n} u_h\,(x)\, \mathrm{d}x\right| + \left(\int_{D_n} |\operatorname{grad} u_h|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

şi trecînd la limită pentru $h \to 0$, obţinem

$$\left(\int_{D_n} |u\,(x)|^q\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M\left[\left|\frac{1}{|D_n|}\int_{D_n} u\,(x)\, \mathrm{d}x\right| + \left(\int_{D_n} |\operatorname{grad}\, u|^p\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

pentru că, datorită sumabilităţii lui $u(x)$, avem

$$\left|\int_{D_n} u_h\,(x)\, \mathrm{d}x - \int_{D_n} u\,(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{D_n} |u_h\,(x) - u\,(x)|\, \mathrm{d}x \to 0.$$

Constanta M poate fi aleasă independentă de indicele n. Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, obţinem inegalitatea lui Sobolev pentru domeniul D

$$\left(\int_{D} |u\,(x)|^q\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M\left[\left|\frac{1}{|D|}\int_{D} u\,(x)\, \mathrm{d}x\right| + \left(\int_{D} |\operatorname{grad} u|^p\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

şi în acelaşi timp că $u\,(x) \in L_D^q$. La fel se extinde inegalitatea lui Poincaré.

§ 4. SPAŢIILE LUI SOBOLEV $W_p^l(D)$

13. Fie, ca mai sus, un număr l întreg pozitiv.

DEFINIŢIA 7. Spaţiul funcţiilor sumabile în D, care posedă toate derivatele generalizate pînă la ordinul $l - 1$ sumabile şi toate derivatele generalizate de ordinul l p-sumabile în domeniul D, înzestrat cu norma (21) se numeşte *spaţiul lui Sobolev* $W_p^l = W_p^l(D)$.

Cu alte cuvinte, spaţiul lui Sobolev W_p^l se obţine din spaţiul $\widetilde{W}_p^l$ prin adăugarea funcţiilor sumabile, care admit toate derivatele generalizate pînă la ordinul $l - 1$ sumabile şi toate derivatele generalizate de ordinul l p-sumabile în domeniul D.

TEOREMA 9. *Dacă* $u(x) \in W_p^l$, *atunci derivatele generalizate* $D^\alpha u(x) \in L_D^{q_j}$, *unde* $|\alpha| = j$ *iar*

$$q_j \leqslant \frac{mp}{m - (l - j)p}, \quad (j = 0, 1, \ldots, l).$$

Demonstraţia se face prin inducţie cu ajutorul inegalităţii lui Sobolev (17). Într-adevăr, $q_l = p$ iar

$$q_{j-1} = \frac{mq_j}{m - q_j} = \frac{mp}{m - (l - j + 1)p}.$$

TEOREMA 10. *Spaţiul* W_p^l *este complet.*

Demonstraţie. Fie un şir $\{u_n(x)\} \subset W_p^l$, astfel ca $\|u_n - u_k\|_{W_p^l} \to 0$, pentru $m, k \to \infty$. Aplicînd inegalitatea lui Sobolev succesiv tuturor derivatelor de ordinele $l - 1, l - 2, \ldots, 1, 0$ $(u^0(x) = u(x))$ rezultă că şirurile $\{D^\alpha u_n(x)\}$ converg în $L_D^{q_j}$ către funcţiile $u^\alpha(x)$ pentru orice α cu $|\alpha| = j = 0, 1, \ldots,$. Rămîne să arătăm că funcţiile $u^\alpha(x)$ cu $|\alpha| = 1, 2, \ldots, l$ sînt derivatele generalizate ale funcţiei $u(x)$, cu alte cuvinte că $u_n(x) \to u(x)$ în W_p^l.

Fie D' un subdomeniu oarecare strict interior lui D. Conform definiţiei 6, pentru fiecare n există o funcţie $\tilde{u}_n(x)$ de clasă C_D^l aşa încît

$$\int_{D'} |u_n - \tilde{u}_n|\, dx < \frac{1}{n} \quad \text{şi} \quad \int_{D'} |D^\alpha u_n - D^\alpha \tilde{u}_n|\, dx < \frac{1}{n} \, (|\alpha| = 1, 2, \ldots, l).$$

Atunci deoarece

$$\int_{D'} |u - \tilde{u}_n|\, dx \leqslant \int_{D'} |u - u_n|\, dx + \int_{D'} |u_n - \tilde{u}_n|\, dx$$

$$\int_{D'} |u^\alpha - D^\alpha \tilde{u}_n|\, dx \leqslant \int_{D'} |u - D^\alpha u_n|\, dx + \int_{D'} |D^\alpha u_n - D^\alpha \tilde{u}_n|\, dx$$

$$(|\alpha| = 1, 2, \ldots, l)$$

rezultă că şirurile $\{\tilde{u}_n(x)\}$ şi $\{D^\alpha \tilde{u}_n(x)\}$ converg în medie respectiv către $u(x)$ şi $u^\alpha(x)$ pe orice subdomeniu D' strict interior lui D, adică $u^\alpha(x)$ sînt derivatele generalizate ale lui $u(x)$, după definiţia 6.

CONSECINŢĂ. *Spaţiul lui Sobolev* W_p^l *este completatul lui* $\widetilde{W}_p^l$ *în norma* (21), *adică pentru orice* $u(x) \in W_p^l$ *există un şir de funcţii* $\{u_n(x)\} \subset \widetilde{W}_p^l$, *astfel ca* $\|u_n - u\|_{W_p^l} \to 0$.

Scriind reprezentarea (20) pentru funcţiile $u_n(x)$ şi făcînd $n \to \infty$, trecerea la limită putîndu-se face datorită continuităţii operatorilor integrali definiţi de nucleele din formula (20) în L_D^p, obţinem că reprezentarea

(20)
$$u(y) = \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \sum_{|\alpha|=l} b_\alpha(y)\ \mu(D^\alpha u) + (-1)^l \sum_{|\alpha|=l} \int_D \frac{B_\alpha(x, y)}{|x-y|^{m-l}} D^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x$$

rămîne valabilă şi pentru funcţiile din W_p^l.

Teorema 11. *Spaţiul W_p^l este separabil.*

Într-adevăr, orice funcţie din W_p^l poate fi aproximată în norma lui W_p^l prin funcţii de clasă C_D^l, care la rîndul lor pot fi aproximate uniform în domeniul D prin polinoame.

§ 5. TEOREMELE DE SCUFUNDARE SOBOLEV-KONDRAŞEV

14. Teoremele de scufundare ale lui Sobolev-Kondraşev pun în evidenţă clase de funcţii care aparţin la diferite spaţii normate. De aici decurg numeroase proprietăţi diferenţiale calitative şi cantitative ale acestor clase de funcţii, folosite cu mult succes în fizica matematică.

Pe baza rezultatelor lui L. V. Kantarovici asupra operatorilor integrali în spaţiile L^p, aceste teoreme apar drept consecinţe ale reprezentării (20) pentru funcţii din W_p^l.

Teorema 12. *Dacă $lp > m$, atunci orice funcţie $u(x) \in W_p^l(D)$ este echivalentă cu o funcţie din C_D şi*

(26)
$$\|u\|_D \leqslant M \|u\|_{W_p^l},$$

unde M este o constantă care depinde numai de domeniul D.

Demonstraţie. Dacă $u(x) \in W_p^l$ din (20) rezultă

(27)
$$u(y) \leqslant \sum_{j=0}^{l-1} |b^{(j)}(y)| \sum_{|\alpha|=j} |\mu(D^\alpha u)| + \int_D \frac{B^{(l)}(x, y)}{|x-y|^{m-l}} \left[\sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$$

Considerînd ultima integrală ca un operator integral $T^{(l)}$ de tip potenţial cu $\lambda = m - l$, condiţia $lp > m$ devine $(m - \lambda)\,p > m$ şi în virtutea teoremei 6, funcţia $u(x)$ este echivalentă cu o funcţie din C_D.

Notînd

$$M = \max\left(1, |b^{(1)}(y)|, \ldots, |b^{(l-1)}(y)|, \|T^{(l)}\|\right)$$

din (27) obţinem

(28)
$$|u(y)| \leqslant M \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{|\alpha|=j} |\mu(D^\alpha u)| + \left[\int_D \left| \sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u)^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \right\} = M \|u\|_{W_p^l}$$

ceea ce demonstrează complet teorema.

Fie , ca mai sus, Ω o varietate s-dimensională a domeniului D.

Teorema 13. *Dacă* $lp \leqslant m$, *atunci orice funcție* $u(x) \in W_p^l(D)$ *este echivalentă cu o funcție din* L_Ω^q *unde*

$$q < q^* = \frac{sp}{m - lp}, \quad s > m - lp$$

și

$$\|u\|_{L^q} < M \|u\|_{W_p^l}, \tag{29}$$

unde M este o constantă care depinde numai de domeniile D și Ω.

Demonstrație. La fel ca în demonstrația teoremei precedente, fie $T^{(l)}$ operatorul de tip potențial cu $\lambda = m - l$, definit de ultima integrală din (27). Condițiile teoremei se scriu atunci

$$q < q^* = \frac{sp}{m - (m - \lambda)p}, \quad s > m - (m - \lambda)p$$

și conform teoremei 5, funcția $u(x)$ este echivalentă cu o funcție din L_Ω^q

Inegalitatea (29) se obține imediat din (28), ținînd seama că $|D| = 1$

15. Inegalitățile (27) și (29) ne arată că operatorul de scufundare al lui W_p^l în C_D, respectiv în L_Ω^q, este mărginit.

Teorema 14. (S. L. Sobolev-V. A. Kondrașev). *Operatorul de scufundare al spațiului* W_p^l *în spațiul* C_D, *respectiv în* L_Ω^q, *este un operator complet continuu.*

Demonstrație. Fie $\{u_n(x)\}$ un șir mărginit de elemente din W_p^l. Conform reprezentării (20) avem

$$u_n(y) = \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha(y)\, \mu(D^\alpha u_n) + (-1)^l \sum_{|\alpha|=l} f_n^\alpha(y), \tag{30}$$

unde

$$f_n^\alpha(y) = \int_D \frac{B_\alpha(x, y)}{|x - y|^{m-l}} D^\alpha u_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

Din mărginirea șirurilor de funcții $\{D^\alpha u_n(x)\}$ cu $|\alpha| = l$ în L_D^p și a șirurilor numerice $\{\mu(D^\alpha u_n)\}$ cu $|\alpha| \leqslant l-1$ rezultă existența unui subșir $\{n_k\} \subset \{n\}$ de indici, astfel ca șirurile de funcții $\{f_{n_k}^\alpha(y)\}$ să fie convergente în C_D, respectiv în L_Ω^q, iar șirurile numerice $\{\mu(D^\alpha u_n)\}$ ($|\alpha| \leqslant l - 1$) să fie de asemenea convergente. Înlocuind în (30), obținem că subșirul $\{u_{n_k}(y)\}$ corespunzător este convergent în C_D, respectiv în L_Ω^q, ceea ce demonstrează teorema.

Teorema 13 rămîne valabilă și pentru $q = q^*$, dar în acest caz, după cum am menționat la sfîrșitul punctului 5 (formula (9')), operatorul de scufundare nu mai este complet continuu. Acest lucru a fost pus în evidență pe altă cale de V. P. Ilin [4].

16. O consecinţă a teoremelor de scufundare este următoarea generalizare a teoremei 9 :

TEOREMA 15. *Fie* $u(x) \in W_p^l$ *şi* $|\alpha| = j$.

a) *Dacă* $lp > m$ *şi* $0 \leqslant j < l - \frac{m}{p}$, *atunci orice derivată* $D^\alpha u(x)$ *este echivalentă cu o funcţie din* C_D *şi*

$$|D^\alpha u(x)| < M \|u\|_{W_p^l}. \tag{31}$$

b) *Dacă* $j > 0$ *şi* $j \geqslant l - \frac{m}{p}$, *atunci orice derivată* $D^\alpha u(x)$ *este echivalentă cu o funcţie din* $L_\Omega^{q_j}$ *unde*

$$q_j < \frac{sp}{m-(l-j)p}, \qquad s > m-(l-j)p$$

şi

$$\|D^\alpha u\|_{L_\Omega^{s_j}} \leqslant M \|u\|_{W_p^l}. \tag{32}$$

În ambele cazuri M este o constantă care depinde numai de domeniile D şi Ω.

Demonstraţie. Dacă $u(x) \in W_p^l$, pe baza teoremei 9 şi reprezentării (20), putem scrie

$$D^\alpha u(y) = \sum_{k=0}^{l-j-1} (-1)^k \sum_{|\gamma|=k} b_\gamma(y)\, \mu(D^{\alpha+\gamma} u) +$$
$$+ (-1)^{l-j} \sum_{|\gamma|=l-j} \int_D \frac{B_\gamma(x, y)}{|x-y|^{m-l+j}} D^{\alpha+\gamma} u(x)\, \mathrm{d}x$$

şi

$$|D^\alpha u(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{l-j-1} |b^{(k)}(y)| \sum_{|\gamma|=k} \mu(D^{\alpha+\gamma} u) +$$
$$+ \int_D \frac{B^{(l-j)}(x, y)}{|x-y|^{m-l+j}} \left[\sum_{|\gamma|=l-j} (D^{\alpha+\gamma} u)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x.$$

Considerînd, la fel ca în demonstraţiile teoremelor 12 şi 13, ultima integrală ca un operator de tip potenţial cu $\lambda = m - l + j$, în virtutea teoremelor 5 şi 6, funcţia $D^\alpha u(x)$ este echivalentă cu o funcţie din $L_\Omega^{q_j}$, respectiv din C_D. Notînd

$$M = \max\,(1, |b^{(1)}(y)|, \ldots, |b^{(l-j-1)}(y)|, \|T^{(l-j)}\|),$$

obţinem

$$|D^\alpha u(y)| \leqslant M \left\{ \sum_{k=0}^{l-j-1} \sum_{|\gamma|=k} |\mu(D^{\alpha+\gamma} u)| + \right.$$
$$\left. + \left[\int_D \left(\sum_{|\gamma|=l-j} (D^{\alpha+\gamma} u)^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \right\} \leqslant M \|u\|_{W_p^l}$$

de unde rezultă imediat inegalitățile (31) și (32).

Cu alte cuvinte, dacă $lp > m$ atunci

$$W_p(D) \subset C_D^{l-\left[\frac{m}{p}\right]-1}.$$

Altfel teorema 15 se poate enunța :

Dacă $u(x) \in W_p^l(D)$ *și*

$$0 < t = l - \frac{m-s}{p} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)s$$

$$1 < p < q < \infty$$

atunci $u(x)$ *este echivalentă cu o funcție din* $W_q^{[t]}(\Omega)$ *și*

$$\|u\|_{W_q^{[t]}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W_p^l(D)},$$

unde constanta C *nu depinde de funcția* $u(x)$.

Inegalitățile (26), (29), (31), și (32) reprezintă generalizări ale inegalității lui Sobolev, scrisă sub forma (22).

§ 6. SCUFUNDAREA SPAȚIULUI $W_p^l(D)$ ÎN SPAȚIUL Lip β_D

În acest paragraf, vom da o întărire a teoremei 12, stabilind condițiile în care spațiul lui Sobolev $W_p^l(D)$ este scufundat chiar în spațiul funcțiilor lipschitziene Lip β_D, cu $0 < \beta < 1$.

17. DEFINIȚIA 8. Spațiul liniar al tuturor funcțiilor $u(x)$ definite pe D, pentru care există o constantă B astfel ca

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant B|x_1 - x_2|^\beta, \quad (x_1, x_2 \in D)$$

se numește *spațiul funcțiilor lipschitziene de exponent* β și se notează prin Lip β = Lip β_D.

Norma în Lip β_D se definește prin

$$(33) \quad \|u\|_{\mathrm{Lip}\,\beta_D} = \max_{x\in D}|u(x)| + \sup_{x_1, x_2 \in D}\frac{|u(x)_1 - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta} = \|u\|_{C_D} + c_\beta(u)$$

Se verifică ușor că axiomele normei sînt verificate.

Pentru claritatea și continuitatea expunerii, reproducem demonstrația lui G. Marinescu [10] pentru

LEMA 1. *Dacă* $\{u_n(x)\} \subset$ Lip β *și* $u_n(x) \rightarrow u(x)$ *uniform în* D, *atunci*

$$c_\beta(u) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} c_\beta(u_n).$$

Demonstrație. Fie $c = \varliminf_{n\to\infty} c_\beta(u_n)$ și $\{u_{n_k}(x)\}$ un subșir al lui $\{u_n(x)\}$, astfel încît $c = \lim_{n\to\infty} c_\beta(u_{n_k})$. Fiind dat $\varepsilon > 0$ putem determina $K = K(\varepsilon)$

în aşa fel ca $c_\beta(u_{n_k}) \leqslant c + \varepsilon$ pentru $k \geqslant K$. Dacă $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, atunci

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta} = \lim_{k\to\infty} \frac{|u_{n_k}(x_1) - u_{n_k}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta} \leqslant \lim_{k\to\infty} c_\beta(u_{n_k}),$$

de unde $c_\beta(u) \leqslant c + \varepsilon$, unde ε este arbitrar şi lema este demonstrată.

Să arătăm că spaţiul Lip β_D cu norma (33) este complet.

Fie $\{u_n(x)\} \subset$ Lip β convergent, adică $\lim\limits_{n,\,k\to\infty} \| u_n - u_k \|_{\mathrm{Lip}\,\beta} = 0$. Aceasta înseamnă $\lim\limits_{n,\,k\to\infty} \| u_n - u_k \|_{C_D} = 0$, $\lim\limits_{n,\,k\to\infty} c_\beta(u_n - u_k) = 0$ şi implică existenţa unei funcţii $u(x) \in C_D$, astfel ca $u_n \to u$ uniform în D. Rămîne să arătăm că $u(x) \in$ Lip β.

Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N = N(\varepsilon)$ în aşa fel ca $c_\beta(u_N - u_n) < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N$. Dacă $n \to \infty$, atunci $u_N - u_n \to u_N - u$ şi în virtutea lemei precedente $c_\beta(u_N - u) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} c_\beta(u_N - u_n)$, de unde $u_N - u \in$ Lip β, şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_\beta(u_n - u) = 0$. Prin urmare, Lip β este un spaţiu Banach.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* $\beta' < \beta$ *atunci* Lip $\beta \subset$ Lip β'.

Într-adevăr, dacă $u(x) \in$ Lip β, atunci $c_\beta(u)$ este mărginit şi

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^{\beta'}} = \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^{\beta}} |x_1 - x_2|^{\beta - \beta'} \leqslant c_\beta(u)\,|x_1 - x_2|^{\beta - \beta'}$$

adică

$$c_{\beta'}(u) \leqslant c_\beta(u)\,|x_1 - x_2|^{\beta - \beta'}$$

care rămîne mărginit, deoarece domeniul D este mărginit.

PROPOZIŢIA 2. Dacă $\{u_n(x)\} \subset$ Lip β, astfel ca $c_\beta(u_n) \leqslant M$ şi $u_n(x) \to u(x)$ uniform în D, atunci

1°) Funcţia $u(x) \in$ Lip β şi $c_\beta(u) \leqslant M$.

2°) Pentru orice $\beta' < \beta$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} c_\beta(u_n - u) = 0$.

Prima concluzie este o consecinţă imediată a lemei 1.

Să demonstrăm punctul 2°). Fie $\varepsilon > 0$ dat. Se pot ivi două cazuri:

a) Cazul $|x_1 - x_2| \leqslant \varepsilon$. În această situaţie, putem scrie

$$c_{\beta'}(u_n - u) \leqslant \sup \frac{|u_n(x_1) - u_n(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta} |x_1 - x_2|^{\beta - \beta'} + \\ + \sup \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta} |x_1 - x_2|^{\beta - \beta'} \leqslant 2\,M\,\varepsilon^{\beta - \beta'}.$$

b) Cazul $|x_1 - x_2| > \varepsilon$. Din convergenţa uniformă a şirului $\{u_n(x)\}$ rezultă existenţa unui $N = N(\varepsilon)$ astfel ca $|u_n - u| < \dfrac{\varepsilon^{1+\beta'}}{2}$ pentru $n \geqslant N$.

Atunci, putem scrie

$$c_{\beta'}(u_n - u) \leqslant \sup \frac{|u_n(x_1) - u(x_1)|}{|x_1 - x_2|^{\beta'}} + \sup \frac{|u_n(x_2) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^{\beta'}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, rezultă, în ambele cazuri, convergența în Lip β', pentru orice $\beta' < \beta$.

18. Să presupunem că domeniile D și Ω, considerate în §1, sînt situate în același spațiu euclidian și că toate discontinuitățile nucleului $K(x, y)$ al operatorului integral T, definit de (6), se găsesc pe diagonala $x = y$, iar pentru $x \neq y$ nucleul $K(x, y)$ este o funcție diferențiabilă.

TEOREMA 16 (L. V. Kantorovici [5], [6]). *Dacă nucleul $K(x, y)$ îndeplinește condițiile :*

$$\left\{\int_D \left[|\operatorname{grad}_y K(x, y)|\,|x - y|^{1-\beta}\right]^\sigma \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant E \tag{34}$$

și

$$\left\{\int_D \left|\frac{K(x,y)}{|x-y|^\beta}\right]^\sigma \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant F, \tag{35}$$

atunci operatorul integral liniar T transformă spațiul L_D^p, cu $p \geqslant \sigma''$ $\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1\right)$ în spațiul Lip β *iar*

$$c_\beta(u) \leqslant [E + (2^\beta + 3^\beta)F]\,\|v\|_{L_D^p}. \tag{36}$$

În plus, pe baza condiției (35), T este un operator liniar de la L_D^p la L_Ω^∞ (observația 2) și prin urmare

$$\max |u(y)| \leqslant A\,\|v\|_{L_D^p}. \tag{37}$$

Unui șir $\{v_n(x)\}$ mărginit din L_D^p în virtutea inegalităților (36) și (37), îi corespunde un șir $\{u_n(y)\}$ din Lip β_Ω egal continuu și egal mărginit. Prin urmare, T considerat ca operator de la L_D^p la C_Ω este complet continuu. Șirul $\{u_n(y)\}$ fiind uniform convergent, pe baza inegalității (36) și a propoziției 2, T este de asemenea un operator complet continuu de la L_D^p ($p > \sigma'$) în orice spațiu Lip β' cu $\beta' < \beta$.

19. Să punem în evidență forma condițiilor teoremei 16 pentru operatorii integrali de tip potențial.

Deoarece

$$K(x, y) = \frac{B(x, y)}{|x-y|^\lambda} = \frac{B(x, y)}{r^\lambda}, \quad (\lambda < m) \tag{8}$$

iar

$$\left|\operatorname{grad}_y K(x, y)\right| \leqslant \frac{1}{r^\lambda}\left|\operatorname{grad}_y B(x, y)\right| + \frac{\lambda}{r^\lambda + 1}\left|B(x, y)\right|,$$

condiţiile (34) şi (35) devin

$$(\lambda + \beta)\,\sigma < m \tag{38}$$

$$\int_D \frac{1}{r^{(\lambda - 1 + \beta)}} \left| \operatorname{grad}_y B(x, y) \right| \mathrm{d}x \leqslant G\,. \tag{39}$$

În condiţiile (38) şi (39), operatorul integral liniar T cu nucleul (8) transformă spaţiul $L_D^p\,(p > \sigma')$ în spaţiul Lip β_Ω.

Referitor la condiţia (39), vom preciza demonstraţia lui L. V. Kantorovici [5], [6] pentru

LEMA 2. *Integrala*

$$\int_D \frac{1}{r^{(m-2+\beta)\sigma}} \left| \operatorname{grad}_y B_k(x, y) \right|^\sigma \mathrm{d}x \tag{40}$$

este mărginită (independent de x), dacă $\sigma < \frac{m}{m-1}$, iar β este suficient de mic, astfel ca $(m - 1 + \beta)\,\sigma < m$. (Suprafaţa S, care mărgineşte domeniul D, este presupusă suficient de netedă).

Demonstraţie. Deoarece $B_k\,(x, y) = B\,(x, y) \cos(\bar{r},\ x_k)$, unde $\bar{r} = \overline{yx}$, avem

$$|\operatorname{grad}_y B_k(x, y)| \leqslant |\operatorname{grad}_y B(x, y)|\,|\cos(\bar{r}, x_k)| + |B(x, y)|\,|\operatorname{grad}_y \cos(\bar{r}, x_k)| \leqslant$$

$$\leqslant |\operatorname{grad}_y B(x, y)| + \frac{K}{r}\,,$$

unde K este o constantă. Într-adevăr,

$$\operatorname{grad}_y \cos(r,\ x_k) = \sum_{j=1}^{m} \bar{i}_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_k - y_k}{r}\right) = (x_k - y_k)\frac{\bar{r}}{r^3} + \bar{i}_k \frac{1}{r}$$

iar

$$|\operatorname{grad}_y \cos(\bar{r}\ x_k)| \leqslant \frac{1}{r} + \frac{|x_k - y_k|}{r} \leqslant \frac{K}{r}\,.$$

În virtutea condiţiei $(m - 1 + \beta)\,\sigma < m$, afirmaţia lemei pentru termenul $\frac{K}{r}$ este evidentă.

Să arătăm mărginirea integralei

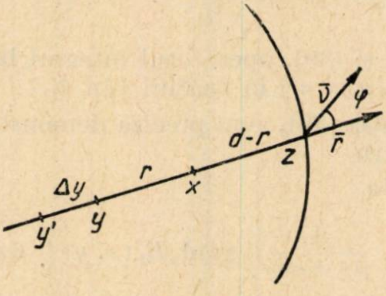
$$\int_D \frac{1}{r^{(n-2+\beta)\sigma}} \left| \operatorname{grad}_y B(x,y) \right|^\sigma \mathrm{d}x\,,$$

unde

$$B(x, y) = \frac{d^m - r^m}{m\,|D|},\quad d = |z - y|\,,$$

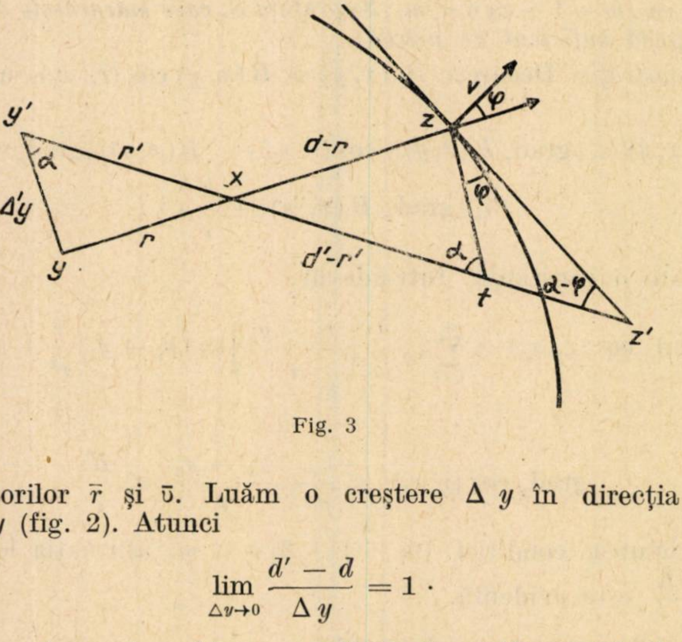
iar z este punctul de intersecţie al lui $\bar{r}$ cu suprafaţa S. Cum pentru r^m, afirmaţia lemei este evident îndeplinită, rămîne s-o verificăm pentru d^m.

Notăm prin $\bar{\upsilon}$ versorul normalei la frontiera S în punctul z şi prin φ unghiul dintre $\bar{r}$ şi $\bar{\upsilon}$. Se vede uşor că vectorul $\text{grad}_y\, d$ se află situat în planul vectorilor $\bar{r}$ şi $\bar{\upsilon}$. Luăm o creştere $\Delta\, y$ în direcţia $\bar{r}$ şi fie $d' = d + \Delta\, y$ (fig. 2). Atunci



$\bar{\upsilon}$
φ
$d-r$
$\bar{r}$
z
Δy
r
x
y'
y

Fig. 2



y'
α
r'
$d-r$
v
φ
z
x
$\Delta' y$
φ
r
y
$d'-r'$
α
t
$\alpha-\varphi$
z'

Fig. 3

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{d' - d}{\Delta\, y} = 1\,\cdot$$

Luăm apoi o creştere $\Delta'\, y$ perpendiculară pe $\bar{r}$ (fig. 3). Fie $r' = | x - y' |$, $d' = | z' - y' |$ şi $\widehat{ztx} = \widehat{xy'y} = \alpha$. Avem $\widehat{tzz'} = \varphi$, $| z - x | = d - r$, $| z' - x | = d' - r'$, $\widehat{xzz'} = 90° + \varphi$, $\widehat{zz't} = \alpha - \varphi$, $\widehat{zxt} = \widehat{yxy'} = 90° - \alpha$.

Aplicînd relaţia sinusurilor în triunghiul xzz'

$$\frac{d' - r'}{\sin\,(90° + \varphi)} = \frac{d - r}{\sin\,(\alpha - \varphi)}$$

obţinem

$$d' - r' = \frac{(d - r) \cos \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)} .$$

La fel, din triunghiul xyy'

$$\frac{r'}{\sin 90^\circ} = \frac{r}{\sin \alpha}$$

rezultă

$$r' = \frac{r}{\sin \alpha} .$$

Atunci

$$d' = \frac{(d - r) \cos \varphi \sin \alpha + r \sin (\alpha - \varphi)}{\sin \alpha \sin (\alpha - \varphi)} .$$

Pe baza relaţiilor stabilite, un calcul simplu ne dă

$$\lim_{\Delta' y \to 0} \frac{d' - d}{\Delta' y} = \lim_{\alpha \to 90^\circ} \frac{d' - d}{r \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{d - r}{r} \operatorname{tg} \varphi \cdot$$

Prin urmare

$$| \operatorname{grad}_y d | = \sqrt{1 + \left(\frac{d - r}{r} \operatorname{tg} \varphi \right)^2} \leqslant 1 + \frac{d}{r} | \operatorname{tg} \varphi |$$

iar

$$| \operatorname{grad}_y d^m | \leqslant m d^{m-1} \left(1 + \frac{d}{r} | \operatorname{tg} \varphi | \right) \cdot$$

Folosind inegalitatea $(1 + b)^\sigma \leqslant 2^\sigma (1 + b^\sigma)$, avem

$$\frac{| \operatorname{grad}_y d^m |^\sigma}{r^{(m-2+\beta)\sigma}} \leqslant \frac{m^\sigma d^{(m-1)\sigma} \left(1 + \frac{d}{r} | \operatorname{tg} \varphi | \right)^\sigma}{r^{(m-2+\beta)\sigma}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2 m)^\sigma d^{(m-1)\sigma} \left(1 + \left(\frac{d}{r} \right)^\sigma | \operatorname{tg} \varphi |^\sigma \right)}{r^{(m-2+\beta)\sigma}} = (2 m)^\sigma \frac{d^{(m-1)\sigma}}{r^{(m-2+\beta)\sigma}} +$$

$$+ (2 m)^\sigma \frac{d^{m\sigma}}{r^{(m-1+\beta)\sigma}} | \operatorname{tg} \varphi |^\sigma \cdot$$

Mărginirea integralei aplicată primului termen este evidentă. Pentru evaluarea integralei aplicată termenului al doilea avem

$$d x = d \Sigma_x \, d r, \quad d \Sigma_x = d S_x \cos \varphi .$$

Din asemănarea celor două conuri m-dimensionale din figura 4, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}\,S_x}{\mathrm{d}\,S} = \left(\frac{r}{d}\right)^{m-1} \quad \text{și } \mathrm{d}x = \left(\frac{r}{d}\right)^{m-1} \cos\,\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}S\,,$$

unde $\mathrm{d}S$ este elementul suprafeței S. În virtutea condițiilor lemei,

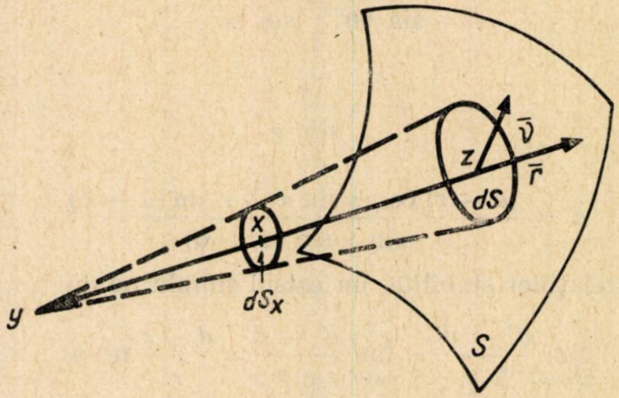


Fig. 4

$$m\,\sigma - (m - 1 + \beta)\,\sigma + 1 = (1 - \beta)\,\sigma + 1 \geqslant 0$$

obținem

$$\int_R \frac{d^{m\sigma}}{r^{(m-1+\beta)\,\sigma}} |\operatorname{tg}\,\varphi|^{\sigma} \mathrm{d}x = \int_S |\operatorname{tg}\,\varphi|^{\sigma} \cos\,\varphi \left(\int_0^d \frac{d^{m\sigma - (m-1)}\, r^{m-1}}{r^{(m-1+\beta)\,\sigma}}\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}S \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d^{m\sigma - (m-1+\beta)\sigma + 1}}{m-(m-1+\beta)\,\sigma} \int_S \frac{|\sin\,\varphi|^{\sigma}}{|\cos\,\varphi|^{\sigma-1}}\,\mathrm{d}S\,.$$

Pentru că $\sigma < \dfrac{m}{m-1} \leqslant 2$ și presupunînd suprafața S cu curbură mărginită, vom avea mai departe

$$\int_S \frac{|\sin\,\varphi|^{\sigma}}{|\cos\,\varphi|^{\sigma-1}}\,\mathrm{d}S \leqslant \int_S \frac{\mathrm{d}S}{|\cos\,\varphi|^{\sigma-1}} \leqslant K_1$$

ceea ce împreună cu rezultatele de mai sus demonstrează complet lema.

Din această lemă și condițiile (38) și (39), rezultă că operatorul integral T cu nucleul $\dfrac{B_k(x, y)}{|x - y|^{m-l}}$ îndeplinește condițiile teoremei 16, dacă $\sigma < \dfrac{m}{m-1}$, care se mai poate scrie $\sigma' > m$, iar β astfel ca

$$(m - l + \beta)\,\sigma < m\,.$$

Această condiţie se mai scrie şi sub forma

$$(l - \beta)\sigma > m(\sigma - 1) \text{ sau } l - \beta > \frac{m}{\sigma'} \cdot$$

Ţinînd seama că $p \geqslant \sigma'$

$$\beta < l - \frac{m}{\sigma'} \leqslant l - \frac{m}{p} \cdot$$

Prin aceasta, am ajuns la următoarea precizare a teoremei 12 :

TEOREMA 17. *Dacă* $lp > m$, *atunci orice funcţie* $u(x) \in W^l_p(D)$ *este echivalentă cu o funcţie din* Lip β_Ω *cu* $0 < \beta < l - \dfrac{m}{p}$ *şi*

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}\,\beta} \leqslant M \|u\|_{W^l_p} \tag{41}$$

unde M este o constantă care depinde numai de domeniul D.

Inegalitatea (41) rezultă imediat din inegalităţile (26), (27) şi (36). Pe baza consideraţiilor de la punctul 18, această scufundare este complet continuă.

Condiţiile (38) şi (39) precum şi lema 2, aplicate operatorului integral T cu nucleul $\dfrac{B_k(x, y)}{|x - y|^{m-l+j}}$, ne conduc într-un mod analog la următoarea precizare a primei părţi a teoremei 15 :

TEOREMA 18. *Dacă* $u(x) \in W^l_p(D)$, $lp > m$ *şi* $t > 0$ *este cel mai mic întreg astfel* $tp > m$, *atunci derivatele generalizate* $D^\alpha u(x)$, $|\alpha| = j = 1, \ldots, l - t$ *sînt echivalente cu funcţii din* Lip β_α *cu* $0 < \beta_\alpha < l - j - \dfrac{m}{p} \cdot$

Un caz particular al acestei teoreme, demonstrat pe altă cale, se găseşte în cartea lui L. S. Bers, şi F. John şi M. Schechter [1].

§ 7. NORME ECHIVALENTE ÎN SPAŢIUL $W^l_p(D)$

20. Să stabilim acum forma generală a normei în spaţiul lui Sobolev $W^l_p(D)$.

Reamintim că două norme $\|u\|_1$ şi $\|u\|_2$ sînt echivalente, dacă există două constante pozitive A şi B astfel încît

$$A\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \in B\|u\|_1 .$$

DEFINIŢIA 9. Un sistem $L_1(u)$, $L_2(u), \ldots, L_k(u)$ de funcţionale liniare în W^l_p se numeşte *determinant*, dacă din egalităţile

$$\begin{gathered} L_1(u) = L_2(u) = \ldots = L_k(u) = 0 \\ \int_D \left[\sum_{|\alpha| = l} (D^\alpha u(x))^2 \right]^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x = 0 \end{gathered} \tag{42}$$

rezultă $u(x) \equiv 0$.

Să stabilim, pentru $u(x) \not\equiv 0$, inegalitatea

$$\|u\|_{W_p^l} \leqslant B\left\{|L_1(u)| + |L_2(u)| + \ldots + |L_k(u)| + \left[\int_D \left(\sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u)^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Într-adevăr dacă o astfel de constantă n-ar exista, putem construi un şir $\{u_n(x)\}$ cu $\|u_n\|_{W_p^l} = 1$ astfel ca

$$|L_1(u_n)| + |L_2(u_n)| + \ldots + |L_k(u_n)| + \left[\int_D \left(\sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u_n)^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon_n, \tag{43}$$

unde $\varepsilon_n \to 0$ pentru $n \to \infty$. Datorită mărginirii în W_p^l a şirului $\{u_n(x)\}$ se poate extrage un subşir $\{u_{n_k}(x)\}$ convergent în W_p^l. În virtutea completitudinii spaţiului W_p^l, elementul limită $u(x)$ al acestui subşir aparţine spaţiului. Funcţia $u(x)$ anulînd pe (43), îndeplineşte condiţia (42) şi deci $u(x) \equiv 0$, ceea ce demonstrează inegalitatea de mai sus.

Inegalitatea contrarie este adevărată datorită mărginirii funcţionalelor $L_i(u)$ pe spaţiul W_p^l.

În acest mod forma generală a normei în spaţiul W_p^l este

$$\|u\|_{W_p^l} = |L_1(u)| + |L_2(u)| + \ldots + |L_k(u)| + \left[\int_D \left(\sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u)^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$

în care sistemul de funcţionale liniare $L_1(u), L_2(u), \ldots, L_k(u)$ este determinat în W_p^l.

În particular, se poate lua ca norme în spaţiul W_p^l

$$\|u\|_{W_p^l} = \left|\overbrace{\int\cdots\int}^{m-1}_{(S)} u(x)\,\mathrm{d}S\right| + \left[\overbrace{\int\cdots\int}^{m}_{(D)} \left(\sum_{|\alpha|=l} (Du)^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}},$$

unde S este frontiera domeniului D sau

$$\|u\|_{W_p^l} = \left[\int_D \left(\sum_{j=0}^{l} \sum_{|\alpha|=j} (D^\alpha u)^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{44}$$

Spaţiul W_2^l, înzestrat cu norma (44), este un spaţiu Hilbert, al cărui produs scalar se defineşte prin:

$$(u, v) = \int_D \sum_{j=0}^{l} \sum_{[\alpha]=j} (D^\alpha u)(D^\alpha v)\,\mathrm{d}x.$$

Menţionăm că dacă are loc scufundarea $W_p^l(D) \supset W_q^t(S)$, unde S este o varietate s-dimensională a lui D, atunci pentru orice funcţie din $W_p^l(D)$ putem vorbi de valorile primelor t derivate generalizate ale ei pe varietatea S, definite ca funcţii q-sumabile pe S. Dacă teoremele de scufundare garantează continuitatea derivatelor generalizate de un anumit ordin, atunci ne convingem uşor că aceste derivate există pe varietatea S, în sens obişnuit.

§ 8. PROBLEMA DIRICHLET PENTRU ECUAŢIA LUI LAPLACE

21. Ca aplicaţie la teoria spaţiilor lui Sobolev, vom schiţa în încheiere rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace, prin metoda variaţională.

Să considerăm problema la limită

$$(45) \qquad \Delta u = 0 \qquad \text{cu} \qquad u|_S = \varphi(y).$$

Soluţia acestei probleme va fi căutată printre funcţiile care au integrala Dirichlet :

$$(46) \qquad H(u) = \int_D \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x < \infty$$

mărginită, adică vom presupune $u(x) \in W_2^1(D)$. În virtutea teoremei 13, rezultă $u(x) \in L_S^2$. Într-adevăr, $s = m - 1$, iar

$$q = 2 < \frac{(m-1)\,2}{m-2} = 2 + \frac{2}{m-2}, \quad s = m - 1 > m - 2 = m - p.$$

În plus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_S |u(x + \Delta x) - u(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

adică valorile funcţiei $u(x)$ pe suprafaţa frontieră reprezintă limita în medie a valorilor din interior. Astfel, funcţiile cu integrala Dirichlet mărginită trebuie să aibă valorile limită de pătrat sumabil pe suprafaţa S.

Totuşi nu orice funcţie $\varphi(y)$ de pătrat sumabil pe S poate fi luată ca valoare limită.

Definţia 10. Funcţia $\varphi(y)$ se numeşte *admisă*, dacă există o funcţie $u(x) \in W_2^1(D)$ astfel ca $u|_S = \varphi$.

În problema la limită considerată, presupunem funcţia $\varphi(y)$ admisă.

Notăm prin $W_2^1(\varphi)$ mulţimea funcţiilor din $W_2^1(D)$, ale căror valori limită pe S sînt egale cu $\varphi(y)$. Pentru $u \in W_2^1(\varphi)$ avem

$$0 \leqslant H(u) < \infty$$

şi prin urmare există

$$\inf_{u \in W_2^1(\varphi)} H(u) = d.$$

Să construim şirul minimizant $\{u_n(x)\}$ al funcţionalei $H(u)$, adică

$$\lim_{n \to \infty} H(u_n) = d.$$

Teorema 19. *Şirul minimizant* $\{u_n(x)\}$ *converge în spaţiul* $W_2^1(D)$ *iar funcţia limită aparţine mulţimii* $W_2^1(\varphi)$.

Demonstrație. Dacă luăm în spațiul $W_2^1(D)$ produsul scalar

$$(u, v) = \int_S u(y)\, v(y)\, dy + \int_D \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} \mathrm{d}x, \qquad (u, v \in W_2^1(D))$$

atunci $W_2^1(D)$ devine spațiu Hilbert. Între norma unui element $u(x) \in W_2^1(\varphi)$ și funcționala $H(u)$ există relația

$$\|u\|_{W_2^1}^2 = \int_S |\varphi(y)|^2 \mathrm{d}y + H(u). \tag{47}$$

Notăm prin $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ submulțimea funcțiilor din $W_2^1(D)$ nule pe frontiera S. Evident ele formează un subspațiu.

Să considerăm un element $u_0(x) \in W_2^1(\varphi)$ ortogonal subspațiului $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Un asemenea element există căci în caz, contrar, $u_0(x)$ poate fi reprezentat sub forma $u_0 = u_0' + u_0''$, unde u_0' este ortogonal pe $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ iar $u_0'' \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Deoarece

$$u_0'|_S = u_0|_S - u_0''|_S = \varphi,$$

atunci $u_0' \in W_2^1(\varphi)$ și în locul lui $u_0(x)$ putem considera $u_0'(x)$.

Să arătăm că $H(u_0) = d$. Fie $u(x)$ un element oarecare din $W_2^1(\varphi)$. Pentru că diferența $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, atunci ea este ortogonală elementului $u_0(x)$ și prin urmare, în virtutea lui (47),

$$H(u) - H(u_0) = \|u\|_{W_2^1}^2 - \|u_0\|_{W_2^1}^2 = \|u - u_0\|_{W_2^1}^2 \geqslant 0 \tag{48}$$

adică

$$d \leqslant H(u_0) \leqslant \inf H(u) = d$$

și prin urmare $H(u_0) = d$.

Luînd, în (48), $u = u_n$, obținem

$$H(u_n) - H(u) = \|u_n - u_0\|_{W_2^1}^2, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

și deoarece $H(u_n) \to H(u_0) = d$, rezultă $\|u_n - u_0\|_{W_2^1} \to 0$ și teorema este demonstrată.

Relația (48) ne arată că elementul $u_0(x) \in W_2^1(\varphi)$ care atinge minimul funcționalei $H(u)$ este unic.

Echivalența problemei (45) cu aflarea minimului funcționalei (46) este demonstrată în monografia lui S.L.Sobolev [16].

Primită la redacție la 20 aprilie 1965

Institutul de Matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations*. Interscience Publishers, New York, 1964.
2. M. Day, *The spaces L^p with $0 < p < 1$*, Bull. Amer. Math. Soc., **46**, 816—823 (1940).

3. Е. Д. ГАРБЕР, *О полной непрерывности оператора вложения*. Успехи мат. наук, **13**, 2(*80*), 169—173 (1958).
4. В. П. ИЛИН, *О теореме вложения для предельного показателя*. Д А Н СССР, **96**, *5*, 905—908 (1954).
5. Л. В. КАНТОРОВИЧ, *Об интегральных операторах*. Успехи. мат. наук, **XI**, *2/68/*, 3—29 (1956).
6. Л. В. КАНТОРОВИЧ, Г. П. АКИЛОВ, *Функциональный анализ в нормированных пространстах*, Москва, 1959.
7. В. И. КОНДРАШЕВ, *О некоторых свойствах функции пространств* L^p ДАН СССР, **48**, *8*, 563—566 (1945).
8. О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, *Смешанная задача для гиперболического уравнения*. Москва, 1953.
9. Л. А. ЛЮСТЕРНИК и В. И. СОБОЛЕВ, *Элементы функционального анализа*. Москва, 1951.
10. G. Marinescu *Spaţii vectoriale normate*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956.
11. G. Marinescu, *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1959.
12. C. Morrey, *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*. Univ. Calif. Publ. Math., 1—143 (1943).
13. M. Nicolescu, *Analiza Matematică*. vol. III, Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.
14. L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic, partial differential equations*. Comm. Pure Appl. Math., **8**, 649—675 (1955).
15. С. Л. СОБОЛЕВ, *Об одной теореме функционального анализа*. Мат. сб., **4**, *3*, 471—497 (1938).
16. С. Л. СОБОЛЕВ, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Ленинград, 1950.
17. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare*. vol. V, Ed. tehnică, Bucureşti, 1963.
18. P. Szeptycki, *A simple proof of an imbedding theorem of the Kondrashev type*. Bull. Acad. Pol. Sci., **VI**, *9*, 561—564 (1959).
19. P. Szeptycki. *A remark on an imbedding theore m ofthe Kondrashev type*. Studia Math., **XXI**, 67—72 (1961).

ASUPRA UNOR EVALUĂRI ALE FUNCŢIILOR DERIVABILE, CU APLICAŢII LA STUDIUL PROBLEMEI POLILOCALE (II)

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj

Se consideră ecuaţia diferenţială (2), în care $L_1,\dots, L_n$ reprezintă operatori diferenţiali daţi, de forma (1), avînd respectiv ordinele $k_1,\dots, k_n$, iar F — o funcţie reală de $n+1$ variabile reale, definită în domeniul D. Se consideră de asemenea condiţiile polilocale (3), în care nodurile $x_1,\dots, x_m$, precum şi valorile reale $y_i^{(s)}$ $(s=0,\dots, p_i-1\,;\ i=1,\dots, m)$ sînt date, numerele naturale m, p_1, $p_2,\dots, p_m$ verificînd egalitatea $p_1+\dots+p_m=k_1+\dots+k_n$. În această lucrare, utilizîndu-se unele rezultate anterioare [1], se dau condiţii care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei $y(x)$ a problemei (2)—(3)

1. Fie daţi n operatori diferenţiali liniari şi omogeni

$$L_i[y]=a_{i,0}(x)\,\frac{\mathrm{d}^{k_i}y}{\mathrm{d}x^{k_i}}+a_{i,1}(x)\,\frac{\mathrm{d}^{k_i-1}y}{\mathrm{d}x^{k_i-1}}+\dots+a_{i,k_i}(x)y \tag{1}$$

$$(i=1,2,\dots, n),$$

operatorul L_i avînd ordinul k_i, iar coeficienţii săi $a_{i,j}(x)$ $(j=0,\dots, k_i)$ fiind funcţii reale de o variabilă reală x, funcţii despre care presupunem că admit derivate continue de ordinul $\tau_{i+1}=k_{i+1}+\dots+k_n$ $(\tau_{n+1}=0)$ într-un interval $[a, b]$. Fie $F(x, u_0, u_1,\dots, u_{n-1})$ o funcţie reală, de $n+1$ variabile reale, definită în domeniul

$$D: a\leqslant x\leqslant b,\ -\infty<u_j<+\infty, (j=0,1,\dots, n-1).$$

Considerăm ecuaţia diferenţială

$$L_nL_{n-1}\dots L_1[y]=F(x, y, L_1[y], L_2L_1[y],\dots, L_{n-1}L_{n-2}\dots L_1[y]). \tag{2}$$

Aici notaţia L_qL_p reprezintă produsul operatorilor L_p şi L_q, adică $L_qL_p[y]=L_q\{L_p[y]\}$. Ecuaţia diferenţială (2) are ordinul $\sigma_n=k_1+$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 8, P. 1263–1276, BUCUREŞTI, 1965

$+k_2 + \ldots + k_n$. Fie m un număr natural oarecare, verificînd inegalitatea $m \leqslant \sigma_n$ şi fie $p_1 p_2, \ldots, p_m$ numere întregi, astfel încît $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \sigma_n$. Considerăm următoarele condiţii polilocale :

$$(3) \qquad \begin{cases} y(x_1) = y_1^{(0)},\ y'(x_1) = y_1^{(1)},\ \ldots,\ y^{(p_1-1)}(x_1) = y^{(p_1-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(x_m) = y_m^{(0)},\ y'(x_m) = y_m^{(1)},\ \ldots,\ y^{(p_m-1}(x_m) = y_m^{(p_m-1)} \end{cases}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ reprezintă noduri distincte din intervalul $[a, b]$, iar $\{y_i^{(0)}, y_i^{(0)}, \ldots, y_i^{(p_i-1)}\}$ $(i = 1, \ldots, m)$, sisteme de numere reale. În cele ce urmează ne propunem să stabilim condiţii suficiente de existenţă şi de unicitate a soluţiei ecuaţiei diferenţiale (2), soluţie care să verifice condiţiile (3). Probleme de acest gen au constituit obiectul a numeroase lucrări dintre care cităm în primul rînd memoriul lui Ch. J. de la Vallée Poussin [16]. Dintre cercetările mai recente asupra problemei polilocale relativ la ecuaţii diferenţiale, cercetări care au o contingenţă mai strînsă cu lucrarea de faţă amintim următoarele :

În lucrarea [11], elaborată de E. Moldovan, se pune în evidenţă importanta idee a legăturii dintre studiul problemei polilocale şi teoria funcţiilor convexe de ordin superior, teorie iniţiată în cazul sistemelor liniare de funcţii de către T. Popoviciu [13] şi extinsă apoi pentru sisteme neliniare de funcţii de către E. Moldovan [12]. În cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare, contribuţii importante la studiul problemei polilocale au fost aduse de C. Foiaş şi colab. în lucrarea [5], în care se indică o metodă de calcul aproximativ, cu ajutorul căreia se poate afla cu orice precizie lungimea $h_0(a)$ a intervalului maximal de forma $[a, a + h]$, cu extremitatea stîngă dată, în care soluţiile unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al doilea date, formează o familie interpolatoare pe cîte două puncte (distincte). Într-o altă lucrare [6], aceiaşi autori studiază delimitarea distanţei minime dintre două rădăcini consecutive la soluţii : ale ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea, obţinînd noi criterii de neoscilaţie. Pentru ecuaţii diferenţiale binoame de ordinul n, un studiu amplu cu privire la caracterul oscilatoriu al soluţiilor unor astfel de ecuaţii a fost elaborat de către V.A.Kondratiev [8]. Formulări îmbunătăţite ale teoremei lui Ch. de la Vallée Poussin în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al doilea au fost obţinute de Ph. Hartman şi A. Wintner [7], iar apoi de Z. Opial [10] şi D. Ripianu [15]. O contribuţie importantă în studiul unor anumite tipuri de probleme polilocale au adus-o A. Lasota şi Z. Opial [9], iniţiind o nouă metodă de cercetare a unor astfel de probleme, bazată pe utilizarea principiului de maximum al lui Pontriaghin. Această metodă a fost ulterior dezvoltată de către D. Ripianu [14]. Recent, G. A. Bessmertnîh şi A. Iu. Levin [4] studiind unele evaluări ale funcţiilor derivabile, care se anulează de un anumit număr de ori într-un interval dat, au obţinut remarcabile îmbunătăţiri ale rezultatelor lui Ch. de la Valée Poussin referitoare la problema polilocală.

În lucrarea de faţă dăm unele generalizări şi în acelaşi timp completări rezultatelor pe care le-am obţinut în lucrarea anterioată [2], relativ la studiul problemei polilocale, în cazul cînd ecuația diferențială considerată admite anumite reprezentări de forma (2).

2. În cele ce urmează vom presupune că $x_1 = a$, $x_m = b$ și că pe intervalul $[a, b]$ sînt verificate următoarele condiții :

IPOTEZE. 1°. *Oricare ar fi* $i = 1, \ldots, n$, *coeficienții* $a_{i,0}(x), \ldots, a_{i,k_i}(x)$ *ai operatorului* L_i *aparțin clasei* $C^{(\tau_{i+1})}[a, b]$, *unde* $\tau_{i+1} = k_{i+1} + \ldots + k_n$ *și* $a_{i,0}(x) \neq 0$ *pe intervalul* $[a, b]$.

2°. *Oricare ar fi* $i = 1, \ldots, n$, *operatorul* L_i *are proprietatea de interpolație* $\overset{\star}{I}_{k_i}[a, b]$ (definiția acestei proprietăți este dată în lucrarea [1], § 2).

Vom folosi următoarele notații, analoge cu cele introduse în lucrările noastre anterioare [1] și [2] :

Fie i un număr natural verificînd inegalitatea $i \leqslant n - 1$ și fie operatorul diferențial

$$\Pi_i[Y] = L_n L_{n-1} \ldots L_i[Y].$$

Acesta se prezintă ca produsul simbolic al operatorilor $L_i, L_{i+1}, \ldots, L_n$, avînd respectiv ordinele $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n$ și respectiv proprietățile $\overset{\star}{I}_{k_i}[a, b], \overset{\star}{I}_{k_{i+1}}[a, b], \ldots, \overset{\star}{I}_{k_n}[a, b]$. În baza unei teoreme stabilite în lucrarea [3], operatorul produs $\Pi_i[Y]$ va avea proprietatea $\overset{\star}{I}_{\tau_i}[a, b]$, unde $\tau_i = k_i + k_{i+1} + \ldots + k_n$. Fie $N(x; \Pi_i; \underbrace{a, \ldots, a}_{p}, \underbrace{b, \ldots, b}_{\tau_i p})$ soluția ecuației diferențiale liniare neomogene $\Pi_i[Y] = 1$ verificînd condițiile

$$(4) \qquad \begin{cases} Y(a) = Y'(a) = \ldots = Y^{(p-1)}(a) = 0, \\ Y(b) = Y'(b) = \ldots = Y^{(\tau_i - p - 1)}(b) = 0, \end{cases}$$

unde P este un număr întreg astfel încît $1 \leqslant p \leqslant \tau_i - 1$. Dacă $p = 0$, respectiv $p = \tau_i$, condițiile corespunzătoare vor fi :

$$(4') \qquad Y(b) = Y'(b) = \ldots = Y^{(\tau_i - i)}(b) = 0,$$

respectiv

$$(4'') \qquad Y(a) = Y'(a) = \ldots = Y^{(\tau_i - 1)}(a) = 0$$

Existența și unicitatea tuturor acestor soluții rezultă din proprietatea $\overset{\star}{I}_{\tau_i}[a, b]$ a operatorului Π_i.

În continuare se introduc succesiv numerele

$$(5) \qquad M_p(\Pi_i; a, b) = \max_{x \in [a,b]} |N(x; \Pi_i; \underbrace{a, \ldots, a}_{p}, \underbrace{b, \ldots, b}_{\tau_i - p})|, \ (p = 0, 1, \ldots, n)$$

$$(6) \qquad M(\Pi_i; a, b) = \max_{p=1, \ldots, \tau_i - 1} \{M_p(\Pi_i; a, b)\}$$

$$(7) \qquad M^*(\Pi_i; a, b) = \max_{p=0,1, \ldots, \tau_i} \{M_p(\Pi_i; a, b)\}.$$

Cu aceste notații, are loc următoarea lemă, de care ne vom folosi în continuare.

LEMA 1. *În ipotezele* 1° și 2° *de mai sus, fie* f *o funcție din clasa* $C^{(\tau_n)}[a,b]$, *funcție care se anulează de cel puțin* σ_n *ori pe intervalul* $[a, b]$ *pentru valori* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{\tau_n}$, *unde* $x_1 = a$ *și* $x_{\sigma_n} = b$. *Atunci are loc următoarea delimitare, valabilă pentru orice* $x \in [a, b]$:

$$|f(x)| \leqslant M(\Pi_1 ; a, b) \max_{x \in [a,b]} |\Pi_1[f(x)]|, \ (\Pi_1 = L_n L_{n-1} \ldots L_1).$$

De asemenea, oricare ar fi $i = 2, 3, \ldots, n$ *și oricare ar fi* $x \in [a, b]$ *are loc delimitarea*

$$(9) \ |L_{i-1} L_{i-2} \ldots L_2 L_1 [f(x)]| \leqslant M^{\star}(\Pi_i ; a, b). \max_{x \in [a,b]} |L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1 [f(x)]|.$$

Aici $[a, b]$ *reprezintă cel mai mic interval care conține rădăcinile în cauză ale funcției* $f(x)$.

Inegalitatea (8) rezultă din afirmația teoremei 2 din lucrarea [1]. Inegalitatea (9) rezultă din afirmația teoremei 6 din aceeași lucrare, considerînd acolo $A_\sigma = L_{i-1} L_{i-2} \ldots L_1$, $B_\tau = L_v L_{n-1} \ldots L_i$ și observînd că soluția $H_f(x ; L_n L_{n-1} \ldots L_1 ; x_1 \ldots x_{\sigma_n})$ a ecuației diferențiale omogene $L_n L_{n-1} \ldots$ $\ldots L_1[y] = 0$, soluție care verifică condițiile $H_f(x_i) = f(x_i)$ $(i = 1, \ldots, \sigma_n)$ este identic nulă, întrucît prin ipoteză $f(x_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, \sigma_n)$ și întrucît operatorul diferențial $\Pi_1 = L_n L_{n-1} \ldots L_1$ are proprietatea $I^{\star}_{\sigma_n}[a, b]$ (după cum s-a menționat anterior).

3. În continuare vom stabili următoarea teoremă de existență și de unicitate referitoare la soluția problemei (2)—(3).

TEOREMA 1. *Presupunem că sînt îndeplinite ipotezele* 1° și 2° *de la* § 2, *referitoare la operatorii diferențiali* L_i $(i=1, \ldots, n)$. *Presupunem de asemenea că funcția* F *care figurează în membrul al doilea al ecuației* (2) *este continuă în raport cu* $x \in [a, b]$ *și verifică pe domeniul* $-\infty < u_i < +\infty$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *inegalitatea*

$$(10) \quad |F(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) - F(x, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1})| \leqslant \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P_i |u_i - \bar{u}_i|, \ x \in [a, b],$$

unde P_i *sînt constante* (nenegative).

În aceste ipoteze o condiție suficientă pentru existența și unicitatea soluției ecuației (2), *care să verifice condițiile* (3) (*unde prin ipoteză* $x_1 = a$ și $x_m = b$), *este ca să aibă loc inegalitatea*

$$(11) \quad P_0 M(\Pi_1 ; a, b) + \sum_{i=1}^{n-1} P_i M^{\star}(\Pi_{i+1} ; a, b) < 1.$$

Metoda de demonstrație pe care o vom folosi în vederea demonstrării acestei teoreme este asemănătoare unei metode utilizate de G. A. Bessmertnîh și A. Iu Levin în lucrarea [4] și ea se bazează pe utilizarea unor teoreme de punct fix.

Fie $\mathcal{M}$ mulţimea tuturor funcţiilor din clasa $C^{(\sigma_n)}[a, b]$, verificînd condiţiile (3). Se defineşte pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{M}$ operatorul B precum urmează : $B\varphi$ reprezintă soluţia $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale

$$L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1[y] = F(x, \varphi, L_1[\varphi], \ldots, L_{n-1} \ldots L_1[\varphi])$$

soluţie care verifică condiţiile (3). Existenţa şi unicitatea unei astfel de soluţii este garantată de faptul că operatorul produs $\Pi_1 = L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1$ are proprietatea $I^{\star}_{\sigma_n}, [a, b]$, proprietate care rezultă din ipoteza că operatorii $L_1, L_2, \ldots, L_n$, care intervin ca factori în expresia lui Π_1, au respectiv proprietăţile $I^{\star}_{k_1}[a, b], I^{\star}_{k_2}[a, b], \ldots, I^{\star}_{k_n}[a, b]$ (a se vedea teorema 4 din lucrarea [3]).

Evident că operatorul B transformă mulţimea $\mathcal{M}$ în ea însăşi. Introducem în $\mathcal{M}$ următoarea metrică ρ :

Dacă $y \in \mathcal{M}$ şi $z \in \mathcal{M}$, atunci

$$\rho(y, z) = \max_{x \in [a, b[} |L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1[y] - L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1[z]| =$$
$$= \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[y - z]|.$$

Prin introducerea acestei metrici, mulţimea $\mathcal{M}$ devine un spaţiu metric complet, ceea ce se constată cu uşurinţă din formula

$$y(x) - z(x) = \int_a^b G(x, s) \cdot \Pi_1[y(s) - z(s)] \, \mathrm{d}s,$$

unde $G(x, s)$ reprezintă funcţia lui Green asociată operatorului π_1 precum şi unor condiţii polilocale, analoage condiţiilor (3), cu singura deosebire că toate valorile care figurează în membrii drepţi ai acestor condiţii se consideră nule. Existenţa unei astfel de funcţii a lui Green rezultă din proprietatea $I^{\star}_{\sigma_n}[a, b]$ a operatorului Π_1.

Operatorul B apare în spaţiul $\mathcal{M}$ un operator de contracţie. Într-adevăr, în baza definiţiei acestui operator, se poate scrie

$$\rho(By, Bz) = \max_{x \in [a, b]} |F(x, y, L_1[y], \ldots, L_{n-1} \ldots L_2 L_1[y]) -$$
$$- F(x, z, L_1[z], \ldots, L_{n-1} \ldots L_2 L_1[z])|.$$

Aplicînd în membrul al doilea inegalitatea (9) a lui Lipschitz, se obţine

$$\rho(By, Bz) \leqslant \max_{x \in [a, b]} \Bigl(P_0 |y(x) - z(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} P_i |L_i L_{i-1} \ldots \ldots L_1[y(x) - z(x)]| \Bigr). \tag{12}$$

Dar întrucît funcțiile y și z verifică condițiile (3), rezultă că diferența lor $\delta = y - z$ verifică condițiile

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \delta(x_1) = \delta'(x_1) = \ldots = \delta^{(p_1-1)}(x_1) = 0 \\ \delta(x_2) = \delta'(x_2) = \ldots = \delta^{(p_2-1)}(x_2) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta(x_m) = \delta'(x_m) = \ldots = \delta^{(p_m-1)}(x_m) = 0 \end{cases}$$

care ne arată că funcția δ se anulează pe intervalul $[a, b]$ de cel puțin $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \sigma_n$ ori. Dar întrucît prin ipoteză $x_1 = a$ și $x_m = b$, vom avea în baza lemei 1, pentru orice $x \in [a, b]$, următoarele delimitări:

$$\text{(13')} \qquad |\delta(x)| \leqslant M(\Pi_1;\ a,\ b). \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|,$$

$$\text{(13'')} \qquad |L_{i-1} \ldots L_2 L_1[\delta(x)]| \leqslant M^{\star}(\Pi_i;\ a, b). \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|, (i=2, \ldots, n).$$

Înlocuind în (12) obținem

$$\text{(14)} \qquad \rho(By, Bz) \leqslant \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[y(x) - z(x)]| \cdot \left[P_0 M(\Pi_1;\ a, b) + \sum_{i=1}^{n-1} P_i M^{\star}(\Pi_{i+1}; a, b) \right] = q \cdot \rho(y,\ z),$$

unde s-a notat

$$\text{(15)} \qquad q = P_0 M(\Pi_1;\ a,\ b) + \sum_{i=1}^{n-1} P_i M^{\star}(\Pi_{i+1};\ a,\ b).$$

Ținînd seamă de inegalitatea (11), din care rezultă $q < 1$, relația (14) ne arată că operatorul B este un operator de contracție pe spațiul $\mathcal{M}$.

În consecință operatorul B va admite în mulțimea $\mathcal{M}$ un punct fix, de unde rezultă existența soluției problemei (2) – (3). Totodată rezultă și unicitatea unei astfel de soluții. Astfel, teorema 1 este demonstrată.

Observații. a) Întrucît operatorul B este un operator de contracție pe mulțimea $\mathcal{M}$, rezultă că în condițiile teoremei 1, pentru a afla soluția problemei (2)—(3), se poate aplica metoda aproximațiilor succesive. Rapiditatea de convergență a șirului de aproximații către soluție va fi egală cel puțin cu aceea a unei serii geometrice de rație q.

b) Condiția (11) care împreună cu condiția (10) și cu ipotezele 1° și 2° de la § 2 asigură existența și unicitatea problemei polilocale (2) — (3), nu depinde de poziția nodurilor $x_2, \ldots, x_{m-1}$ în intervalul $[a, b]$ $(x_1 = a,\ x_m = b)$ și de asemenea nu depinde de sistemele de valori $\{y_i^{(0)}, y_i^{(1)} \ldots, y_i^{(p_i-1)}\}$ $(i = 1, \ldots m)$, care intervin în condițiile polilocale (3).

4. Dacă ne limităm numai la asigurarea existenței soluției problemei (2)-(3), atunci este suficient ca în locul condiției lui Lipschitz (10), să considerăm o condiție privind modul de creștere al funcției F. Are loc în această direcție următoarea teoremă.

TEOREMA 2. *Dacă funcţia F este continuă în domeniul*

$$D: a \leqslant x \leqslant b, \quad -\infty < u_i < +\infty \quad (i = 0,1,\dots, n-1)$$

şi verifică în acest domeniu inegalitatea

$$(16)\quad |F(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})| \leqslant P + P_0|u_0| + P_1|u_1| + \dots + P_{n-1}|u_{n-1}|,$$

în care $P, P_0, \dots, P_{n-1}$ sînt constante astfel încît să fie verificată inegalitatea (11), *atunci problema* (2)—(3) (unde prin ipoteză $x_1 = a$ şi $x_m = b$) *admite cel puţin o soluţie.*

Metoda de demonstraţie pe care o utilizăm este analoagă unei metode, indicate în lucrarea [4]. Fie $R(x)$ soluţia $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene $L_nL_{n-1}\dots L_2L_1[y] = 0$, soluţie care verifică condiţiile (3) şi fie

$$(17)\qquad p = \max_{x \in [a, b]} \left(P_0|R(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} P_i|L_iL_{i-1}\dots L_2L_1[R(x)]|\right).$$

Notăm cu $\mathcal{S}$ sfera cu centrul în $R(x)$ şi de rază $\dfrac{P+p}{1-q}$ din spaţiul $\mathcal{M}$ (considerat în cadrul demonstraţiei teoremei precedente), numărul q fiind dat de formula (15). Să considerăm din nou operatorul B definit anterior şi să arătăm că acest operator transformă sfera $\mathcal{S}$ în ea însăşi. Într-adevăr, dacă $y \in \mathcal{M}$ şi $\rho(y, R) \leqslant \dfrac{P+p}{1-q}$, atunci

$$\begin{aligned}
(18)\qquad \rho(By, R) &= \max_{x \in [a, b]} |F(x, y, L_1[y], \dots, L_{n-1}\dots L_2L_1[y])| \leqslant \\
&\leqslant P + \max_{x \in [a, b]} \left(P_0|y(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} P_i|L_iL_{i-1}\dots L_2L_1[y(x)]|\right) = \\
&= P + \max_{x \in [a, b]} \left(P_0|(y-R)+R| + \sum_{i=1}^{n-1} P_i|L_iL_{i-1}\dots L_2L_1[y-R] + \right. \\
&\left. + L_iL_{i-1}\dots L_2L_1[R]|\right) \leqslant P + p + \max_{x \in [a, b]} \left(P_0|y-R| + \right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^{n-1} P_i|L_iL_{i-1}\dots L_2L_1[y-R]|\right).
\end{aligned}$$

Ţinînd seamă de faptul că $y \in \mathcal{M}$ şi de definiţia mulţimii $\mathcal{M}$, se constată că funcţia $\delta = y - R$ verifică condiţiile de anulare (13). Observăm apoi că întrucît $x_1 = a$ şi $x_m = b$, vom putea, în baza lemei 1, să scriem următoarele inegalităţi, valabile pentru orice $x \in [a, b]$:

$$(19)\qquad |\delta(x) \leqslant M(\Pi_1; a, b)\cdot \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|,$$

$$(20)\qquad |L_iL_{i-1}\dots L_2L_1[\delta(x)]| \leqslant M^*(\Pi_{i+1}; a, b)\cdot \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Înlocuind în (18), obţinem

$$\rho(By,\ R) \leqslant P + p + q\cdot \rho(y,\ R) \leqslant P + p + q\,\frac{P+p}{1-q} = \frac{P+p}{1-q},$$

ceea ce demonstrează afirmaţia că operatorul B transformă sfera $\mathcal{S}$ în ea însăşi.

Pe de altă parte, din continuitatea funcţiei F pe domeniul D, rezultă complet-continuitatea operatorului B pe mulţimea $\mathcal{M}$. De aici, în baza principiului lui Schauder, operatorul B va admite cel puţin un punct fix, ceea ce înseamnă că problema (2)—(3) are cel puţin o soluţie $y(x)$ care să verifice inegalitatea

$$|L_n L_{n-1} \ldots L_1[y(x)]| \leqslant \frac{P+p}{1-q}, \quad x \in [a,\ b]. \tag{21}$$

Observaţie. Din (19) şi (20), ţinînd seamă de (21), precum şi de faptul că $R(x)$ constituie o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $\Pi_1[y] = 0$, rezultă următoarele delimitări valabile pentru orice $x \in [a,\ b]$:

$$|y(x) - R(x)| \leqslant M(\Pi_1;\ a,\ b)\cdot \frac{P+p}{1-q},$$

$$| L_i L_{i-1} \ldots L_2 L_1[y(x)] - L_i L_{i-1} \ldots L_2 L_1[R(x)]| \leqslant$$

$$\leqslant M^*(\Pi_{i+1};\ a, b)\frac{P+p}{1-q},\ (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n-1).$$

5. În cazul cînd funcţia F este liniară şi omogenă în raport cu argumentele $u_0,\ u_1, \ldots,\ u_{n-1}$, se poate da o demonstraţie mai simplă relativ la existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (2)—(3) în anumite condiţii corespunzătoare. Presupunem deci că ecuaţia (2) are forma

$$\begin{aligned} &L_n L_{n-1} \ldots L_1[y] + A_1(x)\, L_{n-1} \ldots L_1[y] + \ldots + \\ &A_{n-1}(x) L_1\,[y] + A_n(x)\, y = 0, \end{aligned} \tag{2'}$$

unde $A_i(x)\,(i = 1, \ldots, n)$ sînt funcţii continue pe $[a,\ b]$ $(a = x_1$ şi $b = x_m)$. Condiţia lui Lipschitz (10) este îndeplinită în acest caz, dacă se consideră pentru P_i valorile

$$P_i = \max_{x \in [a,\,b]} |A_{n-i}(x)|,\ (i = 0, 1, \ldots,\ n-1). \tag{22}$$

Vom demonstra următoarea teoremă.

TEOREMA 1*. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile* 1° şi 2° (§ 2) *referitoare, la operatorii diferenţiali* L_i $(i = 1, \ldots, n)$ *şi dacă are loc inegalitatea* (11), *în care* P_i *sînt daţi de formulele* (22), *atunci ecuaţia diferenţială* (2′) *admite o soluţie* (*unică*), *care verifică condiţiile* (3) (unde prin ipoteză, $x_1 = a$ şi $x_m = b$).

În vederea demonstrării acestei teoreme, este suficient să arătăm că în ipotezele adoptate, ecuaţia (2′) nu poate avea nici o soluţie neidentic nulă $\delta(x)$, care să verifice condiţiile de anulare (13), corespunzătoare condiţiilor (3). Să presupunem prin absurd că există o soluţie $\delta(x)$, neidentic nulă pe $[a, b]$, a ecuaţiei (2′), care să verifice condiţiile (13). Atunci, din faptul că $\delta(x)$ este soluţie a ecuaţiei (2′) rezultă

$$L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1[\delta(x)] \equiv -A_1(x) L_{n-1} \ldots L_2 L_1[\delta(x)] - \\ - A_2(x) L_{n-2} \ldots L_2 L_1[\delta(x)] - \ldots - A_{n-1}(x) L_1[\delta(x)] - A_n(x)\delta(x),$$

de unde, luînd în ambii membri valorile absolute şi delimitînd termeni din membrul al doilea în conformitate cu formulele (22), precum şi în conformitate cu afirmaţia lemei 1 (în baza căreia se obţin inegalităţi analoage cu (19) şi (20)), obţinem inegalitatea

$$|\Pi_1[\delta(x)]| \leqslant (P_{n-1} M^\star(\Pi_n; a, b) + P_{n-2} M^\star(\Pi_{n-1}; a, b) + \ldots \\ \ldots + P_1 M^\star(\Pi_2; a, b) + P_0 M(\Pi_1; a, b)) \cdot \max_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|$$

valabilă pentru orice $x \in [a, b]$. Înlocuind în primul membru pe x cu valoarea x_0 pentru care este atins $\mu = \max\limits_{x \in [a, b]} |\Pi_1[\delta(x)]|$, şi simplificînd ambii membri ai inegalităţii precedente cu numărul μ, se obţine o inegalitate, care contrazice inegalitatea (11). Numărul μ nu poate fi egal cu zero, întrucît dacă $\mu = 0$, atunci din afirmaţia lemei 1 s-ar obţine că $|\delta(x)| \equiv 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza că $\delta(x)$ nu este o soluţie identic nulă pe $[a, b]$.

Exemplul 1. Dacă $L_1 = L_2 = \ldots = L_n = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, atunci $\sigma_n = n$ şi după cum s-a arătat în lucrarea anterioară [1], au loc în acest caz egalităţile

$$M(\Pi_1; a, b) = M\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}; a, b\right) = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!\, n^n}(b-a)^n,$$

$$M^\star(\Pi_{i+1}; a, b) = \frac{1}{(n-i)!}(b-a)^{n-i}.$$

Inegalitatea (11) se transcrie în acest caz astfel:

$$(11') \quad P_0 \frac{(n-1)^{n-1}}{n!\, n^n}(b-a)^n + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \frac{1}{(n-i)!}(b-a)^{n-i} - 1 < 0.$$

6. În ipotezele 1° şi 2° (§ 2) referitoare la operatorii $L_i (i = 1, \ldots, n)$, condiţia (11) care asigură existenţa soluţiei problemei (2)—(3) poate fi înlocuită cu o condiţie mai puţin restrictivă, care s-ar obţine considerînd (în condiţiile lemei 1) delimitări mai bune decît delimitările (9). În lucrarea [1] am dat cîteva precizări în acest sens. În cazul particular cînd $L_1 = L_2 = \ldots = L_n = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, G. A. Bessmertnîh şi A. Iu. Levin au obţinut în lucrarea [4] constantele (pozitive) *minimale* care pot fi înlocuite respectiv în locul constantelor $M^\star(\Pi_i; a, b)$ din inegalităţile (9), astfel încît aceste inegalităţi să rămînă adevărate pentru orice funcţie f verificînd condiţiile lemei 1. Cu această ocazie, autorii respectivi au reuşit să obţină în cazul particular considerat, o condiție mai puțin restrictivă decît (11') care asigură existența soluției problemei polilocale (2)—(3). În cele ce urmează, vom arăta cum se poate preciza condiția (11) în cazul particular cînd $n = 2$ și cînd $k_1 = k_2 = 1$. În acest scop, vom reaminti următoarea lemă, stabilită în lucrarea noastră anterioară [1] și al cărui enunț este conținut în enunțul teoremei 8 din lucrarea citată.

LEMA 2. *Fie dați doi operatori diferențiali liniari și omogeni de ordinul întîi*

$$(23)\qquad \begin{aligned} L_1[y] &= a_{10}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_{11}(x)y \\ L_2[Y] &= a_{20}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_{21}(x)\,y, \end{aligned}$$

operatorul L_1 avînd coeficienții din clasa $C^{(1)}[a, b]$ iar coeficienții operatorului L_2 aparținînd clasei $C^{(0)}[a, b]$. Presupunem de asemenea că $a_{10}(x) \neq 0$ și $a_{20}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. (În aceste ipoteze operatorul-produs L_2L_1 va avea proprietatea $I_2^*[a, b]$. *Fie f o funcție oarecare din clasa $C^{(2)}[a, b]$ astfel încît $f(a) = f(b) = 0$. Atunci are loc pentru orice $x \in [a, b]$ delimitarea*

$$(24)\qquad |L_1[f(x)]| \leqslant \max_{x \in [a,b]} |L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]| \cdot \max_{x \in [a,b]} |L_2L_1[f(x)]|,$$

unde $N(x; L_2L_1; a, b)$ reprezintă soluția ecuației diferențiale neomogene $L_2L_1[y] = 1$, soluție care verifică condițiile $y(a) = y(b) = 0$.

Constanta $C = \max\limits_{x \in [a,b]} |L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]|$ care intervine în membrul al doilea al inegalității (24) este „optimală" (adică nu poate fi înlocuită cu o constantă mai mică), fapt care se constată observînd că inegalitatea respectivă se transformă în egalitate, dacă se consideră $f(x) = N(x; L_2L_1; a, b)$ și dacă se ia în primul membru pentru x valoarea $x = x_0$, unde x_0 reprezintă un punct din $[a, b]$ în care funcția $|L_1[N(x; L_2L_1; a, b)]|$ își atinge valoarea sa maximă pe intervalul $[a, b]$. Dar în baza relației (9), are loc și următoarea delimitare asemănătoare cu (24)

$$(25)\qquad |L_1[f(x)]| \leqslant M^*(L_2; a, b). \max_{x \in [a,b]} L_2L_1[f(x)]|, x \in [a, b],$$

unde $M^*(L_2; a, b)$ se definește în conformitate cu formulele (5) și (7). Rezultă din cele de mai sus că între coeficienții care figurează ca factori în membrii drepți ai inegalităților (24) și (25), are loc relația

$$(26)\qquad C = \max_{x \in [a,b]} |L_1[N(x; L_2L_1; a, b)] \leqslant M^*(L_2; a, b).$$

Cu ajutorul lemei 2, în cazul particular $n = 2$, teoremele 1, 2 și 1* stabilite anterior, se pot îmbunătăți, obținîndu-se în locul condiției (11), care intervine în enunțurile lor, următoarea condiție mai puțin restrictivă.

$$(27)\qquad P_0 \cdot \max_{x \in [a,b]} |N(x; L_2L_1; a, b)| + P_1 \max_{x \in [a,b]} |L_1[N(x; L_2L_1a, b)]| < 1.$$

În acest scop, în demonstraţiile teoremelor 1 şi 2 se va considera în locul delimitărilor (13″) şi (20), referitoare la funcţiile $\delta(x)$, care intervin în demonstraţiile acestor teoreme şi care satisfac în cazul de faţă condiţiile $\delta(a) = \delta(b) = 0$, următoarea delimitare mai precisă, dată de lema 2 (formula (24)) :

$$|L_1[\delta(x)]| \leqslant \max_{x \in [a,\, b]} |L_1[N(x\,;\, L_2L_1\,;\, a,\, b)]| . \max_{x \in [a,\, b]} |L_2L_1\,[\delta(x)]|,$$

valabilă pentru orice $x \in [a, b]$.

Exemplul 2. Fie dat operatorul

$$\mathcal{L}[y] = y'' + [\alpha(x) - 3]y' + [\beta(x) - \alpha(x) + 2]y, \tag{28}$$

unde $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sînt funcţii continue pe intervalul $[0,2]$. Presupunem că aceste funcţii îndeplinesc condiţiile

$$\begin{aligned} &-1 \leqslant \alpha(x) \leqslant 3, \quad -1 \leqslant \beta(x) \leqslant 1, \quad x \in [0,2], \\ &\alpha(0) = -1, \qquad \beta(0) = +1. \end{aligned} \tag{29}$$

Fie h un număr astfel încît $0 < h < 2$. Ne propunem să stabilim o condiţie suficientă care să asigure proprietatea $I_2^*[0,\ h]$ a operatorului $\mathcal{L}$ din (28). Vom putea proceda în mai multe moduri :

a) Considerînd de exemplu $L_1 = L_2 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, iar $A_1(x) = \alpha(x) - 3$, $A_2(x) = \beta(x) - \alpha(x) + 2$, vom obţine conform formulei (22)

$$P_0 = \max_{x \in [0,\, h]} |A_2(x)| = 4\,;\, P_1 = \max_{x \in [a,\, h]} |A_1(x)| = 4.$$

Apoi, $N(x)\,;\, L_2L_1\,;\, 0,\ h) = \dfrac{1}{2}\, x(x-h)$ şi deci $\max\limits_{x \in [0,\, h]} |N(x\,;\, L_2L_1\,;\, 0,\, h)| =$ $= \dfrac{h^2}{8}$, $\max\limits_{x \in [0,\, h]} |L_1[N(x\,;\, L_2L_1\,;\, 0,\ h)]| = \max\limits_{x \in [0,\, h]} \left| x - \dfrac{h}{2} \right| = \dfrac{h}{2}\cdot$

Inegalitatea (27) se va scrie în acest caz $h^2 + 4h - 2 < 0$, de unde rezultă pentru h condiţia

$$h < \sqrt{6} - 2 = 0{,}449\ \ldots = h_0, \tag{30}$$

h_0 reprezentînd rădăcina pozitivă a ecuaţiei $\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$.

b) Observăm că operatorul $\mathcal{L}$ din (28) admite şi reprezentarea

$$\mathcal{L}\,[y] = L_2L_1[y] + \alpha(x)\, L_1[y] + \beta(x)\, y, \tag{31}$$

unde

$$L_1[y] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right) y, \quad L_2[y] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2\right) y.$$

Putem considera relativ la descompunerea (31), $A_1(x) = \alpha(x)$ și $A_2(x) = \beta(x)$ și în consecință numerele P_i $(i = 1, 2)$ corespunzătoare vor fi

$$P_0 = \max_{x \in [0, h]} |A_2(x)| = \max_{x \in [0, h]} |\beta(x)| = 1,$$

$$P_1 = \max_{x \in [0, h]} |A_1(x)| = \max_{x \in [0, h]} |\alpha(x)| = 1.$$

Soluția $N(x; L_2L_1; 0, h)$ a ecuației diferențiale $L_2L_1[y] = 1$, soluție care se anulează pentru $x = 0$ și pentru $x = h$ va fi

$$N(x; L_2L_1; 0, h), = \frac{1}{2e^h} [e^{2x} - (1 + e^h) e^x + e^h].$$

De aici obținem

$$\max_{x \in [0, h]} |N(x; L_2L_1; 0, h)| = \frac{1}{8e^h} (e^h - 1)^2$$

și

$$\max_{x \in [0, h]} |L_1[N(x; L_2L_1; 0, h)]| = \frac{1}{2} (e^h - 1).$$

Inegalitatea (27) se va scrie în cazul de față astfel

$$\frac{1}{8e^h} (e^h - 1)^2 + \frac{1}{2} (e^h - 1) - 1 < 0,$$

de unde rezultă pentru h condiția

$$h < 1{,}003\ldots = h_1, \tag{32}$$

h_1 reprezentînd rădăcina ecuației

$$\frac{1}{8e^h} (e^h - 1)^2 + \frac{1}{2} (e^h - 1) - 1 = 0.$$

Pentru a face o apreciere asupra eficacității metodei propuse, să considerăm și inegalitatea lui De la Vallée Poussin [16], care în cazul operatorului $\mathcal{L}$ din (28) se scrie $P_0 \cdot \frac{h}{2} + P_1 \cdot h < 1$, adică $2h^2 + 4h < 1$, ceea ce ne dă pentru h condiția $h < \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 = 0{,}224\ldots = h_2$.

Se observă că

$$h_1 > 2h_0 = 4h_2.$$

Acest exemplu ne arată că, în general, în studiul problemei polilocale este util de a se cunoaște diversele reprezentări de forma (2), pe care le admite o ecuație diferențială (liniară sau neliniară) de un ordin σ_n și de a se aplica metoda propusă mai sus, utilizîndu-se reprezentarea

„cea mai convenabilă”. În legătură cu această idee, este de observat faptul că fiind dat un operator diferenţial liniar şi omogen

$$(33)\qquad \mathcal{L} = a_0(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + a_2(x)\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_n(x)$$

ai cărui coeficienţi sînt funcţii din clasa $C^{(0)}[a, b]$, un astfel de operator admite întotdeauna reprezentarea

$$(34)\qquad \mathcal{L} = L_{n-1}L_{-2}\dots L_2L_1 + a_2(x)L_{n-2}\dots L_2L_1 + \dots + a_{n-2}(x)L_2L_1 + a_{n-1}(x)L_1 + a_n(x),$$

unde $L_1 = L_2 = \dots = L_{n-2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, iar $L_{n-1} = \left[a_0(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_1(x)\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot$

Dacă se mai presupune că $a_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci operatorul L_{n-1} va avea proprietatea $I_2^*[a, b]$ şi astfel ipotezele 1° şi 2° de la § 2 sînt îndeplinite. Pentru studiul problemei polilocale de tipul celei tratate în prezenta lucrare, este uneori mai convenabil de a se utiliza reprezentarea (34) în locul reprezentării (33). Rezultate şi mai bune se pot obţine dacă se consideră pentru $\mathcal{L}$ reprezentarea

$$\mathcal{L} = \Lambda_{n-p+1}\Lambda_{n-p}\dots\Lambda_2\Lambda_1 + a_p(x)\Lambda_{n-p}\dots\Lambda_2\Lambda_1 + \dots + a_{n-1}(x)\Lambda_1 + a_n(x),$$

unde $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \dots = \Lambda_{n-p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, iar $\Lambda_{n-p+1} = \left[a_0(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{p-1}} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{p-1}} + \dots + a_{p-1}(x)\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ şi unde p reprezintă numărul natural maxim posibil $(2 \leqslant p \leqslant n)$ pentru care operatorul Λ_{n-p+1} are proprietatea $I_2^*[a, b]$.

Primită la redacţie la 20 mai 1965

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă O., *Asupra unor evaluări ale funcţiilor derivabile, cu aplicaţii la studiul problemei polilocale* (I). St. cerc. mat., **17** (1965).
2. — *Intervale de neoscilaţie la ecuaţii diferenţiale liniare*. St. cerc. mat. (Cluj) **XIII** 213—239 (1962).
3. — *Sur un théorème de W. A. Markov*. Mathematica, **3** (**26**), 197—216 (1961); St. şi cerc. mat. (Cluj), **XIII** 7—25 (1962).
4. БЕССМЕРТНЫХ Г. А., ЛЕВИН А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной*. Доклады Акад. наук СССР, **144**, *3*, 47—474 (1962).

5. Foiaş C., şi colab. *Despre problema polilocală la ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al doilea.* Bul. ştiinţ. — Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matem. şi fiz., **VII**, 699—721 (1955)

6. — *Observaţii asupra problemei polilocale la ecuaţia* $y'' + g(x)\, y = 0$. St. cerc. mat. (Cluj), **XII** 53—58 (1961).

7. Hartman Ph. and Wintner A., *On an oscillation criterion of de la Vallée Poussin.* Quarterly of Applied Mathematics, **13**, *3*, 330—332 (1955).

8. Кондратьев В. А., *О колеблемости решений уравнения* $y^n + p(x)y = 0$. Труды Московского математического общества, **10**, 419—436 (1961).

9. Lasota A., Opial Z., *L'application du principe de Pontriaguine à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites.* Bull. de l'Acad. Polon. des Sci., Ser. des Sci math., ostr. et phys. **XI** *3*, 41—46(1963).

10. Opial Z., *Sur une inégalité de Ch. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle du second ordre.* Annales Polonici Mathem., *6*, 87—91 (1959).

11. Moldovan E., *Sur une généralisation des fonctions convexes.* Mathematica (Cluj), **1** (**24**), 49—80 (1959); St. cerc. mat. (Cluj), **IX**, 161—224 (1958).

12. — *Applications des fonctions convexes généralisées.* Mathematica (Cluj), **1** (**24**), 281—286 (1959); St. cerc. mat. (Cluj), **IX**, 161—224 (1958).

13. Popoviciu T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou deux variables réelles.* Mathematica (Cluj), **VIII** 1—86 (1934).

14. Ripianu D. *Asupra problemei bilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare.* St. cerc. mat., **17**, *8* (1965).

15. D. Ripianu *Asupra inegalităţii lui de la Vallée Poussin în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al doilea.* St. cerc. mat. (Cluj), **XIV**, 123—150 (1963).

16. Vallée Poussin Ch J. (de la), *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre. n.* Journ. de math. pures et appl., **8**(**9**), 125—144 (1929).

O CARACTERIZARE A TOPOLOGIILOR LOCAL CONVEXE ÎN CARE APLICAȚIILE LINIARE ȘI MĂRGINITE SÎNT CONTINUE[1]

DE

MIHAI ȘABAC

Cu ajutorul relației de m-echivalență introduse se dă o caracterizare a topologiilor local convexe asupra unui spațiu vectorial E, în care aplicațiile liniare și mărginite sînt continue.

Fie E un spațiu vectorial. În cele ce urmează vom scrie „τ topologie asupra lui E" înțelegînd că este vorba de topologii separate compatibile cu structura de spațiu vectorial a lui E. Dacă τ_ι este o topologie asupra lui E, vom însemna cu $\mathcal{M}_\iota$ familia submulțimilor lui E mărginite în τ_ι; dacă τ este o topologie asupra lui E, $\mathcal{M}$ va fi familia submulțimilor lui E mărginite în τ.

Fie F un spațiu vectorial topologic. Vom însemna prin $M_\iota(E, F)$ respectiv $M(E,F)$ mulțimea aplicațiilor liniare definite pe E cu valori în F și mărginite cînd asupra lui E considerăm topologia τ_ι respectiv topologia τ. Vom însemna prin $L_\iota(E, F)$ respectiv $L(E, F)$ familia aplicațiilor liniare definite pe E cu valori în F și continue cînd asupra lui E considerăm topologia τ_ι respectiv topologia τ.

Relația de ordine în mulțimea topologiilor o însemnăm cu $<$.

I. TOPOLOGII M-ECHIVALENTE

Fie τ_1 și τ_2 două topologii asupra lui E.

DEFINIȚIE. *Spunem că* τ_1 *și* τ_2 *sînt m-echivalente și scriem* $\tau_1 \overset{m}{\sim} \tau_2$ *dacă* $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$.

---

[1] Versiunea în l. franceză va apărea în Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, **10**, *9* (1965).

ST. CERC. MAT. TOM. 17, NR. 8, P. 1277–1279, BUCUREȘTI, 1965

Evident, relaţia introdusă este o relaţie de echivalenţă.

Exemple 1. Fie (E, G) un cuplu de spaţii vectoriale în dualitate. Toate topologiile local convexe asupra lui E compatibile cu dualitatea (E, G) sînt m-echivalente.

2. Topologiile egale sînt m-echivalente

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* τ_1 *şi* τ_2 *sînt topologii local convexe metrizabile asupra lui* E *şi dacă* $\tau_1 \overset{m}{\sim} \tau_2$ *atunci* $\tau_1 = \tau_2$.

Demonstraţie. Demonstraţia rezultă din faptul următor : dacă τ este o topologie local convexă metrizabilă asupra lui E şi $A \subset E$ are proprietatea de a absorbi orice mulţime $M \in \mathcal{M}$, atunci A este vecinătate a originii în topologia τ.

PROPOZIŢIA 2. *Fie* τ_1 *şi* τ_2 *topologii asupra lui* E *iar* F *un spatiu vectorial topologic. Dacă* $\tau_1 \overset{m}{\sim} \tau_2$, *atunci* $M_1(E, F) = M_2(E, F)$.

Demonstraţie. $f \in M_1(E, F) \rightleftarrows f(M)$ este mărginită în F pentru orice $M \in \mathcal{M}_1$.

Dar $M \in \mathcal{M}_1 \rightleftarrows M \in \mathcal{M}_2$.

Deci $f \in M_1(E, F) \rightleftarrows f \in M_2(E, F)$ şi propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 3. *Fie* τ_1 *şi* τ_2 *topologii asupra lui* $E, \tau_1 < \tau_2$, $\tau_1 \overset{m}{\sim} \tau_2$. *Fie* τ *cu proprietatea* $\tau_1 < \tau < \tau_2$. *Atunci* $\tau \overset{m}{\sim} \tau_1$.

Demonstraţie. Evident putem scrie $\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M} \supset \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1$, ceea ce demonstrează propoziţia.

PROPOZIŢIA 4. *Fie* τ_1 *şi* τ_2 *două topologii asupra lui* E. *Dacă* $\tau_2 < \tau_1$, $\tau_1 \overset{m}{\sim} \tau_2$ *şi* $M_2(E, F) = L_2(E, F)$, *atunci* $M_1(E, F) = L_1(E, F)$.

Demonstraţie. Ţinînd seama de incluziunea $L_1(E, F) \subset M_1(E, F)$, de condiţiile din ipoteză şi de propoziţia 2 putem scrie :

$$L_1(E, F) \subset M_1(E, F) = M_2(E, F) = L_2(E, F) \subset L_1(E, F),$$

ceea ce demonstrează propoziţia.

PROPOZIŢIA 5. *Fie* τ_1 *şi* τ_2 *două topologii asupra lui* E, $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1 \overset{m}{\sim} \tau_2$ *şi* $L_1(E, F) = M_1(E, F)$. *Atunci pentru orice topologie* τ *asupra lui* E, $\tau_1 < \tau < \tau_2$, *avem* $L(E, F) = M(E, F)$.

Demonstraţie. Rezultă din propoziţia 3 şi propoziţia 4.

CONSECINŢĂ. *Fie* (E, G) *un cuplu de spaţii vectoriale în dualitate. Dacă* $\sigma(E, G)$ *este metrizabilă sau limită inductivă de topologii metrizabile, atunci orice topologie* τ *local convexă separată asupra lui* E *compatibilă cu dualitatea are proprietatea* $L(E, F) = M(E, F)$.

Demonstraţia rezultă din teorema Mackay [1] şi propoziţia 5.

II. TOPOLOGII LOCAL CONVEXE ASUPRA LUI E ÎN CARE APLICAŢIILE LINIARE ŞI MĂRGINITE SÎNT CONTINUE

Vom considera în cele ce urmează numai topologii local convexe asupra lui E şi vom da o caracterizare a acestor topologii τ care au proprietatea :

$$L(E, F) = M(E, F), \tag{1}$$

F fiind aici şi în tot ceea ce urmează un spaţiu vectorial topologic local convex separat. Următoarea lemă se poate demonstra fără greutate.

LEMĂ. *Fie* τ *o topologie asupra lui* E. *Topologia* τ *are proprietatea* (*1*) *dacă şi numai dacă* $\tau' < \tau$, *unde* τ' *este topologia proiectivă definită de* $M(E, F)$.

Caracterizarea topologiilor τ care au proprietatea (1) este dată de următoarea teoremă.

TEOREMĂ. *Fie* τ_0 *o topologie local convexă separată asupra lui* E. *Fie* $\mathcal{T}$ *clasa sa de m-echivalenţă, considerată în mulţimea topologiilor local convexe separate asupra lui* E. *Există în* $\mathcal{T}$ *două topologii* τ_i *şi* τ_m *cu proprietatea* (1); *orice topologie* τ *din* $\mathcal{T}$ *care are proprietatea* (1) *verifică inegalităţile* :

$$\tau_i < \tau < \tau_m \tag{2}$$

şi orice topologie local convexă asupra lui E *care verifică* (2) *se află în* $\mathcal{T}$ *şi posedă proprietatea* (1).

Demonstraţie. Fie τ_m topologia margine superioară a familiei $\mathcal{T}$. Evident, τ_m este o topologie local convexă separată asupra lui E şi $\tau_m \in \mathcal{T}$.

Fie τ_i topologia proiectivă definită de $M_m(E, F)$. Evident, τ_i este o topologie local convexă asupra lui E. τ_i este separată în virtutea lui [1] (cap. I, §1, 9, propoziţia 15, corolarul 2) deoarece aplicaţiile liniare următoare ale lui E în F definite de egalitatea :

$$f(x) = < x', x > y, \quad y \in F, \; y \neq 0, \quad x' \in E' \; {}^{1)}$$

sînt mărginite în τ_m iar familia de funcţionale E' este totală. $\tau_i \in \mathcal{T}$ deoarece $\mathcal{M}_m \subset \mathcal{M}_i$ în virtutea propoziţiei 1[3], iar $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_m$ deoarece $L_m(E, F) \subset M_m(E, F)$ şi topologia proiectivă definită de $L_m(E, F)$ este m-echivalentă cu τ_m după cum se poate deduce din [2], cap. III.1. Deci $\tau_i < \tau_m$ şi conform lemei rezultă că τ_m verifică (1). τ_i are proprietatea (1) în virtutea propoziţiei 2 şi a incluziunii $M_m(E, F) \subset L_i(E, F)$.

Fie acum $\tau \in \mathcal{T}$, avînd proprietatea (1). Conform lemei, $\tau' < \tau$. Deoarece τ are proprietatea (1), rezultă $\tau' \overset{m}{\simeq} \tau$ deci $\tau' \overset{m}{\simeq} \tau_m$ şi deci $\tau' = \tau_i$. Prin urmare τ verifică (2).

Ultima afirmaţie a teoremei rezultă în virtutea propoziţiei 5.

Observăm că pentru orice $\tau \in \mathcal{T}$ care posedă proprietatea (1) avem şi

$$L_i(E, F) = L(E, F) = L_m(E, F).$$

Primită la redacţie la 10 februarie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques.* Hermann, Paris, tome I, 1953, tome II, 1955.
2. A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques.* São Paulo, 1954.
3. M. ŞABAC, *$\mathfrak{S}$—topologii compatibile cu structura de spaţiu vectorial.* St. cerc. mat., **15**, *5* (1964).

---

[1] E' dualul topologic al lui E cînd înzestrăm pe E cu topologia τ_m .

ASUPRA PROBLEMEI BILOCALE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE

DE

DUMITRU RIPIANU
(Cluj)

Se studiază ecuaţia diferenţială

$$(1)\qquad y^{n} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = 0$$

pentru care se determină un interval deschis de lungime maximă $(0, \lambda)$, în care derivata de ordinul p a soluţiei ecuaţiei (1), $y = \varphi_{a,L}(x)$, care satisface la condiţiile $\varphi_{a,L}^{(i)}(0) = l_i$, unde $i = 0,1,\ldots, n-1$, iar L este vectorul de componente $(l_0, l_1,\ldots l_{n-1})$ să fie diferită de zero pentru toate funcţiile-vector $a(x)$ de componente $(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ dintr-o anumită clasă $\mathcal{A}$. Metoda întrebuinţată este principiul maximului al lui Pontriaghin.

1. Această notă tratează următoarea problemă:
Se consideră ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n

$$(1)\qquad y^{n}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,y^{(n-i)}(x) = 0$$

în ipoteza următoare:

(2) Coeficienţii $a_i(x)$ sînt funcţii continue şi cu derivate de ordinul 1 mărginite în valoare absolută de un număr fix în intervalul $[0,\infty)$ şi atunci cînd x descrie acest interval, punctul M de coordonate $\beta_i = a_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ descrie un anumit domeniu mărginit şi închis D din spaţiul euclidian cu n dimensiuni raportat la axele $O\,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$.

Se va presupune că frontiera S a domeniului D are în fiecare punct al ei un plan tangent unic, adică $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \beta_i}\right)^2 > 0$ în orice punct de pe S,

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 8, P. 1281–1295, BUCUREŞTI, 1965

unde $F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$[1] este ecuația frontierei. Domeniul D fiind închis, își cuprinde frontiera.

Se va însemna pentru comoditate cu $a(x)$ funcția-vector de componente $a_1(x)$, $a_2(x)$,..., $a_n(x)$, cu E_a ecuația (1) și cu $R[f(x)]$ sau $R\,[f]$ cea mai mică rădăcină pozitivă a funcției $f(x)$, presupusă definită și continuă în intervalul $[0,\infty)$; dacă $f(x) \neq 0$ pentru orice $x > 0$, se va scrie prin convenție $R[f] = \infty$.

Se va spune că funcția-vector $a(x)$ are proprietatea (2) dacă funcțiile $a_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ au această proprietate, și se va însemna cu $\mathcal{A}$ mulțimea funcțiilor $a(x)$ care au această proprietate.

(3) Se va însemna cu L o grupă de n numere date l_i $(i = \overline{0, n-1})$ și cu $\varphi_{a.L}(x)$integrala ecuației E_a pentru care

$$\varphi^{(i)}_{a.L}(0) = l_i \, (i = \overline{0,\ n-1}).$$

Se va fixa un număr p din șirul $0, 1, \ldots, n-2$ și se va însemna cu $(0,\ \lambda_{p.D.L})$ intervalul de lungime maximă în care $\varphi^{(p)}_{a.L}(x) \neq 0$, oricare ar fi funcția-vector $a(x)$ din mulțimea $\mathcal{A}$.

Problema constă în determinarea numărului $\lambda_{p.D.L} > 0$ (care se va însemna pentru comoditate cîte o dată cu λ sau λ_p).

În paragraful 2 al acestei note se stabilește un sistem de ecuații diferențiale (în general neliniare) și n condiții inițiale pe care le verifică funcția-vector minimizantă (teorema 1). Se înțelege prin acest termen o funcție-vector $\alpha^{\textcircled{p}}(x) \in \mathcal{A}$ care verifică condițiile (2) și pentru care $R[\varphi^{(p)}_{\alpha^{\textcircled{p}}.L}(x)] = \lambda_{p.D.L}$. Această funcție există. Dacă se cunoaște integrala — respectiv integralele — sistemului amintit, care satisface — respectiv satisfac — condițiile inițiale amintite, atunci avem imediat funcția $\varphi_{\alpha^{\textcircled{p}}.L}(x)$, respectiv această funcție se află printre anumite expresii, obținute imediat cu ajutorul acelor integrale. Nu putem preciza care dintre aceste expresii este funcția $\varphi_{\alpha^{\textcircled{p}}.L}(x)$, însă dacă numărul integralelor amintite este finit și aceste integrale se cunosc, putem avea o delimitare inferioară a numărului λ (observațiile 1—4). În paragraful 3 se dă un exemplu simplu de determinare a numărului într-un caz particular (teorema 2). În ultimul paragraf al notei se stabilește o anumită proprietate de care se bucură funcția $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$.

Ne vom servi, în tratarea problemei, de un rezultat stabilit de Lasota și Opial [1], care au determinat, între altele, funcția $\varphi_{\alpha^{\textcircled{p}}.L}(x)$ în cazul cînd în (3) $L=(0, 0, \ldots, 0,1)$, $p=0$ și domeniul D este definit de relațiile $|\beta_i| \leqslant A_i$ $(i = \overline{1, n})$, unde A_i sînt numere date, iar coeficienții ecuației (1) nu sînt neapărat funcții continue, ci funcții măsurabile și mărginite. Rezultatul citat se obține cu ajutorul principiului maximului al lui Pontriaghin ([2], teorema 3, pag. 59).

---

[1] și că $F_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ sînt funcții continue în raport cu ansamblul variabilelor $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ pe S $(i = \overline{1, n})$.

2. Se va însemna prin $H(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)|_{\beta_s=\alpha_s(x)}$ expresia obținută înlocuind în funcția $H(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ variabilele β_s prin funcțiile $\alpha_s(x)$ $(s=\overline{1, n})$ și se va prezenta.

TEOREMA 1. *Fie* $F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)=0$ *ecuația frontierei* S *a domeniului* D. *Funcția-vector minimizantă* $\alpha^{\textcircled{p}}(x) = (\alpha_1^{\textcircled{p}}(x), \alpha_2^{\textcircled{p}}(x), \ldots, \alpha_n^{\textcircled{p}}(x))$ *verifică pentru orice* $x \in [0, \lambda]$ *următorul sistem de ecuații diferențiale, care nu depind de numărul* p :

$$(4)\left\{\begin{aligned}
&F(\alpha_1^{\textcircled{p}}(x), \alpha_2^{\textcircled{p}}(x), \ldots, \alpha_n^{\textcircled{p}}(x)) = 0 \qquad \text{(a)}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}\right) +\\
&\qquad + \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\, F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)} +\\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\textcircled{p}}(x)\, \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha^{\textcircled{p}}(x)} = 0 \qquad \text{(b)}\\
&\frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}\right] +\\
&+ \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\, F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)} \quad (i=\overline{2, n-1}) \quad \text{(c)}
\end{aligned}\right.$$

și condițiile inițiale

$$(5) \quad \frac{l_{n-1}}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\,\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(0)}} = \frac{l_{n-2}}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\,\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(0)}} =$$

$$= \ldots = \frac{l_{n-i}}{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)\,\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(0)}} = \ldots = \frac{l_0}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\,\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(0)}}$$

Demonstrație. Se va scrie pentru comoditate $\alpha(x)$ în loc de $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$. Lasota și Opial au demonstrat în [1] că în cazul $p=0$, $L_1(0, 0, \ldots, 0,1)$ în (3) și dacă $a_i(x)$ sînt funcții măsurabile și mărginite în intervalul $[0,\infty)$ iar D este dat de $|\beta_i| \leqslant A_i$ $(i=\overline{1, n})$, există o funcție-vector $\alpha^{\textcircled{0}}(x)$ pentru care $R[\varphi_{\alpha^{\textcircled{0}}, L}(x)] = \lambda_{0, D, L}$. Demonstrația este imediată în cazul coeficienților $a_i(x)$ $(i=\overline{1, n})$, cu proprietatea (2), ai unei valori oarecare din șirul $\overline{0, n-2}$ al lui p din (3), al unui domeniu D finit oarecare și al unei grupe oarecare de numere L din (3); demonstrația nu va mai fi deci prezentată. Așadar există o funcție $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$ din clasa $C[0,\infty)$ pentru care $R[\varphi^{(p)}_{\alpha^{\textcircled{p}}, L}(x)] = \lambda_{p, D, L}$. Se vede imediat că punctul de coordonate $\alpha_i^{\textcircled{p}}(x)$, $\alpha_2^{\textcircled{p}}(x), \ldots, \alpha_n^{\textcircled{p}}(x)$ este în D sau pe (S) pentru orice $x \geqslant 0$.

Se va însemna

$$z_i = z_i(x) = \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)\ (i = \overline{1, n}). \tag{6}$$

Se va înțelege prin notația $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|_\lambda$ expresia obținută prin înlocuirea variabilelor z_i din funcția $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ cu $z_i(\lambda)$ $(i = \overline{1, n})$ din (6). Se va mai însemna cu $F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ $(i = \overline{1, n - r_1})$ ecuațiile varietății r_1-dimensionale situată în spațiul cu n dimensiuni raportat la axele $Oz_1 z_2 \ldots z_n$ pe care este transportat punctul de coordonate $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ([2], teorema 3, pag. 59).

În aceste condiții, Lasota și Opial au arătat în [1] că există n funcții $\varphi_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, neidentic nule toate și continue în intervalul $[0, \infty)$, care se bucură de următoarele proprietăți :

(7)

1. Funcția liniară de variabilele independente $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

$$L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = -\varphi_1(x) \sum_{i=1}^{n} z_i(x)\, \beta_i + \sum_{i=2}^{n} z_{i-1}(x)\, \varphi_i(x) \tag{a}$$

își atinge maximul în domeniul D pentru $\beta_i = \alpha_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$.

Această proprietate are loc pentru orice $x \in [0, \lambda]$ ca de altfel și celelalte trei proprietăți următoare :

2. $$\varphi_i'(x) = \varphi_1(x)\, \alpha_i(x) - \varphi_{i+1}(x)\ (i = \overline{1, n};\ \varphi_{n+1}(x) \equiv 0) \tag{b}$$

3. $$\frac{1}{\varphi_1(\lambda)} \left.\frac{\partial F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_1}\right|_\lambda = \frac{1}{\varphi_2(\lambda)} \left.\frac{\partial F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_2}\right|_\lambda = \\ = \ldots = \frac{1}{\varphi_n(\lambda)} \left.\frac{\partial F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_n}\right|_\lambda \ (i = \overline{1, n - r_1}) \tag{c}$$

4. Expresia $L(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ nu depinde de x cînd $x \in [0, \lambda]$ și are o valoare nenegativă.

Dacă $\varphi_1(x) \neq 0$, hiperplanul Δ_x de ecuație $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)(\beta_i - \alpha_i(x)) = 0$ din spațiul cu n dimensiuni raportat la axele $O\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ coincide cu planul tangent în punctul de coordonate $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ la hipersuprafața S de ecuație $F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$ — frontiera domeniului D, pentru că în caz contrar hiperplanul pătrunde neapărat în interiorul domeniului D în care determină o regiune unde

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)\, \beta_i < \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)\, \alpha_i(x) \text{ și alta unde } \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)\beta_i > \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)\, \alpha_i(x)$$

ceea ce înseamnă că funcția $L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ din (7) (a) nu-și atinge maximul în D pentru $\beta_i = \alpha_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, și contrazice proprietatea 1 din (7). Dat fiind că funcția liniară din (7) (a) își atinge maximul în D pentru $\beta_i = \alpha_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, rezultă că punctul de coordonate $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ se află pe frontiera S, pentru orice $x \in [0, \lambda]$.

Hiperplanul Δ_x coincizînd cu planul tangent la S în punctul $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$, avem

$$(8) \quad \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \,|_{\beta_s=\alpha_s(x)}} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-2)}(x)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \,|_{\beta_s=\alpha_s(x)}} =$$

$$= \ldots = \frac{\varphi_{0, L}^{(n-i)}(x)}{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \,|_{\beta_s=\alpha_s(x)}} = \ldots = \frac{\varphi'_{\alpha, L}(x)}{F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \,|_{\beta_s=\alpha_s(x)}} =$$

$$= \frac{\varphi_{\alpha, L}(x)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \,|_{\beta_s=\alpha_s(x)}}$$

de unde, ţinînd seamă de identitatea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)}\right) = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n+1-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} - \frac{\varphi'_{\alpha, L}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} \; (i = \overline{2, n-1}),$$

rezultă

$$(9) \quad \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}\right] +$$

$$+ \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} \quad (i = \overline{2, n-1}),$$

adică relaţia (4) (c).

Însă $\varphi_{\alpha, L}(x)$ este o integrală a ecuaţiei E_α, adică

$$\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} = 0$$

ceea ce se scrie cu ajutorul lui (9) (cu $i = 1$) şi al lui (8):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}\right] +$$

$$+ \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = 0$$

adică relaţia (4) (b). Punctul $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ este pe S, deci $F(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)) = 0$ adică relaţia (4) (a).

Relaţiile (8) au fost stabilite în ipoteza că $\varphi_1(x) \neq 0$ însă ele au loc şi cînd $\varphi_1(x) = 0$, observînd că, după cum se va dovedi la punctul 4 (după relaţia (26)), $\varphi_1(x)$ are în intervalul $[0, \lambda]$ rădăcina $x = \lambda$ şi dacă mai are şi altele, acestea sînt în număr finit. Se va însemna $H_i(x) = \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)|_{\beta_s=\alpha_s(x)} - \varphi_{\alpha, L}(x) \; F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)|_{\beta_s=\alpha_s(x)}$ $(i=\overline{1, n-1})$. Funcţiile $H_i(x)$ sînt funcţii continue în intervalul $[0, \lambda]$ şi (8) spune că ele se anulează în tot acest interval, cu excepția eventuală a punctelor în care $\varphi_1(x) = 0$, pentru că dacă de exemplu $F'_{\beta_i}(\beta_1, \ldots, \beta_n)\,|_{\beta_s = \alpha_s(x)} = 0$, atunci $\varphi^{(n-i)}_{\alpha, L}(x) = 0$, ca urmare a faptului că normalele la planul tangent în $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ la (S) și la Δ_x au aceiași cosinuși directori. Aceste puncte fiind în număr finit, urmează că $H_i(x)$ se anulează și în aceste puncte, adică relațiile (8) au loc în tot intervalul $[0, \lambda]$. Cu aceasta, teorema este demonstrată.

Observații. 1. Din teorema 1 rezultă că sistemul (5) de n ecuații în n necunoscute $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

$$\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} = \frac{l_{n-i}}{l_0}\ (i = \overline{1, n-1})\,;\ F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0 \tag{10}$$

are printre soluțiile sale soluția $\beta_1 = \alpha_i^{\textcircled{p}}(0)$ $(i = \overline{1, n})$, iar sistemul (4) de n ecuații diferențiale în n funcții necunoscute $\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)$

$$\left\{\begin{aligned}
&F(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)) = 0 && \text{(a)}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}\right] + \\
&+ \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))\,F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'^{2}_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)\,\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x))} = 0 && \text{(b)}\\
&\frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}\right] + \\
&+ \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))\,F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'^{2}_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}\ (i = \\
&= \overline{2, n-1}) && \text{(c)}
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

are printre integralele sale integrala $\beta_i(x) = \alpha_i^{\textcircled{p}}(x)$ $(i = \overline{1, n})$[2].

2. Dacă se cunoaște funcția-vector minimizantă $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$, atunci (8) (cu $i = n - 1$) dă

$$\varphi_{\alpha^{\textcircled{p}}, L}(x) = \text{const. exp. } H(x) = \int_0^x \frac{F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s = \alpha_s(\sigma)} \mathrm{d}\sigma. \tag{12}$$

3. Dacă toate integralele sistemului (11) sînt cuprinse în formulele $\beta_i(x) = f_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ $(i = \overline{1, n})$, unde C_1 $(i = \overline{1, n})$ sînt constante

---

[2] Pentru orice $p \in (0, 1, \ldots, n-2)$.

arbitrare, atunci valorile $C_i = \Gamma_i\ (i = \overline{1, n})$ care dau integrala $\beta_i(x) = \alpha_i^{ⓟ}(x)$ $(i = \overline{1, n})$ se află printre soluţiile sistemului de n ecuaţii în n necunoscute $C_1, C_2, \ldots, C_n : f_i(0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = \beta_i\ (i = \overline{1, n})$, unde $\beta_i (i = \overline{1, n})$ este una din soluţiile sistemului (10).

4. Dacă există un număr finit l de integrale ale sistemului (11) care să satisfacă condiţiile (10), integrale care se vor însemna cu $\beta_i^{ⓚ}(x) = f_i^{ⓚ}(x)\ (i = \overline{1, n}\,;\ k = \overline{1, l})$, atunci $\lambda_{p, D, L} \geqslant \min\limits_{k=1,2,\ldots,l} R\{[\exp. H^{ⓚ}(x)]^{(p)}\}$.

3. Se va prezenta, cu titlu de exemplu, următoarea aplicaţie simplă a teoremei 1.

TEOREMA 2. *Se consideră ecuaţia* $y'' + a_1(x)\ y' + a_2(x)\, y = 0$, *unde* $a_1(x)$, $a_2(x)$ *sînt funcţii continue, cu derivate de ordinul 1 mărginite în valoare absolută de un număr fix în intervalul* $[0, \infty)$ *şi verifică în acest interval relaţia* $a_1^2(x) + a_2^2(x) \leqslant R^2$, *cu* $R > 0$ *dat. În aceste condiţii, şi oricare ar fi funcţiile* $a_1(x)$, $a_2(x)$ *care verifică condiţiile de mai sus, cea mai mică rădăcină pozitivă a integralei* $\varphi_{a, L}(x)$ *a ecuaţiei considerate care verifică condiţiile* $\varphi_{a, L}(0) = l_0$, $\varphi'_{a, L}(0) \equiv l_1$, *cu* l_0 *si* l_1 *date, este cel puţin egală cu numărul* λ *definit în felul următor :*

$$\textit{Dacă}\ q = -\frac{l_1}{l_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2} \leqslant A = \frac{1}{2}\left(R + \sqrt{4 + R^2} + \sqrt{2R\left(R + \sqrt{4 + R^2}\right)}\right),$$

atunci

$$\lambda = \bar{\lambda} = \overline{\Lambda}(q, R) = \sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}}\lg \frac{A\ (A + q)}{1 + Aq} +$$

$$+ \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{q - \frac{1}{2}\left(-R + \sqrt{4 + R^2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2}\left(-R + \sqrt{4 + R^2}\right)}}\right)^{3)}.$$

Dacă $q > A$, *atunci sau* $\lambda = \bar{\lambda}$ *sau*

$$\lambda = \bar{\bar{\lambda}} = \bar{\bar{\Lambda}}(q, R) = \sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}}\lg \frac{Aq - 1}{A(q - A)} +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2R\left(R + \sqrt{4 + R^2}\right)}}{2 + q\left(R + \sqrt{4 + R^2}\right)}.$$

Demonstraţie. În cazul nostru, în teorema 1, $n = 2$, deci $p = 0$ şi domeniul D este mărginit de cercul de ecuaţie $F(\beta_1, \beta_2) = \beta_1^2 + \beta_2^2 - R^2 = 0$.

---

[3] Pentru arctg se ia determinarea principală, cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$.

Se va lua deci, conform lui (4) (a), $\alpha_1(x) = R\cos\Delta(x)$, $\alpha_2(x) = R\sin\Delta(x)$, iar relația (4)(b) se scrie

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \cos^2\delta + R\sin\delta \quad (\delta = \Delta(x)) \tag{13}$$

pe cînd relația (12) dă $H(x) = \mathcal{H}(\delta) = \int_0^x \frac{\cos\Delta(\sigma)}{\sin\Delta(\sigma)}\mathrm{d}\sigma$ (dat fiind că (13) dă $x = X(\delta)$). Se deduce de aici și din (13) $H'(x) = \frac{\cos\Delta(x)}{\sin\Delta(x)} = \mathcal{H}'(\delta)\cdot(\cos^2\delta + R\sin\delta)|_{\delta=\Delta(x)}$, adică

$$\begin{aligned} H(x) = \mathcal{H}(\delta) = \int\frac{\operatorname{cotg}\delta}{R\sin\delta + \cos^2\delta}\mathrm{d}\delta = \text{const.} + \lg\Big[\sin\delta\Big(-\sin\delta +\\ + \frac{-R+\sqrt{4+R^2}}{2}\Big)^{-\frac{R+\sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}}\Big(-\sin\delta + \frac{R+\sqrt{4+R^2}}{2}\Big)^{-\frac{-R+\sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \end{aligned} \tag{14}$$

în care caz (12) spune că

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,L}(x) = \text{const.} \sin\delta\Big(-\sin\delta + \frac{-R+\sqrt{4+R^2}}{2}\Big)^{-\frac{R+\sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \cdot\\ \cdot\Big(-\sin\delta + \frac{R+\sqrt{4+R^2}}{2}\Big)^{-\frac{-R+\sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \end{aligned} \tag{15}$$

nu se anulează decît cînd $\delta = k\pi$ (k întreg). De altfel, această afirmație rezultă și din (8), care se scrie

$$\frac{\varphi'_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{\cos\Delta(x)}{\sin\Delta(x)} \tag{16}$$

însă am crezut că prezintă interes forma funcției $\varphi_{\alpha,L}(x)$ din (15).

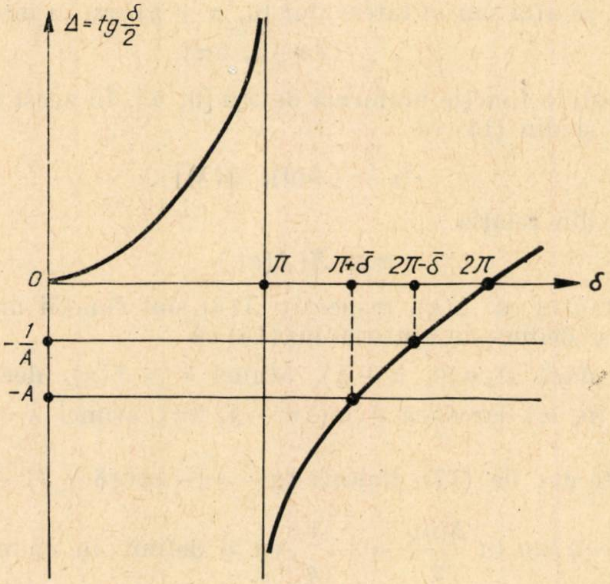
Or, (13) dă

$$\begin{aligned} x = X(\delta) = C + \sqrt{\frac{R+\sqrt{4+R^2}}{2R(4+R^2)}}\lg\left|\frac{\frac{1}{A} + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{A + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}\right| +\\ + 2\sqrt{\frac{-R+\sqrt{4+R^2}}{2R(4+R^2)}}\operatorname{arcotg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\left(-R+\sqrt{4+R^2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2}(-R+\sqrt{4+R^2})}} \end{aligned} \tag{17}$$

cu A definit în enunțul teoremei. Întrucît, cum se va vedea în (22), intervalul de variaţie al lui δ nu cuprinde pe π ca punct interior, luînd pentru arctg din (17) determinarea principală, $X(\delta)$ este continuă în punctul $\delta=\pi$.

În figură $\bar{\delta}$ este definit de relaţia

$$\sin\bar{\delta}=\frac{1}{2}(-R+\sqrt{4+R^2}),\ 0<\bar{\delta}<\frac{\pi}{2}\cdot$$



Figură

$$(18)\begin{cases}\text{Se deduce deci pe figură că în (17) se va lua}\\ \lg\dfrac{\dfrac{1}{A}+\operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2}}{A+\operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2}}\ \text{pentru}\ \delta\in[0,\pi+\bar{\delta})\ (\text{sau}\ \delta\in(2\pi-\bar{\delta},2\pi])\ \text{şi}\ \lg\left(-\dfrac{\dfrac{1}{A}+\operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2}}{A+\operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2}}\right)\\ \text{pentru}\ \ \delta\in(\pi+\bar{\delta},\ 2\pi-\bar{\delta}).\end{cases}$$

Întrucît funcţiile $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ sînt, cum s-a mai amintit în § 2, continue, iar $\delta=\Delta(x)\in[0,\ 2\pi]$, rezultă că $\Delta(x)$ este o funcţie continuă în intervalul $[0,\ \lambda]$, aşa că şi funcţia inversă $X(\delta)$ este continuă în intervalul $\mathcal{J}_\delta$ parcurs de $\Delta(x)$ cînd x parcurge intervalul $[0,\ \lambda]$ şi deci finită. Or, $X(\delta)$ din (17) devine infinit pentru $\delta=\pi+\bar{\delta}$ sau $\delta=2\pi-\bar{\delta}$, aşa

Tabelul 1

δ	0		$\pi+\bar{\delta}$		$2\pi-\bar{\delta}$		2π
$X'(\delta$		$+$	∞	$-$	∞	$+$	
$X(\delta)$	$X(0)$	↗	$^{+}_{+}\infty$	↘	$^{-}_{-}\infty$	↗	$X(2\pi)$

că intervalul $\mathcal{J}_\delta$ nu cuprinde valorile $\pi+\bar{\delta}$ sau $2\pi-\bar{\delta}$. Acest interval cuprinde neapărat una din valorile 0, π sau 2π, deoarece în caz contrar (15) dă $\varphi_{\alpha,\,L}(x)\neq 0$ pentru orice $x>0$, deci conform convenţiei de la punctul 1, $\lambda_{0,\,D,\,L}=\infty$, rezultat contrazis, de exemplu, de ecuaţia $y''+Ry=0$, a cărei funcţie-vector $a(x)=(0,R)$ verifică evident condiţiile (2). Rezultă de aici că:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{J}_\delta \text{ se află sau în intervalul } [0,\ \pi+\bar{\delta}) \text{ sau în intervalul} \\ \qquad\qquad\qquad (2\pi-\bar{\delta},\ 2\pi]\end{array}\right. \tag{19}$$

Aşa că $\Delta(x)$ este o funcţie uniformă de $x\in[0,\ \lambda]$. În acest caz se deduce din tabelul 1 şi din (13) că

$$\mathcal{J}_\delta=[\Delta(0),\ \Delta(\lambda)] \tag{20}$$

iar de aici şi din relaţia

$$x\equiv X(\Delta(x)) \tag{21}$$

(dedusă din faptul că $\Delta(x)$, respectiv $X(\delta)$ sînt funcţii uniforme de x, respectiv δ), se deduce cu ajutorul lui (15) că

$$\left\{\begin{array}{l}\qquad \text{dacă } \mathcal{J}_\delta\in(0,\ \pi+\bar{\delta}), \text{ atunci } \lambda=X(\pi), \text{ deci} \\ \mathcal{J}_\delta\in(0,\ \pi], \text{ iar dacă } \mathcal{J}_\delta\in(2\pi-\bar{\delta},\ 2\pi], \text{ atunci } \lambda=X(2\pi)\end{array}\right. \tag{22}$$

unde $X(\delta)$ este dat de (17). Relaţia $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=-\operatorname{cotg}\delta\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\delta}$ şi (16) dau $\operatorname{tg}\frac{\Delta(0)}{2}=q$ sau $\operatorname{tg}\frac{\Delta(0)}{2}=-\frac{1}{q}$, cu q definit în enunţul teoremei. Or, se deduce pe figură, că nu putem avea $\operatorname{tg}\frac{\Delta(0)}{2}\leqslant-\frac{1}{A}$, pentru că ar rezulta $\Delta(0)\in[\pi,\ 2\pi-\bar{\delta}]$, adică conform lui (20) şi (22) se contrazice relaţia (19). Aşadar dacă $q\leqslant A$, nu se poate lua decît $\operatorname{tg}\frac{\Delta(0)}{2}=q$, deci $\Delta(0)\in(0,\ \pi)$, $\mathcal{J}_\delta\subset(0,\ \pi]$, în care caz (22) şi relaţia $X(\delta)=F_1(\delta)-F_1(\Delta(0))$ (dedusă din (21) şi (17)) dau pentru λ valoarea λ din enunţul teoremei. Spre a obţine pe $X(\pi)$ se ţine seama că întrucît $\delta\in(0,\ \pi]$, avem $\lim\limits_{\delta\to\pi}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=+\infty$. Dacă $q>A$, atunci putem avea fie $\Delta(0)\in(0,\pi)$, deci aceeaşi valoare $\bar{\lambda}$ pentru λ, fie $\Delta(0)\in(2\pi-\bar{\delta},\ 2\pi)$, în care caz $\mathcal{J}_\delta\subset(2\pi-\bar{\delta},2\pi]$ şi (22) şi (23) dau $\lambda=\bar{\bar{\lambda}}$, cu $\bar{\bar{\lambda}}$ din enunţul teoremei, care este astfel demonstrată.

Observaţii. 1. Dacă $l_0=0$ (deci $l_1\neq 0$), atunci $q=0$ şi teorema dă

$$\lambda=\bar{\Lambda}(0,R)=2\sqrt{\frac{R+\sqrt{4+R^2}}{2R(4+R^2)}}\lg A+$$

$$+\sqrt{\frac{-R+\sqrt{4+R^2}}{2R(4+R^2)}}\left(\pi+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-R+\sqrt{4+R^2}}{2R}}\right).$$

2. Dacă $\frac{l_1}{l_0} \geqslant 0$, avem $0 \leqslant q \leqslant 1 < A$, deci iarăşi $\lambda = \overline{\Lambda}(q, R)$.

3. Se va prezenta în încheiere o proprietate a funcţiei minimizante $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$. Spre a evita scrierea unor relaţii destul de lungi în enunţul teoremei, prezentate mai jos, ne vom referi prin numerotaţie la aceste relaţii, prezentate în cursul demonstraţiei.

(24) Se va spune că o funcţie-vector $a(x) = a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ definită în intervalul $[0, \infty)$ are proprietatea $P_{\lambda, D}$ (unde $\lambda > 0$) într-un domeniu D din spaţiul cu n dimensiuni raportat la axele $O\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$, dacă funcţia liniară de variabile independente

$$L_{a,x}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = -\varphi_{a,1}(x) \sum_{i=1}^{n} \varphi_{a,L}^{(n-i)}(x)\, \beta_i$$

— în care $\varphi_{a,1}(x)$ şi $\varphi_{a,L}(x)$ sînt definite respectiv în (36) (unde se înlocuieşte funcţia-vector $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$ cu funcţia-vector $a(x)$) şi (3) — îşi atinge maximul în domeniul D pentru $\beta_i = a_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ şi aceasta pentru orice $x \in [0, \lambda]$.

Evident că această definiţie cere ca pentru orice $x \in [0, \lambda]$ punctul de coordonate $(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x))$ să se afle pe frontiera S a domeniului D.

TEOREMA 3. *Dacă rădăcina* $\lambda_{p, D, L}$ *a derivatei* $\varphi^{(p)}_{\alpha^{\textcircled{p}}, L}(x)$ *este o rădăcină simplă, atunci funcţia-vector minimizantă* $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$ *se bucură de proprietatea* $P_{\lambda_{p, D, L}}$, *cu* $\lambda_{p, D, L}$ *definit în* (3).

Demonstraţie. Primele două relaţii (7) (a) asigură existenţa lui $\varphi_1^{(2)}(x)$ şi $\varphi_2'(x)$; aceasta şi a treia relaţie (7) (a) asigură existenţa lui $\varphi_1^{(3)}(x)$ şi $\varphi_2^{(2)}(x)$. În general, primele h relaţii (7) (a) asigură existenţa lui $\varphi_1^{(h)}(x)$ şi $\varphi_2^{(h-1)}(x)$; deci, cele n relaţii (7) (a) asigură existenţa lui $\varphi_1^{(n)}(x)$ în intervalul $[0, \lambda]$. Avem[4])

$$\varphi_1^{(q)}(x) = (-1)^q \varphi_{q+1}(x) = \sum_{i=0}^{q-1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q-i} (-1)^s C_{q-s}^{i} \alpha_s^{(q-i-s)}(x), \quad (q = \overline{2, n}) \tag{25}$$

cu condiţia de a înlocui cazul $i = 0$, $s = q$, expresia C_0^0 cu 1. Această relaţie se dovedeşte imediat, dacă se presupune că are loc pentru $q = q_1$; în acest caz, se deduce din (7) (b) în care se face

$$j = q_1 + 1 : -\varphi_1^{(q+1)}(x) = \sum_{i=1}^{q_1-1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q_1-i} (-1)^s C_{q_1+1-s}^{i} \alpha_s^{(q_1+1-i-s)}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q_1-1} \varphi_1^{(i)}(x)(-1)^{q_1+1-i} \alpha_{q_1+1-i}(x) - \varphi_1^{(q_1)}(x)\alpha_1(x) + \varphi_1(x) \sum_{s=1}^{q_1} (-1)^s \alpha_s^{(q_1+1-s)}(x) +$$

$$+ (-1)^{q_1+1}(\varphi_1(x)\alpha_{q_1+1}(x) - \varphi_{q_1+2}(x)) = (-1)^{q_1+2} \varphi_{q_1+2}(x) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{q_1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q_1+1-i} (-1)^s C_{q_1+1-s}^{i} \alpha_s^{(q_1+1-i-s)}(x),$$

---

[4]) Se scrie şi aici, pentru comoditate, $\alpha(x)$ în loc de $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$.

adică relația (25) cu $q=q_1+1$. Or, dacă se derivează termenii relației (7) (b) în care se ia $i=1$, se obține relația (25) în care $q=2$, așa că această relație este dovedită. Dacă se face $q=n$, se deduce că $\varphi_1(x)$ verifică ecuația diferențială

$$(26)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_{\alpha, n, i}(x)\, y^{(i)}(x) + y^{(n)}(x) = 0, \\ b_{\alpha, q, i}(x) = \sum\limits_{s=1}^{q-i} (-1)^s C_{q-s}^{i} \alpha_s^{(q-i-s)}(x),\ 1 \leqslant q \leqslant n;\ 0 \leqslant i \leqslant q-1. \end{cases}$$

De aici rezultă, de altfel, că $\varphi_i(x)$ are în $[0, \lambda]$ cel mult un număr finit de zerouri, pentru că în caz contrar ar exista cel puțin un punct de îngrămădire al acestora. Dacă r este unul din aceste puncte, datorit teoremei lui Rolle, el este un punct de îngrămădire și pentru zerourile lui $\varphi_1^{(s)}(x)$ $(s=\overline{1, n-1})$. Cum $\varphi_1^{(s)}(x)$ sînt funcții continue și definite în punctul $x=r$, ar urma $\varphi_1^{(s)}(r) = 0$ $(s=\overline{0, n-1})$, adică $\varphi_1(x) \equiv 0$, în care caz (7) (b) dă $\varphi_s(x) \equiv 0$ $(s=\overline{1, n})$ în $[0, \lambda]$, împotriva faptului că $\varphi(x) \not\equiv 0$. Să stabilim condițiile „inițiale'' pe care le satisface integrala $\varphi_1(x)$ a ecuației (26). În cazul problemei noastre, relațiile $F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ $(i=\overline{1, n-n_s})$, amintite după relația (6) se reduc la relația $z_{n-p}(\lambda_{p, D, L}) = 0$, în care caz (7) (c) dă

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi_i(\lambda_p) = 0 \ (i=1, 2, \ldots, n-p-1, n-p+1, n-p+2, \ldots, n)\ (p \geqslant 1) \\ \varphi_i(\lambda_0) = 0 \ (i=\overline{1, n-1})\ (p=0). \end{cases}$$

Se va observa că întrucît $p \leqslant n-2$, în (27) relația $\varphi_1(\lambda_p) = 0$ figurează neapărat. Or, (25) se scrie

$$(28)\qquad \varphi_1^{(q)}(x) = (-1)^q \varphi_{q+1}(x) - \sum_{i=0}^{q-1} b_{\alpha, q, i}(x)\, \varphi_1^{(i)}(x)$$

cu $b_{\alpha, q, i}(x)$ date de (26), ceea ce împreună cu (27) dă

$$\varphi_1^{(i)}(\lambda_p) = 0 \ (i=\overline{0, n-2-p});\quad \varphi_1^{(n-p-1)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1} \varphi_{n-p}(\lambda_p)$$

$$\varphi_1^{(n-p)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p}\, b_{\alpha^{(p)}, n-p, n-p-1}(\lambda_p)\, \varphi_{n-p}(\lambda_p);$$

spre a scrie restul condițiilor inițiale, se va însemna

$$G_{\alpha, s, \sigma}(x) = \sum_{(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{s-1})_\sigma} b_{\alpha, n-p+\sigma, n-p+\rho_{s-1}}(x)\, b_{\alpha, n-p+\rho_{s-1}, n-p+\rho_{s-2}}(x) \ldots$$

$$\ldots b_{\alpha, n-p+\rho_2, n-p+\rho_1}(x)\, b_{\alpha, n-p+\rho_1, n-p-1}(x),$$

unde $b_{\alpha, q, i}$ sînt definite în (26), iar notația $\sum\limits_{(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{s-1})_\sigma}$ înseamnă o sumă definită în felul următor : se înțelege prin notația $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{s-1})_\sigma$ că grupa de indici $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{s-1})$ parcurge toate grupele distincte de numere de forma $(\delta_1\, \delta_2, \ldots\, \delta_{s-1})$, în care $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{s-1}$, sînt numere din şirul $0, 1, \ldots, \sigma - 1$ care au proprietăţile următoare :

1. $0 \leqslant \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_{s-1} \leqslant \sigma - 1$.

2. Se poate scrie şirul de grupe de cîte două numere

$$(\sigma, \delta_{s-1}), (\delta_{s-1}, \delta_{s-2}), \ldots, (\delta_2, \delta_1), (\delta_1, -1). \tag{32}$$

Cu ajutorul notaţiei (31), restul de condiţii iniţiale la care satisface integrala $\varphi_1(x)$ se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(n-p+\sigma)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1}\varphi_{n-p}(\lambda_p)\,[-b_{\alpha^{\textcircled{p}},\, n-p+\sigma,\, n-p-2}(\lambda_p) + \\ + \sum_{s=2}^{\sigma+1}(-1)^s G_{\alpha^{\textcircled{p}},\, s,\, \sigma}(\lambda_p)];\end{aligned} \tag{33}$$

în cazul $p=0$ condiţiile iniţiale se reduc bineînţeles la condiţiile (29), iar în cazul $p=1$ la condiţiile (29) şi (30). Relaţia (33) se dovedeşte imediat, dacă se presupune că are loc pentru $\sigma = \overline{1, \sigma_1}$. În acest caz, dacă se înseamnă pentru comoditate

$$a_{k,l} = b_{\alpha^{\textcircled{p}},\, n-p+k,\, n-p+l}(\lambda_p),$$

se deduce din (27), (28), (29) şi (30)

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_1^{(n-p+\sigma_1+1)}(\lambda_p)}{(-1)^{n-p-1}\varphi_{n-p}(\lambda_p)} = -\sum_{i=1}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,\, i}\,\varphi_1^{(n-p+i)}(\lambda_p) = \\ = -a_{\sigma_1+1,\,-1} + a_{\sigma_1+1,0}\, a_{0,\,-1} + \sum_{i=1}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,\, i}\left[a_{i,\,-1} - \sum_{s=2}^{i+1}(-1)^s G_{\alpha^{\textcircled{p}},\, s, i}(\lambda_p)\right].\end{aligned}$$

Ţinînd seama de aceasta, relaţia (33) în care $\sigma = \sigma_1 + 1$ se scrie

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,\, i}\, a_{i,\,-1} + \sum_{s=3}^{\sigma_1+2}\sum_{i=s-2}^{\sigma_1}(-1)^s a_{\sigma_1+1,\, i}\, G_{\alpha^{\textcircled{p}},\, s-1,\, i}(\lambda_p) = \\ = G_{\alpha^{\textcircled{p}},\, 2,\, \sigma_1+1}(\lambda_p) + \sum_{s=3}^{\sigma_1+2}(-1)^s G_{\alpha^{\textcircled{p}},\, s,\, \sigma_1+1}(\lambda_p).\end{aligned} \tag{34}$$

Or, (31) dă $G_{\alpha,\, 2,\, \sigma_1+1}(\lambda_p) = \sum\limits_{\rho_1=0}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,\, \rho_1}\, a_{\rho_1,\, -1}$. Ţinînd seamă de aceasta, relaţia (34) are loc dacă $G_{\alpha,\, s,\, \sigma_1+1}(\lambda_p) = \sum\limits_{i=s-2}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,\, i}\, G_{\alpha,\, s-1,\, i}(\lambda_p)\; (s = \overline{3, \sigma_1+2})$, adică, cu ajutorul lui (31),

$$S_1 = S_2$$

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{(\rho_1,\, \rho_2,\, \ldots,\, \rho_{s-1})_{\sigma_1+1}} a_{\sigma_1+1,\, \rho_{s-1}}\, a_{\rho_{s-1},\, \rho_{s-2}} \ldots a_{\rho_2,\, \rho_1}\, a_{\rho_1,\, -1};\\ S_2 &= \sum_{i=s-2}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,\, i} \sum_{(\rho_1,\, \rho_2,\, \ldots,\, \rho_{s-2})_i} a_{i,\, \rho_{s-2}}\, a_{\rho_{s-2},\, \rho_{s-3}} \ldots a_{\rho_2,\, \rho_1}\, a_{\rho_1,\, -1}.\end{aligned} \tag{35}$$

Dacă se alege deci în S_i un termen oarecare $a_{\sigma_1+1,\bar{\rho}_{s-1}}\, a_{\bar{\rho}_{s-1},\bar{\rho}_{s-2}} \dots a_{\bar{\rho}_2,\bar{\rho}_1}\, a_{\bar{\rho}_1,-1}$, acelaşi termen se obţine dacă se ia, în S_2, $i = \bar{\rho}_{s-1}$ şi $\rho_k = \bar{\rho}_k$ $(k=\overline{1, s-2})$. Or, din (32) se deduce că grupul $(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_{s-2})$ aparţine mulţimei

$$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-2})_{\bar{\rho}_{s-1}}.$$

Aşadar $S_1 \subset S_2$. Invers, dacă se alege în S un termen oarecare $a_{\sigma_1+1,\bar{i}}\, a_{\bar{i},\bar{\rho}_{s-2}}\, a_{\bar{\rho}_{s-2},\bar{\rho}_{s-3}} \dots a_{\bar{\rho}_2,\bar{\rho}_1}\, a_{\bar{\rho}_1,-1}$, acelaşi termen se obţine dacă se ia în S_1 $\rho_{s-1} = \bar{i}$, $\rho_k = \bar{\rho}_k$ $(k=\overline{1, s-2})$. Din (32) se deduce iarăşi că grupul $(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_{s-2}, i)$, aparţine mulţimii $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-1})_{\sigma_1+1}$, aşa că $S_2 \subset S_1$, de unde rezultă $S_1 = S_2$, adică relaţia (35) şi prin urmare relaţia (34). Aşadar, dacă relaţia (33) are loc pentru $\sigma = \overline{1, \sigma_1}$, atunci va avea loc şi pentru $\sigma = \sigma_1 + 1$. Or, se deduce din (28) cu $q = n - p - 1$, din (29), (30) şi (27) că $\varphi_1^{(n-p+1)}(\lambda_p)$ ia valoarea dată de (33) în care se face $\sigma = 1$. Cu aceasta, relaţia (33) este dovedită. Se va considera acum o altă integrală a ecuaţiei (26), care pe de o parte să verifice condiţii iniţiale independente de cantitatea necunoscută $\varphi_{n-p}(\lambda_p)$ care figurează în (29), (30) şi (33) iar pe de altă parte să verifice condiţiile (7) (a). În acest scop se va însemna cu $\varphi_{\alpha\textcircled{p},1}(x)$ integrala ecuaţiei (26) care satisface condiţiile iniţiale următoare:

$$\text{(a)}\quad \varphi^{(i)}_{\alpha\textcircled{p},1}(\lambda_p) = 0 \ (i = \overline{0, n-p-2});$$

$$(b)\quad \varphi^{(n-p-1)}_{\alpha\textcircled{p},1}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1}\, \varphi^{(p+1)}_{\alpha\textcircled{p},L}(\lambda_p);$$

$$(36)\quad (c)\quad \varphi^{(n-p)}_{\alpha\textcircled{p},1}(\lambda_p) = (-1)^{n-p}\, b_{\alpha\textcircled{p},\, n-p,\, n-p-1}(\lambda_p)\, \varphi^{(p+1)}_{\alpha\textcircled{p},L}(\lambda_p);$$

$$\text{(d)}\quad \varphi^{(n-p+\sigma)}_{\alpha\textcircled{p},1}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1}\varphi^{(p+1)}_{\alpha\textcircled{p},L}(\lambda_p)\Bigg[-b_{\alpha\textcircled{p},\, n-p+\sigma,\, n-p-1}(\lambda_p) + \sum_{s=2}^{\sigma+1} G_{\alpha\textcircled{p},\, s,\, \sigma}(\lambda_p)\Bigg] (\sigma = \overline{1, p-1};\ 1 \leqslant p \leqslant n-2),$$

unde $b_{\sigma,q,i}(x)$ este definit în (26), cu $\varphi_{\alpha\textcircled{p},L}$ definită în (3). În cazul $p=0$, respectiv $p=1$, condiţiile (36) se reduc, ca şi condiţiile (29), (30), (33), la condiţiile (a) şi (b), respectiv (a), (b), (c) din (36). Se deduce deci din (29), (30), (33), (36), ţinînd seamă că prin ipoteza teoremei $\varphi^{(p+1)}_{\alpha\textcircled{p},L}(\lambda_p) \neq 0$

$$(37)\qquad \varphi_{n-p}(\lambda_p)\, \varphi_{\alpha\textcircled{p},1}(x) = \varphi^{(p+1)}_{\alpha\textcircled{p},L}(\lambda_p)\, \varphi_1(x).$$

Dacă se face în (7) (d) $x = \lambda_p$, se obţine cu ajutorul lui (27) (în care relaţia $\varphi_1(\lambda_p) = 0$ figurează neapărat, aşa cum s-a observat după acea formulă) şi al lui (7) (a)

$$(38)\qquad \varphi_{n-p}(\lambda_p)\, \varphi^{(p+1)}_{\alpha\textcircled{p},L}(\lambda_p) \geqslant 0.$$

Se deduce deci din (7a), (37) şi (38) că funcţia liniară de variabilele

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n : L_{\alpha^{\textcircled{p}}, x} (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = - \varphi_{\alpha^{\textcircled{p}}} (x) \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(n-i)}_{\alpha^{\textcircled{p}}, L} (x) \beta_i ,$$

în care $\varphi_{\alpha^{\textcircled{p}}, 1} (x)$ şi $\varphi_{\alpha^{\textcircled{p}}, L} (x)$ sînt definite în (36), respectiv în (3), îşi atinge maximul în domeniul D pentru $\beta_i = \alpha_i^{\textcircled{p}} (x)$ $(i = \overline{1, n})$ şi aceasta pentru orice $x \in [0, \lambda_p]$, ceea ce demonstrează teorema.

Primită la redacţie la 5 martie 1965

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. A. Lasota şi Z. Opial, *L'application du principe de Pontriagin à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites*, Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences, Série des sciences math., astr. et phys., **XI**, *2*, 41—46 (1963).

2. Л. Понтрягин, В. Болтянский, Р. Гамкрелидзе и Е. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, 1961.

ASUPRA GENERALIZĂRII FORMULELOR LUI FRENET

DE

GH. N. RIZESCU şi N. N. TEODORESCU

Se construieşte un cîmp de repere de-a lungul unei curbe dintr-un spaţiu Riemann V_n, respectiv dintr-un spaţiu euclidian E_n, care dau formule asemănătoare formulelor lui Frenet din E_3. Astfel, variaţiile primilor $n-1$ vectori sînt proporţionale cu vectorul normal, iar variaţiile vectorului normal conţin toţi ceilalţi vectori. Coeficienţii care rezultă admit interpretare geometrică. În cazul unei curbe din E_n, interpretarea geometrică este identică cu cea din E_3.

În lucrarea [1], acad. G. Vrănceanu obţine următoarele formule pentru o curbă scufundată în spaţiul euclidian E_n :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 f^a}{\mathrm{d}s^2} &= \frac{1}{R_1}\, Y_2^a, \\
\frac{\mathrm{d}Y_2^a}{\mathrm{d}s} &= -\frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}f^a}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{R_2} Y_3^a, \\
\frac{\mathrm{d}Y_3^a}{\mathrm{d}s} &= -\frac{1}{R_2} Y_2^a + \frac{1}{R_3} Y_4^a, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\mathrm{d}Y_n^a}{\mathrm{d}s} &= -\frac{1}{R_{n-1}} Y_{n-1}^a,
\end{aligned}$$

unde $\frac{\mathrm{d}f^a}{\mathrm{d}s}$, $Y_2^a, \ldots, Y_n^a$ formează un sistem de vectori ortonormali, complet determinaţi de curba $x^a = f^a(s)$.

Observăm însă că $\frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3}, \ldots, \frac{1}{R_{n-1}}$ nu au caracterul de torsiuni.

În primul rînd, aceste cantităţi nu se anulează independent una de alta. Astfel, dacă $\frac{1}{R_p} = 0$, atunci şi $\frac{1}{R_{p+1}} = \frac{1}{R_{p+2}} = \ldots = \frac{1}{R_{n-1}} = 0$.

ST. CERC. MAT. TOM. 17, NR. 8, p. 1297–1303 BUCUREŞTI, 1965

Într-adevăr, să presupunem, de exemplu, $\frac{1}{R_2}=0$. Eliminînd Y_2^a între ecuațiile $\frac{d^2 f^a}{ds^2} = \frac{1}{R_1} Y_2^a$ și $\frac{dY_2^a}{ds} = -\frac{1}{R_1}\frac{df^a}{ds}$ rezultă că coordonatele unui punct de pe curbă verifică o ecuație liniară și omogenă de ordinul III. Deci curba este cel mult o curbă scufundată în E_3, deoarece o ecuație diferențială liniară de ordinul III admite 3 soluții independente. Însă aceste soluții sînt legate prin relația $ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$, deci în realitate avem numai două soluții independente, adică, dacă $\frac{1}{R_2} = 0$, curba este plană și deci $\frac{1}{R_3} = \ldots = \frac{1}{R_{n-1}} = 0$.

De asemenea, $\frac{1}{R_2}, \ldots, \frac{1}{R_{n-2}}$ nu admit interpretarea geometrică analoagă cu cea din E_3, anume de a fi definite ca limita raportului dintre unghiul a două poziții vecine a binormalelor și arcul curbei.

Vom găsi un reper ortonormal, complet determinat, îndată ce se dă poziția lui într-un punct P_0. Vom obține $n-1$ cantități, $\frac{1}{R}$ și $\frac{1}{T_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$, care pot fi interpretate drept curbura și torsiunile curbei.

★

Considerăm sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dX^\alpha}{ds} = A_\gamma^\alpha X^\gamma \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n),$$

unde matricea $A = ||A_\beta^\alpha||$ este strîmb simetrică.

Fie x_β^α un sistem fundamental de soluții al acestui sistem.

Avem

$$\frac{d}{ds}\,(x_\alpha^\gamma\, x_\beta^\gamma) = \frac{dx_\alpha^\gamma}{ds} x_\beta^\gamma + \frac{dx_\beta^\gamma}{ds} x_\alpha^\gamma = (A_\delta^\gamma + A_\gamma^\delta)\, x_\alpha^\gamma\, x_\beta^\delta = 0,$$

deci $x_\alpha^\gamma\, x_\beta^\gamma = \text{const.}$, pentru orice valoare a variabilei s. Mai mult, putem face astfel ca $x_\alpha^\gamma\, x_\beta^\gamma = \delta_{\alpha\beta}$.

★

Vom arăta acum că vectorii unui spațiu Riemann V_n formează un spațiu liniar (vectorial) de dimensiune n.

Într-adevăr, dacă u^i și v^i sînt vectori față de transformarea $\overline{x}^i = \overline{x}^i\,(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, atunci $\lambda u^i + \mu v^i$ (unde λ și μ sînt invarianți) este tot un vector.

De asemenea, orice sistem de vectori independenți $\{u_1^i, u_2^i, \ldots, u_n^i\}$ formează o bază, deoarece fiind dat un vector oarecare w^i, sistemul liniar $w^i = x^\alpha\, u_\alpha^i$ este compatibil.

Un exemplu de vectori independenți este dat de baza ortonormală $\{\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots, \mu_n^i\}$, unde μ_α^i sînt parametrii unei congruențe ortogonale.

★

Considerăm în V_n, de metrică $\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$, curba $x^i = x^i(s)$, unde s este arcul curbei.

Vectorul tangent la această curbă este coliniar cu vectorul unitar $\tau^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\cdot$

Considerăm vectorul $\nu^i = \dfrac{\frac{\mathrm{D}\tau^i}{\mathrm{d}s}}{\sqrt{a_{pq}\frac{\mathrm{D}\tau^p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{D}\tau^q}{\mathrm{d}s}}}$, unde $\frac{\mathrm{D}\tau^i}{\mathrm{d}s}$ este derivata covariantă a vectorului τ^i.

Evident ν^i este un vector unitar. De asemenea ν^i este perpendicular pe τ^i. Într-adevăr

$$a_{ij}\tau^i\nu^j = \frac{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}(a_{ij}\tau^i\tau^j)}{2\sqrt{a_{pq}\frac{\mathrm{D}\tau^p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{D}\tau^q}{\mathrm{d}s}}} = 0.$$

Notînd $\frac{1}{R} = \sqrt{a_{pq}\frac{\mathrm{D}\tau^p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{D}\tau^q}{\mathrm{d}s}}$ obținem ceea ce se mai numește și prima formulă a lui Frenet

$$\frac{\mathrm{D}\tau^i}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\nu^i\cdot$$

Considerăm vectorii b_α^i ($\alpha = 1, 2, \ldots, n-2$) în așa fel încît sistemul $\{\tau^i, \nu^i, b_1^i, \ldots, b_{n-2}^i\}$ să formeze o bază ortonormală.

Vectorii $\frac{\mathrm{D}b_\alpha^i}{\mathrm{d}s}$ se exprimă în funcție de vectorii bazei, deci avem

$$\frac{\mathrm{D}b_\alpha^i}{\mathrm{d}s} = A_\alpha\tau^i + B_\alpha\nu^i - a_\alpha^\gamma b_\gamma^i,$$

de unde

$$A_\alpha = a_{ij}\frac{\mathrm{D}b_\alpha^i}{\mathrm{d}s}\tau^j = -a_{ij}b_\alpha^i\frac{\mathrm{D}\tau^j}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{R}a_{ij}b_\alpha^i\nu^j = 0$$

și

$$a_\alpha^\gamma = -a_{ij}b_\gamma^j\frac{\mathrm{D}b_\alpha^i}{\mathrm{d}s} = a_{ij}b_\alpha^i\frac{\mathrm{D}b_\gamma^j}{\mathrm{d}s} = -a_\gamma^\alpha,$$

deci

$$\frac{\mathrm{D}b^i_\alpha}{\mathrm{d}s} = B_\alpha \nu^i - a^\gamma_\alpha b^i_\gamma, \tag{1}$$

unde matricea $A = \| a^\beta_\alpha \|$ este strîmb simetrică.

Fie C^α_β un sistem fundamental al sistemului de ecuații liniare

$$\frac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}s} = a^\alpha_\gamma X^\gamma. \tag{2}$$

Conform celor arătate anterior, putem face să avem

$$C^\gamma_\alpha C^\gamma_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \tag{2'}$$

Considerăm vectorii

$$\beta^i_\alpha = C^\gamma_\alpha b^i_\gamma. \tag{3}$$

Observăm că

$$\begin{aligned} a_{ij} \beta^i_\alpha \beta^j_\beta = a_{ij} b^i_\gamma b^i_\delta C^\gamma_\alpha C^\delta_\beta &= C^\gamma_\alpha C^\gamma_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \\ a_{ij} \beta^i_\alpha \tau^j = a_{ij} b^i_\gamma \tau^j C^\gamma_\alpha &= 0, \\ a_{ij} \beta^i_\alpha \nu^j = a_{ij} b^i_\gamma \nu^j C^\gamma_\alpha &= 0, \end{aligned}$$

deci sistemul $\{\tau^i, \nu^i, \beta^i_1, \beta^i_2, \ldots, \beta^i_{n-2}\}$ este tot ortonormal.

Derivînd formulele (3) și ținînd seama de (1) și (2), obținem

$$\frac{\mathrm{D}\beta^i_\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}C^\gamma_\alpha}{\mathrm{d}s} b^i_\gamma + C^\gamma_\alpha \frac{\mathrm{D}b^i_\gamma}{\mathrm{d}s} = a^\gamma_\delta C^\delta_\alpha b^i_\gamma + B_\gamma C^\gamma_\alpha \nu^i - a^\delta_\gamma C^\gamma_\alpha b^i_\delta = B_\gamma C^\gamma_\alpha \nu^i$$

și dacă notăm

$$B_\gamma C^\gamma_\alpha = \frac{1}{T_\alpha},$$

obținem

$$\frac{\mathrm{D}\beta^i_\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{T_\alpha} \nu^i. \tag{4}$$

Exprimînd vectorul $\frac{\mathrm{D}\nu^i}{\mathrm{d}s}$ în funcție de bază, obținem

$$\frac{\mathrm{D}\nu^i}{\mathrm{d}s} = A \tau^i + B \nu^i + C^\gamma \beta^i_\gamma,$$

de unde

$$A = a_{ij} \frac{\mathrm{D}\nu^i}{\mathrm{d}s} \tau^j = - a_{ij} \frac{\mathrm{D}\tau^j}{\mathrm{d}s} \nu^i = - \frac{1}{R} a_{ij} \nu^i \nu^j = - \frac{1}{R},$$

$$B = a_{ij} \nu^i \frac{\mathrm{D}\nu^j}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s} (a_{ij} \nu^i \nu^j) = 0,$$

$$C^\gamma = a_{ij} \beta^j_\gamma \frac{\mathrm{D}\nu^i}{\mathrm{d}s} = - a_{ij} \nu^i \frac{\mathrm{D}\beta^j_\gamma}{\mathrm{d}s} = - \frac{1}{T_\gamma} a_{ij} \nu^i \nu^j = - \frac{1}{T_\gamma}.$$

Am obţinut formulele

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{D}\tau^i}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\,\nu^i ,\\
(5)\qquad &\frac{\mathrm{D}\beta^i_\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{T_\alpha}\,\nu^i ,\\
&\frac{\mathrm{D}\nu^i}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{R}\,\tau^i - \frac{1}{T_\gamma}\,\beta^i_\gamma \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n-2).
\end{aligned}
$$

Vom numi: $\frac{1}{R}$ curbura şi $\frac{1}{T_\alpha}$ torsiunile curbei, ν^i normala principală şi β^i_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$ binormalele curbei.

Dacă se anulează p torsiuni $(p \leqslant n-2)$, formulele îşi păstrează forma şi curba se poate scufunda într-un V_{n-p}.

Se observă că τ^i şi ν^i sînt complet determinaţi de curba $x^i = x^i(s)$.

Căutăm acum şi alte soluţii ale sistemului (5).

O altă soluţie va fi de forma

$$\beta^{*i}_\alpha = C^\gamma_\alpha\, \beta^i_\gamma ,$$

unde

$$C^\gamma_\alpha\, C^\gamma_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Derivînd şi ţinînd seama de formulele lui Frenet, obţinem

$$\frac{1}{T^*_\alpha}\,\nu^i = \frac{\mathrm{d}C^\gamma_\alpha}{\mathrm{d}s}\,\beta^i_\gamma + C^\gamma_\alpha \frac{1}{T_\gamma}\,\nu^i ,$$

de unde

$$\frac{1}{T^*_\alpha} = C^\gamma_\alpha \frac{1}{T_\gamma} \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}C^\gamma_\alpha}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Prin urmare, o altă soluţie a sistemului (5) este dată de

$$\beta^{*i}_\alpha = C^\gamma_\alpha\, \beta^i_\gamma , \qquad \text{cu} \quad \frac{1}{T^*_\alpha} = C^\gamma_\alpha \frac{1}{T_\gamma} ,$$

unde C^α_β sînt constante satisfăcînd condiţiilor de ortogonalitate.

Constantele C^α_β pot fi determinate punînd condiţia ca în P_0, reperul să aibă o poziţie bine determinată.

Dacă se aleg congruenţe ortogonale astfel ca $\tau^i = \mu^i_1$; $\nu^i = \mu^i_2$; $\beta^i_a = \mu^i_a$, atunci avem

$$\mu^i_{a:k}\, \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{T_a}\,\mu^i_2$$

de unde

$$\frac{1}{T_a}\mu^i_{a:k}\,\mu^k_1\,\lambda^2_i = -\gamma^2_{a1} = \gamma^a_{21}.$$

Prin urmare $\frac{1}{R} = \gamma^1_{21}$; $\frac{1}{T_a} = \gamma^a_{21}$, unde γ^a_{21} sînt coeficienţii de rotaţie ai lui Ricci.

★

Cînd curba este scufundată într-un E_n, formulele devin

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{d\tau^i}{ds} &= \frac{1}{R}\,\nu^i, \\ \frac{d\beta^i_\alpha}{ds} &= \frac{1}{T_\alpha}\,\nu^i. \\ \frac{d\nu^i}{ds} &= -\frac{1}{R}\tau^i - \frac{1}{T_\gamma}\beta^i_\gamma. \end{aligned}$$

În acest caz, putem defini torsiunile curbei ca limita raportului dintre unghiul a două poziţii vecine ale binormalelor şi arcul curbei, adică vom arăta că avem

$$\frac{1}{T_\alpha} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\theta_\alpha}{\Delta s}.$$

Într-adevăr, considerînd $\beta^i_\alpha(s)$ şi $\beta^i_\alpha(s + \Delta s)$ două poziţii vecine ale binormalei β^i_α şi ţinînd seama de identitatea lui Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\,b_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i\,b_j - a_j\,b_i)^2,$$

avem

$$1 - \cos^2\theta_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\beta^i_\alpha(s)\,\beta^j_\alpha(s + \Delta s) - \beta^j_\alpha(s)\,\beta^i_\alpha(s + \Delta s)\right]^2$$

sau

$$\frac{\sin^2\theta_\alpha}{\Delta s^2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\beta^i_\alpha(s)\frac{\beta^j_\alpha(s + \Delta s) - \beta^j_\alpha(s)}{\Delta s} - \beta^j_\alpha(s)\frac{\beta^i_\alpha(s + \Delta s) - \beta^i_\alpha(s)}{\Delta s}\right]^2$$

De aici rezultă imediat

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\theta_\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\sin\theta_\alpha}{\Delta s} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\beta^i_\alpha\frac{d\beta^j_\alpha}{ds} - \beta^j_\alpha\frac{d\beta^i_\alpha}{ds}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{T_\alpha}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\beta^i_\alpha\,\nu^j - \beta^j_\alpha\,\nu^i)^2} = \frac{1}{T_\alpha}.$$

Într-un mod analog se poate defini curbura.

Vom căuta acum să obținem relații între curburile date în lucrarea [1] și curbura și torsiunile date de formulele (6).

Derivînd egalitatea $Y_2^i = \nu^i$, obținem

$$-\frac{1}{R}\tau^i + \frac{1}{R_2} Y_3^i = -\frac{1}{R}\tau^i - \frac{1}{T_\gamma}\beta_\gamma^i$$

sau

$$\frac{1}{R_2} Y_3^i = -\frac{1}{T_\gamma}\beta_\gamma^i , \tag{6'}$$

ceea ce ne dă $\frac{1}{R_2} = \sqrt{\sum_{\gamma=1}^{n-2}\frac{1}{T_\gamma^2}}$, de unde rezultă din nou că $\frac{1}{R_2} = 0$ atrage $\frac{1}{T_\alpha} = 0$, deci curba este plană.

Derivînd (6') obținem

$$\left(\frac{1}{R_2}\right)' Y_3^i - \frac{1}{R_2^2}\nu^i + \frac{1}{R_2 R_3} Y_4^i = -\sum_{\gamma=1}^{n-2}\frac{1}{T_\gamma^2}\nu^i - \left(\frac{1}{T_\gamma}\right)'\beta_\gamma^i,$$

de unde

$$\left(\frac{1}{R_2}\right)' Y_3^i + \frac{1}{R_2 R_3} Y_4^i = -\left(\frac{1}{T_\gamma}\right)'\beta_\gamma^i.$$

Înmulțind cu Y_4^i și sumînd obținem

$$\frac{1}{R_3} = \frac{-\left(\frac{1}{T_\gamma}\right)'\beta_\gamma^i Y_4^i}{\sqrt{\sum_{\gamma=1}^{n-2}\frac{1}{T_\gamma^2}}}$$

În acest mod se obțin toate curburile $\frac{1}{R_4}, \ldots, \frac{1}{R_{n-1}}$.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*. Vol. I, Edit. Acad. R.P.R., București, 1952.
2. Vaclav Hlavaty, *Les courbes de la variété générale à* n *dimensions*. Mémorial des Sciences Mathématiques, **LXIII** (1934).

CORECŢII DE COMPRESIBILITATE LA MIŞCAREA SUBSONICĂ ÎN JURUL UNUI OBSTACOL ELIPTIC

DE

MARINA PORICEL

În lucrarea de faţă se aplică metoda hodografică a aproximaţiilor succesive, elaborată de acad. Caius Iacob [4], la studiul mişcării subsonice, fără circulaţie, în jurul cilindrului eliptic.
Se studiază mai întîi obstacolul cvasieliptic, apoi cel riguros eliptic. În ambele cazuri se obţin distribuţia vitezelor pe obstacol, numerele Mach critice, precum şi rapoartele dintre viteza maximă pe obstacol şi viteza curentului la infinit.
Rezultatele obţinute în cele două cazuri sînt în concordanţă între ele, precum şi cu rezultatele obţinute anterior de alţi autori.

1. Studiul mişcării fluidelor compresibile în jurul corpurilor este una dintre problemele cele mai importante ale aerodinamicii. Pentru rezolvarea acestei probleme au fost date o serie de metode : exacte, pornind de la ecuaţia lui Molenbroeck şi Ciaplîghin, şi aproximative.

Metodele aproximative pot fi împărţite în două categorii : metode directe, care folosesc drept variabile coordonatele din planul fizic al mişcării gazului, şi metode hodografice, care folosesc variabilele hodografice şi anume modulul vitezei V şi unghiul θ al vitezei cu axa reală, sau alte variabile legate de acestea, trecerea la planul fizic făcîndu-se ulterior.

Toate aceste metode au fost aplicate la studiul mişcării subsonice a gazelor în jurul obstacolului circular, dînd rezultate bune şi în concordanţă unele cu altele.

Un alt caz interesant este mişcarea subsonică a gazelor în jurul unui cilindru eliptic. Acesta a fost studiat, cu metoda hodografică aproximativă a lui Ciaplîghin, de către acad. Caius Iacob [1], H. S. Tsien [2] şi I. Filimon [3].

În lucrarea de faţă vom relua acest caz, utilizînd metoda hodografică a aproximaţiilor succesive, elaborată de Caius Iacob [4].

ST. CERC. MAT., TOM 17, Nr. 8., P. 1305 –1320 BUCUREŞTI 1965

2. Vom reaminti mai întîi principalele rezultate ale acestei metode, care vor fi folosite în cele ce urmează.

Fie în planul z o mişcare a unui fluid compresibil în jurul unui obstacol închis C, cu viteza V_∞ la infinit. Vom considera mişcarea permanentă, irotaţională şi subsonică.

Asociem acestei mişcări o mişcare a unui fluid incompresibil în planul Z, în jurul profilului C_0, transformatul profilului C; aceasta este mişcarea de bază.

În [4] s-au stabilit formulele de transformare dintre aceste două plane, precum şi relaţiile dintre mărimile vitezelor în puncte omoloage şi dintre unghiurile vitezelor cu axa reală.

În cazul mişcării fără circulaţie, acestea sînt

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}Z + M_0^2\left[\frac{\mathrm{d}Z}{4} - \frac{1}{4V_\infty^2}\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\right)^2\mathrm{d}Z}\right] + M_0^4(\ldots), \tag{1}$$

$$z = Z\left(1 + \frac{M_0^2}{4}\right) - \frac{M_0^2}{4V_\infty^2}\int\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\right)^2\mathrm{d}Z} + M_0^4(\ldots), \tag{1'}$$

$$V = V^{(0)}\left[1 + \frac{M_0^2}{4}\left(\frac{V^{(0)^2}}{V_\infty^2} - 1\right) + M_0^4(\ldots)\right], \tag{2}$$

$$\theta = \theta_0 + M_0^4(\ldots), \tag{3}$$

unde $f = f(Z)$ este potenţialul complex al mişcării din planul Z, V şi θ sînt respectiv modulul vitezei şi unghiul vitezei cu axa Ox în planul z, $V^{(0)}$ şi θ_0 modulul vitezei, respectiv unghiul vitezei cu axa OX în planul Z, $M_0 = V_\infty/c_0$ numărul lui Ciaplîghin al fluidului compresibil, iar c_0 viteza sunetului în punctul de oprire.

Relaţiile dintre elementele de arc de pe două linii de curent, precum şi dintre curburile a două linii de curent sînt

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}S\left[1 - \frac{M_0^2}{4}\left(\frac{V^{(0)^2}}{V_\infty^2} - 1\right) + M_0^4(\ldots)\right], \tag{4}$$

$$K = K^{(0)}\left[1 + \frac{M_0^2}{4}\left(\frac{V^{(0)^2}}{V_\infty^2} - 1\right) + M_0^4(\ldots)\right], \tag{5}$$

unde $\mathrm{d}s$ şi K sînt respectiv elementul de arc şi curbura unei linii de curent din planul z, iar $\mathrm{d}S$ şi $K^{(0)}$ elementul de arc respectiv curbura unei linii de curent din planul Z.

În rezolvarea problemelor concrete, în cazul mişcării fără circulaţie, se poate merge pe două căi:

a) Se poate porni de la o mişcare lichidă de bază de potenţial complex $f = f(Z)$, care are loc în prezenţa unui obstacol $C^{(0)}$, şi se construieşte a posteriori mişcarea gazoasă, determinînd cîmpul vitezelor, precum şi obstacolul C corespunzător, cu ajutorul formulelor (2), (3) şi (1').

b) Dacă vrem ca obstacolul C să fie dat dinainte, trebuie mai întîi să determinăm mişcarea lichidă de bază şi eventual şi obstacolul $C^{(0)}$, ceea ce duce la probleme la limită neliniare complicate, exprimînd ca obstacolul calculat să coincidă cu cel dat.

Vom aplica aceste două procedee la mişcarea subsonică, fără circulaţie, în jurul obstacolului eliptic.

I. OBSTACOLUL CVASIELIPTIC

3. Fie în planul Z un obstacol eliptic, de semiaxe a şi b, în jurul căruia are loc mişcarea fluidului incompresibil cu viteza V_∞ la infinit, paralelă, cu axa OX.

În planul z, acestui obstacol îi va corespunde prin (1′) un obstacol deformat cvasieliptic, obţinut a posteriori, în jurul căruia se efectuează mişcarea gazului, tot cu viteza V_∞ la infinit, paralelă cu axa Ox.

Vom determina obstacolul din planul z cu ajutorul formulei de trecere (1′), iar distribuţia vitezelor pe obstacol cu ajutorul relaţiei (2).

Să construim potenţialul complex $f(Z)$ în planul Z. Pentru aceasta vom reprezenta conform domeniul $D^{(0)}$ exterior elipsei $C^{(0)}$ din planul Z (fig. 1) pe domeniul $|\zeta| > 1$ din planul ζ (fig. 2).

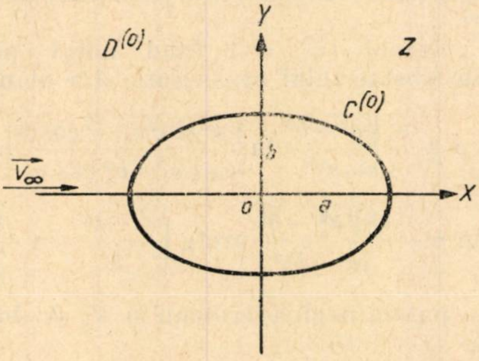


Fig. 1

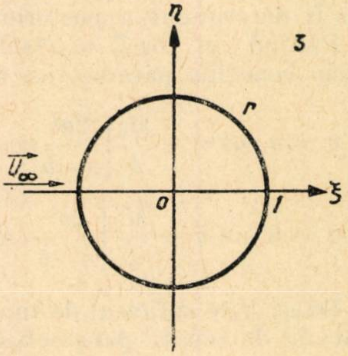


Fig. 2

Ecuaţia elipsei $C^{(0)}$ este

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (0 < b < a).$$

Formula de transformare va fi

$$Z = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{k^2}{\zeta}\right), \quad \text{cu } k^2 = \frac{a-b}{a+b}. \tag{6}$$

Potențialul complex al mișcării din planul ζ se exprimă prin

$$f(\zeta) = U_\infty\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad \text{cu} \quad U_\infty = \frac{a+b}{2} V_\infty .$$

Deci

$$f(\zeta) = \frac{a+b}{2} V_\infty\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \tag{7}$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z} = V_\infty \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - k^2}, \qquad \mathrm{d}Z = \frac{a+b}{2}\left(1 - \frac{k^2}{\zeta^2}\right)\mathrm{d}\zeta.$$

Aplicînd formula (1′) obținem, limitîndu-ne la termenii în M_0^2,

$$z = \frac{a+b}{2}\left\{\zeta + \frac{k^2}{\zeta} + \frac{M_0^2}{4}\left[\zeta - \bar{\zeta} + \frac{k^2}{\zeta} - \frac{1}{k^2\bar{\zeta}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(1-k^2)^2}{2k^3} \ln \frac{\bar{\zeta} - k}{\bar{\zeta} + k}\right]\right\}, \tag{8}$$

formulă care ne dă corespondența de la planul ζ, în care se efectuează o mișcare a unui fluid incompresibil în jurul cercului de rază 1, la planul z, în care se efectuează mișcarea unui fluid compresibil în jurul unui obstacol ce va fi determinat a posteriori.

Punînd în (8) $\zeta = \mathrm{e}^{i\sigma} \in \Gamma$, cercul $|\zeta| = 1$ fiind notat prin Γ, obținem ecuațiile parametrice ale obstacolului cvasieliptic din planul z:

$$\begin{aligned} x &= a \cos\sigma - \frac{M_0^2}{4}\left[\frac{2ab}{a-b}\cos\sigma + \frac{b^2\sqrt{a^2-b^2}}{(a-b)^2} \ln \frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma}}{a + \sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma}\right], \\ y &= b \sin\sigma - \frac{M_0^2}{4}\left[\frac{2b^2}{a-b}\sin\sigma - \frac{b^2\sqrt{a^2-b^2}}{(a-b)^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{a^2-b^2}{b}\sin\sigma\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Dacă M_0^2 e suficient de mic, putem neglija termenii în M_0^2 și obținem obstacolul de ecuații parametrice

$$\begin{aligned} x &= a \cos\sigma, \\ y &= b \sin\sigma, \end{aligned} \tag{9'}$$

care este riguros eliptic și de semiaxe a și b, ca și elipsa din planul Z.

Deci deformarea de la obstacolul eliptic se datorește termenului în M_0^2 și e mică, dacă M_0^2 e mic, deci dacă mișcarea e lentă.

4. Să determinăm acum distribuția vitezelor pe obstacolul cvasieliptic.

Vitezele în punctele omoloage ale planelor z și Z sînt legate prin relația (2). Să exprimăm pe $V^{(0)}$ în funcție de σ.

Avem

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z}\right|_{\Gamma} = u^{(0)} - \mathrm{i}v^{(0)} = V_{\infty}\frac{e^{2i\sigma} - 1}{e^{2i\sigma} - k^2},$$

$$u^{(0)} = V_{\infty}\frac{1 - (1 + k^2)\cos 2\sigma + k^2}{h(\sigma)},$$

$$v^{(0)} = V_{\infty}\frac{(k^2 - 1)\sin 2\sigma}{h(\sigma)},$$

unde am notat $h(\sigma) = 1 - 2k^2\cos 2\sigma + k^4$.

Rezultă distribuţia vitezelor pe elipsa din planul Z:

$$V^{(0)} = \frac{2\,V_{\infty}\,|\sin\sigma\,|}{h(\sigma)}.$$

Din (2) rezultă distribuţia vitezelor pe obstacolul cvasieliptic din planul z:

$$V = \frac{2V_{\infty}|\sin\sigma|}{h(\sigma)}\left[1 + \frac{M_0^2}{4}\left(\frac{4\sin^2\sigma}{h(\sigma)} - 1\right)\right]. \tag{10}$$

Vom determina acum viteza maximă pe obstacol, pe care o notăm cu $V_{\max}$; ea corespunde lui $\sigma = \frac{\pi}{2}$ sau $\sigma = \frac{3\pi}{2}\cdot$

Din (10) se obţine

$$V_{\max} = V_{\infty}(1 + \chi)\left[1 + \frac{M_0^2}{4}\chi(\chi + 2)\right], \tag{11}$$

$$\text{unde}\ \chi = \frac{b}{a},$$

$$\frac{V_{\max}}{V_{\infty}} = (1 + \chi)\left[1 + \frac{M_0^2}{4}\chi(\chi + 2)\right]. \tag{11'}$$

Pentru $\chi = 1$ (cazul cercului) obţinem

$$\frac{V_{\max}}{V_{\infty}} = 2\left(1 + \frac{3}{4}M_0^2\right), \tag{11''}$$

rezultat care coincide cu cel obţinut de Caius Iacob pentru cerc [4].

Cazul fluidului incompresibil se obţine pentru $M_0^2 = 0$. În acest caz

$$\frac{V_{\max}}{V_{\infty}} = 2.$$

5. Să determinăm numerele Mach critice şi valorile rapoartelor $V_{\max}/V_\infty$ corespunzătoare la diverse valori ale raportului χ $(0 < \chi \leqslant 1)$.

Fie c viteza sunetului. Pentru a avea număr Mach critic trebuie ca

$$V_{\max}^2 = c^2. \tag{12}$$

Dar

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} V^2.$$

Deci

$$V_{\max}^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} V^2,$$

de unde, notînd prin M_0^* numărul lui Ciaplîghin critic,

$$\frac{\gamma + 1}{2} M_0^{*2} \left(\frac{V_{\max}}{V_\infty}\right)^2 = 1. \tag{13}$$

Înlocuim $V_{\max}/V_\infty$ din (11′) şi obţinem M_0^*, apoi introducînd din nou în (11′) obţinem direct pe $V_{\max}/V_\infty$.

Avem apoi, introducînd numărul lui Mach al curentului la infinit, anume $M_\infty = V_\infty/c_\infty$,

$$M_\infty = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}},$$

de unde

$$M_\infty = M_0\left(1 + \frac{\gamma - 1}{4} M_0^2\right). \tag{14}$$

De aici aflăm valoarea lui M_∞^*, numărul Mach critic.

Luînd pentru χ valorile 0,1 ; 0,2 ;. . . ; 0,9 ; 1 obţinem tabelul următor.

χ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M_∞^*	0,8546	0,7580	0,6835	0,6250	0,5739	0,5331	0,4969	0,4662	0,4412	0,4151
M_0^*	0,8029	0,7206	0,6554	0,6031	0,5567	0,5191	0,4855	0,4567	0,4311	0,4083
$\frac{V_{\max}}{V_\infty}$	1,1372	1,2685	1,3963	1,5222	1,6452	1,7681	1,8893	2,0102	2,1303	2,2498

Valorile pentru M_∞^* coincid pînă la zecimala a doua cu valorile obţinute de I. Filimon [3] pentru obstacolul riguros eliptic, prin metoda aproximativă a lui Ciaplîghin.

Pentru $\chi = 1$ (cazul cercului), rezultatele concordă destul de bine cu rezultatele obţinuite de Imai [5] prin metoda aproximativă directă Janzen — Rayleigh, pe care le redăm mai jos.

Aproximaţia	M_∞^*	$V_{\max}/V_\infty$
2-a (termeni în M_∞^2)	0,4206	2,2064
3-a (termeni în M_∞^4)	0,4090	2,2673

Tot pentru $\chi = 1$ valoarea pentru $M_\infty^* = 0{,}4151$ [se] apropie foarte mult de valoarea obţinută de acad. Caius Iacob [6] prin metoda aproximativă a lui Ciaplîghin, în cazul variantei lui Kármán — Tsien, anume $0{,}4153 < M_\infty^* < 0{,}4159$.

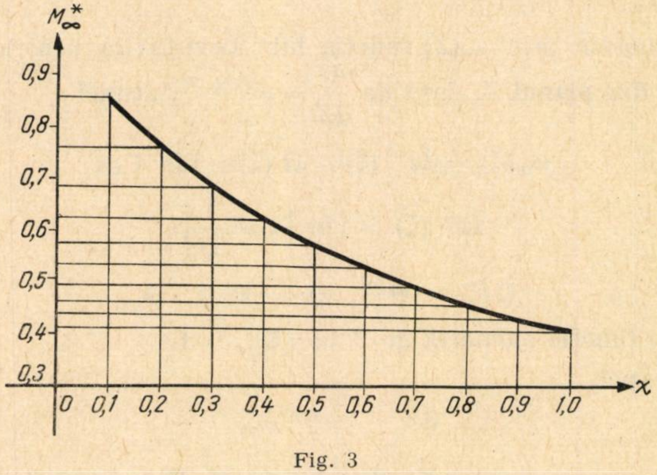


Fig. 3

În figura 3 dăm şi graficul $M_\infty^* = M_\infty^* (\chi)$.

II. OBSTACOLUL RIGUROS ELIPTIC

6. Vom considera o mişcare a unui fluid compresibil în planul z, în jurul unui obstacol riguros eliptic C, fără circulaţie.

Considerăm şi mişcarea de bază a fluidului incompresibil din planul Z, care se va efectua în jurul unui profil de o anumită formă $C^{(0)}$.

În acest caz, între curburile celor două obstacole are loc relaţia (5). Limitîndu-ne doar la termenii în M_0^2 obţinem

$$K^{(0)} = \frac{K}{1 + \frac{M_0^2}{4}\left(\frac{V^{(0)^2}}{V_\infty^2} - 1\right)}. \tag{15}$$

Reprezentăm conform domeniul din planul Z exterior profilului $C^{(0)}$ pe exteriorul cercului $|\zeta| = 1$ din planul ζ, cu corespondenţa punctelor de la infinit şi a direcţiilor pozitive ale axelor reale la infinit.

Prin urmare, de aici înainte vom trece în planul ζ unde avem de considerat un obstacol circular şi o mişcare incompresibilă de bază.

Din [7] ştim că avem

$$K^{(0)} = \frac{1}{\lambda} e^{T}\left(1 - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}\right) \quad \text{pe } \Gamma, \tag{16}$$

cu $\lambda = \left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_\infty$.

Dacă notăm prin $\omega_0(Z)$ funcţia lui Levi-Cività pentru fluidul incompresibil din planul Z, dată de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Z} = e^{-i\omega_0(Z)}$, atunci

$$\omega_0(\zeta) = \Omega^{(0)}(\zeta) + \Omega(\zeta) + i \lg V_\infty, \tag{17}$$

$$\Omega^{(0)}(\zeta) = i \lg \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right), \tag{18}$$

$$\Omega(\zeta) = \Theta(\xi, \eta) + iT(\xi, \eta), \tag{19}$$

$\Omega(\zeta)$ fiind o funcţie olomorfă de ζ în $|\zeta| > 1$.

Avem apoi

$$\mathrm{d}Z = \lambda e^{i\Omega(\zeta)} \mathrm{d}\zeta, \tag{20}$$

$$Z - Z_0 = \lambda \int_{-1}^{\zeta} e^{i\Omega(\zeta)} \mathrm{d}\zeta. \tag{20'}$$

Relaţia (20′) reprezintă formula de transformare dintre planele Z şi ζ, cu Z_0 punctul corespunzător lui $\zeta = -1$.

Din (15) şi (16) avem, ţinînd cont că

$$V^{(0)^2}\Big|_\Gamma = 4 V_\infty^2 \sin^2\sigma \, e^{2T} \qquad (\zeta = e^{i\sigma}),$$

$$\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}\right)e^{T} = \frac{K(s)}{1 + \frac{M_0^2}{4}(4\sin^2\sigma \cdot e^{2T} - 1)}, \tag{21}$$

unde curbura K e dată în funcţie de arcul s de pe elipsă.

Din (21) obţinem

$$(22)\qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 1 - \lambda\left[\left(1 + \frac{M_0^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-T} - M_0^2 \sin^2\sigma \cdot \mathrm{e}^{T}\right] K(s) \quad \text{pe } \Gamma\cdot$$

Dacă notăm

$$a = 1 + \frac{M_0^2}{4}, \quad b = -\frac{M_0^2}{4} \quad (a + b = 1),$$

atunci

$$(22')\qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 1 - \lambda\,(a\mathrm{e}^{-T} + 4b \sin^2\sigma \cdot \mathrm{e}^{T})\, K(s) \quad \text{pe } \Gamma.$$

În plus, din [7] ştim că $T(\infty) = 0$ şi reziduul lui T la infinit e nul.

Relaţiile (22) sau (22′) constituie condiţii la limită neliniare pentru funcţia $\Omega(\zeta)$, care este olomorfă în $|\zeta| > 1$ şi continuă în $|\zeta| \geqslant 1$.

Să determinăm această funcţie.

Trebuie să calculăm pe $K(s)$ şi să-i introducem expresia în (22) sau sau (22′).

Ecuaţia elipsei C este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (0 < b < a).$$

Reprezentăm elipsa parametric,

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Atunci

$$(23)\qquad K(s) = \frac{|x'y'' - y'z''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Mai departe vom utiliza un procedeu analog aceluia adoptat de I. Filimon [3], anume vom exprima pe t în funcţie de σ şi Ω.

Între arcele $\mathrm{d}s$ şi $\mathrm{d}S$ de pe obstacolele C şi $C^{(0)}$ avem relaţia (4), iar între arcele $\mathrm{d}S$ şi $\mathrm{d}\sigma$ de pe $C^{(0)}$ şi Γ avem relaţia $\mathrm{d}S = \lambda\mathrm{e}^{-T}\mathrm{d}\sigma$, dedusă din (20); deci între $\mathrm{d}s$ şi $\mathrm{d}\sigma$ avem

$$\mathrm{d}s = \lambda\left[\left(1 + \frac{M_0^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-T} - M_0^2 \sin^2\sigma \cdot \mathrm{e}^{T}\right]\mathrm{d}\sigma,$$

de unde din (22)

$$(24)\qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 1 - \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma} K(s).$$

Pe elipsa C avem

$$(25)\qquad \mathrm{d}s^2 = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)\,\mathrm{d}t^2.$$

Introducem (23) şi (25) în (24) şi obţinem

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 1 - \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}, \tag{24'}$$

$$\left(1 - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n}\right) \mathrm{d}\sigma = \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Dar

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = - \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Deci

$$\left(1 + \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\sigma}\right) \mathrm{d}\sigma = \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, \mathrm{d}t$$

şi prin integrare

$$\sigma + \Theta = \mathrm{Arctg}\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} t\right),$$

adică

$$t = \mathrm{Arctg}\left[\frac{b}{a} \operatorname{tg}(\sigma + \Theta)\right]. \tag{26}$$

Înlocuim $K(t)$ dat de (23) în condiţia la limită (22) şi avem

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 1 - \lambda\left[\left(1 + \frac{M_0^2}{4}\right) \mathrm{e}^{-T} - M_0^2 \sin^2\sigma \cdot \mathrm{e}^{T}\right] \cdot \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Înlocuim t din (26), calculăm pe $\sin^2 t$, $\cos^2 t$ şi obţinem

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 1 - \frac{\lambda}{a^2 b^2} \cdot \left[\left(1 + \frac{M_0^2}{4}\right) \mathrm{e}^{-T} - M_0^2 \sin^2\sigma \cdot \mathrm{e}^{T}\right] \cdot A(\sigma + \Theta), \quad \text{pe } \Gamma, \tag{27}$$

unde am notat

$$A(\sigma + \Theta) = \left[\frac{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2(\sigma + \Theta)}{1 + \operatorname{tg}^2(\sigma + \Theta)}\right]^{3/2} = [a^2 \cos^2(\sigma + \Theta) + \\ + b^2 \sin^2(\sigma + \Theta)]^{3/2}. \tag{28}$$

În plus mai avem condiţia

$$\Omega(\infty) = 0. \tag{29}$$

Deci din condiţiile (27) şi (29) va trebui să determinăm funcţia $\Omega(\zeta) = \Theta + \mathrm{i}T$, olomorfă în exteriorul D al lui Γ.

7. Vom aplica metoda aproximaţiilor succesive.

Căutăm Ω şi λ de forma

$$\Omega(\zeta) = \Omega_0 + M_0^2\,\Omega_1 + \ldots,$$

$$\lambda = \lambda_0 + M_0^2\,\lambda_1 + \ldots,$$

$$A(\sigma + \Theta) = A(\sigma + \Theta_0) + M_0^2 A'(\sigma + \Theta_0).\ \Theta_1 + \ldots,$$

păstrînd doar termenii pînă la M_0^2.

Vom căuta să satisfacem condiţiile (27) şi (29) identificînd coeficienţii aceloraşi puteri în M_0^2.

Introducem în (27) şi (29) şi obţinem

$$\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}n} = 1 - \frac{\lambda_0}{a^2b^2}\,\mathrm{e}^{-T_0} A(\sigma + \Theta_0) \quad \text{pe } \Gamma,$$

$$\Omega_0(\infty) = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}n} = \frac{\lambda_0}{a^2b^2}\left[\left(T_1 - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-T_0} + \sin^2\sigma\cdot \mathrm{e}^{T_0}\right]\cdot A(\sigma + \Theta_0) -$$

$$- \frac{\lambda_0}{a^2b^2}\,\mathrm{e}^{-T_0} A'(\sigma + \Theta_0)\cdot\ \Theta_1 - \frac{\lambda_1}{a^2b^2} A(\sigma + \Theta_0)\mathrm{e}^{-T_0} \quad \text{pe } \Gamma \tag{31}$$

$$\Omega_1(\infty) = 0.$$

. . . .

Problema (30) este tocmai problema corespunzătoare pentru fluidul incompresibil în mişcare în planul z în jurul unei elipse de semiaxe a şi b. Prin urmare soluţia acestei probleme la limită neliniare se poate obţine uşor.

Reprezentăm conform exteriorul elipsei pe exteriorul cercului unitate din planul ζ, cu corespondenţa punctelor de la infinit şi a direcţiilor pozitive ale axelor reale la infinit.

Transformarea va fi

$$z = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{k^2}{\zeta}\right) \quad \text{cu } k^2 = \frac{a-b}{a+b}$$

şi avem din [7] (pag. 491)

$$\lambda_0 = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_\infty = \frac{a+b}{2},$$

iar din (20)

$$\Omega_0(\zeta) = -\,\mathrm{i}\ \lg\left(\frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right).$$

Deci soluţia problemei (30) este

$$\Omega_0(\zeta) = -\,\mathrm{i}\ \lg\left(1 - \frac{k^2}{\zeta^2}\right), \quad \lambda_0 = \frac{a+b}{2}, \tag{32}$$

fiind verificată şi condiţia $\Omega_0(\infty) = 0$.

8. Vom rezolva problema la limită (31) pentru determinarea funcției $\Omega_1(\zeta)$.

Trebuie să înlocuim în (31) pe T_0 și Θ_0 din (32)

$$T_0(\sigma) = \lg \frac{1}{\sqrt{1-2k^2\cos 2\sigma + k^4}}, \tag{32'}$$

$$\Theta_0(\sigma) = \operatorname{Arctg} \frac{k^2 \sin 2\sigma}{1-k^2\cos 2\sigma}.$$

Să punem, la fel ca la punctul 4,

$$h(\sigma) = 1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4.$$

Calculînd pe $A(\sigma + \Theta_0)$, $A'(\sigma + \Theta_0)$, obținem din (31)

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}n} = \frac{6k^2 \sin 2\sigma}{h(\sigma)}\Theta_1 + \frac{1-k^4}{h(\sigma)}T_1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\frac{1-k^4}{h(\sigma)} +$$

$$+ \frac{(1-k^4)\sin^2\sigma}{h^2(\sigma)} \quad \text{pe } \Gamma, \tag{31'}$$

$$\Omega_1(\infty) = 0.$$

Prima condiție (31′) este de forma

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}n} = p(\sigma)\cdot\Theta_1 + q(\sigma)\,T_1 + r(\sigma).$$

Am ajuns la problema la limită (31′), care este o problemă mixtă, pentru rezolvarea căreia vom folosi procedeul indicat de I. Filimon [3]. Anume vom reduce această problemă la limită la rezolvarea unei ecuații diferențiale liniare în $\Omega_1(\zeta)$.

Conform cu [3] vom obține ecuația

$$\zeta\frac{\mathrm{d}\,\Omega_1}{\mathrm{d}\zeta} + \left[3\frac{\zeta^2+k^2}{\zeta^2-k^2} + 4\frac{(1-k^4)\zeta^2}{(\zeta^2-k^2)(k^2\zeta^2-1)}\right]\Omega_1(\zeta) +$$

$$+ \frac{\alpha_{11}+\mathrm{i}\,\beta_{11}}{\zeta - \frac{1}{k}} - \frac{(\alpha_{11}-\mathrm{i}\,\beta_{11})\zeta}{\frac{\zeta}{k} - 1} + \frac{\alpha_{12}+\mathrm{i}\,\beta_{12}}{\zeta + \frac{1}{k}} + \frac{(\alpha_{12}-\mathrm{i}\,\beta_{12})\zeta}{\frac{\zeta}{k}+1} + \tag{33}$$

$$+ \mathrm{i}\left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\frac{\zeta^2+k^2}{\zeta^2-k^2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1-k^2}{1+k^2}\cdot\frac{\zeta^2}{(\zeta^2-k^2)^2} - \frac{1}{(1+k^2)^2}\frac{\zeta^2+k^2}{\zeta^2-k^2}\right] = C \text{ în } D,$$

unde $\alpha_{11} + \mathrm{i}\,\beta_{11}$ și $\alpha_{12} + \mathrm{i}\,\beta_{12}$ sînt reziduurile la infinit ale funcției $\left[-3\frac{\zeta^2+k^2}{\zeta^2-k^2} - 4\frac{(1-k^4)\zeta^2}{(\zeta^2-k^2)(k^2\zeta^2-1)}\right]\Omega_1(\zeta)$ în raport cu polurile $\frac{1}{k}$ și $-\frac{1}{k}$ din D, iar C este o constantă reală arbitrară.

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară şi noi căutăm pe Ω_1 ca soluţie a acestei ecuaţii, care să fie olomorfă în D. Constantele α_{11}, β_{11}, α_{12}, β_{12}, C, precum şi λ_1 se determină din condiţiile ca Ω_1 să fie efectiv olomorfă în D, $\Omega_1(\infty) = 0$ şi reziduul lui Ω_1 la infinit să fie nul.

Obţinem soluţia

$$\Omega_1(\zeta) = -\frac{\mathrm{i}(1-k^2)^2}{2(\zeta^2-k^2)(k^2\zeta^2-1)^2}\left[\frac{k^4}{1-k^4}\zeta^4 + \frac{1}{k^2(1-k^4)}\zeta^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1-k^2}{2k^3}\zeta^3 \ln\frac{\zeta-k}{\zeta+k}\right], \quad \lambda_1 = \frac{a+b}{4}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{(1+k^2)^2}\right]. \tag{34}$$

Acum se poate calcula

$$\Omega = \Omega_0 + M_0^2\,\Omega_1$$

din (32) şi (34).

9. În continuare vom determina distribuţia vitezelor pe obstacolul riguros eliptic.

Pentru aceasta vom utiliza relaţia (2) în care ţinem seamă de

$$V^{(0)}\big|_{\Gamma} = 2\,V_\infty|\sin\sigma|\cdot \mathrm{e}^{T}.$$

Deci trebuie să calculăm pe T/Γ. Avem întîi

$$\Omega_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma}) = -\frac{\mathrm{i}(1-k^2)^2}{2}\cdot\frac{e^{2\mathrm{i}\sigma}-k^2}{h^2(\sigma)}\left\{\frac{k^4}{1-k^4} + \frac{1}{k^2(1-k^4)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\sigma} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-k^2}{2k^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma}\left[\ln\frac{\sqrt{h(\sigma)}}{1+2k\cos\sigma+k^2} + \mathrm{i}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2k}{1-k^2}\sin\sigma\right)\right]\right\}. \tag{35}$$

Înlocuind k^2 în funcţie de a şi b.

$$T_1(\sigma) = -\frac{b^2(a+b)^2}{8(a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma)^2}\left\{-\cos 2\sigma + 2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \right.$$
$$+ \frac{2b}{(a-b)(a^2-b^2)^{1/2}}\left[b\cos\sigma\ln\frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma}}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma} - \right. \tag{36}$$
$$\left.\left. - a\sin\sigma\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sin\sigma\right)\right]\right\}.$$

Să determinăm viteza maximă pe obstacolul riguros eliptic. Aceasta are loc pentru $\sigma = \frac{\pi}{2}$, deci vom calcula pe $T_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$, care este maximul

$T_{1\,\max}$ al lui $T_1(\sigma)$. Avem

$$T_{1\,\max} = -\frac{b^2(a+b)^2}{8a^4}\left[\frac{3a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{(a-b)\,(a^2-b^2)^{1/2}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\right]$$

sau exprimînd totul în funcţie de χ

$$T_{1\,\max} = -\frac{1}{8}\chi^2(1+\chi)^2\left[\frac{3+\chi^2}{1-\chi^2} - \frac{2\chi}{(1-\chi)\,(1-\chi^2)^{1/2}}\,\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{1}{\chi^2}-1}\right]. \tag{37}$$

Pentru simplificare, să notăm

$$P(\chi) = \frac{3+\chi^2}{1-\chi^2} - \frac{2\chi}{(1-\chi)\,(1-\chi^2)^{1/2}}\,\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{1}{\chi^2}-1}.$$

Din (32′) avem

$$T_{0\,\max} = \ln\frac{a+b}{2a} = \ln\frac{1+\chi}{2}.$$

Deci,

$$T_{\max} = T_{0\,\max} + M_0^2\, T_{1\,\max} = \ln\frac{1+\chi}{2} - \frac{M_0^2}{8}\,\chi^2(1+\chi)^2\, P(\chi), \tag{38}$$

$$V_{\max}^{(0)} \doteq 2\, V_\infty\, e^{T_{\max}} = V_\infty\,(1+\chi)\left\{1 - \frac{M_0^2}{8}\,\chi^2(1+\chi)^2 P(\chi)\right\}.$$

Calculăm pe $V_{\max}^{(0)2}$ şi îl introducem în (2); neglijînd termenii în M_0^4, obţinem

$$V_{\max} = V_\infty\,(1+\chi)\,\{1 + M_0^2\, N(\chi)\}, \tag{39}$$

unde

$$N(\chi) = \frac{1}{4}\left\{\chi(\chi+2) - \frac{\chi^2(1+\chi)^2}{2}\, P(\chi)\right\}. \tag{40}$$

Înlocuind în (39) avem

$$\frac{V_{\max}}{V_\infty} = (1+\chi)\left\{1 + \frac{M_0^2}{4}\,\chi\,(\chi+2)\right\} - \frac{M_0^2}{16}\,\chi^2\,(1+\chi)^3\, P(\chi). \tag{41}$$

Prin urmare formula (41), obţinută prin metoda a doua, se poate găsi din formula (11′) obţinută prin prima metodă, plus un termen de corecţie, datorat faptului că acum avem un obstacol riguros eliptic, nu unul cvasieliptic.

Deci această a doua metodă e mai exactă decît prima, ea este însă mult mai laborioasă, decît prima.

10. Din (39) se pot calcula numerele Mach critice pentru diverse valori ale lui χ, precum şi rapoartele $V_{\max}/V_\infty$ corespunzătoare. Procedînd ca la punctul **5**, obţinem un tabel similar.

χ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M^*_∞	0,8596	0,7640	0,6943	0,6392	0,5891	0,5508	0,5163	0,4860	0,4550	0,4151
M^*_0	0,8071	0,7258	0,6650	0,6159	0,5706	0,5383	0,5029	0,4740	0,4462	0,4083
$\frac{V_{\max}}{V_\infty}$	1,1347	1,2583	1,3747	1,5043	1,6251	1,7299	1,8513	1,9814	2,0509	2,2498

Rezultatele concordă destul de bine cu cele obţinute prin prima metodă.

Vom trasa acum în figura 4 şi graficul $M^*_\infty = M^*_\infty(\chi)$.

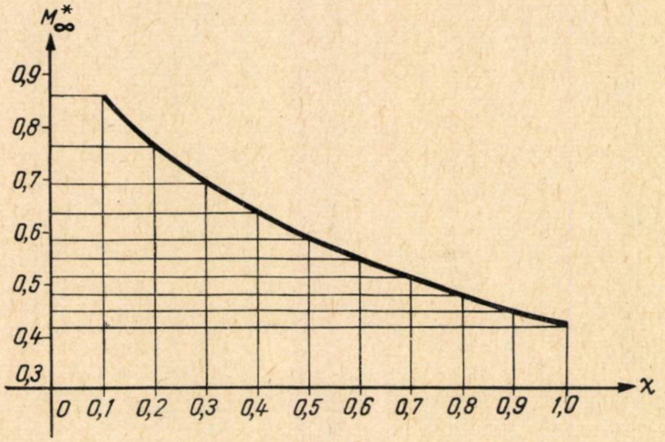


Fig. 4

Primită la redacţie la 29 mai 1965.

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. Caius Iacob, *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles.* Portugaliae Mathematica, Lisbonne, **1**, 209—257 (1939).
2. H. S. Tsien, *Two-Dimensional Subsonic Flow of a Compressible Fluid.* Journal of the Aeronautical Sciences, **7**,399—407 (1939).

3. Ioan Filimon, *Asupra corecțiilor de compresibilitate la mișcări continue subsonice Cazul obstacolului eliptic*. St. cerc. mat., **8**, 467–504 (1957).
4. Caius Iacob, *Sur l'emploi de la méthode hodographique en mécanique des fluides compressibles*. Mathematica – Cluj, **22**, 170–181 (1946).
5. Isao Imai, *On the Flow of a Compressible Fluid past a Circular Cylinder* II. Proceedings of the Phys-Math. Society of Japan, **23**, 180 (1941).
6. Caius Iacob, *Studiul comparat al variantelor metodei de aproximație a lui S. A. Ciaplighin în problema mișcării subsonice în jurul cilindrului circular*. Bul. științ. Acad. R.P.R., **3**, 293–302 (1951)
7. Caius Iacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des fluides*. Bucarest-Paris, 1959, p. 490–495.

RADICAL BAER-MAC COY ŞI RADICAL JACOBSON PENTRU SEMIGRUPURI RETICULATE

DE

ION D. ION

În această lucrare se prezintă teoria radicalului Baer-Mac Coy şi a radicalului Jacobson în cazul unui semigrup reticulat cvasiîntreg complet $\mathfrak{T}$ utilizînd sistematic noţiunea de $\mathfrak{T}$-algebră introdusă de L. Lesieur şi R. Croisot.

Partea comună din teoria radicalului Baer-Mac Coy şi a radicalului Jacobson pentru idealele unui inel asociativ, pentru idealele unui semigrup cu element zero, pentru submodulele unui modul este reţinută de teoria acestor tipuri de radicali dată în lucrare pentru un semigrup reticulat cvasiîntreg complet $\mathfrak{T}$. În lucrare este parcursă problematica obişnuită din teoria generală a radicalului. Teoria generalizează rezultate şi metode de natură globală din cazul inelelor, semigrupurilor şi modulelor. Un rol important îl joacă conceptul de $\mathfrak{T}$-algebră introdus de L. Lesieur şi R. Croisot.

În § 1 este studiată o relaţie de echivalenţă pe un semigrup reticulat cvasiîntreg complet. Cîteva observaţii utile sînt făcute în § 2 în legătură cu categoria $K_{\mathfrak{T}}$ a $\mathfrak{T}$-algebrelor. Este de aşteptat ca aprofundarea studiului acestei categorii să aducă noutăţi în legătură cu structura inelelor asociative şi a semigrupurilor. Teoria radicalului Baer-Mac Coy este prezentată în § 3. Foarte utilă s-a dovedit noţiunea de $\mathfrak{T}$-algebră primă. În § 4 este dată teoria radicalului Jacobson folosind conceptul de $\mathfrak{T}$-algebră ireductibilă.

1. O RELAŢIE DE ECHIVALENŢĂ PE UN SEMIGRUP RETICULAT

Fie $\mathfrak{T}$ un semigrup multiplicativ reticulat cvasiîntreg complet [9]. Relaţia de ordine pe $\mathfrak{T}$ o notăm cu $\subseteq$, iar relaţia de ordine strictă asociată cu $\subset$. Operaţiile de latice le notăm cu $+$ (disjuncţia) şi $\cap$ (conjuncţia),

ST. CERC. MAT. TOM. 17 NR. 8 P. 1321–1331 BUCUREŞTI 1965

elementul nul cu $\mathfrak{D}$, elementul universal cu $\mathfrak{E}$. Deci $\mathfrak{G}$ este o latice completă, un semigrup multiplicativ şi

$$\mathfrak{A}\Big(\sum_{\alpha\in A}\mathfrak{B}_\alpha\Big)=\sum_{\alpha\in A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}_\alpha,\qquad \Big(\sum_{\alpha\in A}\mathfrak{B}_\alpha\Big)\mathfrak{A}=\sum_{\alpha\in A}\mathfrak{B}_\alpha\mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}\quad(\text{cvasiîntreg}),$$

unde A este o familie arbitrară de indici, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_\alpha$ sînt elemente arbitrare din $\mathfrak{G}$. Observăm că $\mathfrak{D}$ este element zero pentru structura de semigrup multiplicativ a lui $\mathfrak{G}$. Într-adevăr, $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{D}\cap\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{A}\cap\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{D}$, de unde $\mathfrak{D}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\mathfrak{D}=\mathfrak{D}$ pentru orice $\mathfrak{A}\in\mathfrak{G}$.

Mulţimea $\mathfrak{G}$ a idealelor bilaterale ale unui inel asociativ Λ sau ale unui semigrup D cu element zero formează faţă de produsul idealelor şi incluziunea în sensul teoriei mulţimilor un semigrup multiplicativ reticulat cvasiîntreg complet.

DEFINIŢIA 1.1. *Dacă* ϑ_0, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\in\mathfrak{G}$, *spunem că* $\mathfrak{A}$ *este echivalent cu* $\mathfrak{B}$ *modulo* ϑ_0, *şi scriem* $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}\ (\mathrm{mod}\ \vartheta_0)$, *dacă există* $\vartheta\in\mathfrak{G}$, $\vartheta\subseteq\vartheta_0$ *astfel ca* $\mathfrak{A}+\vartheta=\mathfrak{B}+\vartheta$.

Se constată cu uşurinţă că avem astfel definită pe $\mathfrak{G}$ o relaţie de echivalenţă. Mai mult

$$\mathfrak{A}_\alpha\sim\mathfrak{B}_\alpha(\mathrm{mod}\ \vartheta_0),\quad \alpha\in A\Rightarrow\sum_{\alpha\in A}\mathfrak{A}_\alpha\sim\sum_{\alpha\in A}\mathfrak{B}_\alpha(\mathrm{mod}\ \vartheta_0),\tag{1.1}$$

$$\mathfrak{A}_1\sim\mathfrak{B}_1(\mathrm{mod}\ \vartheta_0),\ \mathfrak{A}_2\sim\mathfrak{B}_2(\mathrm{mod}\ \vartheta_0)\Rightarrow\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\sim\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2(\mathrm{mod}\ \vartheta_0).\tag{1.2}$$

Într-adevăr, există $\vartheta_\alpha\in\mathfrak{G}$, $\vartheta_\alpha\subseteq\vartheta_0$ astfel ca $\mathfrak{A}_\alpha+\vartheta_\alpha=\mathfrak{B}_\alpha+\vartheta_\alpha$, $\alpha\in A$, şi deci $\sum_{\alpha\in A}\mathfrak{A}_\alpha+\vartheta=\sum_{\alpha\in A}\mathfrak{B}_\alpha+\vartheta$, unde $\vartheta=\sum_{\alpha\in A}\vartheta_\alpha\subseteq\vartheta_0$.

Fie ϑ_1, $\vartheta_2\in\mathfrak{G}$ astfel ca

$$\mathfrak{A}_1+\vartheta_1=\mathfrak{B}_1+\vartheta_1,\ \vartheta_1\subseteq\vartheta_0,\tag{1.3}$$

$$\mathfrak{A}_2+\vartheta_2=\mathfrak{B}_2+\vartheta_2,\ \vartheta_2\subseteq\vartheta_0.\tag{1.4}$$

Folosind relaţiile obţinute prin înmulţirea lui (1.3) la dreapta cu $\mathfrak{A}_2$ şi a lui (1.4) la stînga cu $\mathfrak{B}_1$ vom avea

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2+\vartheta_1\mathfrak{A}_2+\mathfrak{B}_1\vartheta_2=\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2+\vartheta_1\mathfrak{B}_2+\mathfrak{B}_1\vartheta_2.$$

Cum $\vartheta=\vartheta_1\mathfrak{A}_2+\mathfrak{B}_1\vartheta_2\subseteq\vartheta_0$ rezultă $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\sim\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\ (\mathrm{mod}\ \vartheta_0)$.

Să notăm mulţimea factor $\mathfrak{G}/\sim$ cu $\mathfrak{G}/\vartheta_0$.

PROPOZIŢIA 1.1. *Definind pentru orice pereche de elemente* $\hat{\mathfrak{A}}$, $\hat{\mathfrak{B}}\in\mathfrak{G}/\vartheta_0$

$$\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}}=\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},\tag{1.5}$$

$$\hat{\mathfrak{A}}\subseteq\hat{\mathfrak{B}}\Leftrightarrow\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\sim\mathfrak{B}\ (\mathrm{mod}\ \vartheta_0),\tag{1.6}$$

mulţimea factor $\mathfrak{G}/\vartheta_0$ *devine un semigrup multiplicativ reticulat cvasiîntreg complet.*

Demonstraţie. Aplicînd (1.2) constatăm că produsul definit nu depinde de reprezentanţii folosiţi. Nici relaţia (1.6) nu depinde de reprezentanţi deoarece din $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}' \pmod{\vartheta_0}$, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}' \pmod{\vartheta_0}$ şi $\mathfrak{A}+\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B} \pmod{\vartheta_0}$ rezultă $\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}' \sim \mathfrak{B}' \pmod{\vartheta_0}$. Evident, relaţia (1.6) este reflexivă şi tranzitivă. Mai mult, dacă $\hat{\mathfrak{A}} \subseteq \hat{\mathfrak{B}}$ şi $\hat{\mathfrak{B}} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$, atunci $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \pmod{\vartheta_0}$, deci $\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{B}}$. Aşa că (1.6) este o relaţie de ordine pe $\hat{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}/\vartheta_0$. Dacă $\{\hat{\mathfrak{A}}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o familie arbitrară de elemente $\hat{\mathfrak{A}}_\alpha \in \hat{\mathfrak{T}}$, atunci $\sum\limits_{\alpha \in A} \hat{\mathfrak{A}}_\alpha$ (cel mai mic majorant al elementelor $\hat{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\alpha \in A$, în raport cu relaţia de ordine (1.6) există şi este egal cu $\widehat{\sum\limits_{\alpha \in A} \mathfrak{A}_\alpha}$. Elementele $\hat{\mathfrak{O}}$, $\hat{\mathfrak{E}}$ sînt în $\hat{\mathfrak{T}}$, faţă de relaţia de ordine (1.6), elementul nul, respectiv elementul universal. Deci în $\hat{\mathfrak{T}}$, faţă de relaţia de ordine (1.6), există prim element şi orice familie de elemente are un cel mai mic majorant. Aşa că $\hat{\mathfrak{T}}$ este o latice completă [8].

Evident

$$\mathfrak{A}\left(\sum_{\alpha \in A} \hat{\mathfrak{B}}_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in A} \hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}}_\alpha, \quad \left(\sum_{\alpha \in A} \hat{\mathfrak{B}}_\alpha\right)\hat{\mathfrak{A}} = \sum_{\alpha \in A} \hat{\mathfrak{B}}_\alpha \hat{\mathfrak{A}}.$$

Este dovedit deci că $\hat{\mathfrak{T}}$ este un semigrup multiplicativ reticulat complet. Să arătăm că este cvasiîntreg. Fie $\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mathfrak{B}} \in \hat{\tau}$. Din $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ rezultă $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ şi deci $\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$, $\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \subseteq \hat{\mathfrak{B}}$, de unde $\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}} \subseteq \hat{\mathfrak{A}} \cap \hat{\mathfrak{B}}$.

2. CATEGORIA $\mathfrak{T}$-ALGEBRELOR

Dacă $\mathfrak{T}$ este un semigrup multiplicativ reticulat cvasiîntreg complet, atunci o latice completă L se numeşte $\mathfrak{T}$-algebră (la stînga) dacă pe L s-a definit o lege externă de compunere cu operatori în $\mathfrak{T}$ astfel ca

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})X = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}X), \ \mathfrak{A}X \subseteq X, \ \mathfrak{O}X = O, \ \mathfrak{A}O = O,$$

$$\Big(\sum_{\alpha \in A} \mathfrak{A}_\alpha\Big)X = \sum_{\alpha \in A} \mathfrak{A}_\alpha X, \ \mathfrak{A}\Big(\sum_{\alpha \in A} X_\alpha\Big) = \sum_{\alpha \in A} \mathfrak{A}X_\alpha,$$

unde O este elementul nul din L; A o familie arbitrară de indici; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_\alpha$ elemente arbitrare din $\mathfrak{T}$; X, X_α elemente arbitrare din L. Dacă L, L' sînt $\mathfrak{T}$-algebre, atunci o aplicaţie univocă $f: L \to L'$ se numeşte $\mathfrak{T}$-omomorfism dacă

$$f\Big(\sum_{\alpha \in A} X_\alpha\Big) = \sum_\alpha f(X_\alpha); \ f(\mathfrak{A}X) = \mathfrak{A}f(X).$$

Aceste definiţii au fost date de L. Lesieur şi R. Croisot [9].

Să notăm cu $K_{\mathfrak{T}}$ clasa tuturor $\mathfrak{T}$-algebrelor (la stînga) luate împreună cu $\mathfrak{T}$-omomorfismele de $\mathfrak{T}$-algebre. Evident $K_{\mathfrak{T}}$ este o categorie. Dacă L, L' sînt două $\mathfrak{T}$-algebre, atunci notăm cu $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(L, L')$ mulţimea tuturor $\mathfrak{T}$-omomorfismelor de la L la L'. Pentru f, $g \in \mathrm{Hom}_\tau(L, L')$ definim

$$f \subseteq g \Leftrightarrow f(X) = g(X) \qquad \forall X \in L$$

și $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(L, L')$ devine astfel o latice completă ; dacă $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o familie arbitrară de elemente din $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(L, L')$, atunci se constată ușor că $\sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$, $\bigcap\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ sînt $\mathfrak{T}$-omomorfismele definite astfel :

$$\Big(\sum_{\alpha \in A} f_\alpha\Big)(X) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(X) ; \ \Big(\bigcap_{\alpha \in A} f_\alpha\Big)(X) = \bigcap_{\alpha \in A} f_\alpha(X) \qquad \forall X \in L.$$

PROPOZIȚIA 2.1. *Pentru orice familie* $\{L_i\}_{i \in I}$ *de obiecte din categoria* K_τ *există produsul lor direct.*

Demonstrație. Fie $L = \prod\limits_{i \in I} L_i$ produsul direct în categoria Ens al mulțimilor L_i. Dacă X, $Y \in L$, $X = [X_i]_{i \in I}$, $Y = [Y_i]_{i \in I}$, atunci definim

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow X_i \subseteq Y_i \qquad \forall i \in I$$

și L devine o latice completă ; dacă $\{X^\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o familie arbitrară de elemente $X^\alpha \in L$, $X^\alpha = [X_i^\alpha]_{i \in I}$, atunci vom avea

$$\sum_{\alpha \in A} X^\alpha = [\sum_{\alpha \in A} X_i^\alpha]_{i \in I}$$

și

$$\bigcap_{\alpha \in A} X^\alpha = [\bigcap_{\alpha \in A} X_i^\alpha]_{i \in I}$$

Punînd pentru $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$, $X \in L$, $\mathfrak{A}X = [\mathfrak{A}X_i]_{i \in I}$ atunci L devine o $\mathfrak{T}$-algebră, deci un obiect din $K_{\mathfrak{T}}$. Proiecțiile canonice $\pi_i : L \to L_i$ $(\pi_i(X) = X_i)$ sînt morfisme în $K_{\mathfrak{T}}$ și aplicația

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(H, L) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(H, L_i),$$

care duce orice $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(H, L)$ în $[\pi_i f]_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(H, L_i)$, este o bijecție oricare ar fi $\mathfrak{T}$-algebra H. Deci $\{L, \pi_i\}_{i \in I}$ este un produs direct al familiei $\{L_i\}_{i \in I}$ de $\mathfrak{T}$-algebre [3].

PROPOZIȚIA 2. 2. *Pentru orice mulțime finită* $\{L_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de obiecte din categoria* $K_{\mathfrak{T}}$ *există suma lor directă.*

Demonstrație. Fie $L = \prod\limits_{i=1}^{n} L_i$ produsul direct în categoria Ens al mulțimilor L_i. Organizăm pe L ca o $\mathfrak{T}$-algebră ca în cursul demonstrației propoziției precedente. Fie $\sigma_i : L_i \to L$ aplicația definită astfel :

$$\sigma_i(X_i) = [O_1, \ldots, X_i, \ldots, O_n] \qquad \forall X_i \in L_i,$$

unde O_i este elementul nul din L_i. Evident $\sigma_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(L_i, L)$ și aplicația

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(L, H) \to \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(L_i, H),$$

care duce orice $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(L, H)$ în $[f\sigma_i]_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(L_i, H)$, este o bijecție oricare ar fi $\mathfrak{T}$-algebra H. Deci $\{L, \sigma_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ este o sumă directă a obiectelor L_i din $K_{\mathfrak{T}}$ [3].

Categoria $K_{\mathfrak{S}}$ are obiect nul. Într-adevăr, fie Θ o mulţime cu un singur element notat O şi punem $O \subseteq O$. Pentru orice $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}$ definim $\mathfrak{A}O = O$ şi Θ devine o $\mathfrak{S}$-algebră. Pentru orice $\mathfrak{S}$-algebră L în $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(L, \Theta)$ şi $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(\Theta, L)$ se găseşte cîte un singur morfism din $K_{\mathfrak{S}}$. Morfismul $L \to \Theta \to L'$ îl numim morfismul zero din $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(L, L')$ şi-l notăm cu $\Theta_{LL'}$. Pentru orice pereche de morfisme $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(L, L')$ există nucleul diferenţă [3] $\mathrm{Ker}\,(f - g)$ şi pentru orice $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(L, L')$ există conucleul diferenţă $\mathrm{Coker}\,(f - \Theta_{LL'})$. Studiul acestei categorii poate fi dus mai departe.

3. RADICAL BAER-MAC COY PENTRU SEMIGRUPURI RETICULATE

Fie $\mathfrak{S}$ un semigrup multiplicativ reticulat cvasiîntreg complet. Un element $\mathfrak{P} \in \mathfrak{S}$ se numeşte prim dacă din $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ elemente ale lui $\mathfrak{S}$, rezultă $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$ sau $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}$. Evident $\mathfrak{E}$ este un element prim a lui $\mathfrak{S}$. Dacă $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}$, atunci mulţimea $\Omega_{\mathfrak{A}}$ a elementelor prime din $\mathfrak{S}$ care cuprind pe $\mathfrak{A}$ este nevidă pentru că $\mathfrak{E} \in \Omega_{\mathfrak{A}}$. Prin definiţie, elementul

$$R(\mathfrak{A}) = \bigcap_{\mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{A}}} \mathfrak{P}$$

se numeşte radicalul Baer-Mac Coy al lui $\mathfrak{A}$. Radicalul Baer-Mac Coy al semigrupului $\mathfrak{S}$, notat $R(\mathfrak{S})$, este prin definiţie $R(\mathfrak{O})$. Dacă $\mathfrak{S}$ este semigrupul multiplicativ al idealelor bilaterale ale unui inel asociativ Λ sau ale unui semigrup D cu element zero, atunci obţinem conceptul obişnuit de radical Baer-Mac Coy pentru aceste cazuri.

PROPOZIŢIA 3.1 (Amitsur). *Oricare ar fi* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}$ *avem*

(i) $R(\mathfrak{A}) \supseteq \mathfrak{A}$,

(ii) $R(R(\mathfrak{A})) = R(\mathfrak{A})$,

(iii) $R(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = R(\mathfrak{A}) \cap R(\mathfrak{B})$.

Demonstraţie. Proprietăţile (i) şi (ii) rezultă imediat din definiţia radicalului. Din $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ rezultă $\Omega_{\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}} \supseteq \Omega_{\mathfrak{A}}$, $\Omega_{\mathfrak{B}}$ şi deci $\Omega_{\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}} \supseteq \Omega_{\mathfrak{A}} \cap \Omega_{\mathfrak{B}}$. Dacă $\mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}}$, atunci $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ şi cum $\mathfrak{P}$ este elementul prim, avem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$ sau $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}$, de unde $\mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{A}} \cup \Omega_{\mathfrak{B}}$. Aşa că $\Omega_{\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}} = \Omega_{\mathfrak{A}} \cup \Omega_{\mathfrak{B}}$ şi (iii) este verificat.

Semigrupul reticulat $\mathfrak{S}$ se numeşte *prim* dacă $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{O}$ şi $\mathfrak{O}$ este element prim al lui $\mathfrak{S}$. Un semigrup reticulat $\mathfrak{S}$ pentru care $\mathfrak{O} \neq \mathfrak{E}$ este prim dacă şi numai dacă nu are divizori ai lui zero : din $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$ rezultă $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$ sau $\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$.

PROPOZIŢIA 3. 2. *Elementul* $\mathfrak{P} \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{E}$ *este prim dacă şi numai dacă* $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ *este semigrup prim.*

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{P} \in \mathfrak{S}$ un element prim, $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{E}$. Atunci $\hat{\mathfrak{P}} \neq \hat{\mathfrak{E}}$, deoarece altfel $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}$. Cum $\hat{\mathfrak{P}} = \hat{\mathfrak{O}}$, rezultă că $\hat{\mathfrak{O}} \neq \hat{\mathfrak{E}}$. Dacă $\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{O}}$, atunci $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \sim \mathfrak{O}$ (mod $\mathfrak{P}$), aşa că există $\vartheta \in \mathfrak{S}$, $\vartheta \subseteq \mathfrak{P}$ astfel că $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \vartheta = \mathfrak{O} + \vartheta = \vartheta$, de unde $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \vartheta \subseteq \mathfrak{P}$ şi cum $\mathfrak{P}$ este prim, avem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$ sau $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}$. Deci $\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{O}}$ sau $\hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{O}}$.

Reciproc, presupunem că $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ este prim şi fie $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{G}$ astfel ca $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}$. Atunci $\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{P}} = \hat{\mathfrak{O}}$, de unde $\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{O}}$ sau $\hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{O}}$. Deci $\hat{\mathfrak{A}} \subseteq \hat{\mathfrak{P}}$ sau $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}$ şi $\mathfrak{P}$ este element prim.

Folosind noţiunea de $\mathfrak{G}$-algebră putem extinde la semigrupuri reticulate rezultatele lui Andrunakievici din [1] în legătură cu radicalul Baer-Mac Coy al inelelor asociative. Peste tot vom folosi numai $\mathfrak{G}$-algebre la stînga.

Dacă L este o $\mathfrak{G}$-algebră cu elementul nul O_L și elementul universal U_L, atunci elementul $O_L\cdot.U_L$ din $\mathfrak{G}$ îl numim *anulatorul* $\mathfrak{G}$-algebrei L şi-l notăm cu $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{G}} L$. $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{G}$-algebră L o numim *exactă* dacă $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{G}} L = \mathfrak{O}$.

DEFINIŢIA 3.1. *O $\mathfrak{G}$-algebră L se numește primă dacă*

(i) $\mathfrak{E} U_L \neq O_L$,

(ii) $\mathfrak{A}X = O_L,\ X \neq O_L \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathfrak{G}} L$.

PROPOZIŢIA 3.3. *Fie Λ un inel asociativ și M un Λ-modul la stînga astfel ca $\Lambda M \neq 0$. Următoarele două afirmații sînt echivalente*:

(1) $\mathfrak{A}m = 0$, $\mathfrak{A}$ ideal bilateral în Λ, $m \in M$, $m \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Ann}_\Lambda M$;

(2) $\mathfrak{A}X = 0$, $\mathfrak{A}$ ideal bilateral în Λ, X submodul al lui M, $X \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Ann}_\Lambda M$.

Demonstrație. (1) $\Rightarrow$ (2). Dacă ipotezele din (2) sînt adevărate, fie $m \in X$, $m \neq 0$. Avem $\mathfrak{A}m = 0$ şi după (1) rezultă $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Ann}_\Lambda M$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dacă ipotezele din (1) sînt adevărate fie $X = \Lambda m + Zm$ care este un Λ-submodul al lui M. Avem $\mathfrak{A}X \subseteq \mathfrak{A}m = 0$ şi după (2) rezultă $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Ann}_\Lambda M$.

Fie $\mathfrak{G}$ semigrupul reticulat al idealelor bilaterale ale lui Λ şi L laticea completă a Λ-submodulelor lui M. Punînd pentru $\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}$, $X \in L$, $\mathfrak{A}X = \{m \in M \mid m = \sum_i a_i x_i,\ a_i \in \mathfrak{A},\ x_i \in X\}$, atunci L este o $\mathfrak{G}$-algebră. Din propoziţia 3.3 rezultă că $\mathfrak{G}$-algebra L este primă dacă şi numai dacă Λ-modulul M este prim în sensul lui Andrunakievici [1].

TEOREMA 3.1. *Semigrupul reticulat $\mathfrak{G}$ este prim dacă și numai dacă există o $\mathfrak{G}$-algebră primă și exactă.*

Demonstrație. Presupunem că $\mathfrak{G}$ este prim și luînd $L = \mathfrak{G}$, produsul elementelor din L cu elemente din $\mathfrak{G}$ fiind produsul din $\mathfrak{G}$, atunci $\mathfrak{G}$ este o $\mathfrak{G}$-algebră (la stînga). Avem $O_L = \mathfrak{O}$, $U_L = \mathfrak{E}$ şi $\mathfrak{E}U_L = \mathfrak{E}\mathfrak{E} \neq \mathfrak{O}$, căci $\mathfrak{O}$ fiind element prim în $\mathfrak{G}$ din $\mathfrak{E}\mathfrak{E} = \mathfrak{O}$, ar rezulta $\mathfrak{E} = \mathfrak{O}$. Din $\mathfrak{A}U_L = O_L$ rezultă $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$ pentru că $U_L = \mathfrak{E}$, $O_L = \mathfrak{O}$, $\mathfrak{O} \neq \mathfrak{E}$ şi $\mathfrak{O}$ este element prim. Deci $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{G}}\, \mathfrak{G} = \mathfrak{O}$. Din $\mathfrak{A}X = O_L$, $X \neq \mathfrak{O}$ scoatem $\mathfrak{A} = \mathfrak{O} \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathfrak{G}}\, \mathfrak{G}$. Deci $\mathfrak{G}$ este o $\mathfrak{G}$-algebră (la stînga) primă şi exactă.

Reciproc, fie L o $\mathfrak{G}$-algebră primă şi exactă şi să arătăm că $\mathfrak{G}$ este un semigrup prim. Avem $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{O}$, căci altfel $\mathfrak{E}U_L \neq O_L$. Să arătăm că $\mathfrak{O}$ este element prim al lui $\mathfrak{G}$. Dacă $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{O}$, atunci $\mathfrak{B}U_L = O_L$ pentru că $U_L \neq O_L$ şi $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{G}} L = O$. Cum $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}U_L) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})U_L = \mathfrak{O}U_L = O_L$ rezultă că $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathfrak{G}} L = \mathfrak{O}$ şi deci $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$. Demonstraţia este terminată.

PROPOZIŢIA 3.4. *Fie* $\vartheta_0 \in \mathfrak{S}$ *şi* $\hat{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}/\vartheta_0$. *Dacă* L *este o* $\mathfrak{S}$*-algebră astfel ca* $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L = \vartheta_0$, *atunci definind* $\hat{\mathfrak{A}}X = \mathfrak{A}X$, L *devine o* $\mathfrak{S}$*-algebră exactă. Reciproc, dacă* L *este o* $\hat{\mathfrak{S}}$*-algebră exactă, atunci definind* $\mathfrak{A}X = \hat{\mathfrak{A}}X$, L *devine o* $\mathfrak{S}$*-algebră astfel că* $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L = \vartheta_0$. *În ambele cazuri* $\mathfrak{S}$*-subalgebrele lui* L *coincid cu* $\hat{\mathfrak{S}}$*-subalgebrele lui* L.

Demonstraţie. Reamintim că o parte nevidă a unei $\mathfrak{S}$-algebre L se numeşte $\mathfrak{S}$-subalgebră dacă este stabilă în raport cu sumele infinite şi multiplicările cu operatori din $\mathfrak{S}$.

Dacă $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}' \pmod{\vartheta_0}$, atunci există $\vartheta \subseteq \vartheta_0$ astfel ca $\mathfrak{A} + \vartheta = \mathfrak{A}' + \vartheta$. Dacă $X \in L$, atunci $\vartheta X \subseteq \vartheta U_L \subseteq \vartheta_0 U_L = O_L$ şi deci $\vartheta X = O_L$. Aşa că

$$\mathfrak{A}X = \mathfrak{A}X + \vartheta X = (\mathfrak{A} + \vartheta)X = (\mathfrak{A}' + \vartheta)X = \mathfrak{A}'X + X = \mathfrak{A}'X$$

şi produsul $\hat{\mathfrak{A}}X$ nu depinde de reprezentanţi. Evident L devine o $\hat{\mathfrak{S}}$-algebră. Dacă $\hat{\mathfrak{A}} U_L = O_L$, atunci $\mathfrak{A} U_L = O_L$, de unde $\mathfrak{A} \subseteq \vartheta_0$ şi deci $\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{O}}$. Rezultă că $\mathrm{Ann}_{\hat{\mathfrak{S}}} L = \hat{\mathfrak{O}}$.

Cît priveşte reciproca dovedim numai că $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L = \vartheta_0$. Într-adevăr, dacă $\mathfrak{A} U_L = O_L$, atunci $\hat{\mathfrak{A}} U_L = O_L$ şi cum L este o $\hat{\mathfrak{S}}$-algebră exactă avem $\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{O}}$, de unde $\mathfrak{A} \subseteq \vartheta_0$. Dar $\vartheta_0 U_L = \hat{\vartheta}_0 U_L = \hat{\mathfrak{O}} U_L = O_L$ şi deci $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L = \vartheta_0$.

Ultima aserţiune din enunţul propoziţiei este evidentă.

PROPOZIŢIA 3.5. *Elementul* $\mathfrak{P} \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{E}$ *este prim dacă şi numai dacă există o* $\mathfrak{S}$*-algebră primă astfel ca* $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L = \mathfrak{P}$.

Rezultă imediat din teorema 3.1 şi propoziţia 3.4.

TEOREMA 3.2. *Dacă* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}$ *şi* $\Sigma_{\mathfrak{A}}$ *este mulţimea tuturor* $\mathfrak{S}$*-algebrelor prime* L *astfel că* $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L \supseteq \mathfrak{P}$, *atunci*

$$R(\mathfrak{A}) = \bigcap_{L \in \Sigma_{\mathfrak{A}}} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L.$$

Dacă $\Sigma_{\mathfrak{A}} = \theta$ luăm $R(\mathfrak{A}) = \mathfrak{E}$. Teorema rezultă din propoziţia 3.5. Dacă Σ este mulţimea tuturor $\mathfrak{S}$-algebrelor prime, atunci

$$R(\mathfrak{S}) = \bigcap_{L \in \Sigma} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L.$$

Dacă L este o $\mathfrak{S}$-algebră şi $X_0 \in L$, atunci $(\mathfrak{X}_0) = \{X \in L \mid X \subseteq X_0\}$ este o $\mathfrak{S}$-subalgebră a lui L. Semigrupul reticulat $\mathfrak{S}$ se numeşte *R-semisimplu* dacă $R(\mathfrak{S}) = \mathfrak{O}$. Un element X_0 al unei $\mathfrak{S}$-algebre L se numeşte *prim* dacă (X_0) este o $\mathfrak{S}$-algebră primă. Evident X_0 este un element prim al $\mathfrak{S}$-algebrei L dacă şi numai dacă $\mathfrak{E}X_0 \neq O_L$ şi $O_L \cdot X_0$ este un rezidual esenţial al lui O_L. O $\mathfrak{S}$-algebră L se numeşte *R-semisimplă* dacă există o familie $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de elemente prime $X_\alpha \in L$ astfel ca $U_L = \sum_{\alpha \in A} X_\alpha$.

PROPOZIȚIA 3.6. *Semigrupul reticulat* $\mathfrak{T}$ *este* R*-semisimplu dacă și numai dacă există o* $\mathfrak{T}$*-algebră* R*-semisimplă și exactă.*

Demonstrație. Fie $\mathfrak{T}$ un semigrup reticulat R-semisimplu și $\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o familie de $\mathfrak{T}$-algebre prime astfel ca

$$\mathfrak{D} = R(\mathfrak{T}) = \bigcap_{\alpha\in A} \mathrm{Ann}_\tau\, L_\alpha.$$

Fie $L = \prod\limits_{\alpha\in A} L_\alpha$ produsul direct în categoria $K_{\mathfrak{T}}$ al familiei de $\mathfrak{T}$-algebre prime $\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ și $U^*_\alpha = [X_i]_{i\in A} \in L$ astfel că $X_i = O_{L_i}$ pentru $i \neq \alpha$ și $X_\alpha = U_{L_\alpha}$. Evident U^*_α este element prim al $\mathfrak{T}$-algebrei L și $U_L = \sum\limits_{\alpha\in A} U^*_\alpha$. Avem

$$O_L^{\cdot}.\, U^*_\alpha = OL_\alpha^{\cdot}.\, UL_\alpha = \mathrm{Ann}_{\mathfrak{T}}\, L_\alpha \quad \forall \alpha \in A.$$

Așa că

$$\mathrm{Ann}_{\mathfrak{T}} L = O_i^{\cdot}.\; U_L = O_L^{\cdot}.\,(\sum_{\alpha\in A} U^*_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} O_L^{\cdot}.\,U^*_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{T}}\, L = \mathfrak{D}$$

și $\mathfrak{T}$-algebra L este R-semisimplă și exactă.

Reciproc, fie L o $\mathfrak{T}$-algebră R-semisimplă și exactă, iar $U_L = \sum\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ unde X_λ sînt elemente prime ale lui L.

Subalgebrele $L_\alpha = (X_\alpha)$, $\alpha \in A$, ale lui L sînt $\mathfrak{T}$-algebre prime și

$$\mathfrak{D} = \mathrm{Ann}_{\mathfrak{T}}\, L = O_L^{\cdot}.\; U_L = O_L^{\cdot}.(\sum_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} O_L^{\cdot}.\; X_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{T}} L_\alpha \supseteq R(\mathfrak{T}).$$

Așa că $R(\mathfrak{T}) = \mathfrak{D}$ și $\mathfrak{T}$ este un semigrup reticulat R-semisimplu.

TEOREMA 3.3. *Semigrupul reticulat* $\hat{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}/R(\mathfrak{T})$ *este* R*-semisimplu.*

Demonstrație. Fie $\vartheta_0 = R(\mathfrak{T})$ și $\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o familie de $\mathfrak{T}$-algebre prime astfel ca

$$\vartheta_0 = \bigcap_{\alpha\in A} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{T}}\, L_\alpha.$$

Fie $L = \prod\limits_{\alpha\in A} L_\alpha$ produsul direct în categoria $K_{\mathfrak{T}}$ al familiei de $\mathfrak{T}$-algebre prime $\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Avem

$$\mathrm{Ann}_{\mathfrak{T}}\, L = \bigcap_{\alpha\in A} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{T}} L_\alpha = \vartheta_0$$

și în plus L este o $\mathfrak{T}$-algebră R-semisimplă. Punînd $\hat{\mathfrak{A}}X = \mathfrak{A}X$ pentru $\hat{\mathfrak{A}} \in \hat{\mathfrak{T}}$, atunci, conform propoziției 3.4, L devine o $\hat{\mathfrak{T}}$-algebră exactă. Evident L rămîne o $\hat{\mathfrak{T}}$-algebră R-semisimplă și după propoziția precedentă $\hat{\mathfrak{T}}$ este R-semisimplu.

DEFINIȚIA 3.2. *Semigrupul reticulat* $\mathfrak{T}$ *se numeste unitar dacă* $\mathfrak{E}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{A}$ *oricare ar fi* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$; $\mathfrak{T}$*-algebra* L *se numește unitară dacă* $\mathfrak{E}X = X$ *oricare ar fi* $X \in L$.

Evident dacă Λ este un inel asociativ unitar, atunci semigrupul reticulat $\mathfrak{T}$ al idealelor sale bilaterale este unitar; dacă M este un Λ-modul unitar, atunci $\mathfrak{T}$-algebra submodulelor sale este unitară; dacă D este un semigrup cu 0 şi 1, atunci semigrupul reticulat al idealelor sale bilaterale este unitar.

Un semigrup reticulat $\mathfrak{S}$ se numeşte *noetherian* (artinian) dacă relaţia de ordine din $\mathfrak{S}$ satisface condiţia lanţurilor ascendente (descendente).

TEOREMA 3.4. *Dacă $\mathfrak{S}$ este un semigrup reticulat noetherian şi unitar, atunci pentru orice $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}$, $R(\mathfrak{A})$ este nilpotent modulo $\mathfrak{A}$ şi este maxim printre elementele cu această proprietate.*

Demonstraţie. Considerăm pe $\mathfrak{S}$ ca $\mathfrak{S}$-algebră (la stînga). Cum $\mathfrak{S}$ este noetherian, atunci $\mathfrak{S}$-algebra $\mathfrak{S}$ satisface axioma (D) [9]. Semigrupul $\mathfrak{S}$ fiind unitar, avem $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E}$. Folosind un rezultat din [9] (p. 30), există un număr finit de elemente prime $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ în $\mathfrak{S}$ astfel ca $\mathfrak{P}_i \supseteq \mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_n \subseteq \mathfrak{P}$, dacă $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{E}$. Fie $\mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{A}}$ şi atunci din $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_n \subseteq \mathfrak{A}$ rezultă că există i_0 astfel ca $\mathfrak{P}_{i_0} \subseteq \mathfrak{P}$. Deci

$$R(\mathfrak{A}) = \bigcap_{\mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{A}}} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_n .$$

Din $R(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{P}_i$ rezultă $R(\mathfrak{A}) + \mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i$, $i = 1, \ldots, n$ şi deci

$$(R(\mathfrak{A}))^n \subseteq \prod_{i=1}^{n} (R(\mathfrak{A}) + \mathfrak{P}_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i \subseteq \mathfrak{A}.$$

Aşa că $R(\mathfrak{A})$ este nilpotent modulo $\mathfrak{A}$. Dacă $\vartheta \in \mathfrak{S}$ este nilpotent modulo $\mathfrak{A}$, atunci $\vartheta \subseteq R(\mathfrak{A})$. Într-adevăr, fie $k > 0$ astfel ca $\vartheta^k \subseteq \mathfrak{A}$. Atunci $\vartheta^k \subseteq \mathfrak{P}$ oricare ar fi $\mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{A}}$. Deci $\vartheta \subseteq \mathfrak{P}$ pentru orice $\mathfrak{P} \in \Omega_{\mathfrak{A}}$, de unde $\vartheta \subseteq R(\mathfrak{A})$.

Cînd $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ avem $R(\mathfrak{A}) = \mathfrak{E}$ şi teorema este banală.

4. RADICAL JACOBSON PENTRU SEMIGRUPURI RETICULATE

O $\mathfrak{S}$-algebră L se numeşte *simplă* dacă $O_L \neq U_L$ şi nu are $\mathfrak{S}$-subalgebre proprii. Evident o $\mathfrak{S}$-algebră L este simplă dacă şi numai dacă $O_L \neq U_L$ şi nu are alte elemente în afară de O_L şi U_L.

DEFINIŢIA 4.1. *O $\mathfrak{S}$-algebră L se numeşte ireductibilă dacă este simplă şi $\mathfrak{E} U_L \neq O_L$.*

Dacă L este o $\mathfrak{S}$-algebră ireductibilă avem $\mathfrak{E} O_L = O_L$, $\mathfrak{E} U_L = U_L$. Aşa că o $\mathfrak{S}$-algebră simplă este ireductibilă dacă şi numai dacă este o $\mathfrak{S}$-algebră unitară.

DEFINIŢIA 4.2. *Un semigrup reticulat $\mathfrak{S}$ se numeşte primitiv (la stînga) dacă există o $\mathfrak{S}$-algebră (la stînga) L ireductibilă şi exactă; un element $\mathfrak{P} \in \mathfrak{S}$ se numeşte primitiv (la stînga) dacă semigrupul $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ este primitiv (la stînga).*

PROPOZIŢIA 4.1. *Elementul $\mathfrak{P} \in \mathfrak{S}$ este primitiv dacă şi numai dacă există o $\mathfrak{S}$-algebră ireductibilă L astfel ca* $\operatorname{Ann}_{\mathfrak{S}} L = \mathfrak{P}$.

Demonstraţie. Dacă $\mathfrak{P}$ este primitiv, atunci există o $\mathfrak{S}$-algebră L ireductibilă şi exactă. Folosind propoziţia 3.4 L devine o $\mathfrak{S}$-algebră ireductibilă astfel că $\mathfrak{P} = \operatorname{Ann}_{\mathfrak{S}} L$.

Reciproc, dacă L este o $\mathfrak{S}$-algebră ireductibilă şi $\mathfrak{P}=\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L$, atunci după propoziţia 3.4 L este o $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$-algebră ireductibilă şi exactă. Deci $\mathfrak{P}$ este element primitiv.

Dacă $\mathfrak{A}$ este un element arbitrar din $\mathfrak{S}$, atunci notăm cu $\Sigma_{\mathfrak{A}}$ familia tuturor $\mathfrak{S}$-algebrelor (la stînga) L ireductibile astfel ca $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L \supseteq \mathfrak{A}$ şi cu $\Omega_{\mathfrak{A}}$ familia tuturor elementelor primitive $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{A}$. Din propoziţia precedentă rezultă

TEOREMA 4.1. *Pentru orice* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}$ *avem*

$$\bigcap_{L\in\Sigma_{\mathfrak{A}}} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L = \bigcap_{\mathfrak{P}\in\Omega_{\mathfrak{A}}} \mathfrak{P}.$$

DEFINIŢIA 4.3. *Dacă* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}$ *atunci elementul*

$$J(\mathfrak{A}) = \bigcap_{L\in\Sigma_{\mathfrak{A}}} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L = \bigcap_{\mathfrak{P}\in\Omega_{\mathfrak{A}}} \mathfrak{P}$$

îl numim radicalul Jacobson (la stînga) al elementului $\mathfrak{A}$.

Dacă $\Sigma_{\mathfrak{A}} = \theta$, atunci punem $J(\mathfrak{A}) = \mathfrak{E}$ şi elementul $\mathfrak{A}$ îl numim *J-radical.* Radicalul Jacobson al semigrupului reticulat $\mathfrak{S}$, notat $J(\mathfrak{S})$ este prin definiţie $J(\mathfrak{D})$.

PROPOZIŢIA 4.2. *Orice $\mathfrak{S}$-algebră ireductibilă este primă, orice element primitiv este prim.*

Demonstraţie. Fie L o $\mathfrak{S}$-algebră ireductibilă şi $\mathfrak{A}X=O_L$, $\mathfrak{A}\in\mathfrak{S}$, $X\in L$, $X\neq O_L$. Atunci $X = U_L$ şi din $\mathfrak{A}U_L = O_L$ rezultă $\mathfrak{A}\subseteq U_L^{\cdot}.U_L = \mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L$. Cum avem şi $\mathfrak{E}U \neq O_L$, rezultă că L este o $\mathfrak{S}$-algebră primă. Partea doua a propoziţiei rezultă acum din propoziţiile 4.1 şi 3.5. Ea poate fi de asemenea dovedită observînd că dacă L este o $\mathfrak{S}$-algebră ireductibilă, atunci $\mathfrak{P}=\mathrm{Ann}_{\mathfrak{S}} L = O_L^{\cdot}.U_L$ este un rezidual esenţial al lui O_L.

COROLAR. *Pentru orice element* $\mathfrak{A}\in\mathfrak{S}$ *avem* $R(\mathfrak{A})\subseteq J(\mathfrak{A})$.

PROPOZIŢIA 4.3 (Amitsur). *Oricare ar fi* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\in\mathfrak{S}$ *avem*

(i) $J(\mathfrak{A}) \supseteq \mathfrak{A}$,

(ii) $J(J(\mathfrak{A})) = J(\mathfrak{A})$,

(iii) $J(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}) = J(\mathfrak{A})\cap J(\mathfrak{B})$.

Proprietăţile (*i*) şi (*ii*) sînt imediate, iar (*iii*) se probează observînd că elementele primitive sînt prime şi folosind faptul că $\mathfrak{S}$ este cvasiîntreg.

Semigrupul reticulat $\mathfrak{S}$ se numeşte *J-semisimplu* (la stînga) dacă $J(\mathfrak{S}) = \mathfrak{D}$. Un element X_0 al unei $\mathfrak{S}$-algebre L se numeşte *J-ireductibil* dacă $\mathfrak{S}$-subalgebra (X_0) este o $\mathfrak{S}$-algebră ireductibilă. Evident X_0 este un element J-ireductibil dacă şi numai dacă $\mathfrak{E}X_0\neq O_L$ şi X_0 este un element minimal în laticea L. O $\mathfrak{S}$-algebră L se numeşte *J-semisimplă* dacă există o familie $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de elemente J-ireductibile $X_\alpha\in L$ astfel ca $U_L = \sum\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

PROPOZIŢIA 4.4. *Semigrupul reticulat $\mathfrak{S}$ este J-semisimplu dacă şi numai dacă există o $\mathfrak{S}$-algebră L J-semisimplă şi exactă.*

Se demonstrează la fel ca propoziţia 3.6.

TEOREMA 4.2. *Semigrupul reticulat* $\mathfrak{S}/J(\mathfrak{S})$ *este J-semisimplu.*

Se demonstrează la fel ca teorema 3.3.

Se defineşte de asemenea radicalul Jacobson la dreapta. În cazul inelelor asociative radicalul Jacobson la stînga coincide cu radicalul Jacobson la dreapta. Pentru semigrupuri reticulate această identitate nu este probată şi rămîne ca o problemă nerezolvată. Este interesant de asemenea de stabilit condiţii de nilpotenţă pentru radicalul Jacobson pentru semigrupuri reticulate.

Primită la redacţie la 1 iunie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. В. А. Андрунакиевич, *Первичные модули и радикал Бэра*. Сиб. мат. журнал, **11**, *6* (1961).
2. N. H. McCoy, *Prime ideals is general rings*. Amer., J. Math., **71** (1949).
3. P. Freyd, *Abelian categories*, Harper' s & Row Publishers, New-York, 1964.
4. O. Goldman, *A characterization of semi-simple rings with descending chain condition*, Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1949).
5. Ion D. Ion, *Radicalul limitei proiective de inele asociative*. St. cerc. mat., **16**, *9* (1964).
6. N. Jacobson, *Structure of rings*. Amer. Math. Soc. Coll. Pub., **37** (1956).
7. P. Jaffard, *Les systèmes d'idéaux*. Dunod, Paris, 1960.
8. А. Г. Курош, *Лекции по общей алгебре*. Москва, 1962.
9. L. Lesieur et R. Croisot, *Algèbre noethérienne non commutative*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.

OBIECTE INJECTIVE ÎN CATEGORIA SPAȚIILOR ORDONATE ARHIMEDIENE CU ELEMENTE AXIALE

DE

NICOLAE POPA

Considerăm categoria spațiilor liniare arhimediene și cu elemente axiale, unde subobiectele sînt subspații liniare care conțin un element axial al spațiului, iar morfismele sînt aplicațiile liniare și pozitive.
În cele ce urmează vor fi caracterizate obiectele injective ale acestei categorii.
Terminologia folosită va fi cea din [1].

Definiția 1. Fie $\mathfrak{X}'$ un spațiu liniar arhimedian, care conține elemente axiale. Vom spune că $\mathfrak{X}'$ are proprietatea $(\mathfrak{P}_+)$ dacă oricare ar fi $\mathfrak{Y}$ din aceeași categorie cu $\mathfrak{X}'$ și $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$ spațiu liniar arhimedian conținînd un element axial al lui $\mathfrak{Y}$, orice aplicație $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ liniară și pozitivă se poate prelungi la $T : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}'$ cu păstrarea acestor proprietăți.

După cum se vede, obiectele injective, în cazul nostru, sînt spațiile cu proprietatea $(\mathfrak{P}_+)$.

Definiția 2. Considerăm categoria spațiilor liniare normate. Un spațiu $\mathfrak{X}'$ din această categorie spunem că are proprietatea $(\mathfrak{P})$ dacă oricare ar fi $\mathfrak{Y}$ și $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ din această categorie, orice aplicație $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ liniară și continuă se prelungește la o aplicație $T : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}'$ cu păstrarea acestor proprietăți și cu păstrarea normei.

Vom enunța cîteva proprietăți ale spațiilor liniare arhimediene și cu elemente axiale.

Propoziția 1. *Orice spațiu liniar $\mathfrak{X}$ arhimedian și cu elemente axiale, este un spațiu liniar ordonat și normat cu norma*

$$\| \mathrm{x} \| = \inf \{ \xi > 0 \mid - \xi \mathbf{1} \leqslant \mathrm{x} \leqslant \xi \mathbf{1} \}$$

unde **1** *este un element axial.*

În plus relația de ordine e compatibilă cu norma în sensul că din $-y \leqslant x \leqslant y,\ y \geqslant 0$ *rezultă* $\|x\| \leqslant \|y\|$.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 8, 1333–1336, BUCUREȘTI, 1965

Pentru demonstrație a se vedea propoziția 3.4.1, Cap. III, [1], unde afirmația este demonstrată în presupunerea că spațiul este și reticulat.

PROPOZIȚIA 2. *Interiorul mulțimii elementelor pozitive într-un spațiu liniar arhimedian și cu elemente axiale* χ *este nevid.*

Demonstrația acestui fapt se află în [2].

PROPOZIȚIA 3. *Fie* $\mathfrak{X}$ *un spațiu liniar arhimedian și cu elemente axiale. Atunci* $\mathfrak{Y}$ *extensia lui* $\mathfrak{X}$ *prin metoda tăieturilor, la un spațiu liniar complet reticulat, e un spațiu cu unitate tare.*

În plus $\mathfrak{X}$ *e un subspațiu vectorial normat al lui* $\mathfrak{Y}$ *cînd* $\mathfrak{X}$ *și* $\mathfrak{Y}$ *se consideră normați ca în propoziția* 1.

Se observă că $\mathfrak{X}$ e dirijat, deci $\mathfrak{Y}$ există, iar drept unitate tare pentru $\mathfrak{Y}$ se ia $(\mathbf{1}^*, \mathbf{1}^*)$, unde $\mathbf{1}$ este un element axial din $\mathfrak{X}$. Partea a doua a propoziției se demonstrează imediat.

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *spații liniare arhimediene cu elemente axiale, normate ca în propoziția* 1. *Dacă* $T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *este liniară și pozitivă, atunci* T *e continuă.*

Pentru demonstrație a se vedea [3], pag. 63, ținîndu-se seama de propoziția 2.

Vom enunța teorema Krein-Rutman în forma în care se găsește în [3].

TEOREMĂ. *Fie* $\mathfrak{X}'$ *un spațiu liniar complet reticulat și cu unitate tare, iar* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *spații normate ordonate cu interiorul mulțimii elementelor pozitive nevid.* $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ *și* $\mathfrak{X} \cap \operatorname{int} \mathfrak{Y}_+ \neq \emptyset$. *Fie* $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ *liniară, continuă și pozitivă. Atunci există o prelungire* $\widetilde{T} : Y \to X'$ *a lui* T *cu păstrarea acestor proprietăți.*

LEMĂ. $\mathfrak{X}'$, *un spațiu liniar arhimedian și cu elemente axiale, are proprietatea* $(\mathfrak{Q}_+)$ *dacă și numai dacă oricare ar fi* $\mathfrak{Y} \supset \mathfrak{X}'$ *din aceeași categorie cu* $\mathfrak{X}'$, *există o aplicație* $P : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}'$ *liniară, surjectivă, pozitivă și cu* $P^2 = P$.

Demonstrație. Fie $\mathfrak{X}'$ cu proprietatea $(\mathfrak{Q}_+)$ și fie $I : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}'$ aplicația identică, care e evident pozitivă.

Atunci fie $P : Z \to \mathfrak{X}'$ prelungirea liniară și pozitivă a lui I.

Evident, aplicația P este surjectivă și :

$$P(P(x)) = I(P(x)) = P(x), \quad (\forall)\ x \in \mathfrak{Y}.$$

Invers, fie $P : Z \to \mathfrak{X}'$ cu proprietățile de mai sus, iar Z un spațiu liniar complet reticulat cu unitate tare, $Z \supset \mathfrak{X}'$ a cărui existență rezultă din propoziția 3.

Fie $\mathfrak{Y} \supset \mathfrak{X}$ spații liniare arhimediene cu elemente axiale, unde $\mathfrak{X}$ conține un element axial al lui $\mathfrak{Y}$.

Din propozițiile 2 și 4 rezultă atunci că teorema Krein-Rutman se poate aplica și deci fie $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ liniară și pozitivă. T poate fi considerată ca $T_1 : \mathfrak{X} \to Z$. Aplicînd teorema Krein-Rutman, obținem o prelungire $\widetilde{T}_1 : \mathfrak{Y} \to Z$ liniară și pozitivă. Punînd $\widetilde{T} = P\widetilde{T}_1$ avem $\widetilde{T} : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}'$, $\widetilde{T}$ este liniară și pozitivă și $\widetilde{T}(x) = P(\widetilde{T}_1(x)) = P(T_1(x)) = P(T(x)) = T(x)$ oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$. Adică $\mathfrak{X}'$ are proprietatea $(\mathfrak{Q}_+)$.

Folosind această lemă vom demonstra următoarea :

TEOREMĂ. *Fie categoria spaţiilor liniare arhimediene şi cu elemente axiale, în care morfismele sînt aplicaţiile liniare şi pozitive, iar subobiectele sînt subspaţiile liniare ce conţin un element axial al spaţiului întreg.*

Atunci obiectele injective sînt spaţiile $C(T)$, unde T este un compact total neconex extremal[1].

Demonstraţie. Fie $C(T)$ cu T un compact total neconex extremal[1]. Dintr-o teoremă a lui Vulih [4], rezultă că $C(T)$ e un spaţiu liniar complet reticulat faţă de relaţia de ordine naturală.

Notînd funcţia constantă 1 cu $\mathbf{1}$, $C(T)$ este un spaţiu cu unitate tare. E uşor de văzut că norma introdusă în $C(T)$ ca în propoziţia 1 coincide cu norma naturală pe $C(T)$.

Analog ca în demonstraţia lemei se arată că putem aplica teorema Krein-Rutman şi deci $C(T)$ este obiect injectiv.

Invers, dacă $\mathfrak{X}'$ este un obiect injectiv, din propoziţia 3 rezultă că există un spaţiu liniar complet reticulat cu unitate tare $\mathfrak{Y} \supset \mathfrak{X}'$ iar din lemă rezultă că există $P : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}'$ cu proprietăţile respective.

Din propoziţia 2.3.6, Cap. 1, [1], $\mathfrak{Y}$ are proprietatea interpolatorie iar familia segmentelor sale are proprietatea intersecţiunei binare.

Dar fie $x_1, x_2 \leqslant y_1, y_2$ cu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{X}'$. Atunci există $z \in \mathfrak{Y}$ cu $x_1, x_2 \leqslant z \leqslant y_1, y_2$. Deci $P(x_1), P(x_2) \leqslant P(z) \leqslant P(y_1), P(y_2)$. Cum $P(z) \in \mathfrak{X}'$ şi $P(x_i) = x_i$, $P(y_i) = y_i$, $i=1, 2$, rezultă $x_1, x_2 \leqslant P(z) \leqslant y_1, y_2$, adică $\mathfrak{X}'$ are proprietatea interpolatorie.

Fie $[x_i, y_i]_{i\in I}$ familia segmentelor lui $\mathfrak{X}'$ şi $[x_i, y_i]^*_{i\in I}$ familia segmentelor de capete $x_i, y_i \in \mathfrak{X}'$ din $\mathfrak{Y}$.

Există, deci, $z \in \bigcap\limits_{i\in I} [x_i, y_i]^*$; $z \in \mathfrak{Y}$.

Atunci $P(z) \in P(\bigcap\limits_{i\in I} [x_i, y_i]^*) \subset \bigcap\limits_{i\in I} P([x_i, y_i]^*) = \bigcap\limits_{i\in I} [x_i, y_i]$. Deci $\mathfrak{X}$ are proprietatea intersecţiei binare pentru segmente, deci este un spaţiu liniar complet reticulat.

Acum, din propoziţia 3.4.3, Cap. III, [1], $\mathfrak{X}'$ are următoarele proprietăţi :

1. Oricare ar fi $x, y \geqslant \mathbf{0}$, atunci $\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$.

2. În plus dacă $x \wedge y = \mathbf{0}$, atunci $\|x+y\| = \|x-y\|$.

Într-adevăr, dacă $x \wedge y = \mathbf{0}$, atunci $x \perp y$, $x \perp -y$ deci $|x+y| = |x| + |y| = |x| + |-y| = |x-y|$, iar din compatibilitatea normei cu relaţia de ordine, $\|x+y\| = \|x-y\|$.

3. Apoi dacă $x_n \geqslant \mathbf{0}$ şi $\|x_n - x\| \to 0$, atunci $x \geqslant \mathbf{0}$.

Într-adevăr, $|x_n \vee y - x \vee y| \leqslant |x_n - x|$ oricare ar fi y. Deci $\|x_n \vee y - x \vee y\| \leqslant \|x_n - x\| \to 0$. Deci $x_n \vee y \to x \vee y$ oricare ar fi y.

Dar, punînd $y = \mathbf{0}$, $x_n \vee \mathbf{0} = x_n$ şi deci $x_n \to x \vee \mathbf{0}$ de unde $x \vee \mathbf{0} = x$ sau $x \geqslant \mathbf{0}$.

4) $\|\mathbf{1}\| = 1$ şi $\|x\| \leqslant 1$ implică $x \leqslant \mathbf{1}$.

Aceste condiţii rezultă imediat din expresia normei, deci $\mathfrak{X}'$ e un (M) -spaţiu în terminologia lui Kakutani [5]. Conform unei teoreme de reprezentare a (M) -spaţiilor rezultă că $\mathfrak{X}'$ e izometric şi izomorf în sensul ordinii cu $C(T)$, unde T este un spaţiu compact.

---

[1] Extremal-închiderea oricărei mulţimi deschise e deschisă.

Cum sferele în $\mathfrak{X}'$ sînt segmente, rezultă că $\mathfrak{X}'$ este cu proprietatea intersecţiei binare faţă de sfere, deci dintr-o teoremă a lui Nachbin [6], este cu proprietatea $(\mathfrak{P})$. În plus, dintr-o teoremă a lui Goodner [7], el este şi complet.

Deci, după cum a demonstrat Kelley [8], este izometric cu $C(S)$, unde S este compact total neconex extremal.

Deci $C(T)$ este izometric cu $C(S)$ şi din teorema Banch-Stone, [9], rezultă că T este omeomorf cu S, deci X' este $C(T)$, unde T este un compact total neconex extremal.

Primită la redacţie la 19 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. R. Cristescu, *Spaţii liniare ordonate*. Ed. Acad. R. P. R., Bucureşti, 1959.
2. D. Wassilkoff, *Partially ordered linear systems and spaces*. Ann. of Math. (1943).
3. G. Marinescu *Spaţii vectoriale normate*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956.
4. В. З. Вулих, *Конкретное представление полуупорядоченных пространств*, Д А Н (1947).
5. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract spaces*. Ann. of Math. (1941).
6. L. Nacbin, *A theorem of the Hahn-Banch type*. Trans. Amer. Math. Soc. (1950).
7. D. Goodner, *Projections in normed linear spaces*. Trans. of Amer. Math. Soc. (1950).
8. J. Kelley, *Banach spaces with the extension property*. Trans. Amer. Math. Soc. (1952).
9. N. Dunford şi J. Schwartz, *Linear operators*. vol. I, Inters. Publ., 1958.

MODEL DE GEOMETRIE AFINĂ PLANĂ PESTE UN CORP FINIT

DE

GHEORGHE LUSZTIG

În această notă se dă un model pentru planele afine peste corpuri finite, utilizînd toruri $2n$-dimensionale.

1°. Considerăm axiomele geometriei afine plane :

A_1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una.
A_2. Există trei puncte necoliniare.
A_3. Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte distincte.
A_4. Axioma lui Euclid.
A_5. Teorema specială a lui Desargues.

În grupul automorfismelor unui plan afin, subgrupul omotetiilor poate fi organizat ca un corp, nu neapărat comutativ. Reciproc, oricărui corp i se poate ataşa un plan afin. Mai mult, oricărui corp K i se poate ataşa un spaţiu afin cu n-dimensiuni K^n, după cum este cunoscut.

2°. Fie K un corp finit şi $K_0 = \{1\}$ subcorpul prim generat de $1 \in K$.

Evident, K este un spaţiu vectorial de dimensiune finită n peste K_0. Fie baza : $\{x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Atunci orice $x \in K$ se scrie în mod unic sub forma $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, unde $a_i \in K_0$. Deci, dacă K_0 are p elemente, K are p^n elemente (p — prim).

În teoria corpurilor finite se arată că fiind dat p prim şi n natural, există un corp cu p^n elemente, unic pînă la un izomorfism [1].

3°. Vom da mai întîi un model pentru geometria în spaţiul afin n-dimensional peste corpul finit prim K_0 cu p elemente. Să considerăm torul real n-dimensional T^n. Putem introduce pe T^n coordonate, consi-

---

[1] Noi nu vom folosi acest rezultat, care este o consecinţă a teoremei lui Wedderburn. În schimb, cele ce urmează pot constitui, eventual, un punct de plecare pentru o demonstraţie geometrică a teoremei lui Wedderburn.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 8, P. 1337–1340, BUCUREŞTI, 1965

derînd ca reper cele n cercuri, factori ai unei descompuneri în produs direct al lui T^n. Pe fiecare cerc stabilim punctele fundamentale $0, 1, 2, \ldots, p-1$, care se identifică cu elementele din K_0. Mulţimea punctelor de pe T^n de coordonate $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, unde $X_i \in K_0$, va fi numită reţeaua punctelor întregi şi ne dă un model pentru K_0^n.

Varietăţile liniare se pot defini ca mulţimea soluţiilor întregi ale unor sisteme liniare cu n necunoscute cu coeficienţi în K_0. O varietate liniară de dimensiune k conţine evident p^k puncte şi este scufundată într-o varietate liniară a lui T^n.

4°. În cazul particular $n = 2$, K_0^2 se realizează prin reţeaua punctelor întregi de pe T^2. Dreptele geometriei sînt mulţimi de cîte p puncte, scufundate în cercuri sau elice închise de pe tor.

5°. Trecem la cazul unui corp finit oarecare K cu p^n elemente. Considerăm spaţiul K_0^n care conţine p^n puncte. Mulţimea acestor puncte se poate organiza ca un corp izomorf cu K, introducînd în mod convenabil înmulţirea (structura de spaţiu vectorial o avem deja). Am construit deci dreapta peste K. Considerăm torul $T^{2n} = T^n \times T^n$. Un punct arbitrar din reţeaua punctelor întregi de pe T^{2n} este de forma $((a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(b_1, b_2, \ldots, b_n))$ unde $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K$.

Definim dreptele ca mulţimea soluţiilor unor ecuaţii de forma :

$$X(u_1, u_2, \ldots, u_n) + Y(v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0, \tag{1}$$

unde $(u_i), (v_i), (w_i) \in K$.

Propoziţia 1. *Dreptele din K^2 sînt varietăţi liniare n-dimensionale din K_0^{2n}.*

Demonstraţie. În adevăr, considerînd baza $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a lui K, ecuaţia (1) se scrie :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i x_i \sum_{i=1}^{n} u_i x_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i \sum_{i=1}^{n} v_i x_i + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = 0, \tag{2}$$

unde $X_i, u_i, Y_i, v_i, w_i \in K_0$. Ţinînd seama că : $x_p x_q = \sum_{i=k}^{n} k_i x_i$, unde $k_1 \in K_0$, rezultă că (2) se scrie sub forma :

$$f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)x_1 + \ldots + f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)x_n = 0, \tag{3}$$

unde f_i sînt funcţii liniare de X_j, Y_j cu coeficienţi în K_0.

Deoarece $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt liniar independente, rezultă :

$$f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0, \ldots, f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0 \tag{4}$$

ceea ce arată că dreptele din K^2 sînt varietăţi liniare în K_0^{2n}.

Faptul că dimensiunea acestor varietăţi liniare este n, rezultă din aceea că dreptele din K^2 conţin p^n puncte.

Vom da un criteriu de paralelism pentru dreptele din K^2.

PROPOZIȚIA 2. *Condiția necesară și suficientă ca două drepte din K^2 să fie paralele este ca varietățile liniare corespunzătoare din K_0^{2n} să fie paralele.*

Demonstrație. În adevăr, două varietăți liniare n-dimensionale dintr-un spațiu $2n$-dimensional sînt fie paralele, fie au puncte comune.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă o varietate n-dimensională din K_0^{2n} nu este dreaptă în K^2, atunci ea intersectează cel puțin o dreaptă din K^2 în mai mult de un punct.*

Demonstrație. Să presupunem că ar exista o varietate n-dimensională V din K_0^{2n} care nu e dreaptă în K^2 și care intersectează orice dreaptă din K^2 în 0 sau 1 puncte. Fie $A \neq B$ două puncte din V. Atunci V și dreapta AB au cel puțin două puncte comune, ceea ce este absurd.

6°. *Plan de varietăți atașat spațiului K^{2n}.* Fie K^{2n} spațiul afin cu $2n$ dimensiuni peste corpul oarecare K. Considerăm o familie $\mathcal{F}$ de varietăți liniare n-dimensionale din K^{2n} cu proprietățile :

F_1. Oricare două varietăți din $\mathcal{F}$ sînt fie paralele, fie au exact un punct comun.

F_2. Orice varietate n-dimensională ce nu aparține lui $\mathcal{F}$ intersectează cel puțin o varietate din $\mathcal{F}$ în mai mult de un punct.

Astfel de familii există, deoarece ele pot fi construite inductiv folosind lema lui Zorn. În adevăr, să considerăm mulțimea M a tuturor familiilor cu proprietatea F_1. Mulțimea M este nevidă. Ordonăm M după finețe. Orice lanț din M admite ca margine superioară reuniunea sa, care este încă în M, deci în M există un element maximal $\mathcal{F}$.

TEOREMA I. *Mulțimea punctelor din K^{2n} și mulțimea dreptelor definite ca elemente din $\mathcal{F}$ satisfac axiomele* A_1—A_4.

Demonstrație. Să observăm că dacă varietatea $V \in \mathcal{F}$ și dacă V' este o varietate n-dimensională paralelă cu V, atunci $V' \in \mathcal{F}$.

În adevăr, dacă V' ar intersecta o varietate din $\mathcal{F}$ în mai mult de un punct, același lucru s-ar întîmpla și pentru V. În particular, rezultă că prin fiecare punct din K^{2n} trece cel puțin o varietate din $\mathcal{F}$.

Fie punctele $A \neq B$. Considerăm mulțimea $\mathcal{F}_A$ a tuturor varietăților din $\mathcal{F}$ ce trec prin A. Presupunem că nici o varietate din $\mathcal{F}_A$ nu conține B. Ducem prin B o varietate V cu $2n-1$ dimensiuni, ce nu conține A. Varietățile lui $\mathcal{F}_A$ lasă pe V urme cu $(n-1)$ dimensiuni, două cîte două disjuncte. Ducem prin B o varietate U, cu $(n-1)$ dimensiuni, paralelă la una din aceste urme. Evident, U este disjunctă de toate urmele din V. U și A generează o varietate liniară n-dimensională care evident aparține lui $\mathcal{F}_A$. Am ajuns la contradicție cu ipoteza că prin $A \neq B$ n-ar trece nici o dreaptă. Cu aceasta, A_1 este verificată, deoarece unicitatea dreptei ce trece prin punctele $A \neq B$ rezultă imediat din F_1. Fie acum punctele $A \neq B$ și V varietatea din $\mathcal{F}$ ce conține A și B. Alegem un punct arbitrar $C \notin V$.

Din A_1 rezultă că A, B, C sînt necoliniare, deci A_2 este verificată. Verificarea lui A_3 este banală.

Pentru A_4 este suficient să observăm că în K^{2n} dintr-un punct exterior varietății n-dimensionale V se poate duce o singură varietate n-dimensională paralelă cu V. Teorema este demonstrată. A_5 — în general nu are loc.

Vom numi mulţimea punctelor din K^{2n} şi a varietăţilor din $\mathcal{F}$, *plan de varietăţi* ataşat spaţiului K^{2n}.

Geometria afină în acest plan este în general nedesarguesiană.

Din propoziţiile 1, 2, 3 şi din teorema 1 rezultă :

TEOREMA 2. *Planul afin peste corpul finit K cu p^n elemente este un plan de varietăţi ataşat spaţiului K_0^{2n}.*

Primită la redacţie la 6 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. E. Artin, *Geometric Algebra*. New York, 1957.
2. N. V. Efimov, *Geometrie superioară*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
3. G. Vrănceanu, C. Teleman, *Geometrie euclidiană, geometrii neeuclidiene şi teoria relativităţii*. Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1965.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

N. DINCULEANU, *Teoria măsurii şi funcţii reale*. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

Scopul principal al acestei cărţi este studiul sistematic al teoriei integrării funcţiilor vectoriale în raport cu măsuri vectoriale, utilizîndu-se în special spaţii Banach. În carte autorul a inserat cele mai recente rezultate obţinute în acest domeniu.

Lucrarea cuprinde 4 capitole. În primul se expun noţiunile fundamentale ale teoriei măsurilor vectoriale (concepute ca funcţii de mulţime). Se începe prin introducerea diverselor clase de mulţimi (clan, trib etc.) insistîndu-se asupra noţiunii de semitrib (un clan ale cărui urme pe propriile sale mulţimi sînt triburi) care — după cum o dovedeşte întreaga desfăşurare a teoriei — constituie domeniul natural de definiţie al măsurilor vectoriale. În paragrafele următoare se studiază funcţiile (vectoriale) de mulţime, aditive sau numărabil aditive, variaţia lor, semivariaţia funcţiilor de mulţime cu valori într-un dual sau într-un spaţiu de operatori precum şi problema prelungirii acestor funcţii. În cazul măsurilor pozitive, prin combinarea definiţiei clasice a măsurabilităţii unei mulţimi cu procedeul de „localizare" utilizat în teoria măsurilor Radon, spaţiul întreg devine o mulţime măsurabilă iar orice măsură pozitivă definită pe un clan arbitrar este prelungită la tribul $\tau(\mu)$ al mulţimilor măsurabile astfel definite; în felul acesta se realizează o concordanţă între teoria măsurilor pe spaţii abstracte şi teoria măsurilor Radon, dezvoltată de N. Bourbaki. Măsurile vectoriale cu variaţie finită, definite pe un clan sînt prelungite la semitribul $\Sigma(\mu)$ al mulţimilor integrabile în raport cu variaţia măsurii respective.

Capitolul II începe cu studiul funcţiilor măsurabile (în raport cu un trib sau o măsură) şi dezvoltă teoria integrării funcţiilor cu valori într-un spaţiu Banach în raport cu măsuri cu valori în spaţii de acelaşi tip. Se dau definiţii de tip Bochner (utilizîndu-se funcţii etajate) dar integrabilitatea unei funcţii $f(x)$ se stabileşte direct, fără utilizarea funcţiei. Din cuprinsul capitolului menţionăm extensiunea teoremei lui Lebesgue-Nikodym (obţinută de autor şi de C. Foiaş în cazul general al măsurilor vectoriale), teorema de convergenţă a martingalelor, speranţa condiţionată şi teorema de existenţă a unei ridicări a spaţiului ∞.

În capitolul III autorul tratează măsurile boreliene pe spaţii local compacte şi în special măsurile regulate inserînd multe rezultate personale. Pentru problemele tratate remarcăm teorema de reprezentare integrală a unei măsuri vectoriale regulate cu variaţie finită, prelungirea măsurilor vectoriale regulate, măsurile Stieltjes pe dreaptă şi teoremele lui Stone şi Kakutani de reducere a integrării pe spaţii abstracte la integrarea pe spaţii local compacte.

Capitolul IV este consacrat teoriei reprezentărilor integrale (în raport cu o măsură vectorială) a operaţiilor liniare majorate (teoreme de tip Riesz-Kakutani), cea mai mare parte din rezultate datorîndu-se autorului. În primul paragraf se consideră cazul spaţiilor Banach iar în următoarele două, rezultatele se extind, mai întîi pentru spaţiile local convexe, iar apoi pentru cazul general al cîmpurilor de vectori. Fiecare din aceste două paragrafe conţin o teorie a integrării în cazul respectiv.

V. POPESCU

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 8, P. 1341, BUCUREŞTI, 1965

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
7383

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 309 p., 15 lei.
N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 352 p., 18,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici și automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systémes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

1966 FEB 5

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 8, P. 1181 —1342, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informaţia" — c. 2783

43831

Lei 12.—

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

9

TOMUL 17
1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU — membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

Pentru a vă asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1966. În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.
Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: str. Mihail Eminescu, nr. 47,
București.
Revista apare de 10 ori pe an

CU OCAZIA

ANULUI NOU

URĂM
CITITORILOR
ŞI COLABORATORILOR
REVISTEI NOASTRE

LA MULŢI ANI

COMITETUL DE REDACŢIE AL REVISTEI
ŞI

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
EA

Abonați-vă pentru anul 1966
la publicațiile periodice editate de
ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

- **STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE**
- **REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES**
- **STUDII ŞI CERCETĂRI DE ASTRONOMIE**
- **ANUARUL OBSERVATORULUI DIN BUCUREŞTI**
- **STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ**
- **REVUE ROUMAINE DE PHYSIQUE**

Abonamentele se primesc la oficiile poştale, agențiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituții.

Abonați-vă pentru anul 1966
la publicațiile periodice editate de
ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

- **STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ**
- **STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ**
- **STUDII ȘI CERCETĂRI DE METALURGIE**
- **REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES**
  - SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
  - SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
  - SÉRIE DE MÉTALLURGIE

Abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 7883

TOM. 17, Nr. 9
1965

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

D. FIRESCU şi P. TĂUTU, Asupra unui model stocastic al hematopoezei 1345
SIMONA POPP, Asupra mişcării subsonice cu circulaţie în jurul unui cilindru circular 1361
R. THEODORESCU, Asupra relaţiilor funcţionale ale proceselor Markov multiple 1367
IULIAN POPOVICI şi CEZAR GHEORGHE, Proprietăţi spinoriale în algebre de afinori 1377
DAN PASCALI, Funcţii analitice generalizate de ordinul *n* . . . 1385
DUMITRU RIPIANU, Asupra problemei bilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare (II) 1391
L. NEGRESCU şi I. PĂVĂLOIU, O proprietate a schemelor matriciale de algoritmi 1405
A. B. NÉMETH, O teoremă relativă la rezolvabilitatea problemei de interpolare lacunară 1411
T. RUS, Echivalenţa schemelor explicite şi a arborilor. 1415
V. I. ISTRĂŢESCU, Asupra operatorilor cvasicompacţi (I) . . . 1425
ŞTEFAN N. BERŢI, Probleme legate de studiul şirurilor normale de cifre 1429
RODICA CHIRILĂ, Profil Jukovski într-un curent fluid cu distribuţie parabolică de viteze 1443
ILEANA CHRISTU, Derivata *A* — areolară 1449
VALENTIN POPESCU, Asupra definiţei funcţiilor măsurabile . 1457
A. CÂRLIG, Scurgerea către un dren vertical 1463
GEORGE ISAC, Algebre universale dense în suma directă completă 1473
LUCIAN BĂDESCU, Extensia definiţiei functorilor derivaţi pentru categorii abeliene 1479
RECENZIE 1485

ST. CERC. MAT., TOM 17, NR. 9, P. 1343–1486, BUCUREŞTI, 1965

ASUPRA UNUI MODEL STOCASTIC AL HEMATOPOEZEI

DE

D. FIRESCU şi Dr. P. TĂUTU

Se consideră un model stocastic al hematopoezei, descris cu ajutorul unui proces de naştere şi moarte N - dimensional

$$\{\mathbf{X}(t),\ t \geqslant 0\},$$

asociat cu un proces de imigrare şi de emigrare.

În prima parte a lucrării se presupune că imigrarea de celule din compartimentul generator S_0 în sistemul de N linii celulare

$$S_1, S_2, \ldots, S_N$$

nu se face simultan în două sau mai multe linii celulare. Consideraţii analoage rămîn valabile pentru procesele de naştere, moarte şi emigrare.

În partea a doua a lucrării se consideră o generalizare a procesului descris, în sensul apariţiei şi dispariţiei simultane a celulelor în întregul sistem de N linii celulare — cu excepţia imigrării.

În aceste condiţii se stabilesc ecuaţiile diferenţiale ale momentelor de diferite ordine ale procesului, inclusiv media şi dispersia sa.

Teoria proceselor stocastice, în general, şi a proceselor de tip Markov, în particular, conduce la construirea de modele matematice care permit descrierea proceselor întîlnite în diferite domenii ale ştiinţelor naturii şi ştiinţelor social-economice. În comparaţie cu modelele deterministe clasice, modelele stocastice descriu mai fidel procesul corespunzător, întrucît este cunoscut că modelele deterministe nu iau în consideraţie factorii aleatori (fluctuaţiile inerente) ce intervin în procesele studiate.

În lucrarea de faţă ne vom ocupa cu tratarea unui proces stocastic de tip Markov care să permită reprezentarea procesului de hematopoeză.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1345–1359, BUCUREŞTI, 1965

Măduva osoasă hematogenă este considerată ca un sistem de compartimente distincte ce conțin grupuri de celule cu anumite caracteristici morfologice :

$$\begin{pmatrix} S_{10} & S_{11} & S_{12} \dots S_{1k} \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} \dots S_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{i0} & S_{i1} & S_{i2} \dots S_{ik} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{N0} & S_{N1} & S_{N2} \dots S_{Nk} \end{pmatrix}.$$

Acest sistem este alimentat de un compartiment generator („stem cell compartment"), S_0, în care celulele sînt greu identificabile morfologic, iar funcțional numai prin tehnici speciale [9].

În cursul diviziunii celulelor din compartimentul S_0, aproximativ jumătate din descendenți se vor diferenția în linii (serii) celulare specifice, iar cealaltă jumătate va rămîne mai departe — conform ipotezei stării de echilibru — în S_0, divizîndu-se în continuare [3], [6].

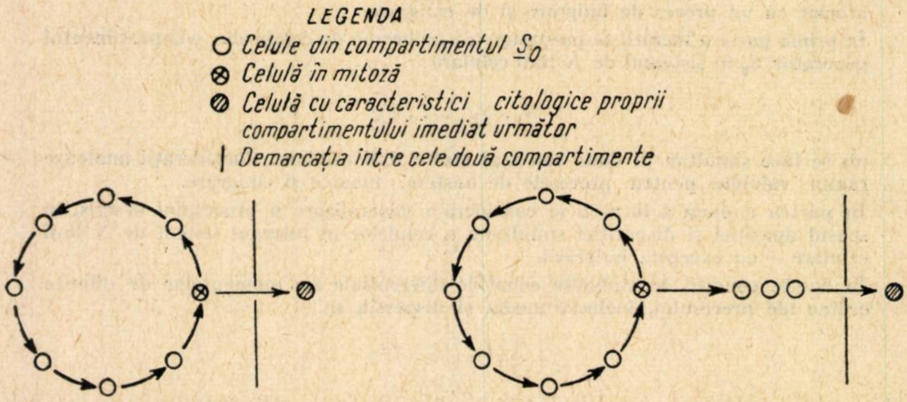

LEGENDA
○ Celule din compartimentul S_0
⊗ Celulă în mitoză
⊘ Celulă cu caracteristici citologice proprii compartimentului imediat următor
| Demarcația între cele două compartimente

Figura 1

I. *Diviziune heteromorfogenă* (în care modificarea caracterelor citologice coincide în timp cu mitoza : celula-fiică este diferită morfologic de celula-mamă, prima aparținînd compartimentului imediat următor)

II. *Diviziune homomorfogenă* (în care modificarea caracterelor citologice nu mai coincide cu mizoză ; numărul de generații celulare este mai mare decît numărul de compartimente)

Modul de multiplicare a celulelor omnipotente din compartimentul S_0 poate fi înfățișat, statistic vorbind, sub forma de mai sus (figură), cu ajutorul căreia s-au imaginat cele două tipuri posibile de diviziune, heteromorfogenă și homomorfogenă [6].

Întrucît celulele omnipotente din S_0 pot da naştere, prin diferenţiere, la serii celulare deosebite (seria eritroblastică, mieloblastică, reticulohistocitară, tromboplastică), putem considera că din S_0 se vor desprinde N serii (linii) celulare $S_1, S_2, \ldots, S_N$. În cursul unei diviziuni (fie ea hetero- sau homomorfogenă) se poate obţine însă numai o singură celulă care să aparţină fie lui S_1, fie lui S_2 etc., fie lui S_N, adică

$$S_0 \to S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_i \vee \ldots \vee S_N .$$

Fiecare din aceste linii are o evoluţie proprie din punct de vedere morfologic, o celulă trecînd prin mai multe compartimente pînă să ajungă la stadiul funcţional matur (de ex. : mieloblast → promielocit → mielocit → metamielocit → granulocit), astfel încît, în evoluţia ei, linia S_i, de exemplu, poate fi privită ca o mulţime finită de compartimente (stări) legate în serie :

$$S_i = \{ S_{i0}, S_{i1}, \ldots, S_{ik} \} .$$

Prin urmare, procesul de hematopoeză poate fi descris, în mod general, prin sistemul (S) de mai jos :

$$\begin{tikzcd}
 & & S_{10} \arrow[r] & S_{11} \arrow[r] & S_{12} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & S_{1k} \\
(S) & S_0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & S_{20} \arrow[r] & S_{21} \arrow[r] & S_{22} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & S_{2k} \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & S_{N0} \arrow[r] & S_{N1} \arrow[r] & S_{N2} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & S_{Nk}
\end{tikzcd}$$

Ultima etapă a celulelor diferenţiate din sistemul (S) este trecerea lor în torentul sanghin, considerat de unii autori drept un compartiment funcţional veritabil, S^*, adică

$$(S) \to S^* .$$

Procesul de diviziune şi maturizare care are loc în întregul sistem (S) poate fi reprezentat ca un proces de naştere şi moarte N-dimensional

$$\{ \mathbf{X}(t),\ t \geqslant 0 \}$$

asociat unor procese de imigrare şi emigrare, care corespund trecerilor din S_0 în compartimentele $S_{10}, S_{20}, \ldots, S_{N0}$, respectiv trecerilor dintr-un compartiment într-altul în interiorul fiecărei linii sau trecerii celulelor mature în circuitul sanghin.

Spaţiul stărilor $\mathfrak{X}$ este un spaţiu euclidian N-dimensional asociat procesului

$$\{ \mathbf{X}(t) = (X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_N(t)), t \geqslant 0 \},$$

unde componentele scalare $X_i(t)$, $(i=1, 2, \ldots, N)$, aparţinînd vectorului $\mathbf{X}(t)$, reprezintă numărul celulelor din liniile S_i la timpul t. Spaţiul $\mathbf{X}$ este deci spaţiul tuturor valorilor posibile $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_N = 0, 1, 2, \ldots)$ pe care le pot lua variabilele aleatoare $X_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$, componentele vectorului aleator $\mathbf{X}(t)$.

I

În prima parte a lucrării ne vom limita la studiul procesului de naştere şi moarte care are loc în compartimentele $S_{10}, S_{20}, \ldots, S_{N0}$, asociat, pe de o parte, procesului de imigrare din S_0 în aceste compartimente, iar, pe de altă parte, procesului de emigrare din compartimentele $S_{10}, S_{20}, \ldots$ $\ldots, S_{N0}$ în cele următoare.

Potrivit celor de mai sus, întregul proces poate fi reprezentat prin sistemul (S') de mai jos :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & S_{10} \arrow[r] & {} \\ (S') & S_0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & S_{20} \arrow[r] & {} \\ & & \vdots & \\ & & S_{N0} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

ceea ce constituie, de fapt, prima etapă din cadrul sistemului (S).

Considerăm că într-un interval mic de timp $(t, t, + \Delta t)$ are loc fie imigrarea unei singure celule din S_0 numai într-unul din compartimentele S_{i0} $(i = 1, 2, \ldots, N)$, fie naşterea (sau moartea) unei singure celule într-unul din aceste compartimente, fie emigrarea, de asemenea, a unei singure celule, din oricare din aceste compartimente în cele imediat următoare.

Procesul considerat de naştere, şi moarte, asociat proceselor de imigrare şi emigrare, se defineşte cu ajutorul probabilităţilor următoare :

1°. $\nu(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $(\nu > 0)$, probabilitatea imigrării unei singure celule din S_0 în oricare din compartimentele $S_{10}, S_{20}, \ldots, S_{N0}$ în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$;

2°. $\lambda_i(t)\, x_i \Delta t + o(\Delta t)$, $(\lambda_i > 0)$, probabilitatea naşterii unei singure celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_i(t)$, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ ştiind că la momentul t erau x_i celule în subpopulaţia respectivă $(x_i = 0, 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, N)$;

3°. $\mu_i(t)\, x_i \Delta t + o(\Delta t)$, $(\mu_i > 0)$, probabilitatea morţii unei singure celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_i(t)$, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, ştiind că la momentul t erau x_i celule în subpopulaţia respectivă $(x_i = 0, 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, N)$;

4°. $\xi_i(t)\, x_i \Delta t + o(\Delta t)$, $(\xi_i > 0)$, probabilitatea emigrării unei singure celule din subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_i(t)$ în compartimentul S_{i1}, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ ştiind că la momentul t erau x_i celule în subpopulaţia respectivă $(x_i = 0, 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots N)$;

5°. $o(\Delta t)$, probabilitatea de a avea modificări mai mari decît o unitate în oricare din subpopulaţii în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$;

6°. $1 - \Delta t \sum\limits_{i=1}^{N} [\nu(t) + (\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi_i(t))\, x_i] + o(\Delta t)$, probabilitatea de a nu avea nici o schimbare în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ în subpopulaţiile corespunzătoare variabilei $X_1(t)$ sau variabilei $X_2(t)$, ş.a.m.d., știind că la momentul t erau $x_1, x_2, \ldots, x_N$ celule în subpopulațiile respective ($x_1, x_2, \ldots, x_N = 0, 1, 2, \ldots$).

7°. Subpopulațiile corespunzătoare variabilelor $X_i(t)$ sînt statistic independente între ele ($i = 1, 2, \ldots, N$).

S-a presupus că procesul stocastic considerat este un proces liniar în raport cu stările sistemului, cu excepția intensității de imigrare, ν, care este independentă de stările respective. De asemenea, s-a presupus că procesul este neomogen în timp.

Fie

$$P(\mathbf{x}; t) = \mathcal{P}\{\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}\},$$

probabilitatea ca la momentul t numărul de celule din sistemul considerat să fie egal cu $\mathbf{x}$, adică

$$P(\mathbf{x}; t) = \mathcal{P}\{X_1(t) = x_1, \ldots, X_N(t) = x_N\}$$

În baza lui (I.1°) — (I.6°) putem scrie condiția de regularitate :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}; t + \Delta t) = &\left[1 - \Delta t \sum_{i=1}^{N} (\nu(t) + x_i(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi_i(t)))\right] P(\mathbf{x}; t) + \\ &+ \Delta t \sum_{i=1}^{N} [\nu(t) + (x_i - 1)\lambda_i(t))] P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i; t) + \\ &+ \Delta t \sum_{i=1}^{N} [(x_i + 1)(\mu_i(t) + \xi_i(t))] P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i; t) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

unde $\mathbf{e}_i$ este un vector cu N componente, avînd toate componentele egale cu zero, în afară de componenta de ordinul i care este egală cu 1.

Din relația de mai sus rezultă

$$\begin{aligned} \frac{P(\mathbf{x}; t + \Delta t) - P(\mathbf{x}; t)}{\Delta t} = &- \sum_{i=1}^{N} [\nu(t) + x_i(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi_i(t))] P(\mathbf{x}; t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} [\nu(t) + ((x_i - 1)\lambda_i(t))] P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i; t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} [(x_i + 1)(\mu_i(t) + \xi_i(t))] P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i; t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$, avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{x}; t)}{\partial t} = &- \sum_{i=1}^{N} [\nu(t) + x_i(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi_i(t))] P(\mathbf{x}; t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} [\nu(t) + ((x_i - 1)\lambda_i(t))] P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i; t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} [(x_i + 1)(\mu_i(t) + \xi_i(t))] P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i; t), \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \end{aligned} \tag{I.1}$$

$$\text{(I.1}'\text{)}\quad \frac{\partial P(\mathbf{0}\,;t)}{\partial t} = -N\nu(t)\,P(\mathbf{0}\,;t) + \sum_{i=1}^{N}(\mu_i(t)+\xi_i(t))\;P(\mathbf{e}_i\,;t),\ (\mathbf{x}=\mathbf{0})$$

Dacă înmulţim acum ambii termeni ai ecuaţiei diferenţiale (I.1) cu produsul $s_1^{x_1}s_2^{x_2}\ldots s_N^{x_N}$ ($|s_i|\leqslant 1,\ i=1,2,\ldots,N$) şi însumăm în raport cu $x_1, x_2,\ldots, x_N$, obţinem

$$\sum_{x_1,\ldots,x_N}\frac{\partial P(\mathbf{x}\,;t)}{\partial t}s_1^{x_1}s_2^{x_2}\ldots s_N^{x_N} = -\,\nu(t)\sum_{i=1}^{N}\sum_{x_1,\ldots,x_N}P(\mathbf{x}\,;t)\,s_1^{x_1}\ldots s_i^{x_i}\ldots s_N^{x_N} -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}[(\lambda_i(t)+\mu_i(t)+\xi_i(t))\,s_i]\sum_{x_1,\ldots,x_N}x_i\,P(\mathbf{x}\,;t)\,s_1^{x_1}\ldots s_i^{x_i-1}\ldots s_N^{x_N} +$$

$$+\,\nu(t)\sum_{i=1}^{N}s_i\sum_{x_1,\ldots,x_N}P(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i\,;t)\,s_1^{x_1}\ldots s_i^{x_i-1}\ldots s_N^{x_N} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t)\,s_i^2\sum_{x_1,\ldots,x_N}(x_i-1)\,P(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i\,;t)\,s_1^{x_1}\ldots s_i^{x_i-2}\ldots s_N^{x_N} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(\mu_i(t)+\xi_i(t))\sum_{x_1,\ldots,x_N}(x_i+1)\,P(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i\,;t)\,s_1^{x_1}\ldots s_i^{x_i}\ldots s_N^{x_N}.$$

Introducînd funcţia generatoare

$$\text{(I.2)}\quad F(s_1,s_2,\ldots,s_N\,;t) = \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_N=0}^{\infty}P(x_1,x_2,\ldots,x_N\,;t)\,s_1^{x_1}s_2^{x_2}\ldots s_N^{x_N}$$

$$(\,|s_i|\leqslant 1,\ i=1,\ 2,\ldots,N)$$

egalităţile (I.1) şi (I.1′) se pot scrie

$$\text{(I.3)}\quad \frac{\partial F(\mathbf{s}\,;t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\Big[\lambda_i(t)\,s_i^2-(\lambda_i(t)+\mu_i(t)+\xi_i(t))\,s_i\,+$$

$$+\,(\mu_i(t)+\xi_i(t))\Big]\frac{\partial F(\mathbf{s}\,;t)}{\partial s_i}+\nu(t)\sum_{i=1}^{N}(s_i-1)\,F(\mathbf{s}\,;t),$$

unde am notat cu $\mathbf{s}$ vectorul de componente $s_1, s_2, \ldots, s_N$.

În continuare, introducem funcţia generatoare cumulant $K(\mathbf{u}\,;t)$, definită prin relaţia

$$\text{(I.4)}\quad K(\mathbf{u}\,;t) = \lg F(\mathbf{s}\,;t),\ (\mathrm{s}_i = \mathrm{e}^{u_i},\ i=1,\ 2,\ \ldots,N),$$

unde, de asemenea, am notat cu $\mathbf{u}$ vectorul de componente $u_1, u_2,\ldots,u_N$.

Cu ajutorul funcției generatoare cumulant, ecuația (I.3) devine

$$\begin{aligned}\frac{\partial K(\mathbf{u}\,;t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \Big[& ((\mathrm{e}^{u_i}-1)\,\lambda_i(t) - (1-\mathrm{e}^{-u_i})\,(\mu_i(t) + \\ & + \xi_i(t)))\,\frac{\partial K(\mathbf{u}\,;t)}{\partial u_i} + \nu(t)\,(\mathrm{e}^{u_i}-1)\Big].\end{aligned} \tag{I.5}$$

Dezvoltînd funcția $K(\mathbf{u}\,;t)$ în serie Maclaurin, avem

$$\begin{aligned} K(\mathbf{u}\,;t) = {} & \sum_{i=1}^{N} u_i\,\frac{\partial K(\mathbf{0}\,;t)}{\partial u_i} + \frac{1}{2\,!}\Big[\sum_{i=1}^{N} u_i^2\,\frac{\partial^2 K(\mathbf{0}\,;t)}{\partial u_i^2} + \\ & + 2\sum_{i\neq j} u_i\,u_j\,\frac{\partial^2 K(\mathbf{0}\,;t)}{\partial u_i\,\partial u_j}\Big] + \frac{1}{3\,!}\Big[\sum_{i=1}^{N} u_i^3\,\frac{\partial^3 K(\mathbf{0}\,;t)}{\partial u_i^3} + \\ & + 3\sum_{i\neq j} u_i^2\,u_j\,\frac{\partial^3 K(\mathbf{0}\,;t)}{\partial u_i^2\,\partial u_j} + 6\sum_{j\neq j\neq k} u_i\,u_j\,u_k\,\frac{\partial^3 K(\mathbf{0}\,;t)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}\Big] + \cdots \end{aligned} \tag{I.6}$$

Ținînd seama de relațiile dintre momentele vectorului aleator $\mathbf{X}(t)$ și funcția generatoare cumulant corespunzătoare, egalitatea precedentă se mai poate scrie, folosind notațiile uzuale :

$$\begin{aligned} K(\mathbf{u}\,;t) = {} & \sum_{i=1}^{N} u_i\,M_{0\ldots1\ldots0}(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} u_i^2\,m_{0\ldots2\ldots0}(t) + \\ & + \sum_{i\neq j} u_i\,u_j\,m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t) + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N} u_i^3\,m_{0\ldots3\ldots0}(t) + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} u_i^2\,u_j\,m_{0\ldots2\ldots1\ldots0}(t) + \sum_{i\neq j\neq k} u_i\,u_j\,u_k\,m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t) + \cdots \end{aligned} \tag{I.7}$$

Derivînd relația (I.7) în raport cu t și cu u_i obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(\mathbf{u}\,;t)}{\partial t} = {} & \sum_{i=1}^{N} u_i\,\frac{\mathrm{d}M_{0\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} u_i^2\,\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots2\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \\ & + \sum_{i\neq j} u_i\,u_i\,\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N} u_i^3\,\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots3\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} u_i^2\,u_j\,\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots2\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{i\neq j\neq k} u_i\,u_j\,u_k\,\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots \end{aligned}$$

și, respectiv,

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(\mathbf{u}\,;t)}{\partial u_i} = {} & M_{0\ldots1\ldots0}(t) + u_i\,m_{0\ldots2\ldots0}(t) + \sum_{j} u_j\,m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t) + \\ & + \frac{1}{2}u_i^2\,m_{0\ldots3\ldots0}(t) + \sum_{j} u_i\,u_j\,m_{0\ldots2\ldots1\ldots0}(t) + \sum_{j\neq k} u_j\,u_k\,m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t) + \cdots \end{aligned}$$

$$(i \neq j \neq k).$$

Aplicînd dezvoltarea în serie Maclaurin a lui e^{u_i} şi înlocuind în (I.5) expresiile derivatelor parţiale $\frac{\partial K(\mathbf{u}\,;t)}{\partial t}$ şi $\frac{\partial K(\mathbf{u}\,;t)}{\partial u_i}$, rezultă

$$
\begin{aligned}
\text{(I.8)}\quad & \sum_{i=1}^{N} u_i \frac{\mathrm{d}M_{0\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots2\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{i\neq j} u_i\, u_j \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \\
& + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N} u_i^3 \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots3\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} u_i^2\, u_j \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots2\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} + \\
& + \sum_{i\neq j\neq k} u_i\, u_j\, u_k \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} u_i \,[(\lambda_i(t) - (\mu_i(t) + \\
& + \xi_i(t)))\, M_{0\ldots1\ldots0}(t) + \nu(t)] + \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \Big[(\lambda_i(t) - (\mu_i(t) + \xi_i(t)))\, m_{0\ldots2\ldots0}(t) + \\
& + \frac{1}{2}(\lambda_i(t) + (\mu_i(t) + \xi_i(t)))\, M_{0\ldots1\ldots0}(t) + \frac{1}{2}\nu(t)\Big] + \\
& + \sum_{i\neq j} u_i\, u_j\, (\lambda_i(t) - (\mu_i(t) + \xi_i(t)))\, m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t) + \\
& + \sum_{i=1}^{N} \mu_i^3 \Big[(\lambda_i(t) - (\mu_i(t) + \xi_i(t))) \left(\frac{1}{6} M_{0\ldots1\ldots0}(t) + \frac{1}{2} m_{0\ldots3\ldots0}(t)\right) + \\
& + \frac{1}{2}(\lambda_i(t) + (\mu_i(t) + \xi_i(t)))\, m_{0\ldots2\ldots0}(t) + \frac{1}{6}\nu(t)\Big] + \\
& + \sum_{i\neq j} u_i^2\, u_j \Big[(\lambda_i(t) - (\mu_i(t) + \xi_i(t)))\, m_{0\ldots2\ldots1\ldots0}(t) + \frac{1}{2}(\lambda_i(t) + \\
& + (\mu_i(t) + \xi_i(t)))\, m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t)\Big] + \sum_{j\neq k} u_i\, u_j\, u_k\, (\lambda_i(t) - (\mu_i(t) + \\
& + \xi_i(t)))\, m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t) + \ldots \qquad (i \neq j \neq k = 1, 2, \ldots, N)
\end{aligned}
$$

În sfîrşit, egalînd coeficienţii lui u_i, u_i^2, $u_i u_j$, u_i^3 etc. din (I.8) şi notînd, pentru simplificarea scrierii,

$$
\begin{aligned}
A_i(t) &= \lambda_i(t) + (\mu_i(t) + \xi_i(t)) \\
B_i(t) &= \lambda_i(t) - (\mu_i(t) + \xi_i(t))
\end{aligned}
$$

deducem următoarele ecuaţii diferenţiale pentru momentele vectorului aleator $\mathbf{X}(t)$:

$$
\text{(I.9)}\qquad \frac{\mathrm{d}M_{0\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = B_i(t)\, M_{0\ldots1\ldots0}(t) + \nu(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)
$$

$$\text{(I.10)} \quad \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots2\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = 2\, B_i(t)\, m_{0\ldots2\ldots0}(t) +$$

$$A_i(t)\, M_{0\ldots1\ldots0}(t) + \nu(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\text{(I.11)} \quad \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = B_i(t)\, m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t), \qquad (i \neq j = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\text{(I.12)} \quad \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots3\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = B_i(t)\, (M_{0\ldots1\ldots0}(t) + 3m_{0\ldots3\ldots0}(t)) +$$

$$+ 3A_i(t)\, m_{0\ldots2\ldots0}(t) + \nu(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\text{(I.13)} \quad \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots2\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = 2B_i(t)\, m_{0\ldots2\ldots1\ldots0}(t) +$$

$$+ A_i(t)\, m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t), \qquad (i \neq j = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\text{(I.14)} \quad \frac{\mathrm{d}m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = B_i(t)\, m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t),$$

$$(i \neq j \neq k = 1, 2, \ldots, N)$$

……

După cum se observă din ecuațiile diferențiale de mai sus, efectul imigrării nu apare în expresia momentelor mixte, ceea ce era de așteptat, în urma ipotezelor făcute. Într-adevăr, efectul imigrării influențează mărimea subpopulației corespunzătoare unei linii celulare, precum și momentele centrate de ordinul doi (sau mai mari) — ca în ecuațiile (I.9), (I.10) și (I.12)—dar corelația dintre două sau mai multe subpopulații celulare este independentă de $\nu(t)$. Mai mult chiar, aceste corelații, date de (I.11), (I.13) etc., sînt și constante.

Soluțiile ecuațiilor (I.9), cu condițiile inițiale $X_i(t_0) = x_0$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ sînt

$$\text{(I.15)} \quad \mathscr{M}\{X_i(t)\} = M_{0\ldots1\ldots0}(t) =$$

$$= \begin{cases} e^{\int_{t_0}^{t} B_i(\theta)\,\mathrm{d}\theta} \left[\int_{t_0}^{t} \nu(\theta)\, e^{-\int_{t_0}^{\theta} B_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\theta + x_0 \right], \text{dacă} \begin{cases} B_i(\theta) \neq 0 \\ B_i(\tau) \neq 0 \end{cases} \\ \int_{t_0}^{t} \nu(\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad , \text{dacă} \begin{cases} B_i(\theta) = 0 \\ B_i(\tau) = 0 \end{cases} \\ (i = 1, 2, \ldots, N) \\ (t_0 < \tau < \theta < t) \end{cases}$$

Dacă funcțiile de intensitate sînt omogene în raport cu timpul, adică

$$\nu(t) = \nu, \quad \lambda_i(t) = \lambda_i, \quad \mu_i(t) = \mu_i, \quad \xi_i(t) = \xi_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

soluţiile ecuaţiilor (I.9), cu condiţiile iniţiale $X_i(0) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$, sînt

$$\mathcal{M}\{X_i(t)\} = M_{0\ldots1\ldots0}(t) = \tag{I.16}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\nu}{\lambda_i - (\mu_i + \xi_i)}\left[e^{(\lambda_i - (\mu_i + \xi_i))t} - 1\right], & \text{dacă } \lambda_i \neq \mu_i + \xi_i \\ \nu t & \text{, dacă } \lambda_i = \mu_i + \xi_i \\ (i = 1, 2, \ldots, N) \end{cases}$$

În acest caz, din (I.16) se obţine următoarea evaluare asimptotică a numărului de celule dintr-o linie oarecare :

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\{X_i(t)\} = \begin{cases} -\dfrac{\nu}{\lambda_i - (\mu_i + \xi_i)}, & \text{dacă } \lambda_i < \mu_i + \xi_i \\ \infty & \text{, dacă } \lambda_i \geqslant \mu_i + \xi_i \\ (i = 1, 2, \ldots, N) \end{cases} \tag{I.17}$$

Rezultatele (I.16) şi (I.17) generalizează pe acelea obţinute de D. G. Kendall într-un caz particular — ce nu se referă la procesul de hematopoeză — privind un proces simplu de naştere, moarte şi imigrare pentru o populaţie unidimensională oarecare [4], [7].

Deoarece, în realitate, coeficienţii $\nu(t)$, $\lambda_i(t)$, $\mu_i(t)$, $\xi_i(t)$ sînt funcţii arbitrare de timp, se poate presupune că ei variază periodic în timp [5], întrucît numărul de celule dintr-o linie prezintă oscilaţii limită în jurul unei valori medii [2]. Valoarea acestor coeficienţi se obţine din analiza datelor experimentale.

Astfel, în cazul cînd procesul de hematopoeză este considerat a fi în stare de echilibru, intensitatea proliferării celulare în linia S_i, de exemplu — adică $\lambda_i(t)$ — se poate stabili pe baza rezultatelor experienţelor cu radioizotopi in vitro sau in vivo (marcare cu H^3-timidină). Valoarea lui $\mu_i(t)$ se poate aproxima din diferenţa dintre intensitatea proliferării în stări normale şi aceea găsită în unele boli ale ţesutului hematopoetic. O încercare de acest fel a fost făcută de S.M.Shea pentru sistemul de reînnoire a celulelor hepatice, asociat unui proces simplu de naştere şi moarte [8].

II

În a doua parte a lucrării vom considera o generalizare a procesului descris mai înainte, în sensul apariţiei şi dispariţiei simultane a N celule în întregul sistem.

Pentru simplificare, vom renunţa, în cele ce urmează la separarea în mai multe compartimente a liniilor celulare specifice. Aici, naşterea va fi concepută ca existînd numai în compartimentele multiplicative, iar procesul de emigrare va fi reprezentat ca trecerea din sistemul celor N linii celulare $(S_1, S_2, \dots, S_N)$ în sistemul S^* (circulaţia periferică).

Acest proces poate fi reprezentat prin sistemul (S''):

$$(S'') \qquad \begin{tikzcd} S_1 \arrow[dr] & \\ S_2 \arrow[r] & S^* \\ \vdots & \\ S_N \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

Sistemul astfel schematizat constituie a doua etapă din cadrul sistemului (S).

Noţiunea de simultaneitate introdusă aici este concepută ca naşterea, sau moartea, sau emigrarea unei singure celule atît în S_1, cît şi în S_2 etc., cît şi în S_N adică

$$S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_N \to S^*.$$

Procesul de naştere, moarte şi emigrare N-dimensional se defineşte cu ajutorul probabilităţilor următoare :

1°. $x_1 x_2 \dots x_N \lambda_{12\dots N}(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$, $(\lambda_{12\dots N} > 0)$, probabilitatea ca în toate cele N linii ale sistemului (S'') să se nască, simultan, cîte o singură celulă, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ ştiind că la momentul t erau x_1 celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_1(t)$, x_2 celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_2(t)$, ş.a.m.d. $(x_1, x_2, \dots, x_N = 0, 1, 2, \dots)$;

2°. $x_1 x_2 \dots x_N (\mu_{12\dots N}(t) + \xi_{12\dots N}(t))\,\Delta t + o(\Delta t)$, $(\mu_{12\dots N} > 0, \xi_{12\dots N} > 0)$, probabilitatea ca în toate cele N linii ale sistemului să dispară (prin moarte sau prin emigrare în S^*), simultan, cîte o singură celulă, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, ştiind că la momentul t erau x_1 celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_1(t)$, x_2 celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_2(t)$ ş.a.m.d. $(x_1, x_2, \dots, x_N = 0, 1, 2, \dots)$;

3°. $o(\Delta t)$, probabilitatea de a avea modificări mai mari decît o unitate în fiecare linie celulară în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$;

4°. $1 - x_1, x_2 \dots x_N (\lambda_{12\dots N}(t) + \mu_{12\dots N}(t) + \xi_{12\dots N}(t))\ \Delta t + o(\Delta t)$, probabilitatea de a nu avea nici o schimbare simultan în cele N linii ale sistemului, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, ştiind că la momentul t erau x_1 celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_1(t)$, x_2 celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_2(t)$, ş.a.m.d. $(x_1, x_2, \dots, x_N = 0, 1, 2, \dots)$.

În baza lui (II.1°) — (II.4°) condiţia de regularitate se scrie :

$$P(\mathbf{x}; t + \Delta t) =$$

$$= P(\mathbf{x}; t)\,[1 - x_1 x_2 \dots x_N (\lambda_{12\dots N}(t) + \mu_{12\dots N}(t) + \xi_{12\dots N}(t)\,\Delta t] +$$

$$+ P(\mathbf{x} - \mathbf{e}; t)\ [(x_1 - 1)(x_2 - 1) \dots (x_N - 1)\ \lambda_{12\dots N}(t)\ \Delta t] +$$

$$+ P(\mathbf{x} + \mathbf{e}; t)\ [(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_N + 1)(\mu_{12\dots N}(t) + \xi_{12\dots N}(t))\,\Delta t] + o(\Delta t),$$

unde acum $P(\mathbf{x}; t)$ este probabilitatea ca la timpul t numărul de celule aparţinînd liniilor S_i ale sistemului (S'') să fie egal cu $\mathbf{x}$, iar $\mathbf{e}$ este un vector cu N componente toate egale cu 1.

Prin trecerea la limită, pentru $\Delta t \to 0$, rezultă

$$\text{(II.1)} \quad \frac{\partial P(\mathbf{x};t)}{\partial t} = -$$

$$- P(\mathbf{x};t)\,[x_1 x_2 \ldots x_N\,(\lambda_{12\ldots N}(t) + \mu_{12\ldots N}(t) + \xi_{12\ldots N}(t))] +$$

$$+ P(\mathbf{x}-\mathbf{e};t)\,[(x_1-1)\,(x_2-1)\ldots(x_N-1)\,\lambda_{12\ldots N}(t)] +$$

$$+ P(\mathbf{x}+\mathbf{e};t)\,[(x_1+1)\,(x_2+1)\ldots(x_N+1)\,(\mu_{12\ldots N}(t) + \xi_{12\ldots N}(t))],\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}).$$

$$\text{(II.1}'\text{)} \quad \frac{\partial P(\mathbf{0};t)}{\partial t} = (\mu_{12\ldots N}(t) + \xi_{12\ldots N}(t))\,P(\mathbf{e};t),\ (\mathbf{x}=\mathbf{0}).$$

Introducînd în (II.1) și (II.1′) funcția generatoare (I.2), obținem următoarea ecuație cu derivate parțiale :

$$\text{(II.2)} \quad \frac{\partial F(\mathbf{s};t)}{\partial t} = [\lambda_{12\ldots N}(t)\,s_1^2 s_2^2 \ldots s_N^2 - (\lambda_{12\ldots N}(t) + \mu_{12\ldots N}(t) +$$

$$+ \xi_{12\ldots N}(t))\,s_1 s_2 \ldots s_N + (\mu_{12\ldots N}(t) + \xi_{12\ldots N}(t))]\,\frac{\partial^N F(\mathbf{s};t)}{\partial s_1 \partial s_2 \ldots \partial s_N}.$$

Punînd $N = 1, 2, 3, \ldots$ și aplicînd funcția generatoare cumulant (I.4), ecuația (II.2) se scrie succesiv :

cazul $N = 1$

$$\text{(II.3)} \quad \frac{\partial K(u_1;t)}{\partial t} = [(e^{u_1}-1)\,\lambda_1(t) - (1-e^{-u_1})\,(\mu_1(t) + \xi_1(t))]\,\frac{\partial K(u_1;t)}{\partial u_1}.$$

cazul $N = 2$

$$\text{(II.4)} \quad \frac{\partial K(u_1, u_2;\ t)}{\partial t} = [(e^{u_1+u_2}-1)\lambda_{12}(t) - (1-e^{-(u_1+u_2)})\,(\mu_{12}(t)+\xi_{12}(t))] \times$$

$$\times \left[\frac{\partial K(u_1, u_2;\ t)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial K(u_1, u_2;\ t)}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 K(u_1, u_2;\ t)}{\partial u_1\,\partial u_2}\right]$$

cazul $N = 3$

$$\text{(II.5)} \quad \frac{\partial K(u_1, u_2, u_3;t)}{\partial t} = [(e^{u_1+u_2+u_3}-1)\,\lambda_{123}(t) - (1-$$

$$- e^{-(u_1+u_2+u_3)})\,(\mu_{123}(t) + \xi_{123}(t))] \cdot \left[\frac{\partial K(u_1, u_2, u_3;t)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial K(u_1, u_2, u_3;t)}{\partial u_2} \cdot\right.$$

$$\cdot \frac{\partial K(u_1, u_2, u_3;t)}{\partial u_3} + \frac{\partial K(u_1, u_2, u_3;t)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 K(u_1,u_2,u_3;t)}{\partial u_2\,\partial u_3} + \frac{\partial K(u_1, u_2, u_3;t)}{\partial u_2} \cdot$$

$$\left. \cdot \frac{\partial^2 K(u_1,u_2,u_3;t)}{\partial u_3\,\partial u_1} + \frac{\partial K(u_1, u_2, u_3;t)}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial^2 K(u_1,u_2,u_3;t)}{\partial u_1\,\partial u_2} + \frac{\partial^3 K(u_1,u_2,u_3;t)}{\partial u_1\,\partial u_2\,\partial u_3}\right].$$

Urmînd un procedeu analog cu acela folosit în prima parte a lucrării, privind dezvoltarea în serie MACLAURIN (I.6) şi ţinînd seama de relaţiile dintre momente şi funcţia generatoare cumulant corespunzătoare, deducem următoarele ecuaţii diferenţiale pentru momente :

cazul N = 1

$$\text{(II.6)} \qquad \frac{\mathrm{d}M_1(t)}{\mathrm{d}t} = B_1(t)\, M_1(t) \qquad (B_1(t) = \lambda_1(t) - (\mu_1(t) + \xi_1(t)))$$

$$\text{(II.7)} \qquad \frac{\mathrm{d}m_2(t)}{\mathrm{d}t} = 2B_1(t)\, m_2(t) + A_1(t)\, M_1(t), \qquad (A_1(t) = \lambda_1(t) + (\mu_1(t) + \xi_1(t)))$$

. . . .

cazul N = 2

$$\text{(II.8)} \qquad \frac{\mathrm{d}M_{10}(t)}{\mathrm{d}t} = B_{12}(t)\,(M_{10}(t)\, M_{01}(t) + m_{11}(t))$$

$$(B_{12}(t) = \lambda_{12}(t) - (\mu_{12}(t) + \xi_{12}(t)))$$

$$\frac{\mathrm{d}M_{01}(t)}{\mathrm{d}t} = B_{12}(t)\,(M_{10}(t)\, M_{01}(t) + m_{11}(t))\cdot$$

$$\text{(II.9)} \qquad \frac{\mathrm{d}m_{20}(t)}{\mathrm{d}t} = 2B_{12}(t)\,(M_{01}(t)\, m_{20}(t) + M_{01}(t)\, m_{11}(t) +$$

$$+ m_{21}(t)) + A_{12}(t)\,(M_{10}(t)\, M_{01}(t) + m_{11}(t))\; (A_{12}(t) = \lambda_{12}(t) = (\mu_{12}(t) + \xi_{12}(t))$$

$$\text{(II.10)} \qquad \frac{\mathrm{d}m_{02}(t)}{\mathrm{d}t} = 2B_{12}(t)\,(M_{10}(t)\, m_{02}(t) + M_{01}(t)\, m_{11}(t) +$$

$$m_{12}(t)) + A_{12}(t)\,(M_{10}(t)\, M_{01}(t) + m_{11}(t))$$

$$\text{(II.11)} \qquad \frac{\mathrm{d}m_{11}(t)}{\mathrm{d}t} = B_{12}(t)\,[M_{01}(t)\,(m_{11}(t) + m_{20}(t)) +$$

$$+ M_{10}(t)\,(m_{11}(t) + m_{02}(t)) + m_{12}(t) + m_{21}(t)] + A_{12}(t)\,(M_{10}(t)\, M_{01}(t) + m_{11}(t))$$

. . . .

cazul N = 3

$$\text{(II.12)} \qquad \frac{\mathrm{d}M_{100}(t)}{\mathrm{d}t} = B_{123}(t)\,(M_{100}(t)\, M_{010}(t)\, M_{001}(t) +$$

$$+ M_{100}(t)\, m_{011}(t) + M_{010}(t)\, m_{101}(t) + M_{001}(t)\, m_{110}(t) + m_{111}(t))$$

$$(B_{123}(t) = \lambda_{123}(t) - (\mu_{123}(t) + \xi_{123}(t)))$$

$$(\mathrm{II}.13)\qquad \frac{\mathrm{d}m_{200}(t)}{\mathrm{d}t} = 2B_{123}(t)\,(M_{100}(t)\,M_{010}(t)\,m_{101}(t) +$$

$$+ M_{100}(t)\,M_{001}(t)\,m_{110}(t) + M_{100}(t)\,m_{111}(t) + M_{010}(t)\,M_{001}(t)\,m_{200}(t) +$$

$$+ M_{010}(t)\,m_{201}(t) + M_{001}(t)\,m_{210}(t) + 2m_{110}(t)\,m_{101}(t) + m_{011}(t)\,m_{200}(t)) +$$

$$+ A_{123}(t)\,[M_{100}(t)\,(M_{010}(t)\,m_{201}(t) + M_{001}(t)\,m_{030}(t) + 2m_{110}(t)\,m_{101}(t)) +$$

$$+ M_{010}(t)\,(M_{001}(t)\,m_{300}(t) + 2m_{101}(t)\,m_{200}(t)) + m_{110}(t)\,(2M_{001}(t)\,m_{200}(t) +$$

$$+ 3m_{201}(t)) + m_{101}(t)\,(m_{030}(t) + m_{210}(t)) + m_{011}(t)\,m_{300}(t) +$$

$$+ 2m_{111}(t)\,m_{200}(t)],\ (A_{123}(t) = \lambda_{123}(t) + (\mu_{123}(t) + \xi_{123}(t)))$$

……………………………………………………………

În cazul unidimensional ($N = 1$), soluțiile ecuațiilor (II.6) și (II.7), cu condiția inițială $X(t_0) = x_0$, ($x_0 \geqslant 1$), sînt :

$$(\mathrm{II}.14)\qquad \mathscr{M}\{X(t)\} = x_0\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}[\lambda(\theta)-(\mu(\theta)+\xi(\theta))]\mathrm{d}\theta}$$

$$(\mathrm{II}.15)\qquad \mathscr{D}^2\{X(t)\} = \mathrm{e}^{2\int_{t_0}^{t}[\lambda(\theta)-(\mu(\theta)+\xi(\theta))]\mathrm{d}\theta} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} (\lambda(\theta) + \mu(\theta) + \xi(\theta))\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}[\lambda(\theta)-(\mu(\theta)+\xi(\theta))]\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

În cazul multidimensional ($N \geqslant 2$), se vede că dificultatea esențială în rezolvarea ecuațiilor diferențiale corespunzătoare constă în forma neliniară a acestora. O evaluare aproximativă a soluțiilor respective poate fi obținută, de exemplu, prin folosirea metodei numerelor aleatoare (Monte-Carlo), care nu face însă obiectul acestei lucrări. Menționăm că prin utilizarea acestei metode s-au obținut rezultate interesante în evaluarea proliferării celulelor din compartimentul generator [10].

Primită la redacție la 15 iunie 1965

Centrul de statistică matematică
al Academiei R.P.R.
Str. M. Eminescu, nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Bharucha-Reid A. T., *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications.* McGraw-Hill, New York, 1960.
2. Bierman, H. R., *Homeostasis of the Blood Cell Elements, in „Functions of the Blood''* (R. G. Macfarlane, A.H.T. Robb-Smith ed.), Academic Press, New York, 1961.

3. Cronkite, E. P., Bond, V. P., Fliedner, T. M., Killmann, S. A., *The Use of Tritiated Thymidine in the Study of Haemopoietic Cell Proliferation* – in CIBA Found. Symp. on Haemopoiesis – Churchill, London, 1960.

4. Kendall, D. G., *On the Generalized „Birth-and-Death Process''* Ann. Math. Statist., **19**, 1–15 (1948).

5. Kendall, D. G., *Stochastic Processes and Population Growth.* J. Roy. Statist. Soc., ser. B., **11**, 230–264 (1949).

6. Killmann, s. a., Cronkite, E. P., Eliedner, T. M., Bond, V. P., Brecher, G., *Mitotic Indices of Human Bone Marrow Cells (II).* Blood, **21**, 141–163 (1963).

7. Lamens, A., Consael, R., *Sur le processus non-homogène de naissance et de mort.* Acad. Roy. belg., Bull. classe sci., **43**, 597–605 (1957).

8. Shea, S. M., *On the Stochastic Interpretation of a Pathological Cell Renewal System (I).* Bull. Math. Biophys., **26**, 265–274 (1964).

9. Till, J. E., Mc Culloch, E. A., Radiation Res., **14**, 213 (1961).

10. Till, J. E., Mc Culloch, E. A., Siminovitch, L., *A Stochastic Model of Stem Cell Proliferation Based on the Growth of Spleen Colony-Forming Cells* – Proc. Natl. Acad. Sci., **15**, 29–36 (1964).

ASUPRA MIŞCĂRII SUBSONICE CU CIRCULAŢIE ÎN JURUL UNUI CILINDRU CIRCULAR

DE

SIMONA POPP

Se studiază, cu metoda aproximativă a lui B. M. Kisseleff, mişcarea subsonică, plană, cu circulaţie, în jurul unui cilindru circular.

1. Problema mişcărilor cu circulaţie în jurul unor obstacole, în mişcarea plană izentropică a unui fluid compresibil la mari viteze subsonice, fiind foarte dificilă, a fost abordată de cercetători începînd abia cu anul 1940.

Menţionăm, în acest sens, lucrările lui S. A. Hristianovici [1], L. Bers [2], L. N. Sretenski [3], J. Leray [4], P. Germain [5], C. C. Lin [6], A. Gelbart [7], C. Iacob [8], I. Filimon [9] etc.

În lucrarea de faţă ne propunem să studiem mişcarea, cu circulaţie, în jurul unui obstacol circular în fluid nelimitat, cu metoda aproximativă a lui B. M. Kisseleff [10].

Reamintim, pe scurt, în ce constă această metodă.

Se consideră următoarea formulă care generalizează, pentru fluidele compresibile, pe aceea a lui Blasius-Ciaplîghin referitoare la calculul rezistenţei hidrodinamice pe obstacol în fluid incompresibil.

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{i}R_x + R_y) = -\frac{\rho}{2} V^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}z + \left(p + \rho\frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}\bar{z} \tag{1.1}$$

în care R_x, R_y sînt componentele rezultantei forţelor care acţionează asupra conturului care mărgineşte corpul, V şi θ sînt, respectiv, mărimea şi unghiul pe care îl face viteza cu direcţia generală a curentului la infinit, ρ este masa specifică, p presiunea, iar $z = x + \mathrm{i}y$ şi $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1361–1365, BUCUREŞTI, 1965

Mişcarea fiind adiabatică, expresiile lui ρ şi p în funcţie de V vor fi date de relaţiile

$$(1.2)\qquad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \rho_0\,\rho(\lambda)$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_0\,p(\lambda)$$

cu $\lambda = \frac{V}{V^*}$, V^* fiind viteza critică.

Ecuaţia fundamentală, dată de Kisseleff în lucrarea sa, se obţine din relaţia (1.1), din condiţiile care exprimă faptul că această relaţie este o diferenţială totală exactă.

Introducînd notaţia

$$(1.3)\qquad \lambda^2\,\rho(\lambda) = \widetilde{\lambda}^2$$

şi avînd în vedere expresia

$$(1.4)\qquad p + \frac{\rho V^2}{2} = p_0\,\rho(\lambda)\left(1 + \frac{\lambda^2}{1+\gamma}\right)$$

Kisseleff scrie ecuaţia de mişcare sub forma :

$$(1.5)\qquad \frac{\partial \widetilde{\lambda}^2 e^{-2i\theta}}{\partial \bar{z}} + \frac{\gamma+1}{\gamma}\,\frac{\partial\, \rho(\lambda)\left(1 + \frac{\lambda^2}{\gamma+1}\right)}{\partial z} = 0.$$

Observînd că expresia $\chi(\lambda) = \rho(\lambda)\left(1 + \frac{\lambda^2}{\gamma+1}\right)$ care figurează în ecuaţia (1.5) ia valori foarte apropiate de unitate, cînd λ variază între zero şi unu, în special pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$, Kisseleff o consideră aproximativ constantă şi deduce astfel din (1.5)

$$(1.6)\qquad \frac{\partial \widetilde{\lambda}^2 e^{-2i\theta}}{\partial \bar{z}} = 0$$

de unde găseşte că $\widetilde{\lambda}\, e^{-i\theta}$ este o funcţie analitică depinzînd numai de z.

Relaţia (1.6) este, însă, riguros valabilă pentru fluidul incompresibil.

Rezultă, deci, că se poate determina, cu o bună aproximaţie, corecţia de compresibilitate, fără a schimba variaţia unghiului de înclinare al vectorului viteză, exprimînd pe λ în funcţie de $\widetilde{\lambda}$ într-un mod convenabil ales după cum se va vedea în cele ce urmează.

Deoarece funcţia $\chi(\lambda)$ se poate dezvolta după puterile lui λ şi, prin intermediul relaţiei (1.3), după puterile lui $\widetilde{\lambda}$, Kisseleff aproximează pe $\chi(\widetilde{\lambda})$ cu expresia

$$(1.7)\qquad \chi(\widetilde{\lambda}) = 1 - a\,\widetilde{\lambda}^6 \quad \text{în care } a = 0{,}4.$$

Ţinînd seama de valoarea $\gamma = 1{,}4$ şi de relaţia (1.7) ecuaţia (1.5) ia forma :

$$\frac{\partial \tilde{\lambda} e^{-i\theta}}{\partial \bar{z}} = 0{,}343 \frac{e^{i\theta}}{\tilde{\lambda}} \frac{\partial \tilde{\lambda}^6}{\partial z} \cdot \tag{1.8}$$

Pentru obţinerea primei aproximaţii se înlocuieşte, în membrul drept al ecuaţiei (1.8), $\tilde{\lambda} e^{-i\theta}$ cu viteza complexă corespunzătoare curentului incompresibil, în prezenţa aceluiaşi corp ca şi în compresibil, $\overline{w} = \tilde{\lambda}_0 e^{-i\theta_0}$, $\overline{w}$ fiind o funcţie analitică de variabila z.

În acest mod, se găseşte, ca primă aproximaţie, următoarea soluţie a ecuaţiei (1.8) :

$$\tilde{\lambda}_1 e^{-i\theta_1} = 0{,}343 \frac{1}{\tilde{\lambda}_0 e^{-i\theta_0}} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \tilde{\lambda}_0^6 \, d\bar{z} + \Phi_1(z). \tag{1.9}$$

Prelucrînd această relaţie, Kisseleff obţine, în definitiv, pe conturul corpului,

$$\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_0} = 1 + 1{,}028 \left[\operatorname{Re} \frac{d\overline{w}}{d\bar{z}} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} w^3 \, d\bar{z} + \operatorname{Re} \Phi(z) \right], \tag{1.10}$$

unde $\Phi(z)$ este o funcţie analitică astfel aleasă încît să se anuleze la infinit şi să satisfacă pe contur condiţia

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = - \operatorname{Im} \frac{d\overline{w}}{dz} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} w^3 \, d\bar{z}. \tag{1.11}$$

O dată determinat $\tilde{\lambda}_1$ din (1.10), valorile lui λ se calculează cu ajutorul relaţiei (1.3).

B. M. Kisseleff a aplicat metoda sa la mişcarea în jurul unui cilindru circular în fluid nelimitat dînd şi indicaţii referitoare la studiul mişcării, cu circulaţie în jurul unui profil oarecare, deoarece prin efectuarea unei transformări conforme se poate trece de la un profil oarecare la cerc.

Metoda este susceptibilă de a fi aplicată şi la mişcarea în jurul unui profil într-un canal, ceea ce s-a efectuat de către S. Popp [11].

2. Extinderea metodei lui B. M. Kisseleff la mişcări cu circulaţie în jurul unor profile se poate face fără dificultăţi deoarece se lucrează în planul fizic.

Totul revine la studiul comportamentului la infinit al termenului $\frac{d\overline{w}}{dz} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} w^3 \, d\bar{z}$, unde $\overline{w}$ reprezintă viteza complexă în mişcarea incompresibilă corespunzătoare.

Considerăm, pentru început, mişcarea, cu circulaţie, în jurul unui cilindru circular în fluid nelimitat.

Potenţialul complex al mişcării pentru fluidul incompresibil va fi

$$f(z) = \tilde{\lambda}_\infty \left(z + \frac{1}{z} + \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi i} \lg z \right), \tag{2.1}$$

unde $\widetilde{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\widetilde{\lambda}_\infty}$, Γ fiind circulația, iar $\widetilde{\lambda}_\infty$ fiind obținut din relația (1.3) pentru un λ_∞ dat, care, la rîndul său, se exprimă în funcție de V_∞ conform notației adoptate în (1.2).

Calculăm viteza complexă în incompresibil

$$\overline{w} = \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, z} = \widetilde{\lambda}_\infty \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,\frac{1}{z}\right) \tag{2.2}$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}z} = -\,\widetilde{\lambda}_\infty \left(\frac{\Gamma}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3}\right),$$

$\frac{\mathrm{d}\,\overline{w}}{\mathrm{d}\,z}$ fiind o funcție regulată în vecinătatea punctului de la infinit.

Ne ocupăm, mai departe, de termenul

$$\int_{\overline{z}_0}^{\overline{z}} w^3\, \mathrm{d}\overline{z}.$$

Din (2.2) rezultă

$$w = \widetilde{\lambda}_\infty \left(1 - \frac{1}{\overline{z}^2} - \frac{\widetilde{\Gamma}}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,\frac{1}{\overline{z}}\right)$$

și

$$w^3 = \widetilde{\lambda}_\infty^3 \left[1 - \frac{3\,\widetilde{\Gamma}}{2\pi\,\mathrm{i}} - \frac{1}{\overline{z}} - 3\left(1 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{4\,\pi^2}\right)\frac{1}{\overline{z}^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}}{2\pi\,\mathrm{i}}\left(6 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{4\,\pi^2}\right)\frac{1}{\overline{z}^3} + \right.$$
$$\left. + \,3\left(1 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{4\,\pi^2}\right)\frac{1}{\overline{z}^4} - \frac{3\,\widetilde{\Gamma}}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,\frac{1}{\overline{z}^5} - \frac{1}{\overline{z}^6}\right]$$

prin urmare

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{w}}{\mathrm{d}z}\int_{\overline{z}_0}^{\overline{z}} w^3\, \mathrm{d}\overline{z} = \widetilde{\lambda}_\infty^3 \frac{\mathrm{d}\,\overline{w}}{\mathrm{d}z}\left[\overline{z} - \frac{3\,\widetilde{\Gamma}}{2\,\pi\,\mathrm{i}} \lg \overline{z} + 3\left(1 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{4\pi^2}\right)\frac{1}{\overline{z}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\widetilde{\Gamma}}{4\pi\,\mathrm{i}}\left(6 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{4\,\pi^2}\right)\frac{1}{\overline{z}^2} - \left(1 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{4\,\pi^2}\right)\frac{1}{\overline{z}^3} + \frac{3\,\widetilde{\Gamma}}{8\,\pi\,\mathrm{i}}\,\frac{1}{\overline{z}^4} + \frac{1}{5\,\overline{z}^5}\right]_{\overline{z}_0}^{\overline{z}}.$$

Pentru a înlătura multiformitatea care apare în această expresie datorită termenului care îl conține pe $\lg \overline{z}$, se adaogă funcției corespunzătoare $\Phi\,(z)$ din formula (1.10) termenul

$$-\,\frac{3\,\widetilde{\Gamma}}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,\widetilde{\lambda}_\infty^3\,\frac{\mathrm{d}\,\overline{w}}{\mathrm{d}z}\,\lg\, z. \tag{2.3}$$

Prin urmare, pentru mișcarea cu circulație, vom avea :

$$\frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_0} = 1 + 1{,}028\ \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}z}\left(\int_{\overline{z}_0}^{\overline{z}} w^3\ \mathrm{d}\,\overline{z} - \frac{3\,\widetilde{\Gamma}}{3\,\pi\,\mathrm{i}}\,\widetilde{\lambda}_\infty^3\ \lg\ z\right) + \Phi_1\,(z)\right] \tag{2.4}$$

funcţia $\Phi_1(z)$ trebuind să fie determinată cu condiţia de a fi nulă la infinit, iar pe contur,

$$\text{(2.5)} \qquad \operatorname{Im} \Phi_1(z) = -\operatorname{Im} \frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}z}\left[\int_{\overline{z}_0}^{\overline{z}} w^3 \,\mathrm{d}\overline{z} - \frac{3\widetilde{\Gamma}}{2\pi \mathrm{i}} \widetilde{\lambda}_\infty^3 \lg z\right].$$

Ţinînd seama că pe contur $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ se obţine cu (2.5) după efectuarea calculelor :

$$\text{(2.6)} \quad \Phi_1(z) = -\widetilde{\lambda}_\infty^4 \left\{\frac{\widetilde{\Gamma}\mathrm{i}}{4\pi}\left(13 + \frac{3\widetilde{\Gamma}^2}{2\pi^2}\right)\frac{1}{z} + \left(\frac{28}{5} + \frac{21\widetilde{\Gamma}^2}{16\pi^2}\right)\frac{1}{z^2} + \frac{3\widetilde{\Gamma}\mathrm{i}}{5\pi}\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4}\right\}$$

şi apoi, din (2.4),

$$\text{(2.7)} \qquad \frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_0} = 1 - 1{,}028\, \widetilde{\lambda}_\infty^4 \left\{2 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{4\pi^2}\left(5 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{8\pi^2}\right) - \frac{\widetilde{\Gamma}}{2\pi}\left(5 + \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{2\pi^2}\right)\sin\varphi - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{8}\,\frac{\widetilde{\Gamma}}{\pi^2}\right)\cos 2\varphi + \frac{\widetilde{\Gamma}}{5\pi}\sin 3\varphi\right\}$$

$\widetilde{\lambda}_0$ corespunzînd fluidului incompresibil.

Pentru $\Gamma = 0$, deci în mişcarea fără circulaţie, se regăseşte formula lui Kisseleff [10] :

$$\frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_0} = 1 - 2{,}056\, \widetilde{\lambda}_\infty^4 \left[1 - \frac{2}{5} \cos 2\varphi\right].$$

Printr-un procedeu analog cu cel de mai sus se poate studia mişcarea cu circulaţie în jurul unui obstacol de o formă oarecare, folosind o reprezentare conformă corespunzătoare.

Primită la redacţie la 17 iunie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. С. А. Христианович, Труды ЦАГН, Москва, *481* (1940).
2. L. Bers, Technical Notes, NACA, *969* şi *970*, (1944) ; Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, *1*, 41—46 (1949) ; Communications on Pure and Applied Math., **7**, 441—504 (1954).
3. Л. Н. Сретенский, Известия Акад. Наук СССР, 622—637 (1945).
4. J. Leray, C.R., Paris, **223**, 603—605 (1946) ; Journal de Math. pures et appliquées, **28**, 181—191 (1949).
5. P. Germain, C.R., Paris, **223**, 532 (1946).
6. C. C. Lin, Quarterly of Applied Math., **4**, 291 (1946).
7. Gelbart, Technical Notes, NACA, *1170* (1947).
8. C. Iacob, Comunicările Acad. R.P.R., *1*, 741—746 (1951).
9. I. Filimon, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **9**, 433—449 (1957) ; St. cerc. mat., **8**, 467—504 (1957).
10. Б. М. Кисселефф, *Сборник теоретических работ по аэродинамике*. Оборонгиз, Москва, 1957.
11. Simona Popp, St. cerc. mat., **XIV**, *2*, 213—221 (1963).

ASUPRA RELAȚIILOR FUNCȚIONALE ALE PROCESELOR MARKOV MULTIPLE

DE

R. THEODORESCU

În această notă se justifică relațiile funcționale care stau la baza studiului analitic direct al proceselor Markov multiple.

1. Să considerăm un cîmp de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ fixat și să notăm cu ω elementele din Ω. În cele ce urmează vom considera familii de variabile aleatoare definite pe acest cîmp de probabilitate care pot lua un număr cel mult numărabil de valori.

DEFINIȚIA 1. Un proces aleator discret $(\xi_n)_{n \in N}$ formează un *lanț Markov de multiplicitate* p dacă pentru orice $n \geqslant p+1, 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ și orice $i_1. \ldots, i_n \in I$, avem

$$P(\xi_{tn}(\omega) = i_n \mid \xi_{t_1; t_{n-1}}(\omega) = i_1 \ldots, \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}) = \tag{1}$$

$$= P(\xi_{t_n}(\omega) = i_n \mid \xi_{t_{n-p}}(\omega) = i_{n-p}, \ldots, \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1})$$

ori de cîte ori membrul stîng este definit.

Evident, condiția (1) este echivalentă cu următoarea, aparent mai puțin restrictivă : pentru orice $n \geqslant p$ și orice $i_1, \ldots, i_n \in I$, avem

$$P(\xi_n(\omega) = i_n \mid \xi_0(\omega) = i_0, \ldots, \xi_{n-1}(\omega) = i_{n-1}) =$$

$$= P(\xi_n(\omega) = i_n \mid \xi_{n-p}(\omega) = i_{n-p}, \ldots, \xi_{n-1}(\omega) = i_{n-1}). \tag{2}$$

PROPOZIȚIA 1. *Pentru orice* $n \geqslant p+1, 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_{n+m}$ *și orice* $i_1, \ldots, i_n, \ldots i_{n+m} \in I$ *avem*

$$\begin{aligned} &P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu, n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant n-1) = \\ &= P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu, n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu, n-p \leqslant \nu \leqslant n-1). \end{aligned} \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17 NR. 9, P. 1367 – 1375 BUCUREȘTI 1965

Demonstrație Procedăm prin inducție asupra lui m. Observăm că pentru $m = 0$, relația (3) este identică cu relația (1). Mai departe, presupunînd că relația (3) este adevărată pentru un anumit m, să o demonstrăm pentru $m + 1$. Obținem

$$
\begin{aligned}
& P\,(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n + m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n - 1) = \\
& = P\,(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n + m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n - 1) \times \\
& \times P\,(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n + m) = \\
& = P\,(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n + m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n - p \leqslant \nu \leqslant n - 1) \times \\
& \times P\,(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n + m - p + 1 \leqslant \nu \leqslant n + m) = \\
& = P\,(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n + m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n - p \leqslant \nu \leqslant n - 1) \times \\
& \times P\,(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n - p \leqslant \nu \leqslant n + m) = \\
& = P\,(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n + m + 1 \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n - p \leqslant \nu \leqslant n - 1).
\end{aligned}
$$

Propoziția poate fi extinsă, evident, la mulțimi $A \in \mathcal{K}\,(\xi_t, t \geqslant t_n)$, unde $\mathcal{K}\,(\xi_t,\ t \in \Lambda)$ este σ-algebra generată de variabilele aleatoare $\xi_t,\ t \in \Lambda$.

2. Să examinăm probabilitățile comune

$$
P\,(\xi_0\,(\omega) = i_0, \ldots, \xi_n\,(\omega) = i_n) \tag{4}
$$

pentru orice $n \geqslant 0$ și orice $i_0, \ldots i_n \in I$. Avem

$$
\begin{aligned}
& P\,(\xi_0\,(\omega) = i_0, \ldots, \xi_n\,(\omega) = i_n) = \\
& = P\,(\xi_0\,(\omega) = i_0) P\,(\xi_1\,(\omega) = i_1 \mid \xi_0\,(\omega) = i_0) \ldots \\
& \ldots P\,(\xi_{p-1}\,(\omega) = i_{p-1} \mid \xi_\nu\,(\omega) = i_\nu,\ 0 \leqslant \nu \leqslant p - 2) \times \\
& \times \prod_{t=p}^{n} P\,(\xi_t\,(\omega) = i_t \mid \xi_\nu\,(\omega) = i_\nu,\ 0 \leqslant \nu \leqslant t - 1)
\end{aligned}
$$

și dacă ținem seama de relația (2), putem scrie

$$
\begin{aligned}
& P\,(\xi_0\,(\omega) = i_0,, \ldots, \xi_n\,(\omega) = i_n) = P\,(\xi_0\,(\omega) = i_0) \\
& P\,(\xi_1\,(\omega) = i_1 \mid \xi_0\,(\omega) = i_0) \ldots P\,(\xi_{p-1}\,(\omega) = i_{p-1} \mid \xi_\nu\,(\omega) = i_\nu,\ 0 \leqslant \nu \leqslant p - 2) \times \\
& \times \prod_{t=p}^{n} P\,(\xi_t\,(\omega) = i_t \mid \xi_{t_\nu}\,(\omega) = i_\nu,\ t - p \leqslant \nu \leqslant t - 1)
\end{aligned}
$$

Să punem acum

$$
\begin{aligned}
& P(\xi_0\,(\omega) = i) = p_i, \\
& P\,(\xi_t\,(\omega) = i_t \mid \xi_\nu\,(\omega) = i_\nu,\ 0 \leqslant \nu \leqslant t - 1) = p_{i_0 \ldots i_{t-1}.\, i_t},\ t \leqslant p - 1, \\
& P\,(\xi_t\,(\omega) = i_t \mid \xi_\nu\,(\omega) = i_\nu,\ t - p \leqslant \nu \leqslant t - 1) = \\
& = p_{i_{t-p} \ldots i_{t-1},\, i_t}(t - p, \ldots, t - 1; t),\ t \geqslant p;
\end{aligned}
$$

atunci

$$P(\xi_0(\omega) = i_0, \ldots, \xi_n(\omega) = i_n) = p_{i_0}\, p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_0 \ldots i_{p-2}, i_{p-1}}$$

$$\prod_{t=p}^{n} p_{i_{t-p}\; i_{t-1}, i_t}(t-p, \ldots, t-1; t)\cdot$$

DEFINIŢIA 2. Un lanţ Markov de multiplicitate p este *omogen* dacă probabilitatea de trecere $p_{i_{t-p} \ldots i_{t-1}, i_t}(t-p, \ldots, t-1;\ t)$ nu depinde explicit de $t-p. \ldots t$,

Cu alte cuvinte, în cazul omogen

$$P(\xi_t(\omega) = j \mid \xi_\nu(\omega) = i_{\nu-t+p+1}\; t-p \leqslant \nu \leqslant t-1) = p_{i_1 \ldots i_p, j}$$

şi deci

$$P(\xi_0(\omega) = i_0, \ldots, \xi_n(\omega) = i_n) =$$

$$= p_{i_0}\, p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_0 \ldots i_{p-2}, i_{p-1}} \prod_{t=p}^{n} p_{i_{t-p} \ldots i_{t-1}, i_t}, \; n \geqslant p;$$

evident,

$$P(\xi_0(\omega) = i_0, \ldots, \xi_n(\omega) = i_n) = p_{i_0}.\, p_{i_1, i_0} \cdots p_{i_0 \ldots i_{n-1}, i_n}, \; n < p.$$

Conchidem că probabilităţile (4) se exprimă cu ajutorul probabilităţilor iniţiale p_i, $i \in I$ şi cu ajutorul probabilităţilor de trecere $p_{i_1 \ldots i_l, j}$, $i_1, \ldots, i_l, j \in I$, $l \leqslant p$.

Să observăm că probabilităţile iniţiale p_i, $i \in I$ se bucură de proprietăţile

$$(5) \qquad p_i \geqslant 0, \; i \in I, \; \sum_{i \in I} p_i = 1;$$

de asemenea probabilităţile de trecere $p_{i_1 \ldots i_l, j}$, $l \leqslant p$, se bucură de proprietăţile

$$(6) \qquad p_{i_1 \ldots i_l, j} \geqslant 0, \; i_1, \ldots, i_l, j \in I, \; \sum_{j \in I} p_{i_1 \ldots i_l, j} = 1, i_1, \ldots, i_l \in I.$$

Probabilităţile iniţiale şi probabilităţile de trecere caracterizează complet un lanţ Markov de multiplicitate p, în sensul teoremei de existenţă care urmează :

TEOREMA 1. *Fie I o mulţime numărabilă, p_i, $i \in I$ şi $p_{i_1 \ldots i_l, j}$, $i_1, \ldots, i_l, j \in I$, $l \leqslant p$, numere verificînd condiţiile* (5) *şi* (6). *Atunci există un cîmp de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ şi un şir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N}$ definite pe Ω şi cu valori în I care formează un lanţ Markov de multiplicitate p omogen avînd probabilităţile iniţiale p_i, $i \in I$, şi probabilităţile de trecere $p_{i_1 \ldots i_l, j}$, $i_1, \ldots, i_l, j \in I$, $l \leqslant p$.*

Demonstrația urmează procedeul clasic obișnuit (vezi, de exemplu, [1]). Rezultatul rămîne valabil, evident, și pentru lanțuri neomogene.

3. Pentru dezvoltările ulterioare, avem nevoie să introducem [4] așa-numitele *probabilități de trecere fundamentale*

$$p_{i_1 \ldots i_p, k_1 \ldots k_p}(t, \ldots, t+p-1; t+m, \ldots, t+m+p-1) =$$

$$= \sum_{\substack{j_h \in I \\ 1 \leqslant h \leqslant m-p}} p_{i_1 \ldots i_p, j_1}(t, \ldots, i+p-1; t+p)\, p_{i_2 \ldots i_p, j_1, j_2}(t+1, \ldots$$

$$\ldots, t+p; t+p+1) \times \ldots \times p_{j_{m-p} k_1 \ldots k_{p-1}, k_p}(t+m-1, \ldots$$

$$\ldots t+m+p-2; t+m+p-1)$$

dacă $m > p$,

$$p_{i_1 \ldots i_p, k_1 \ldots k_p}(t, \ldots, t+p-1; t+p, \ldots, t+2p-1) =$$

$$= p_{i_1 \ldots i_p, k_1}(t, \ldots, t+p-1; t+p)\, p_{i_2 \ldots i_p k_1, k_2}(t+1, \ldots, t+p; t+p+1) \times$$

$$\times\, p_{i_p k_1 \ldots k_{p-1}, k_p}(t+p-1, \ldots, t+2p-2; t+2p-1)$$

dacă $m = p$,

$$p_{i_1 \ldots i_p, k_1 \ldots k_p}(t, \ldots t+p-1; t+m, \ldots, t+m+p-1) =$$

$$= \begin{cases} p_{i_1 \ldots i_m k_1 \ldots k_{p-m}, k_{p-m+1}}(t, \ldots, t+p-1; t+p) \times \\ \times\, p_{i_1 \ldots i_{m-1} k_1 \ldots k_{p-m+1}, k_{p-m+2}}(t+1, \ldots, t+p; t+p+1), \times \\ \times\, p_{i_1 k_1 \ldots k_{p+1}, k_p}(t+m-1, \ldots, t+m+p-2; t+m+p-1) \\ \qquad\qquad\qquad \text{dacă } i_{m+\nu} = k_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p-m, \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{în caz contrar} \end{cases}$$

dacă $0 < m < p$,

$$p_{i_1 \ldots i_p, k_1 \ldots k_p}(t, \ldots, t+p-1; t, \ldots, t+p-1) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{dacă } i_\nu = k_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ 0 & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

dacă $m = 0$.

La aceste probabilități de trecere fundamentale putem ajunge considerînd procesul aleator discret p-dimensional $(\boldsymbol{\xi}_n)$ $n \in N$, unde

$$\boldsymbol{\xi}_n = (\xi_n, \ldots, \xi_{n+p-1}), \quad n \in N.$$

În virtutea propoziției 1, deducem că $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n \in N}$ este un lanț Markov simplu, ale cărei stări sînt p-uple de forma $\boldsymbol{i} = (i_1, , \ldots, i_p)$, cu $i_1, , \ldots, i_p \in I$. Probabilitățile inițiale devin atunci

$$p_{\boldsymbol{i}} = p_{i_0}\, p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_0 \ldots i_{p-2}, i_{p-1}}, \; \boldsymbol{i} = (i_0, \ldots, i_{p-1}),$$

iar probabilităţile de trecere după m paşi

$$p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}(t, t+m) = p_{i_1\ldots i_p,\, j_1\ldots j_p}(t, \ldots, t+p-1; t+m, \ldots, t+m+p-1),$$

$$\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_p),\ \boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_p).$$

Evident, probabilităţile de trecere după n paşi se pot construi în mod direct, în funcţie de probabilităţile de trecere după un pas, folosind formulele

$$p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}(t, t) = \delta_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i_\nu = j_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ 0 & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

$$p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}(t, t+m+1) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{I}} p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}}(t, t+m)\, p_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}}(t+m, t+m+1), \tag{7}$$

unde $\boldsymbol{I} = \underbrace{I \times \ldots \times I}_{\text{de } p \text{ ori}}$. În acest caz se ştie (vezi de exemplu, ([1] [3]) că are loc relaţia lui Chapman-Kolmogorov

$$p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}(t, t+m) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{I}} p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}}(t, t+u)\, p_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}}(t+u, t+m), \quad 0 \leqslant u \leqslant m.$$

În cazul omogen această relaţie devine

$$\overset{(m+n)}{p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}} = \sum_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{I}} \overset{(m)}{p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}}}\, \overset{(n)}{p_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}}}.$$

De asemenea, se ştie (vezi, de exemplu, [1], [3]) că

$$p_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}}(t, t+m) = P(\xi_{t+m}(\omega) = \boldsymbol{j} \mid \xi_t(\omega) = \boldsymbol{i}),$$

de unde deducem imediat

PROPOZIŢIA 2. *Pentru orice $m, t \in N$ şi orice $i_1, \ldots, i_p, k_1, \ldots, k_p \in I$, avem*

$$p_{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_p}(t, \ldots, t+p-1, t+m, \ldots, t+m+p-1) =$$
$$= P(\xi_\nu(\omega) = k_{\nu-t-m+1},\ t+m \leqslant \nu \leqslant t+m+p-1 \mid \xi_\nu(\omega) =$$
$$= i_{\nu-t+1},\ t \leqslant \nu \leqslant t+p-1).$$

4. Să trecem acum la probabilităţile de trecere după r paşi corespunzătoare procesului aleator discret $(\xi_n)_{n \in N}$. Să punem

$$p^{(1)}_{i_1\ldots i_p, j}(t, \ldots, t+p-1; t+p) = p_{i_1\ldots i_p, j}(t, \ldots, t+p-1; t+p)$$

şi în general pentru $r \geqslant 2$

$$p^{(r)}_{i_1\ldots i_p, j}(t, \ldots, t+p-1; t+p+r-1) = \tag{8}$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_p \in I} p_{i_1\ldots i_p, k_1\ldots k_p}(t, \ldots, t+p-1; t+r-1, \ldots, t+r+p-2) \times$$

$$\times\, p^{(1)}_{k_1\ldots k_p, j}(t+r-1, \ldots, t+r+p-2; t+r+p-1).$$

Propoziţia următoare justifică termenul de probabilitate de trecere după r paşi atribuit mărimii $p^{(r)}_{i_1\ldots i_p, j}(t, \ldots, t+p-1;\ t+p+r-1)$.

PROPOZIŢIA 3. *Pentru orice* $r \geqslant 1$, $t \geqslant 0$ *şi orice* $i_1 \ldots i_p, j \in I$, *avem*

$$p^{(r)}_{i_1\ldots i_p, j}(t, \ldots, t+p-1; t+p+r-1) = \tag{9}$$
$$= P(\xi_{t+p+r-1}(\omega) = j \mid \xi_\nu(\omega) = i_{\nu-t+1}, t \leqslant \nu \leqslant t+p-1).$$

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie asupra lui r. Pentru $r = 1$ relaţia (9) este verificată prin definiţie. Să presupunem atunci că relaţia (9) este adevărată pentru un anumit r şi să o demonstrăm pentru $r+1$. Obţinem

$$P(\xi_{t+p+\nu}(\omega) = j \mid \xi_\nu(\omega) = i_{\nu-t+1}, t \leqslant \nu \leqslant t+p-1) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_p \in I} P(\xi_{t+p+r}(\omega) = j,\ \xi_\mu(\omega) =$$
$$= k_{\mu-t-r+2},\ t+r-1 \leqslant \mu \leqslant t+r+p-2 \mid \xi_\nu(\omega) = i_{\nu-t+1}, t \leqslant \nu \leqslant t+p-1) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_p \in I} P(\xi_\mu(\omega) = k_{\mu-t-r+2},\ t+r-1 \leqslant \mu \leqslant t+r+p-2 \mid \xi(\omega) =$$
$$= i_{\nu-t+1}, t \leqslant \nu \leqslant t+p-1) \times P(\xi_{t+p+r}(\omega) = j \mid \xi_\mu(\omega) =$$
$$= k_{\mu-t-r+2},\ t+r-1 \leqslant \mu \leqslant t+r+p-2, \xi_\nu(\omega) = i_{\nu-t+1}, t \leqslant \nu \leqslant t+p-1) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_p \in I} p_{i_1\ldots i_p, k_1\ldots k_p}(t, \ldots, t+p-1; t+r, \ldots, t+r+p-1) \times$$
$$\times p^{(1)}_{k_1\ldots k_p, j}(t+r, \ldots, t+r+p-1; t+r+p) =$$
$$= p^{(r+1)}_{i_1, \ldots, i_p, j}(t, \ldots, t+p-1; t+p+r)$$

Să extindem acum relaţia (8). Are loc

PROPOZIŢIA 4. *Pentru orice* $r \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant u < r$ *şi orice* $i_1, \ldots, i_p, j \in I$, *avem*

$$p^{(r)}_{i_1\ldots i_p, j}(t, \ldots, t+p-1; t+p+r-1) =$$
$$\sum_{k_1, \ldots, k_p \in I} p_{i_1\ldots i_p, k_1\ldots k_p}(t, \ldots, t+p-1; t+u, \ldots, t+u+p-1) \tag{10}$$
$$p^{(r-u)}_{k_1\ldots k_p, j}(t+u, \ldots, t+u+p+1; t+p+r-1).$$

Demonstraţie. Relaţia (10) rezultă imediat dacă înlocuim factorul $p^{(r-u)}_{k_1\ldots k_p, j}(t+u, \ldots, t+u+p-1; t+p+r-1)$ cu expresia corespunzătoare (8) şi ţinem apoi seama de relaţia (7).

În cazul omogen, relaţia (10) se scrie, evident, sub forma

$$p^{(m+n)}_{i,j} = \sum_{k \in I} p^{(m)}_{ik}\, p^{(n)}_{k,j}\,. \tag{11}$$

5. Să definim și probabilitățile absolute după r pași, adică mărimile

$$p_j^{(r)} = P\,(\xi_r\,(\omega) = j).$$

Evident,

$$p_j^{(r)} = \sum_{k_1\,\ldots,k_p \in I} p_{k_1\ldots k_p}\, p_{k_1\ldots k_p,\,j}^{((r-p+1)}\,(0,1,\,\ldots\,,p-1\,;\,r),$$

unde

$$p_{k_1\ldots k_p} = p_{k_1}\,p_{k_1,\,k_2}\cdots\,p_{k_1\ldots k_{p-1},\,k_p}.$$

Putem introduce de asemenea, probabilitățile absolute corespunzătoare unui drum de lungime p, construite cu ajutorul probabilităților fundamentale.

6. Rezultatul care urmează stabilește legătura dintre ergodicitatea procesului aleator discret $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n\in N^*}$ și ergodicitatea procesului aleator discret asociat $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n\in N^*}$.

TEOREMA 2. *Procesul aleator discret omogen* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *este ergodic dacă și numai dacă procesul aleator discret omogen asociat* $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n\in N^*}$ *este ergodic.*

Demonstrație. Să presupunem că procesul aleator discret omogen asociat $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n\in N^*}$ este ergodic. Se știe (vezi, de exemplu, [3], [5]) că această ergodicitate este echivalentă cu condiția (M) : există $r > 0$ și $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{I}$ astfel încît $p_{\boldsymbol{ih}}^{(r)} > 0$ pentru orice $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$. Atunci plecînd de la relația funcțională (11) și folosind procesul obișnuit de demonstrație (vezi, de exemplu [3] [5]) în care la un anumit moment intervine condiția (M) deducem că procesul aleator discret $(\xi_n)_{n\in N^*}$ este ergodic. Putem, de asemenea, arăta că din condiția (M) rezultă că există $r' > 0$ și $l \in I$, astfel încît $p_{\boldsymbol{i}.\,l}^{(r')} > 0$ pentru orice $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$.

Reciproc, să presupunem că procesul aleator discret $(\xi_n)_{n\in N^*}$ este ergodic. În acest caz

$$\lim_{n\to\infty} p_{\mathbf{i}.\,j}^{(n)} = p_j^{(\infty)}, \quad j \in I,$$

există și nu depinde de $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$. Deducem atunci din relația funcțională (11) că $\lim\limits_{n\to\infty} p_{\boldsymbol{ik}}^{(n)}$ există și nu depinde de $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$, adică procesul aleator discret omogen asociat $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n\in N^*}$ este ergodic.

7. Fie acum $(\xi_t)_{t\in T}$ un proces aleator care depinde de un parametru real continuu $t \in T \subset R$, unde R este axa reală și cu o mulțime cel mult numărabilă de stări I. Definiția unui proces aleator Markov de multiplicitate p este analogă definiției 1 și nu mai insistăm asupra ei.

Dacă $P(\xi_{s_\nu}\,(\omega) = i_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant p) > 0$, atunci definim probabilitatea de trecere prin relația

$$p_{\boldsymbol{i}.\,j}\,(\boldsymbol{s},\,t) = p_{i_1\ldots i_p,\,j}\,(s_1,\,\ldots,\,s_p\,;\,t\,(\,=P\,(\xi_t\,(\omega) = j\,|\,\xi_{s_\nu}\,(\omega) = i_\nu,\,1 \leqslant \nu \leqslant p),$$

$$s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_p \leqslant t.$$

Evident,

$$p_{i.j}(s,\ t) \geqslant 0, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}, j \in I, \sum_{j \in I} p_{\boldsymbol{i}.j}(\boldsymbol{s},\ t) = 1, \quad \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}.$$

Să considerăm acum mulţimea $\boldsymbol{T}$, formată din p-uple $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_p)$, $t_i \in T$, $1 \leqslant i \leqslant p$, pentru care $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_p$. În T vom introduce o relaţie de ordine parţială $\boldsymbol{s} \leqslant \boldsymbol{t}$, dacă $s_i \leqslant t_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, unde $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_p)$ iar $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_p)$.

Fie acum procesul aleator $(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}}$, unde

$$\boldsymbol{\xi}_t = (\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_p}),\ \boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_p),$$

evoluţia procesului avînd loc numai în sensul relaţiei de ordine parţială considerată mai sus. În virtutea unei proprietăţi analoge propoziţiei 1, rezultă că $(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{t}})_{\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}}$ este un proces Markov simplu, avînd ca mulţime de stări pe $\boldsymbol{I}$ şi ca probabilitate de trecere

$$p_{\boldsymbol{ij}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = p_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}(s_1, \ldots, s_p; t_1, \ldots, t_p) =$$

$$= P(\xi_{t_\nu}(\omega) = j_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant p \,|\, \xi_{s_\nu}, (\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p),$$

$$s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_p, \quad t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_p, \quad s_i \leqslant t_i, 1 \leqslant i \leqslant p,$$

dacă $P(\xi_{s_\nu}(\omega) = i_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant p) > 0$. Evident,

$$p_{\boldsymbol{ij}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \geqslant 0, \quad \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{I}, \sum_{\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{I}} p_{\boldsymbol{ij}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = 1, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I},$$

iar

$$p_{\boldsymbol{ij}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{I}} p_{\boldsymbol{ik}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u})\, p_{\boldsymbol{kj}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{s} \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{t}. \tag{12}$$

Să mai observăm că

$$p_{\boldsymbol{ij}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}) = \delta_{\boldsymbol{ij}}, \tag{13}$$

unde

$$\delta_{\boldsymbol{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i_\nu = j_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ 0 & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

şi

$$p_{\boldsymbol{ij}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}^*) = \begin{cases} p_{\boldsymbol{i}.j}(\boldsymbol{s}, t) \text{ dacă } j_1 = \ldots = j_p = j, \\ 0 \qquad \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

unde $\boldsymbol{t}^*$ reprezintă p-uplul $(t, \ldots, t)$.

PROPOZIȚIA 5. *Fie* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_p)$, $\boldsymbol{u} = (u_1, , \ldots, u_p)$. *Pentru orice* $\boldsymbol{u}, \mathbf{s} \leqslant \boldsymbol{u}, u_p \leqslant t$ *și orice* $i_1 \ldots, i_p, j \in I$ *avem*

$$P(\xi_t(\omega) = j \mid \xi_{s\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p) = \tag{14}$$
$$= M(P(\xi_t(\omega) = j \mid \xi_{u_\nu}(\omega) = k_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p) \mid \xi_{s_\nu}(\omega) = i_\nu\ 1 \leqslant \nu \leqslant p).$$

Demonstrație. Este suficient să observăm că $(\xi_t)_{t\in T}$ fiind un proces aleator Markov de multiplicitate p, atunci

$$P(\xi_t(\omega) = j \mid \xi_{u_\nu}(\omega) = k_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p) =$$
$$= P(\xi_t(\omega) = j \mid \xi_{u_\nu} = k_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant p, \xi_{s_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p)$$

și deci aplicînd o proprietate cunoscută a valorilor medii condiționate iterate obținem tocmai relația (14).

Din relația (14) deducem imediat

$$p_{i,j}(\mathbf{s}, t) = \sum_{k \in I_{\mathbf{s} \leqslant \boldsymbol{u}, u_p \leqslant t.}} p_{ik}(\mathbf{s}, \boldsymbol{u})\, p_{jk}(\boldsymbol{u}, t). \tag{15}$$

Relația (15) rezultă de altfel și din relația (12), dacă ținem seama de relația (13).

Pornind de la relațiile funcționale (12) și (15) putem să obținem direct ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale ale unui proces Markov de multiplicitate p cu o mulțime cel mult numărabilă de stări, așa cum se indică în [6] sau în [2], [8]. Putem, de asemenea, asocia un transport paralel acestor ecuații, conform cu [9].

8. Construcția probabilităților de trecere și a celor fundamentale se extinde la procese cu o mulțime arbitrară de stări. Obținem astfel relații funcționale analoge relațiilor (12), (15), care ne permit deducerea ecuațiilor integro-diferențiale corespunzătoare, așa cum se indică în [7] sau în [2], [8].

Primită la redacție la 3 aprilie 1965

Centrul de statistică matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. K. L. CHUNG, *Markov chains with stationary transition probabilities.* Berlin, 1960.
2. G. CIUCU, R. THEODORESCU, *Procese cu legături complete.* Ed. Acad. R.P.R., București. 1960.
3. J. L. DOOB, *Stochastic processes.* New York, 1953.
4. O. ONICESCU, *Calculul probabilităților.* Ed. tehnică, București, 1956.
5. O. ONICESCU, G. MIHOC, C. T. IONESCU TULCEA, *Calculul probabilităților și aplicații.* Ed. Acad. R.P.R., București 1956.
6. R. THEODORESCU, *Asupra relațiilor caracteristice ale lanțurilor Markov continue de multiplicitate p.* Bul. Științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, **7**, 763–774 (1955)
7. R. THEODORESCU, *Procese stochastice continue de multiplicitate p.* Bull. științ. Acad. R.P.R. Secțiunea de științe matematice și fizice, **7**, 775–794 (1955).
8. R. THEODORESCU, Сложные марковские процессы. Rev. math. pures et appl., **5**, 341–362, (1960).
9. G. VRĂNCEANU, G. G. VRĂNCEANU, *Probabilités et transport parallèle.* C.R. Acad. Sci., Paris. **255**, 40–41 (1962).

PROPRIETĂŢI SPINORIALE ÎN ALGEBRE DE AFINORI

DE

IULIAN POPOVICI şi CEZAR GHEORGHE

Lucrarea are drept scop să extindă anumite rezultate din teoria spinorilor. Se indică o metodă de studiu a unor proprietăţi spinoriale cu ajutorul căreia putem depăşi cazul spaţiilor vectoriale cu 2^{ν} dimensiuni considerate în teoria clasică [1], [7]. Se introduce noţiunea de bază spinorială a unei algebre de afinori, care reproduce proprietăţile esenţiale ale bazei unei algebre Clifford (relaţii de structură, relaţii de tip Pauli etc.) [3], [7], [8].

1. BAZE SPINORIALE DE AFINORI

Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste corpul complex C. Vom numi *afinor* [7] un operator liniar al lui V_n. Alegînd o bază fixă în V_n, algebra afinorilor lui V_n se identifică cu algebra A_n peste C a matricilor pătratice de ordinul n.

TEOREMA I. ***Există un grup abelian G cu n^2 elemente, o bază de spaţiu vectorial $\{e_\alpha\}$ cu $\alpha \in G$ a lui A_n şi o funcţie cu valori complexe unimodulare*** $\theta(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta \in G)$ ***care verifică condiţiile*** (1), (2), (3):

$$e_\alpha e_\beta = \theta(\alpha, \beta)\, e_{\alpha+\beta} \tag{1}$$

$$e_\alpha^* = e_{-\alpha} \tag{2}$$

(Vom nota cu M^* adjuncta unei matrici M)

$$\text{(a) } \theta(\alpha, -\alpha) + \overline{\theta}(\alpha, -\alpha) > 0; \text{ (b) } \theta(\alpha, \beta)\, \theta(\beta, \alpha) = 1. \tag{3}$$

Observăm mai întîi că din (1), (2) şi (3) rezultă :

$$\text{(a) } \theta(-\alpha, -\beta) = \theta(\alpha, \beta); \text{ (b) } \theta(\alpha, -\alpha) = 1 \tag{4}$$

$$\theta(\alpha, 0) = \theta(0, \alpha) = 1 \tag{4'}$$

Relaţia (4a) se deduce luînd adjuncta relaţiei (1) şi ţinînd seama de (2) şi de (3b); (4b) rezultă din (4a) şi din (3a, b). Din (1) şi (4a) deducem

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P 1377-1383, BUCUREŞTI 1965

că expresia $(e_{-\alpha}e_{\alpha})e_0 = e_{-\alpha}(e_{\alpha}e_0)$ este egală pe de o parte cu e_0, iar pe de altă parte cu $\theta(\alpha, 0)\, e_0$; rezultă astfel relațiile (4′), conform cărora e_0 *este operatorul identitate din* A_n. În sfîrșit, calculul expresiei $e_{\alpha}e_{\beta}e_{-\beta}$ cu ajutorul lui (1) dă [conform relațiilor (3b), (4b) și (4′)]:

$$\theta(-\alpha, \alpha - \beta) = \theta(\beta, -\alpha); \quad \theta(\beta - \alpha, \alpha) = \theta(\alpha, -\beta). \tag{5}$$

Teorema I este demonstrată pentru $n = 2^{\nu}$ [8], cînd G este grupul sistemelor ordonate $(\alpha_1 \ldots \alpha_{2\nu})$ cu $\alpha_r = 1$ sau 0 $(r = 1, \ldots, 2\nu)$, suma efectuîndu-se pe componente mod 2. Funcția θ are forma următoare pentru $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_{2\nu})$, $\beta = (\beta_1 \ldots \beta_{2\nu})$:

$$\theta(\alpha, \beta) = i^{[\alpha, \beta]}; \quad [\alpha, \beta] = \sum_{p>q} (\alpha_p \beta_q - \alpha_q \beta_p), \tag{6}$$

$(i = \sqrt{-1};\ p, q = 1, \ldots, 2\nu + 1)$, $\alpha_{2\nu+1}$ fiind 0 sau 1 după cum suma $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2\nu}$ este pară sau impară; $\beta_{2\nu+1}$ se definește în mod analog. În acest caz, baza $\{e_{\alpha}\}$ rezultă din reprezentarea spinorială a algebrei Clifford $C_{2\nu}$ [7].

Vom demonstra acum teorema I în cazul cînd n este impar.

Vom organiza mai întîi spațiul vectorial complex V_{n^2} ca o algebră $\mathcal{A}_n$ peste C. Fie G produsul direct a două grupuri ciclice de perioade n. Un element α din G poate fi reprezentat sub forma perechii ordonate $\alpha = (\alpha', \alpha'')$, unde α' și α'' sînt clase de resturi mod n. Vom alege o bază fixă B în V_{n^2} și o vom pune în corespondență biunivocă cu grupul G; elementele lui B vor fi atunci de forma u_{α} cu $\alpha \in G$. Punînd $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $u = u_{(1,0)}$, $v = u_{(0,1)}$, produsul xy a două elemente x și y din $\mathcal{A}_n$ (presupus asociativ și distributiv față de adunare și de înmulțirea cu scalari) este complet definit de relațiile

$$u^n = v^n = u_0; \quad vu = \omega uv \tag{7}$$

$$u_{\alpha} = u^{\alpha'} v^{\alpha''} \quad [\alpha = (\alpha', \alpha'')], \tag{8}$$

deoarece aceste relații dau produsul $u_{\alpha}\, u_{\beta}$ a două elemente din B

$$u_{\alpha} u_{\beta} = \omega^{\alpha''\beta'}\, u_{\alpha+\beta} \quad [\alpha = (\alpha', \alpha''),\ \beta = (\beta', \beta'')], \tag{9}$$

iar din (9) rezultă relațiile de asociativitate $(u_{\alpha} u_{\beta})\, u_{\gamma} = u_{\alpha}(u_{\beta} u_{\gamma})$.

Algebra $\mathcal{A}_n$ *nu are ideale bilaterale proprii.* Într-adevăr, fie I un ideal al lui $\mathcal{A}_n$ diferit de $\{0\}$ și $x = \sum_{\beta \in G} x_{\beta}\, u_{\beta}$ $(x_{\beta} \in C)$ un element nenul din I. Alegînd un indice $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ astfel ca $x_{\alpha} \neq 0$, vom considera succesiv toți indicii $\beta = (\beta', \beta'')$ diferiți de α. Să presupunem că pentru un asemenea indice avem $\beta'' \neq \alpha''$ și deci $\omega^{\beta''} \neq \omega^{\alpha''}$. Elementul $\omega^{\beta''} x - u^{-1} x u$ continuă să se găsească în I; el conține [conform relațiilor (7) și (8)] termenul u_{α}, însă nu-l conține pe u_{β}. Putem proceda în mod analog pentru $\beta' \neq \alpha'$. Repetînd procedeul pentru toți indicii β diferiți de α, deducem că $u_{\alpha} \in I$; din (9) rezultă că și $u_0 \in I$, ceea ce implică $I = \mathcal{A}_n$.

Presupunînd că spaţiul vectorial V_n este generat de elementele $u_{\alpha'} = u_{(\alpha', 0)}$ $(\alpha' = 0, \ldots, n-1)$, vom considera afinorii unitari E şi F din A_n definiţi de :

$$E(u_{\alpha'}) = u_{\alpha'+1} \; ; \; F(u_{\alpha'}) = \omega^{\alpha'} u_{\alpha'+1} \, . \tag{10}$$

n fiind impar, E şi F verifică relaţiile :

$$E^n = F^n = 1 \; ; \;\; FE = \omega EF. \tag{7'}$$

Asociind unui element u_α din B $[\alpha = (\alpha', \alpha'')]$ afinorul $E_\alpha = E^{\alpha'} F^{\alpha''}$, stabilim [în virtutea relaţiilor (7), (7') şi (8)] un omomorfism φ de la $\mathcal{A}_n$ la A_n. Nucleul unui astfel de omomorfism fiind un ideal bilateral în $\mathcal{A}_n$, rezultă că φ este un monomorfism, iar *matricile* E_α (în număr de n^2) *formează o bază a lui* V_{n^2}. Rezultă în definitiv că φ *este izomorfism*. Folosind terminologia lui P. Raşevski [7], vom spune că φ *este reprezentarea spinorială a lui* $\mathcal{A}_n$.

Din (9) deducem :

$$E_\alpha E_\beta = \omega^{\alpha'' \beta'} E_{\alpha+\beta}. \tag{9'}$$

Fie $\tau = e^{\frac{\pi i (n-1)}{n}}$ $(\tau^{-2} = \omega \; ; \; \tau^n = 1)$. Matricile

$$e_\alpha = \tau^{-\alpha' \alpha''} E_\alpha \, [\alpha = (\alpha', \alpha'')] \tag{11}$$

formează o nouă bază a lui A_n. Din (9') şi (11) rezultă (1) cu

$$\theta(\alpha, \beta) = \tau^{\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta'}. \tag{12}$$

Afinorii E şi F fiind unitari, din (11) rezultă (2). Relaţiile (3) sînt verificate evident de funcţia θ definită de (12).

În cazul general, n poate fi pus sub forma $n = 2^\nu m$ cu m impar. Pînă în prezent ştim să construim două baze : $\{e_{(\alpha_1 \ldots \alpha_{2\nu})}\}$ şi $\{e_{(\alpha', \alpha'')}\}$ în A_{2^ν} respectiv A_m care satisfac teorema *I*. Prima bază este pusă în corespondenţă biunivocă cu grupul abelian G' al sistemelor ordonate $(\alpha_1 \ldots \ldots \alpha_{2\nu})$ $(\alpha_r = 1$ sau $0 \; ; \; r = 1, \ldots, 2\nu)$, iar a doua — cu grupul G'' al perechilor ordonate (α', α'') $(\alpha', \alpha'' = 0, \ldots, m-1)$. Fie G produsul direct al grupurilor G' şi G''. Se verifică uşor că produsul Kronecker [5] al celor două baze considerate formează o bază $\{e_\alpha\}$ a algebrei A_n, pusă în corespondenţă biunivocă cu grupul G. Avem :

$$e_\alpha = e_{(\alpha_1 \ldots \alpha_{2\nu})} \times e_{(\alpha', \alpha'')} \; [\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_{2\nu}, \alpha', \alpha'')], \tag{13}$$

baza $\{e_\alpha\}$ verificînd teorema I pentru

$$\theta(\alpha, \beta) = i^{[\alpha, \beta]} \tau^{\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta'} \; \left(\tau = e^{\frac{\pi i (m-1)}{m}}\right), \tag{14}$$

unde $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_{2\nu}, \alpha', \alpha'')$, $\beta = (\beta_1 \ldots \beta_{2\nu}, \beta', \beta'')$, iar simbolul $[\alpha, \beta]$ se calculează cu ajutorul formulei (6) luînd proiecţia elementelor α şi β pe G'.

Cu aceasta teorema I este demonstrată. Menţionăm că procedeul indicat mai sus pentru construirea bazei de afinori $\{e_\alpha\}$ şi a funcţiei θ

nu este unic. Se mai poate utiliza de exemplu o construcție bazată pe descompunerea în factori primi a lui n.

În cele ce urmează vom asocia algebrei A_n grupul abelian G definit anterior cu ajutorul descompunerii lui n dată de $n = 2^\nu m$ (m — impar) și funcția θ definită de (14).

Un sistem de afinori nenuli $\{e_\alpha\}$ *din* A_n ($\alpha \in G$) *verificînd relația* (1) *constituie o bază a lui* A_n. Într-adevăr, dacă notăm cu $\{e'_\alpha\}$ baza lui A_n dată de teorema I, aplicația $e'_\alpha \rightarrow e_\alpha$ se extinde la un omomorfism al algebrei A_n. Cum A_n nu are ideile bilaterale proprii, acest omomorfism este un automorfism al lui A_n. *Vom spune că sistemul de afinori* $\{e_\alpha\}$ *este o bază spinorială în* A_n.

Două baze spinoriale $\{e_\alpha\}$, $\{e'_\alpha\}$ ale lui A_n sînt legate prin relația

$$e'_\alpha = S^{-1} e_\alpha S \tag{15}$$

(S — matrice nesingulară de ordinul n), deoarece singurele automorfisme ale lui A_n sînt cele interioare [5]. Bazele spinoriale $\{e_\alpha\}$, $\{e'_\alpha\}$ determină matricea S pînă la un factor complex nenul [7], [8].

Fie $\{e_\alpha\}$ o bază spinorială în A_n. Funcția θ avînd valori complexe unimodulare, din (3b) și (4a) rezultă că matricile $e'_\alpha = e^*_{-\alpha}$ formează o nouă bază spinorială. *Vom spune că* $\{e_\alpha\}$ *și* $\{e'_\alpha\}$ *sînt două baze spinoriale conjugate.* Teorema I pune în evidență existența unei baze spinoriale *autoconjugate* (care coincide cu conjugata sa).

Obținem următoarea generalizare a teoremei lui Pauli [3] :

TEOREMA II. *Două baze spinoriale din* A_n (*în particular autoconjugate*) *sînt legate prin relația* (15), S *fiind o matrice nesingulară* (*unitară*) *din* A_n *determinată în afara unui factor complex nenul* (*unimodular*).

2. RELAȚII DE TIP PAULI

Vom arăta că orice bază spinorială $\{e_\alpha\}$ a algebrei afinorilor A_n verifică un sistem de relații care generalizează identitățile lui Pauli [3], [8] valabile pentru algebrele Clifford. Vom nota cu $(e_\alpha)^j_i$ elementul matricii e_α situat pe linia i și pe coloana j ($i, j, \ldots = 1, \ldots n$).

TEOREMA III. *Orice bază spinorială* $\{e_\alpha\}$ din A_n *verifică relațiile* :

$$\sum_{\alpha \in G} (e_\alpha)^j_i \, (e_{-\alpha})^l_k = n \; \delta^l_i \; \delta^j_k . \tag{16}$$

Demonstrație. Vom asocia fiecărui afinor S din A_n afinorul

$$T = \sum_\alpha e_\alpha S e_{-\alpha} . \tag{17}$$

Din (17) deducem conform relației (1) :

$$T e_\beta = \sum_\alpha \theta\,(-\alpha, \beta)\; e_\alpha \; S e_{\beta-\alpha} \tag{17'}$$

$$e_\beta \, T = \sum_\alpha \; \theta\,(\beta, \alpha)\; e_{\alpha+\beta} \; S e_{-\alpha} \tag{17''}$$

β fiind un element fix din G, observăm că α şi $\alpha - \beta$ parcurg simultan grupul G. Prin urmare, putem substitui în (17′) pe α cu $\alpha + \beta$. Din (5) deducem că relaţia (17′) se transformă în (17″); matricea T comută deci cu toţi e_α şi avem:

$$\sum_\alpha e_\alpha S e_{-\alpha} = \lambda \; (\lambda \in C). \tag{18}$$

Fie S_k^l un sistem de matrici din A_n ale căror elemente sînt $(S_k^l)_i^j = \delta_i^l \delta_k^j$. Relaţia (18) devine pentru $S = S_k^l$:

$$\sum_\alpha (e_\alpha)_i^j \, (e_{-\alpha})_k^l = \delta_i^l \; \lambda_k^i . \tag{18'}$$

Scalarii λ_k^j se determină prin contracţia lui (18′) în i şi l, ţinînd seama de (1) şi (4b); rezultă $\lambda_k^j = n\delta_k^j$ şi deci teorema III este demonstrată.

Din teorema III rezultă imediat că urmele matricilor e_α sînt nule pentru $\alpha \neq 0$. Această proprietate poate fi scrisă sub forma:

$$(e_{\alpha-\beta})_i^i = n\delta_\alpha^\beta \; (\alpha, \; \beta \in G). \tag{16'}$$

Fie x_α $(\alpha \in G)$ un sistem de coordonate în spaţiul vectorial complex V_{n^2}. Cantităţile $(e_\alpha)_i^j$ cu i şi j ficşi pot fi considerate ca definind un vector în V_{n^2}. Din teorema III rezultă că un vector $(e_\alpha)_i^j$ este izotrop sau unitar în raport cu matricea

$$n ds^2 = \sum_\alpha dx_\alpha \, dx_{-\alpha} \tag{19}$$

după cum $i \neq j$ sau $i = j$. Doi vectori $(e_\alpha)_i^j$, $(e_\alpha)_k^l$ sînt ortogonali în raport cu metrica (19), dacă $i \neq l$ sau $k \neq j$.

Sistemul de ecuaţii liniare

$$\mu_i^j \, (e_\alpha)_j^i = x_\alpha \tag{20}$$

are, conform relaţiilor (16), soluţia unică

$$n\mu_i^j = \sum_\alpha x_\alpha \, (e_{-\alpha})_i^j . \tag{20'}$$

Prin urmare, μ_i^j constituie un sistem de coordonate în V_{n^2} raportat la baza formată din vectorii $(e_\alpha)_i^j$. Subspaţiul V_{n^2-1} definit de $x_0 = 0$ este caracterizat în coordonatele μ_i^j de condiţia $\mu_i^i = 0$. Acest lucru rezultă din faptul că matricile e_α $(\alpha \neq 0)$ au urma nulă.

3. GRUPURILE SPINORIALE ASOCIATE ALGEBRELOR DE AFINORI

Vom stabili mai întîi condiţia necesară şi suficientă ca transformarea liniară

$$e'_\alpha = c_\alpha^\beta \, e_\beta \; (\alpha, \; \beta \in G) \tag{21}$$

să se realizeze între două baze spinoriale $\{e_\alpha\}$ şi $\{e'_\alpha\}$ ale algebrei afinorilor A_n. Din (1) și (21) deducem :

$$\sum_{\gamma,\,\delta\in G} \theta\,(\gamma,\ \delta)\ c_\alpha^\gamma c_\beta^\delta\ e_{\gamma+\delta} = \sum_\gamma \theta\,(\alpha,\ \beta)\ c_{\alpha+\beta}^\gamma\, e_\gamma \tag{22}$$

Ţinînd pe δ fix în membrul stîng al lui (22), vom substitui pe $\gamma+\delta$ cu γ. În virtutea relației (5) obținem :

$$\sum_{\gamma,\,\delta} \theta\,(\delta, -\gamma)\ c_\alpha^{\gamma-\delta}\, c_\beta^\delta\, e_\gamma = \sum_\gamma 0\,(\alpha,\ \beta)\ c_{\alpha+\beta}^\gamma\, e_\gamma . \tag{22'}$$

Din (22′) rezultă că *două baze* $\{e_\alpha\}$, $\{e'_\alpha\}$ $(\alpha\in G)$ *ale lui* A_n *sînt simultan spinoriale dacă și numai dacă coeficienții* c_α^β *din* (21) *satisfac condițiile* :

$$\sum_\delta \theta\,(\delta,\ -\gamma)\ c_\alpha^{\gamma-\delta}\, c_\beta^\delta = \theta\,(\alpha,\ \beta)\ c_{\alpha+\beta}^\gamma . \tag{23}$$

Din (2) rezultă de asemenea că *bazele spinoriale* $\{e_\alpha\}$, $\{e'_\alpha\}$ *sînt în același timp autoconjugate dacă și numai dacă*

$$\bar{c}_\alpha^\beta = c_{-\alpha}^{-\beta} . \tag{24}$$

Fie

$$x'_\alpha = c_\alpha^\beta\, x_\beta\,(\alpha,\ \beta\in G) \tag{25}$$

o transformare liniară în V_{n^2}. Vom nota cu $\mathfrak{S}_n$ grupul transformărilor (25) care verifică condiţiile (23) iar cu $\mathfrak{S}'_n$ subgrupul lui $\mathfrak{S}_n$ definit de (24). Alegînd în fiecare pereche de elemente opuse şi distincte din G cîte un element α, putem introduce în V_{n^2} un sistem de coordonate y_α definit de :

$$x_\alpha = y_\alpha\,(2\alpha = 0)\,;\ x_\alpha = y_\alpha + iy_{-\alpha},\ x_{-\alpha} = y_\alpha - iy_{-\alpha}\ (2\alpha \neq 0). \tag{26}$$

Din (24) rezultă că transformările grupului $\mathfrak{S}'_n$ sînt reale în coordonatele y_α. Vom spune că $\mathfrak{S}_n$ şi $\mathfrak{S}'_n$ *sînt grupurile spinoriale* (*complex, respectiv real*) *asociate algebrei* A_n.

Fiind date două baze spinoriale $\{e_\alpha\}$, $\{e'_\alpha\}$ în A_n, din (1), (15) şi (21) deducem :

$$\sum_\beta \theta\,(\beta,\ -\gamma)\ c_\alpha^\beta\, e_{\beta-\gamma} = S^{-1}\, e_\alpha\, S e_{-\gamma} .$$

Dacă ţinem seama de (4b) şi de (16′), această relaţie dă :

$$nc_\alpha^\beta = (S^{-1}\ e_\alpha\, S e_{-\beta})_i^i . \tag{27}$$

Prin urmare, transformările grupurilcr $\mathfrak{S}_n$ şi $\mathfrak{S}'_n$ sînt de forma (27). Conform teoremei II, grupul $\mathfrak{S}'_n$ corespunde cazului cînd matricile S sînt unitare. Relaţiile (16′) şi (27) dau :

$$c_0^\alpha = c_\alpha^0 = 0\ (\alpha \neq 0)\,;\ c_0^0 = 1. \tag{28}$$

Grupurile $\mathfrak{S}_n$ şi $\mathfrak{S}'_n$ operează deci în spaţiul vectorial V_{n^2-1}. Utilizînd relaţiile lui Pauli (16), precum şi formulele (27), (16′), putem arăta uşor că orice transformare (25), (23) verifică condiţia

$$\sum_\gamma c_\alpha^\gamma\, c_\beta^{-\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \tag{29}$$

adică invariază metrica (19). $\mathbb{S}_n$ şi $\mathbb{S}'_n$ *sînt deci subgrupuri ortogonale în* $n^2 - 1$ *variabile (complexe, respectiv reale).*

Din teorema II şi din relaţiile (27) rezultă că grupurile spinoriale $\mathbb{S}_n$, $\mathbb{S}'_n$ au $n^2 - 1$ parametri (complecşi, respectiv reali); ele sînt deci subgrupuri ortogonale proprii pentru $n > 2$. Din (27) deducem de asemenea că grupurile $\mathbb{S}_n$ şi $\mathbb{S}'_n$ sînt continue; prin urmare, transformările lor sînt produse de un număr par de simetrii.

Primită la redacţie la 30 aprilie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii
Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti
Facultatea de matematică
şi mecanică a Universităţii
din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. E. Cartan, *La théorie des spineurs. Exposés de Géométrie*, 1938.
2. V. Fok, Zs. Phys., **57** (1929).
3. W. Pauli, Ann. Inst. H. Poincaré, **6** (1936).
4. H. Weyl, *The classical groups*. Princeton, 1946.
5. F. Murnaghan, *The theory of group representations*, 1938.
6. Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962.
7. П. Рашевский, Усп. мат. наук, **X**, *2/64/*, (1955).
8. I. Popovici, C. Gheorghe, Revue Roumaine de math. pures et appl., **11** (1965).

FUNCȚII ANALITICE GENERALIZATE DE ORDINUL n

DE

DAN PASCALI

Reprezentarea pentru polinoamele areolare în plan, stabilită de autor în [2], cu ajutorul operatorului iterat al lui Pompeiu, este extinsă la funcții analitice generalizate de ordinul n.

1. Acad. N. Teodorescu a introdus în [4] polinoamele areolare. Polinomul areolar de ordinul n este soluția $f(z)$ olomorfă (α) într-un domeniu bidimensional mărginit D a ecuației

$$\frac{\partial^n f(z)}{\partial \bar{z}^n} = \varphi_n(z), \tag{1}$$

unde $\varphi_n(z)$ este o funcție olomorfă în D. Funcția $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ este indefinit derivabilă și satisface ecuația

$$\frac{\partial^{n+1} f(z)}{\partial \bar{z}^{n+1}} = 0, \tag{2}$$

în care derivata areolară este luată în sens restrîns.

Dacă domeniul D conține originea, se arată în [4] că soluția generală a ecuației (1) are forma

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \bar{z}^2\varphi_2(z) + \ldots + \bar{z}^n\varphi_n(z), \tag{3}$$

unde $\varphi_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sînt funcții olomorfe în D.

Importanța polinoamelor areolare constă, pe lîngă faptul că ele sînt o extensiune naturală a noțiunii de funcție olomorfă, în aceea că formează, după cum a arătat acad. N. Teodorescu în [5], o mulțime densă în spațiul funcțiilor olomorfe (α).

Din (2) se observă imediat că atît partea reală $u(x, y)$ cît și partea imaginară $v(x, y)$ a polinomului areolar de ordinul n sînt funcții poli-

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1385–1390, BUCUREȘTI, 1965

armonice de ordinul $(n + 1)$ în D. În lucrarea [1], s-a arătat că fiind dată o funcție $u(x, y)$ poliarmonică de ordinul $(n + 1)$ în D, se poate construi un polinom areolar de ordinul n, a cărui parte reală să coincidă cu $u(x, y)$. Punînd condiția ca acest polinom areolar să fie unic determinat, se obține dezvoltarea Almansi pentru funcția poliarmonică $u(x, y)$.

Prin iterarea operatorului integral al lui Pompeiu

$$\mathbf{T}g(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{g(t)}{t - z}\, d\omega_t$$

se stabilește, în lucrarea [2], o nouă reprezentare a soluției generale a ecuației (1):

$$f(z) = \varphi_0(z) + \mathbf{T}\varphi_1(z) + \mathbf{T}^2\varphi_2(z) + \ldots + \mathbf{T}^n\varphi_n(z), \tag{4}$$

unde $\varphi_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sînt de asemenea funcții olomorfe în D.

2. Vom nota mai jos prin $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ derivatele parțiale generalizate (în sensul lui S. L. Sobolev [3]) ale funcției $f(z)$ sumabilă în domeniul D, iar prin $W_p^n(D)$ spațiul funcțiilor $f(z) \in L_1(D)$, pentru care toate derivatele generalizate

$$\frac{\partial^{j+k} f}{\partial \bar{z}^j \partial z^k}, \quad (j + k \leqslant n, \quad j, \ k = 0, 1, \ldots, n)$$

există în D și aparțin lui $L_p(D)$.

Funcția $w(z) \in L_1(D)$ se numește *soluție generalizată* (regulată) în domeniul D a ecuației

$$\mathbf{L}(w) = \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} + A(z)\, w(z) = B(z)\, \overline{w(z)} = F(z) \tag{5}$$

dacă derivata parțială generalizată $\dfrac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}}$ există și verifică ecuația (5) în vecinătatea fiecărui punct din D. Mulțimea soluțiilor generalizate pentru ecuația neomogenă (5) se notează $\mathfrak{A}(A, B, F, D)$.

Mulțimea soluțiilor generalizate pentru ecuația omogenă

$$\mathbf{L}(u) = \frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} + A(z)\, u(z) + B(z)\, \overline{u(z)} = 0 \tag{6}$$

se notează $\mathfrak{A}(A, B; D)$. Dacă $A(z), B(z) \in L_p(D)$, submulțimea soluțiilor generalizate corespunzătoare a ecuației (6) se notează $\mathfrak{A}_p(A, B; D)$. Elementele mulțimii $\mathfrak{A}_p(A, B; D)$ se numesc *funcții analitice generalizate*, definite de perechea de generatori (A, B) în domeniul D.

Mai departe vom presupune $p > 2$.

În cele ce urmează, vom folosi următoarele rezultate, din teoria funcțiilor analitice generalizate, stabilite de I. N. Vekua [6].

TEOREMA 1. *Dacă* $A(z), B(z), F(z) \in W_p^n(D)$, *atunci*

$$\mathfrak{A}(A, B, F; D) \subset W_p^{n+1}(D) \cap C_\alpha^n D)^{1)} \quad \text{cu} \quad \alpha = \frac{p-2}{p}.$$

TEOREMA 2. *Dacă* $A(z), B(z), F(z) \in C_\alpha^n(D)$ $(0 < \alpha < 1)$, *atunci*

$$\mathfrak{A}(A, B, F; D) \subset C_\alpha^{n+1}(D).$$

Fie C frontiera domeniului D, formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile şi închise, disjuncte două cîte două, iar $\Gamma_1(z, t)$ şi $\Gamma_2(z, t)$ rezolventele în D ale ecuaţiei (6). Fiecărei funcţii $\Phi(z)$ olomorfe în D şi continuă în $\bar{D}$ îi corespunde o funcţie $u(z) \in \mathfrak{A}_p(A, B; D)$:

$$u(z) = \Phi(z) + \iint_D (\Gamma_1(z, t)\Phi(t) + \Gamma_2(z, t)\overline{\Phi}(t))\,d\omega_t.$$

Fiind dată o funcţie $\psi(z)$ sumabilă pe conturul C, integrala generalizată de tip Cauchy

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Omega_1(z, t)\psi(t)\,dt - \Omega_2(z, t)\overline{\psi(t)}\,d\bar{t},$$

unde

$$\Omega_1(z, t) = \frac{1}{t-z} + \iint_D \frac{\Gamma_1(z, s)}{t-s}\,d\omega_s,\quad \Omega_2(t, z) = \iint_D \frac{\Gamma_2(z, s)}{\bar{t}-\bar{s}}\,d\omega_s \tag{7}$$

sînt nucleele ecuaţiei în D ale ecuaţiei (6), reprezintă o funcţie din $\mathfrak{A}_p(A, B; D)$.

Dacă $w(z)$ este o soluţie generalizată, continuă în $\bar{D}$, a ecuaţiei neomogene (5), cu $A(z)$, $B(z)$, $F(z) \in L_p(D)$, atunci

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Omega_1(z, t)w(t)\,dt - \Omega_2(z, t)\overline{w(t)}\,d\bar{t} - \tag{8}$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D (\Omega_1(z, t)F(t) + \Omega_2(z, t)\overline{F(t)})\,d\omega_t = u(z) + \mathbf{P}F(z),$$

unde $u(z)$ este soluţia generalizată a ecuaţiei omogene (6), iar

$$\mathbf{P}F(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D (\Omega_1(z, t)F(t) + \Omega_2(z, t)\overline{F(t)})\,d\omega_t$$

este o soluţie generalizată particulară a ecuaţiei neomogene (5). În virtutea relaţiilor (7) şi proprietăţilor operatorului integral al lui Pompei **T**, funcţia $\mathbf{P}F(z)$, pentru $F(z) \in L_p(D)$, este continuă în tot planul, olomorfă în exteriorul lui D, nulă la infinit şi $\mathbf{L}(\mathbf{P}F(z)) = F(z)$.

---

[1] $C_\alpha^n(D)$ este spaţiul funcţiilor care împreună cu toate derivatele parţiale pînă la ordinul n inclusiv sînt funcţii hölderiene de exponent α.

3. Să considerăm operatorii iteraţi L^{n+1}, definiţi prin inducţie $\mathbf{L}^{n+1} = \mathbf{L}(\mathbf{L}^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ şi ecuaţia

$$(9) \qquad \mathbf{L}^{n+1}(U) = \left(\frac{\partial U(z)}{\partial \bar{z}} + A(z)\,U(z) + B(z)\,\overline{U(z)}\right)^{(n+1)} = 0.$$

Noţiunea de soluţie generalizată pentru ecuaţia iterată (9) se defineşte la fel ca pentru ecuaţia (5). Mulţimea soluţiilor generalizate a ecuaţiei (9) se notează $\mathfrak{A}^{n+1}(A, B; D)$.

TEOREMA 3. *Dacă* $A(z)$, $B(z) \in W_p^n(D)$, *atunci*

$$\mathfrak{A}^{n+1}(A, B; D) \subset W_p^{n+1}(D) \cap C_\alpha^n(D) \quad cu \quad \alpha = \frac{p-2}{p}.$$

Demonstraţia se face prin inducţie. Într-adevăr, presupunînd afirmaţia adevărată pentru n, ecuaţia (9) se scrie $\mathbf{L}(U) = V(z)$, unde $\mathbf{L}^n(V) = 0$ şi $V(z) \in W_p^n(D)$. Conform teoremei 1, rezultă $U(z) \in W_p^{n+1}(D) \cap C_\alpha^n(D)$.

În mod analog, plecînd de la teorema 2, se poate demonstra

TEOREMA 4. *Dacă* $A(z)$, $B(z) \in C_\alpha^n(D)$ $(0 < \alpha < 1)$, *atunci*

$$\mathfrak{A}^{n+1}(A, B; D) \subset C_\alpha^{n+1}(D).$$

Cu alte cuvinte, teorema 4 afirmă că pentru existenţa soluţiei clasice a ecuaţiei iterate (9) este suficient ca $A(z)$, $B(z) \in C_\alpha^n(D)$ $(0 < \alpha < 1)$.

Dacă $A(z)$, $B(z) \in W_p^n(D)$, soluţiile generalizate corespunzătoare ale ecuaţiei iterate omogene (9) se numesc *funcţii analitice generalizate de ordinul* n, definite de perechea de generatori (A, B) în domeniul D.

În acest cadru, adică considerînd derivatele din ecuaţiile (1) şi (2) ca derivate generalizate în sensul lui S. L. Sobolev, reprezentările (3) şi (4) ale polinomului areolar de ordinul n rămîn valabile. În continuare, vom extinde reprezentările (3) şi (4) la funcţii analitice generalizate de ordinul n.

4. Dacă $A(z)$, $B(z) \in W_p^n(D)$, conform teoremei 3, pentru orice soluţie generalizată în domeniul D a ecuaţiei iterate (9) avem

$$U(z) \in W_p^{n+1}(D) \cap C_\alpha^n(D).$$

Plecînd de la soluţia (8) a ecuaţiei neomogene (5), se vede uşor că $U(z)$ are forma

$$(10) \qquad U(z) = u_0(z) + \mathbf{P}u_1(z) + \mathbf{P}^2 u_2(z) + \ldots + \mathbf{P}^n u_n(z),$$

unde $\mathbf{P}^m$ este operatorul $\mathbf{P}$ iterat, $\mathbf{P}^{m+1} = \mathbf{P}(\mathbf{P}^m)$ $(m = 2, 3, \ldots, n)$, iar $u_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sînt soluţii generalizate în domeniul D al ecuaţiei (6). Reprezentarea (10) pune în corespondenţă o funcţie analitică generalizată de ordinul n cu $(n + 1)$ funcţii analitice generalizate.

Deoarece

$$\mathbf{L}^k(U) = u_k(z) + \mathbf{P}(u_{k+1}(z) + \mathbf{P}u_{k+2}(z) + \ldots + \mathbf{P}^{n-k-1}u_n(z)),$$

funcţiile analitice generalizate $u_k(z)$ sînt determinate de valorile lui $\mathbf{L}^k(U)$ (convenim ca $\mathrm{L}^0(U) = U(z)$) pe conturul C prin integralele generalizate de tip Cauchy

$$(11) \quad u_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Omega_1(z,t)\,\mathbf{L}^k(U(t))\,\mathrm{d}t - \Omega_2(z,t)\,\overline{\mathbf{L}^k(U(t))}\,\mathrm{d}\bar{t}, \quad (k=0, 1, \ldots, n)$$

de unde rezultă :

TEOREMA 5. *O funcție $U(z)$ analitică generalizată de ordinul n în domeniul D se poate reprezenta sub forma* (10), *unde funcțiile analitice generalizate $u_k(z)$ sînt date în acest domeniu de relațiile* (11).

Din (10) rezultă

$$u_k(z) = \mathbf{L}^k(U) - \mathbf{P}(\mathbf{L}^{k+1}(U)), \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Folosind teorema lui Morera pentru funcţii analitice generalizate, obţinem :

TEOREMA 6. *Condiția necesară și suficientă ca* $(n + 1)$ *funcții* $U_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ *continue în D să reprezinte o funcție* $U(z) = U_0(z)$ *analitică generalizată de ordinul n și* $\mathbf{L}^k(U) = U_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *în D, este ca pentru z situat în exteriorul lui* $\bar{D}$

$$\int_C \Omega_1(z, t)(U_k(t) - \mathbf{P}U_{k+1}(t))\,\mathrm{d}t - \Omega_2(z, t)\,\overline{(U_k(t) - \mathbf{P}U_{k+1}(t))}\,\mathrm{d}\bar{t} = 0,$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

Soluţia generalizată a ecuaţiei iterate neomogene

$$\mathbf{L}^{n+1}(U) = \left(\frac{\partial U(z)}{\partial \bar{z}} + A(z)\,U(z) + B(z)\,\overline{U(z)}\right)^{(n+1)} = F(z)$$

cu $A(z)$, $B(z)$, $F(z) \in W_p^n(D)$, are forma

$$U(z) = u_0(z) + \mathbf{P}u_1(z) + \mathbf{P}^2u_2(z) + \ldots + \mathbf{P}^n u_n(z) + \mathbf{P}^{n+1}F(z),$$

unde funcţiile analitice generalizate $u_k(z)$ sînt determinate de relaţiile (11)

5. În cazul particular $B(z) = 0$, ecuaţia (9) devine

$$\mathbf{E}^{n+1}(U) = \left(\frac{\partial U(z)}{\partial \bar{z}} + A(z)\,U(z)\right)^{(n+1)} = 0 \tag{12}$$

cu $A(z) \in W_p^n(D)$. Dacă facem substituţia

$$U(z) = f(z)\,\bar{\mathrm{e}}^{\mathbf{T}A(z)}, \tag{13}$$

ecuaţia iterată (12) devine

$$\frac{\partial^{n+1} f(z)}{\partial \bar{z}^{n+1}} = 0.$$

Prin urmare, *soluția generalizată $U(z)$ în domeniul D a ecuației iterate* (*12*) *are forma* (*13*), *în care $f(z)$ este un polinom areolar de ordinul n în D.*

Scriind pe $f(z)$ sub forma (3) şi ţinînd seama că

$$u_k(z) = \varphi_k(z)\,\mathrm{e}^{-\mathbf{T}A(z)}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

sînt soluţii generalizate în D ale ecuaţiei $\mathbf{E}(u) = 0$, obţinem, pentru soluţia generalizată în D a ecuaţiei (12), reprezentarea

$$U(z) = u_0(z) + \bar{z}u_1(z) + \bar{z}^2u_2(z) + \ldots + \bar{z}^n u_n(z),$$

analogă cu reprezentarea dată de acad. N. Teodorescu pentru polinomul areolar de ordinul n [2]).

Primită la redacţie la 29 mai 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii
Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. D. PASCALI, *The areolar polynomials and the Almansi development in the plane*. Rev. de math. pures et appliquées, **IV**, *3*, 451–455 (1959).
2. — *O nouă reprezentare a polinoamelor areolare în plan*. St. cerc. mat. **XV**, *2*, 249–251 (1964).
3. С. Л. СОБОЛЕВ, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Новосибирск, 1962.
4. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique* (Thèse), Paris, Gauthier-Villars, 1931.
5. — *Aproximarea funcţiilor olomorfe* (α) *prin polinoame areolare.* Com. Acad. R.P.R., **XI**, *4*, 375–382 (1961).
6. И. Н. ВЕКУА, *Обобщенные аналитические функции*. Москва, 1959.

---

[2]) Ultima reprezentare a fost stabilită în lucrarea Ileanei Christu : „Derivata A — areolară" din acest volum, pag. 1449–1456 cu ajutorul inducţiei.

ASUPRA PROBLEMEI BILOCALE PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE (II)

DE

DUMITRU RIPIANU
(Cluj)

În această Notă se determină intervalul de lungime maximă de forma (0, λ), în care derivatele de un ordin dat ale integralelor ecuațiilor diferențiale de forma (1) determinate de aceleași condiții Cauchy fixate, nu se anulează, oricare ar fi ecuația diferențială (1) dintr-o clasă de astfel de ecuații, determinată de anumite condiții — precizate în propoziția (2) din text, și în enunțurile teoremelor 1—3.

§ 1. Această Notă se referă la următoarea problemă, abordată și în [1]:

Se consideră ecuația diferențială liniară de ordinul n:

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=L}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0 \tag{1}$$

în ipotezele următoare:

(2) Coeficienții $a_i(x)$ sînt funcții continue în intervalul $(0, \infty)$ și au derivate de ordinul 1 mărginite în valoare absolută de un număr fix, iar atunci cînd x descrie acest interval, punctul M de coordonate $\beta_i = a_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ descrie un anumit domeniu D mărginit și închis din spațiul euclidian cu n dimensiuni, raportat la axele $O\, \beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n$.

Se presupune că frontiera S a domeniului D, de ecuație $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$, are în fiecare punct al ei un plan tangent unic. Se înseamnă cu $a(x)$ funcția — vector — de componente $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$, cu $\mathcal{A}_D$ mulțimea funcțiilor-vectori $a(x)$ care au proprietatea (2), cu L o grupă de n numere date, nu toate nule, $(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$, cu $\varphi_{a,L}(x)$ integrala ecuației (1) pentru care $\varphi_{a,L}^{(i)}(0) = l_i$ $(i = \overline{0, n-1})$, cu $R[f(x)]$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1391 – 1403, BUCUREȘTI, 1965

4 – c. 3299

cea mai mică rădăcină pozitivă a funcției $f(x)$, presupusă definită în intervalul $[0, \infty)$ — dacă $f(x) \neq 0$ pentru orice $x > 0$, se va scrie, prin convenție, $R\,[f(x)] = \infty$ — se înseamnă mai departe cu p un număr fixat din șirul $0, 1, \ldots, n-1$ și, în sfîrșit, cu $(0,\ \lambda_{P,\,D,\,L})$ intervalul cu originea în O de lungime maximă în care $\varphi^{(p)}_{a,\,L}(x) \neq 0$, oricare ar fi funcția-vector $a\,(x)$ din mulțimea $\mathcal{A}_D$.

Problema constă în determinarea numărului $\lambda_{P,\,D,\,L}$[1].

După cum s-a observat în [1], există o funcție-vector minimizantă $\alpha^{\textcircled{p}}(x) = (\alpha_1^{\textcircled{p}}(x),\ \alpha_2^{\textcircled{p}}(x), \ldots, \alpha_n^{\textcircled{p}}(x))$ care aparține mulțimii $\mathcal{A}_D$, adică pentru care $R\,[\varphi^{(p)}_{\alpha^{\textcircled{p}},\,L}(x)] = \lambda_{P,\,D,\,L}$. În teorema 1 din [1] s-a stabilit un sistem de ecuații diferențiale pe care îl verifică funcțiile $\alpha_i^{\textcircled{p}}(x)\ (i = \overline{1,\ n})$, cu ajutorul căruia s-a determinat numărul λ în cazul cînd $n = 2$, $p = 0$ și S este un cerc de centru originea axelor și rază dată.

În prezenta Notă se indică un procedeu de determinare a numărului $\lambda_{P,\,D,\,L}$, în cazul cînd frontiera S este o hipersferă de centru originea axelor și rază dată. Determinarea se va face pînă la integrarea anumitor ecuații, diferențiale, care nu mi s-a părut posibilă în termeni finiți, așa că nu pot da expresia explicită a numărului λ.

Ne vom servi în acest scop de teorema amintită din [1], conform căreia funcția-vector minimizantă $\alpha^{\textcircled{p}}(x)$ verifică pentru orice $x \in [0,\ \lambda]$ următorul sistem de ecuații diferențiale, care de altfel nu depinde de numărul p:

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
& F\big(\alpha_1^{\textcircled{p}}(x),\, \alpha_2^{\textcircled{p}}(x), \ldots, \alpha_n^{\textcircled{p}}(x)\big) = 0 && \text{(a)}\\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left.\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1,\ \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1,\ \beta_2, \ldots, \beta_n)}\right]_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}\right] + \\
& + \left.\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\,F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F^{12}_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\right|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)} + && \text{(b)}\\
& + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\textcircled{p}}(x) \left.\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\right|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)} = 0\\
& \left.\frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\right|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left.\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\right|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}\right] + && \text{(c)}\\
& + \left.\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\,F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F^{12}_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\right|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)} (i = \overline{2,\ n-1})
\end{aligned}
\right.
$$

---

[1] Pentru comoditate, se va scrie și λ în loc de $\lambda_{p,\,D,\,L}$.

şi condiţiile iniţiale

$$(4)\quad \frac{l_{n-1}}{F'_{\beta_1}\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}}=\frac{l_{n-2}}{F'_{\beta_2}\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}}=\cdots=\frac{l_{n-i}}{F'_{\beta i}\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}}=\cdots=\frac{l_0}{F'_{\beta n}\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}}.$$

De asemenea, ne vom servi de relaţiile

$$(5)\qquad \frac{\overset{(n-i)}{\varphi}_{\alpha^{\textcircled{p}},L}(x)}{\varphi_{\alpha^{\textcircled{p}},L}(x)}=\frac{F'_{\beta i}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}{F'_{\beta n}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}(i=\overline{1,\ n-1})$$

din [1], în care notaţia $H(\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\beta_n)\big|_{\beta_s=\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)}$ înseamnă expresia obţinută prin înlocuirea variabilelor β_s $(s=\overline{1,n})$ din funcţia $H(\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\ldots,\beta_n)$ respectiv cu funcţiile $\alpha_s^{\textcircled{p}}(x)$ $(s=\overline{1,n})$.

§ 2. Se va considera cazul cînd domeniul D din (2) este mărginit de sfera de centru originea axelor şi rază R dată, cu alte cuvinte cînd în (3) $F(\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\beta_n)=\sum\limits_{\sigma=0}^{n-1}\beta_\sigma^2-R^2$. Abordarea acestui caz constituie generalizarea teoremei 2 din [1] la un spaţiu cu n dimensiuni. Ne vom referi în enunţul teoremelor la notaţiile prezentate în § 1, dat fiind că repetarea explicaţiei lor ar lungi în mod inutil aceste enunţuri.

Teorema 1. *Dacă* $n\geqslant 3$, $p=0$ şi S *este sfera de ecuaţie* $\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\beta_\sigma^2=R^2$, *atunci numărul* $\lambda_{0,D,L}$ *este egal cu* $\lim\limits_{h\to-\infty}\int_{\frac{l_1}{l_0}}^{h}\frac{\mathrm{d}s}{L_2(s)-s^2}$, *unde* $L_2(s)$ *este o integrală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul* $n-2$ *în funcţia necunoscută* $L_2(s)$:

$$(6)\qquad L_n^2(s)=R^2\sum_{\sigma=0}^{n-1}L_\sigma^2(s)$$

în care expresiile $L_\sigma(s)$ $(\sigma=\overline{0,n})$ *sînt determinate de relaţiile*

$$(7)\quad L_0(s)=1,\ L_1(s)=s,\ L_\sigma(s)=sL_{\sigma-1}(s)+L'_{\sigma-1}(s)\,(L_2(s)-s^2)\ (\sigma=\overline{3,n})$$

Dacă $l_0\ l_2\neq l_1^2$, *atunci condiţiile „iniţiale” satisfăcute de integrala* $L_2(s)$ *a ecuaţiei* (6) *se deduc prin înlocuirea în relaţiile* (7) *a lui* s *cu* $\frac{l_1}{l_0}$ *şi a lui* $L_\sigma\left(\frac{l_1}{l_0}\right)$ *cu* $\frac{l_\sigma}{l_0}$ $(\sigma=\overline{2,n-1})$. *Se obţin astfel valorile lui* $L_2^{(\sigma)}\left(\frac{l_1}{l_0}\right)$ $(\sigma=\overline{0,n-3})$.

Demonstraţie. În cazul teoremei, relaţiile (3) (c) se scriu

$$\frac{\alpha_{i-1}(x)}{\alpha_n(x)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_n(x)}+\frac{\alpha_i(x)\,\alpha_{n-1}(x)}{\alpha_n^2(x)}\qquad(i=\overline{2,n-1})$$

(s-a scris $\alpha_i(x)$ în loc de $\alpha_i^{(0)}(x)$). Se va însemna în (5)

(8) $$h_{n-i}(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{\varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)} \qquad (i = \overline{1, n-1})$$

în care caz relaţiile de mai sus se scriu

(9) $$h_{n+1-i}(x) = h'_{n-i}(x) + h_1(x)\,h_{n-i}(x) \qquad (i = \overline{2, n-1}).$$

(8) dă cu $i = n - 1$

(10) $$h_1 = h_1(x) = \frac{\varphi'_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)}.$$

De aici se poate determina $x = x(h_1)$ ca o funcţie continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$, cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte, unde $x(h_1)$ prezintă discontinuităţi de specia întîi.

Această afirmaţie se justifică imediat, dacă se ţine seama că dacă în (10) $\varphi_{\alpha,L}(x) = (x - \lambda)^p A(x)$ cu $A(\lambda) \neq 0$, atunci $h_1(x) = \frac{p}{x-\lambda} + A'(x) \mid A(x)$, aşa că $\lim\limits_{\substack{x \to \lambda \\ x < \lambda}} h_1(x) = -\infty$. Din punctul nostru de vedere, curba (C) de ecuaţie $h_1 = h_1(x)$ poate avea în intervalul $[0, \lambda]$ de variaţie a lui x numai una din următoarele 3 forme:

a) $h_1(x)$ scade de la $\frac{l_1}{l_0}$ la $-\infty$ cînd x creşte de la 0 la λ (fig. 1).

b) Punctul de extrem de abscisă maximă, care se va însemna cu M_0, de coordonate (ρ_0, σ_0) şi este neapărat un punct de maxim, are ordonata $\sigma_0 \geqq \frac{l_1}{l_0}$ (fig. 2).

În aceste cazuri, evident că curba (C) determină funcţia $x(h_1)$ continuu derivabilă în intervalul (deschis) $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$.

c) În notaţia de la punctul *b*), $\sigma_0 < \frac{l_1}{l_0}$ (fig. 3). În acest caz o paralelă dusă prin punctul M_0 la Ox întîlneşte neapărat cel puţin un arc (C_1) al lui (C), care merge de la un punct de minim spre un punct de maxim al lui (C), atunci cînd se face o mişcare de-a lungul axei Ox în sensul în care x descreşte. Se va însemna cu P_1 punctul de întîlnire al paralelei în chestiune cu arcul (C_1) şi cu (ρ_1, σ_1) coordonatele punctului M_1 de maxim în chestiune (evident că $\rho_1 \geqq 0$). Dacă $\sigma_1 \geqq \frac{l_1}{l_0}$, dreapta de ecuaţie $y = \frac{l_1}{l_0}$ întîlneşte neapărat arcul (C_1) într-un punct care se va însemna cu Q. Este atunci evident că arcul (C_0) de pe (C), alcătuit din punctele de pe (C) de abscise $\geqq \rho_0$ (şi $< \lambda$), împreună cu arcul $\widehat{P_1Q}$ de pe (C) determină funcţia $x(h_1)$, continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$, cu excepţia punctului corespunzînd valorii σ_0 a variabilei independente h_1, în care funcţia $x(h_1)$ prezintă o discontinuitate de specia întîi. Dacă $\sigma_1 < \frac{l_1}{l_0}$, paralela dusă prin punctul M_1 la Ox întîlneşte neapărat cel puţin un arc (C_2) de pe (C), care merge de la un punct de minim la un punct de maxim M_2 al lui (C). Se va însemna cu P_2 punctul respectiv de întîlnire şi cu (ρ_2, σ_2) coordonatele lui M_2. Dacă $\sigma_2 \geqq \frac{l_1}{l_0}$, atunci dreapta de ecuaţie $y = \frac{l_1}{l_0}$ întîlneşte neapărat arcul (C_2) într-un punct Q. În acest caz, este evident că arcele (C_0), $\widehat{P_1M_1}$ şi $\widehat{P_2Q}$ ale lui (C) determină funcţia $x(h_1)$ continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$ al variabilei h_1, cu excepţia punctelor în care $h_1 = \sigma_0$ şi $h_1 = \sigma_1$, în care $x(h_1)$ prezintă discontinuităţi de specia întîi. Dacă $\sigma_2 < \frac{l_1}{l_0}$, se duce o paralelă la axa Ox prin M_2 şi se continuă procedeul. După un număr finit de astfel de operaţii se ajunge neapărat la un punct de maxim M_q — extremitatea din stînga a unui arc (C_q) de pe (C) — cu ordonata $\sigma_q \geqq \frac{l_1}{l_0}$. Arcele (C_0), $\widehat{P_1M_1}$, $\widehat{P_2M_2}, \ldots, \widehat{P_{q-1}\ M_{q-1}}$, $\widehat{P_qQ}$ — unde punctul Q este punctul de întîlnire al dreptei de ecuaţie $y = \frac{l_1}{l_0}$ cu arcul (C_q) — determină funcţia $x(h_1)$ continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$, cu excepţia punctelor în care $h_1 = \sigma_i$ $(i = \overline{0, q-1})$, în care $x(h_1)$ prezintă discontinuităţi de specia întîi.

Aşadar, (10) dă

$$x = x(h_1), \quad x\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = 0 \tag{11}$$

unde $x(h_1)$ este uniformă şi continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$ de variaţie al lui h_1, cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte din acest interval.

Se deduce deci din (8) şi (11)

$$(12)\quad h_{n-i}(x) = L_{n-i}(h_1)\ (i = \overline{1, n-1})\ (h_\sigma(x) = L_\sigma(h_1)\ \sigma = \overline{1, n-1})$$

în care caz (9) se scrie cu ajutorul relației

$$(13)\qquad h_1'(x) = h_2(x) - h_1^2(x)$$

dată tot de (9) cu $i = n - 1$, şi al schimbării de indice $\sigma = n + 1 - i$:

$$(14)\quad L_\sigma(h_1) = h_1 L_{\sigma-1}(h_1) + L_{\sigma-1}'(h_1)\,(L_2(h_1) - h_1^2)\ \ (\sigma = \overline{3, n-1}).$$

Însă (3) (a) şi (8) dau, dacă se ia prin definiţie $L_0(h_1) \equiv 1$: $\alpha_n^2 \sum\limits_{\sigma=0}^{n-1} L_\sigma^2(h_1) = R^2$ iar (3) (b) se scrie $h_{n-1}'(x) + h_1(x)\,h_{n-1}(x) + \dfrac{R^2}{\alpha_n(x)} = 0$. Se deduce din aceste două relații şi din (12) şi (13)

$$L_{n-1}'(h_1)\,(L_2(h_1) - h_1^2) + h_1 L_{n-1}(h_1) \pm R \sqrt{\sum_{\sigma=0}^{n-1} L_\sigma^2(h_1)} = 0.$$

Se va defini expresia $L_n(h_1)$ prin relația (14) cu $\sigma = n$. În acest caz, relaţia scrisă mai sus, în care se face $h_1 = s$ se transformă în relația (6), iar relaţia (14) în relațiile (7). Spre a deduce condițiile „inițiale" satisfăcute de integrala $L_2(s)$ a ecuației (6), este suficient să se observe că (7) dă

$$L_\sigma(s) = L_2^{(\sigma-2)}(s)\,(L_2(s) - s^2)^{\sigma-2} + P_\sigma(s), L_2(s), L_2'(s), \ldots,$$

$$(15)\qquad \ldots, L_2^{(\sigma-3)}(s)\ (\sigma = \overline{3, n}),$$

unde $P_\sigma(s, s_0, s_1, \ldots, s_{\sigma-3})$ este un polinom în aceste variabile. Or, (8) şi (12) dau $L_\sigma(h_1) = h_\sigma(x(h_1))$, deci $L_\sigma\left(\dfrac{l_1}{l_0}\right) = \dfrac{l_\sigma}{l_0}$ $(\sigma = \overline{1, n-1})$ aşa că $L_2\left(\dfrac{l_1}{l_0}\right) = \dfrac{l_2}{l_0}\cdot$ În acest caz, şi în ipoteza teoremei anume $l_0 l_2 \neq l_1^2$, (15) dă valorile lui $L_2^{(\sigma)}\left(\dfrac{l_1}{l_0}\right)$ $(\sigma = \overline{1, n-3})$. În sfîrșit, (12) și (13) dau $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{L_2(s) - s^2}$, de unde, cu ajutorul lui (11), $x(h_1) = \displaystyle\int_{\frac{l_1}{l_0}}^{h_1} \frac{\mathrm{d}s}{L_2(s) - s^2}\cdot$ Însă, din (11), se deduce pe fig. 1 — 3, $\lambda = \lim\limits_{h_1 \to -\infty} x(h_1)$, deci $\lambda = \lim\limits_{h \to \infty} \displaystyle\int_{\frac{l_1}{l_0}}^{h} \frac{\mathrm{d}s}{L_2(s) - s^2}$, ceea ce demonstrează teorema.

§ 3. Se va prezenta un rezultat analog celui din teorema 1 în cazul $p > 0$, în

TEOREMA 2. *Dacă S este sfera de ecuaţie $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2 = R^2$, $n \geqq 3$ şi $1 \leqq p \leqq n - 2$, atunci numărul $\lambda_{p,D,L}$ este egal cu $\lim\limits_{h \to -\infty} \int_{\frac{l_{p+1}}{l_p}}^{h} \frac{ds}{L_{p+2}(s) - s^2}$ în care $L_{p+2}(s)$ este o integrală a ecuaţiei integro-diferenţiale*

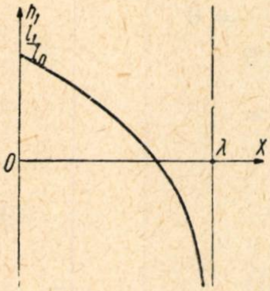


Fig. 1

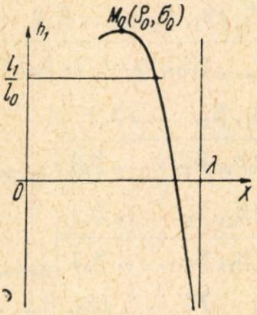


Fig. 2

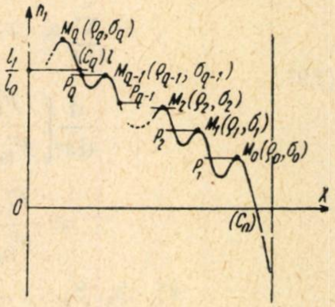


Fig. 3

$$L_n^2(s) = R^2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} L_\sigma^2(s). \tag{16}$$

în care expresiile $L_\sigma(s)$ $(s = \overline{1, n})$ sînt determinate de relaţiile

$$L_\sigma(s) = e^{-\int_c^s \frac{\varphi}{L_{p+2}(\varphi) - \varphi^2} d\varphi} \left[\frac{l_\sigma}{l_p} \exp \int_c^{\frac{l_{p+1}}{l_p}} \frac{\varphi}{L_{p+2}(\varphi) - \varphi^2} d\varphi + \right. \tag{17}$$

$$\left. + \int_{\frac{l_{p+1}}{l_p}}^{s} \frac{L_{\sigma+1}(\theta)}{L_{p+2}(\theta) - \theta^2} e^{\int_c^\theta \frac{\varphi}{L_{p+2}(\varphi) - \varphi^2} d\varphi} d\theta \right]; \quad \begin{array}{l} L_{p+1}(s) = s \\ L_p(s) = 1 \end{array}$$

$$(\sigma = p - 1,\ p - 2, \ldots, 0)$$

$$L_\sigma(s) = sL_{\sigma-1}(s) + L'_{\sigma-1}(s)\,(L_{p+2}(s) - s^2) \quad (\sigma = \overline{p + 3, n}). \tag{18}$$

Condiţiile „iniţiale” la care satisface integrala $L_{p+2}(s)$ a ecuaţiei (16) se deduc, în ipoteza că $l_p\, l_{p+2} \neq l_{p+1}^2$, înlocuind în (18) pe s cu $\frac{l_{p+1}}{l_p}$ şi pe $L_\sigma\left(\frac{l_{p+1}}{l_p}\right)$ cu $\frac{l_{p+\sigma}}{l_p}$ $(\sigma = \overline{p + 3, n - 1})$. Se obţin astfel valorile lui $L_{p+2}^{(\sigma)}\left(\frac{l_{p+1}}{l_p}\right)$ $(\sigma = \overline{1, n - p - 3})$. (Se poate observa că expresia lui $L_\sigma(s)$ din (17) nu depinde de constanta arbitrară c).

Demonstrație. Ne vom servi de o formă puțin diferită a relațiilor (3), și anume

$$(19)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}\right]+ \\
&+\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)F'_{\beta_{n-p-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F^{12}_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}+ \qquad \text{(b)}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}=0 \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}\right]= \\
&=\frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=a_s(x)}- \qquad \text{(c)}\\
&-\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\cdot\frac{F'_{\beta_{n-p-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} \qquad (i=\overline{2, n})
\end{aligned}\right.$$

care se deduc la fel ca formele (3) (b) și (c) din [1]. Pentru simplificarea scrierii s-a pus, și aici, $\alpha_i(x)$ în loc de $\alpha_i^{ⓟ}(x)$. În cazul nostru $F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 - R^2$ așa că (5) dă

$$(20)\qquad h_{n-i} = h_{n-i}(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_{n-p}(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} \; (i = \overline{1, n}).$$

Se deduce de aici și din (3) (a)

$$(21)\qquad \alpha_{n-p}^2 \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2(x) = R^2.$$

Cu ajutorul lui (20) și (21), relațiile (19) (c) și (b) se scriu

$$(22)\qquad h'_{n-i}(x) = h_{n+1-i}(x) - h_{n-i}(x)\, h_{p+1}(x) \; (i = \overline{2, n})$$

$$(23)\qquad h'_{n-1}(x) + h_{n-1}(x)\, h_{p+1}(x) \pm R\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} h_i^2(x)} = 0.$$

Dacă se înseamnă

$$(24)\qquad s = h_{p+1} = h_{p+1}(x) = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(p+1)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)}$$

se deduce de aici, ca în demonstraţia teoremei 1 (formula (11)),

$$x = x(s), \quad x\left(\frac{l_{p+1}}{l_p}\right) = 0, \tag{25}$$

unde $x(s)$ este o funcţie uniformă şi continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_{p+1}}{l_p}\right)$, cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte în care $x(s)$ prezintă discontinuităţi de specia întîi. Ţinînd seamă de (25), se va însemna în (20)

$$h_\sigma(x) = L_\sigma(s) = \frac{\alpha_{n-\sigma}(x)}{\alpha_{n-p}(x)} = \frac{\varphi^{(\sigma)}_{\alpha, L}(x)}{\varphi^{(p)}_{\alpha, L}(x)} \; (\sigma = \overline{0, n-1}) \cdot \tag{26}$$

Or, (22) dă cu $i = n - p - 1$

$$h'_{p+1}(x) = h_{p+2}(x) - h^2_{p+1}(x) \tag{27}$$

în care caz aceleaşi relaţii (22) şi (26) dau

$$L_\sigma(s) = sL_{\sigma-1}(s) + (L_{p+2}(s) - s^2) L'_{\sigma-1}(s) \quad (\sigma = \overline{1, n-1}) \tag{28}$$

adică relaţiile (18), iar (23) se scrie $L_n(s) \pm R \sqrt{\sum_{\sigma=0}^{n-1} L^2_\sigma(s)} = 0$, cu $L_n(s)$ dat de (28) cu $\sigma = n$, adică relaţia (16).

Dacă se integrează ecuaţiile (28) cu $\sigma = p, p - 1, \ldots, 1$, în funcţiile necunoscute $L_{\sigma-1}(s$, şi se ţine seamă că (26) şi (25) dau

$$L_\sigma\left(\frac{l_{p+1}}{l_p}\right) = \frac{l_\sigma}{l_p} \qquad (\sigma = \overline{0, n-1}) \tag{29}$$

se obţin relaţiile (17). Tot (26) dă $L_p(s) = 1$, iar (24) $L_{p+1}(s) = s$. Spre a deduce condiţiile ,,iniţiale'' pe care le satisface integrala $L_{p+2}(s)$ a ecuaţiei (16), este suficient să se observe că (18) dă

$$\begin{aligned} L_{p+\sigma}(s) = {} & L^{(\sigma-2)}_{p+2}(s)(L_{p+2}(s) - s^2)^{\sigma-2} + \\ & + P_{p+\sigma}(s, L_{p+?}(s), L'_{p+2}(s), \ldots, L^{(\sigma-3)}_{p+2}(s)), \end{aligned} \tag{30}$$

unde $P_{p+\sigma}(s, s_0, s_1, \ldots, s_{\sigma-3})$ este un polinom în aceste variabile. În ipoteza teoremei, şi anume $l_p \; l_{p+2} \neq l^2_{p+1}$, (29) şi (30) dau valorile $L^{(\sigma)}_{p+2}\left(\frac{l_{p+1}}{l_p}\right)$ $(\sigma = \overline{0, n-p-3})$. În sfîrşit, (24), (26) şi (27) dau $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{L_{p+2}(s) - s^2}$, de unde, cu ajutorul lui (25), $x(h_{p+1}) = \int_{\frac{l_{p+1}}{l_p}}^{h_{p+1}} \frac{ds}{L_{p+2}(s) - s^2}$, aşa că pe baza figurilor 1—3, construite pentru funcţia $h_{p+1}(x)$ se deduce $\lambda_{P.\, D.\, L} = \lim_{h \to -\infty} \int_{\frac{l_{p+1}}{l_p}}^{h} \frac{ds}{L_{p+2}(s) - s^2}$.

ceea ce demonstrează teorema.

Observații. 1. Dacă funcțiile $x(s)$ din (11) (cu $s = h_1$) sau (25) (cu $s = h_{p+1}$) prezintă eventual punctele de discontinuitate σ_i $(i = \overline{0, q})$ $\left(\frac{l_1}{l_0} \text{ sau } \frac{l_{p+1}}{l_p} > \sigma_q > \sigma_{q-1} > \ldots > \sigma_0\right)$ menționate la pag. 5, atunci relațiile $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{L_2(s) - s^2}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{L_{p+2}(s) - s^2}$ au loc în intervalele (deschise și orientate în sensul descreșterii lui s)

$$\left(\frac{l_1}{l_0} \text{ sau } \frac{l_{p+1}}{l_p},\ \sigma_q\right) (\sigma_q\,,\ \sigma_{q-1})\,,\ (\sigma_{q-1}\,,\ \sigma_{q-2})\,, \ldots, (\sigma_1, \sigma_0), (\sigma_0, -\infty).$$

În acest caz, integralele

$$x(h_1) = \int_{\frac{l_1}{l_0}}^{h_1} \frac{\mathrm{d}s}{L_2(s) - s^2},\ x(h_{p+1}) = \int_{\frac{l_{p+1}}{l_p}}^{h_{p+1}} \frac{\mathrm{d}s}{L_{p+2}(s) - s^2} \text{ înseamnă}$$

$$\int_{\frac{l_1}{l_0} \text{ sau } \frac{l_{p+1}}{l_p}}^{\sigma_q} + \int_{\sigma_q}^{\sigma_{q-1}} + \int_{\sigma_{q-1}}^{\sigma_{q-2}} + \cdots + \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} + \int_{\sigma_0}^{h_1 \text{ sau } h_{p+1}}$$

(întrucît h_1, $h_{p+1} \to -\infty$, s-a presupus h_1, $h_{p+1} < \sigma_0$).

2. Teorema 2 nu are loc sub forma prezentată în cazul $p = n - 1$, pentru că relația (19) (b) se deduce înlocuind în relația $\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} = 0$ pe $\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)}$ cu expresia sa obținută din relația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} - \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(p+1)}(x)\,\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}{(\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x))^2}$$

servindu-ne de (5), ceea ce nu se poate face cînd $p = n - 1$. De altfel, în (19) (b) figurează expresia $F'_{\beta_{n-p-1}}$, care nu are sens pentru $p = n - 1$. Nu se pot folosi nici relațiile (5) spre a afla pe $\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}}{\varphi_{\alpha, L}(x)}$ $\left(\text{în care caz s-ar avea tot cu (5) și pe } \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}\right)$, pentru că aceasta cere folosirea ecuației (1) adică

$$\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) = 0 \tag{31}$$

cu $y(x) = \varphi_{\alpha, L}(x)$ și $a_i(x) = \alpha_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$. Or, această ecuație se folosește și la stabilirea relației (19) (b), așa că dacă $p = n - 1$, relația (19) (b) se reduce la identitatea

$$\left.\frac{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\right|_{\beta_s = \alpha_s(x)} + \left.\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\right|_{\beta_s = \alpha_s(x)} = 0.$$

În acest caz, ne vom servi de identitatea

$$\frac{\varphi^{(n)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(n-1)}_{\alpha,L}(x)} = \frac{\varphi^{(n-1)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(n-2)}_{\alpha,L}(x)}\left[1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\varphi^{(n-2)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(n-1)}_{\alpha,L}(x)}\right]$$

care dă cu ajutorul lui (5)

$$\frac{\varphi^{(n)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(n-1)}_{\alpha,L}(x)} = \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)}\bigg\{1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)}\right]\bigg\} \tag{32}$$

De asemenea relaţiile (19) (*c*) se deduc din identitatea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(p)}_{\alpha,L}(x)} = \frac{\varphi^{(n+1-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(p)}_{\alpha,L}(x)} - \frac{\varphi^{(p+1)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(p)}_{\alpha,L}(x)}\frac{\varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(p)}_{\alpha,L}(x)}\,(i = \overline{2, n}) \tag{33}$$

cu ajutorul lui (5), ceea ce iarăşi nu se poate face cînd $p = n - 1$, pentru că în (5) nu figurează $\varphi^{(n)}_{\alpha,L}(x)$. În acest caz, se poate deduce din (5) şi (31)

$$\frac{\varphi^{(n)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi^{(n-1)}_{\alpha,L}(x)} = -\frac{1}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\sum_{i=1}^{n}\beta_i F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\Big|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)} \tag{34}$$

ceea ce dă împreună cu (32)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)}\right] = 1 + \frac{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^{2}_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\sum_{i=1}^{n}\beta_i F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)} \tag{35}$$

(33) (cu $p = n - 1$) şi (34) dau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)}\right] = \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)} + \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F^{12}_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)}\sum_{\sigma=1}^{n}\beta_\sigma F'_{\beta_\sigma}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)} \quad (i=3, n) \tag{36}$$

sau relaţia echivalentă (ţinînd seama de (35))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)}\right] = \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)} - \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)} + \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s\,(x(}\right](i = \overline{3, n}). \tag{37}$$

S-a dovedit astfel.

LEMA 1. *Funcția minimizantă* $\alpha^{(n-1)}(x)=\alpha_1^{(n-1)}(x), \alpha_2^{(n-1)}(x),\ldots, \alpha_n^{(n-1)}(x)$ *verifică sistemul de* n *ecuații diferențiale alcătuit din relațiile* (3) (a) (*cu* $p=n-1$), (35) *și* (36). *Relațiile* (36) *se pot înlocui cu* (37).

§ 4. Se va prezenta teorema 2 în cazul $p=n-1$ în :

TEOREMA 3. *Dacă în notațiile din* §. *1, S este sfera de ecuație* $\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2=R^2$, *atunci numărul* $\lambda_{n-1,\,D,\,L}$ *este egal sau cu* $\lambda_{n-2,\,D,\,L}$ *sau cu*

$$(38)\qquad \lim_{h\to-\infty}\int_{\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}}^{h} H(s)\,\mathrm{d}s, \text{ sau cu } \lim_{h\to\infty}\int_{\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}}^{h} H(s)\,\mathrm{d}s,$$

unde expresiile $\mathrm{L}_\sigma(s)$ $\mathrm{H}(s)$ sînt determinate de relațiile

$$(39)\begin{cases} L_{n-1}(s)\equiv 1,\ \underset{(\sigma=\overline{0,\,n-2})}{(L_{\sigma+1}(s)-L'_\sigma(s))^2}=R^2(L_\sigma(s)-sL'_\sigma(s))^2\sum_{i=0}^{n-1}L_i^2(s)\\ (1-H(s))^2=R^2s^2H^2(s)\sum_{\sigma=0}^{n-1}L_\sigma^2(s). \end{cases}$$

Demonstrație. Se va deduce din (5)

$$(40)\qquad h_{n-i}(x)=\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_1(x)}=\frac{\varphi_{\alpha,\,L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha,\,L}^{(n-1)}(x)}\ (i=\overline{1,\,n})$$

așa că (3) (a) dă $\alpha_1^2\sum_{\sigma=0}^{n-1}h_\sigma^2(x)=R^2$, în care caz (35) (care are loc ca și (36) sau (37) conform lemei), se scrie

$$(41)\qquad (1-h'_{n-2}(x))^2=R^2h_{n-2}^2(x)\sum_{\sigma=0}^{n-1}h_\sigma^2(x)$$

iar (37)

$$(42)\qquad h'_{n-i}(x)=h_{n+1-i}(x)-\frac{h_{n-i}(x)}{h_{n-2}(x)}(1-h'_{n-2}(x))\quad (i=\overline{3,\,n})\cdot$$

Se va presupune $\lambda_{n-1,\,D,\,L}\neq\lambda_{n-2,\,D,\,L}\cdot$ În acest caz, dacă se înseamnă $s=h_{n-2}(x)=\dfrac{\varphi_{\alpha,\,L}^{(n-2)}(x)}{\varphi_{\alpha,\,L}^{(n-1)}(x)}$, se deduce că $\lim\limits_{\substack{x\to\lambda\\ x<\lambda}} s=\pm\infty$ și prin același raționament ca în demonstrația teoremei 1, că relația de mai sus definește o funcție $x(s)$ continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty,\dfrac{l_{n-2}}{l_{n-1}}\right)$ sau $\left(\dfrac{l_{n-2}}{l_{n-1}},\infty\right)$ (după cum $\lim\limits_{\substack{x\to\lambda\\ x<\lambda}} s=-\infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to\lambda\\ x<\lambda}} s=\infty$), cu excepția eventuală a unui număr finit de puncte în care $x(s)$ prezintă discontinuități de specia întîi. Menționăm că în cazul nostru, adică $p=n-1$, nu se mai poate preciza semnul lui $\lim\limits_{\substack{x\to\lambda\\ x<\lambda}} \dfrac{\varphi_{\alpha,\,L}^{(n-2)}(x)}{\varphi_{\alpha,\,L}^{(n-1)}(x)}$, fiindcă se ştie că $\lim\limits_{\substack{x\to\lambda_{n-2,\,D,\,L}\\ x<\lambda_{n-2,\,D,\,L}}} \dfrac{\varphi_{\alpha,\,L}^{(n-1)}(x)}{\varphi_{\alpha,\,L}^{(n-2)}(x)} = -\infty$ dar aici x tinde spre $\lambda_{n-1,\,D,\,L}$ şi nu spre $\lambda_{n-2,\,D,\,L}$.

Se poate deci însemna în (40) $h_\sigma(x) = L_\sigma(s)$ $(\sigma = \overline{0,\, n-1})$, în care caz (42) se scrie cu ajutorul lui (41) sub forma (39), iar (41) dă pentru $H(s) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ a doua relaţie (39), de unde cu ajutorul curbei de ecuaţie $s = h_{n-2} = h_{n-2}(x)$ se deduce, ca în demonstraţia teoremei 1, relaţia (38) (valabilă bineînţeles cu observaţia 1, din acest paragraf), ceea ce demonstrează teorema.

Primită la redacţie la 20 mai 1965

Institutul de calcul al Academiei Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. D. Ripianu, *Asupra problemei bilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare (I).* St. cerc. mat. **17**,*8*, (1965).

O PROPRIETATE A SCHEMELOR MATRICIALE DE ALGORITMI[1]

DE

L. NEGRESCU și I. PĂVĂLOIU
(Cluj)

În lucrare se dă o condiție necesară și suficientă pe care trebuie să o satisfacă o schemă logică de algoritmi pentru ca schema matricială de algoritmi obținută din ea să fie astfel încît dacă α_{ij} sînt elementele schemei matriciale, atunci ele să satisfacă condiția :

$$\bigvee_{i=1}^{p+1} \alpha_{ij} \equiv 1, \quad j = \overline{0,\ p}.$$

Rezultatul găsit se bazează pe unele rezultate obținute anterior în lucrarea [2].

În lucrarea [2] am expus un procedeu care permitea ca, fiind dată o schemă logică de algoritmi să se construiască cu ajutorul procedeului dat de noi schema logică matricială echivalentă cu prima. De asemenea, am precizat noțiunea de schemă logică de algoritmi și am dat definiția ei. În această notă vom reține pentru schemele logice de algoritmi și pentru schemele logice matriciale aceleași definiții. La început prin cîteva exemple vom încerca să punem o problemă la care vom răspunde mai tîrziu.

Exemplul 1. Fie dată schema logică de algoritmi [2]

$$A_0(\alpha_1,\ 3)\ (\alpha_2,\ 5)\ A_3(\alpha_4,\ 1)\ (\alpha_5,\ 3)\ A_6 A_7. \tag{1}$$

Aplicînd procedeul P [2] schemei (1), obținem următoarea schemă matricială :

$$\begin{array}{c|ccc} & A_3 & A_6 & A_7 \\ \hline A_0 & \alpha_1 .\ \alpha_2 \vee \alpha_1 \overline{\alpha}_2\ \overline{\alpha}_5 \vee \overline{\alpha}_1 & \alpha_1 .\ \overline{\alpha}_2 .\ \alpha_5 & 0 \\ A_3 & \begin{array}{c} \overline{\alpha}_4 .\ \alpha_1 .\ \alpha_2 \vee \alpha_4\ \overline{\alpha}_5 \vee \overline{\alpha}_4\ \alpha_1 \vee \\ \vee\ \overline{\alpha}_4 .\ \alpha_1 .\ \overline{\alpha}_2\ \overline{\alpha}_5 \end{array} & \alpha_4\ \alpha_5 \vee \overline{\alpha}_4\ \alpha_1\ \overline{\alpha}_2\ \alpha_5 & 0 \\ A_6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{2}$$

---

[1] Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a Academiei R.P.R., Filiala Cluj, din 11–12 decembrie 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1405–1409, BUCUREȘTI, 1965

Să notăm cu β_{ij} elementele matricei (2); atunci vom arăta că:

$$\bigvee_{j=1}^{3} \beta_{ij} \equiv 1 \text{ pentru } i=1,\ 2,\ 3 \text{ şi } \beta_{is} \& \beta_{it} \equiv 0 \text{ pentru } s \neq t,\ i=1,\ 2,\ 3.$$

În adevăr, pentru prima linie avem:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \vee \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_5 \vee \overline{\alpha}_1) \vee (\alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_5) \vee 0 = \alpha_1 (\alpha_2 \vee \overline{\alpha}_2 (\alpha_5 \vee \overline{\alpha}_5)) \vee \overline{\alpha}_1 \equiv 1$$

dacă ţinem seamă că $\alpha \vee \overline{\alpha} \equiv 1$.

Pentru linia a doua a matricei (2) avem:

$$(\overline{\alpha}_4 \alpha_1 \alpha_2 \vee \alpha_4 \overline{\alpha}_5 \vee \overline{\alpha}_4 \overline{\alpha}_1 \vee \overline{\alpha}_4 \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_5) \vee (\alpha_4 \alpha_5 \vee \overline{\alpha}_4 \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \alpha_5) \vee 0 =$$

$$= \overline{\alpha}_4 (\alpha_1 \alpha_2 \vee \overline{\alpha}_1 \vee \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_5 \vee \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \alpha_5) \vee \alpha_4 \overline{\alpha}_5 \vee \alpha_4 \alpha_5 =$$

$$= \overline{\alpha}_4 (\alpha_1 (\alpha_2 \vee \overline{\alpha}_2 (\alpha_5 \vee \overline{\alpha}_5)) \vee \overline{\alpha}_1) \vee \alpha_4 (\alpha_5 \vee \overline{\alpha}_5) \equiv 1.$$

Pentru linia a treia afirmaţia este evidentă.

Cea de-a doua afirmaţie este demonstrată în general în [2].

Exemplul 2. Fie schema logică de algoritmi

$$A_0 (\alpha_1, 3)\ (\alpha_2, 4)\ A_3\ (\alpha_4, 1)\ A_5\ A_6. \tag{3}$$

Aplicînd acelaşi procedeu ca în exemplul 1, obţinem următoarea schemă matricială

$$\begin{array}{c|ccc} & A_3 & A_5 & A_6 \\ \hline A_0 & \alpha_1 \alpha_2 \vee \overline{\alpha}_1 \vee \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4 \overline{\alpha}_1 & \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4 & 0 \\ A_3 & \overline{\alpha}_4 \alpha_1 \alpha_2 \vee \overline{\alpha}_4 \overline{\alpha}_1 & \alpha_4 & 0 \\ A_5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{4}$$

Pentru această schemă matricială calculăm disjuncţia elementelor primei linii şi avem

$$(\alpha_1 \alpha_2 \vee \overline{\alpha}_1 \vee \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4 \overline{\alpha}_1) \vee (\alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4) \vee 0 = \alpha_1 \alpha_2 \vee \overline{\alpha}_1 \vee \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4 (\overline{\alpha}_1 \vee 1) =$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \vee \overline{\alpha}_1 \vee \alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4 = \alpha_1 (\alpha_2 \vee \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4) \overline{\overline{\vee}}\, \overline{\alpha}_1$$

care după cum reiese din tabelul 1 nu este identic egală cu unitatea.

Tabelul 1

α_1	α_2	α_4	$\overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4$	$\alpha_2 \vee \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4$	$\alpha_1 (\alpha_2 \vee \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4) \vee \overline{\alpha}_1$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1

Din tabelul 1 se observă că pentru $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ şi $\alpha_4 = 1$ funcţia logică $\alpha_1 (\alpha_2 \vee \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_4) \vee \overline{\alpha}_1$ ia valoarea zero şi deci ea nu este identic adevărată.

Pentru elementele celei de-a doua linii avem :

$$\bar{\alpha}_4\, \alpha_1\, \alpha_2 \vee \bar{\alpha}_4\, \alpha_1 \vee \alpha_4 = \bar{\alpha}_4\, \alpha_1 (\alpha_2 \vee 1) \vee \alpha_4 = \bar{\alpha}_4\, \alpha_1 \vee \alpha_4$$

care pentru orice valoare a lui α_3 şi $\alpha_4 \equiv 0$ şi $\alpha_1 = 0$ este egală cu zero ceea ce ne arată că nici această funcţie nu este identic adevărată.

Problema pe care o punem în această lucrare este aceea că fiind dată o schemă logică de algoritmi S definită ca în [2], schema logică matricială obţinută din ea prin procedeul P satisface sau nu satisface următoarele proprietăţi :

$$\bigvee_{j=1}^{p+1} \alpha_{ij}(X) \equiv 1, \quad i = \overline{1, p} \tag{5}$$

$$\alpha_{i_s}(X) \,\&\, \alpha_{it}(X) \equiv 0 \quad t \neq s \text{ şi } i = \overline{1, p}, \tag{6}$$

oricare ar fi X, stare a memoriei [2], [3]? Se observă că schema logică de algoritmi dată în exemplul 1 satisface aceste proprietăţi, însă schema logică dată în exemplul 2 nu satisface decît proprietatea (6). De altfel în [2] este demonstrat că proprietatea (6) este satisfăcută de orice schemă matricială care se obţine cu ajutorul procedeului P dintr-o schemă logică de algoritmi. Rămîne deci să lămurim ce condiţii trebuie să îndeplinească o schemă logică de algoritmi, pentru ca elementele schemei matriciale obţinute din ea să satisfacă proprietatea (5)? Pentru a rezolva această problemă reamintim mai întîi cîteva noţiuni din [2].

Procedeul P dat în [2] ne permitea ca cu ajutorul lui dintr-o schemă logică de algoritmi să obţinem toate subşirurile de forma

$$B_i\, H_{i_1}\, H_{i_2} \ldots H_{i_k}\, B_j, \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1, \tag{7}$$

cu următoarele proprietăţi :

1. B_i este un operator aritmetic şi dacă $j = i + 1$, atunci şi B_j este tot un operator aritmetic.

2. $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_k}$ $(k > 0)$ sînt condiţii logice astfel încît dacă $H_{i_{t+1}}$ este condiţia logică care urmează după H_{i_t} în subşirul (7), atunci sau $i_{t+1} = i_t + 1$ sau i_{t+1} este indicele de transfer [2] al elementului B_{i_t} după cum în acest element funcţia logică apare ca şi în schema logică de algoritmi sau apare negaţia ei.

3. B_j este un operator aritmetic dacă elementele subşirului H_{i_1}, $H_{i_2}, \ldots H_{i_k}$ $(k > 0)$ au proprietatea că oricare ar fi un element H_{i_ν} din acest subşir, cu funcţia sa logică α_{i_ν} atunci atît această funcţie cît şi negaţia ei nu mai apar între elementele acestui subşir.

4. Dacă B_j este o condiţie logică cu funcţia logică α_j, atunci neapărat există în subşirul $H_{i_1} H_{i_2}, \ldots, H_{i_k}$ $(k > 0)$ un indice i_μ astfel că $i_\mu = j$. Evident, dacă notăm cu B_{i_μ} funcţia logică din elementul H_{i_μ} al subşirului (7), atunci între β_{i_μ} şi α_j avem una din relaţiile $\beta_{i_\mu} = \alpha_j$ sau $\beta_{i_\mu} = \bar{\alpha}_j$. Cu aceste precizări putem enunţa următoarea

TEOREMĂ. *Condiţia necesară şi suficientă ca unei scheme logice de algoritmi să i se poată ataşa o schemă logică matricială ale cărei elemente* *să satisfacă proprietatea (5) este ca schema logică de algoritmi să fie astfel încît în orice subșir de forma (7) obținut cu procedeul P ultimul element să fie un operator aritmetic.*

Demonstrație. Necesitatea. Considerăm șirul tuturor subșirurilor de forma (7) care încep cu un oarecare operator B_i, și presupunem că în acest subșir există cel puțin un subșir de forma (7) care conține ca ultim element o funcție logică. Fie subșirul considerat de forma

$$B_i \ \alpha_{i_1} \ \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_{s-1}} \ \alpha_{i_s}, \tag{8}$$

unde α_{i_s} este o funcție logică. Fie C_i^0 mulțimea tuturor subșirurilor care încep cu operatorul B_i și fie X o stare a memoriei în așa fel ca :

$$\alpha_{i_1}(X) = \alpha_{i_2}(X) = \ldots . \ \alpha_{i_{s-1}}(X) = 1. \tag{9}$$

Vom arăta că pentru această stare a memoriei nu are loc condiția (5). În adevăr, pentru aceasta vom împărți mulțimea C_i^0 în două mulțimi disjuncte $C_i^{0,1}$ și $C_i^{0,2}$ astfel : din mulțimea $C_i^{0,1}$ fac parte acele subșiruri care încep cu B_i și pentru care funcția logică α_{i_1} apare ca și în șirul (8) (adică în elementele mulțimii $C_i^{0,1}$ după operatorul B_i apare chiar α_{i_1} și nu $\overline{\alpha}_{i_1}$), și considerăm mulțimea $C_i^{0,2} = C_{C_i^0}(C_i^{0,1})$. Elementele mulțimii $C_i^{0,2}$ evident vor conține după operatorul aritmetic B_i funcția logică $\overline{\alpha}_{i_1}$.

Din modul cum am construit mulțimile $C_i^{0,1}$ și $C_i^{0,2}$ rezultă că subșirul (8) aparține mulțimii $C_i^{0,1}$ și deoarece $\overline{\alpha}_{i_1}(x) = 0$ are loc relația

$$\bigvee_{j \in C_i^{0,2}} \beta_{ij} = 0, \tag{10}$$

unde $\beta_{ij} = \overline{\alpha}_{i_1} \,\&\, \alpha^j_{k_1} \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha^j_{k_t}$ și $B_i \, \overline{\alpha}_{i_1} \, \alpha^j_{k_1} \ldots \alpha^j_{k_t} B_j$ aparține mulțimii $C_i^{0,2}$. Cu mulțimea $C_i^{0,1}$ procedăm la fel ca și cu mulțimea C_i^0 și fie $C_i^{0,1,1}$ și $C_i^{0,1,2}$, unde de data aceasta mulțimea $C_i^{0,1,1}$ conține în subșirurile sale ca al treilea element tocmai funcția logică α_{i_2} așa cum apare ea în subșirul (8), adică șirul (8) aparține mulțimii $C_i^{0,1,1}$ iar $C_i^{0,1,2} = C_{C_i^{0,1}}(C_i^{0,1,1})$. Se observă imediat că deoarece $\overline{\alpha}_{i_2}(X) = 0$, avem relația

$$\bigvee_{j \in C_i^{0,1,2}} \beta_{ij} = 0, \tag{11}$$

unde β_{ij} au aceeași semnificație ca în (10).

Continuînd analog și aplicînd de $s-2$ ori acest procedeu, vom construi mulțimile $C_i^{\underbrace{0,1,1,1\ldots,1}_{s-2}} = C_i^0(1, s-1)$ și $C_i^{\underbrace{0,1,1\ldots1,2}_{s-2}} = C_i^0(2, s-2)$ astfel ca subșirul (8) să aparțină lui $C_i^0(1, s-2)$ și $C_i^0(2, s-2) = C_{C_i^0(1,s-3)}(C_i^0(1, s-2))$ și evident avem :

$$\bigvee_{j \in C_i^0(2,s-2)} \beta_{ij} = 0. \tag{12}$$

Din construcţia procedeului P rezultă că clasa C_i^0 $(1, s-1)$ care se construieşte ca mai sus din clasa C_i^0 $(1, s-2)$ va conţine un singur element şi anume subşirul (8).

Din ceea ce am considerat mai sus, rezultă că dacă au loc relaţiile (9) pentru o stare a memoriei convenabil aleasă, atunci avem :

$$\bigvee_{j \in \bigcup_{t=1}^{s-1} C_i^0(2,t)} \beta_{ij} = 0 \tag{13}$$

Deoarece

$$C_i^0 = \left[\bigcup_{h=1}^{s-1} C_i^0\,(2,\ h) \right] \cup (C_i^0\,(1,\ s-1)), \tag{14}$$

urmează că nu are loc relaţia (5) după cu ms-a arătat în [2] conjuncţia α_{i_1} $\& \alpha_{i_2} \& \ldots \& \alpha_{i_s}$ nu intră în nici un element din linia i a schemei matriciale.

Suficienţa. Fie S este o schemă logică de algoritmi astfel încît prin procedeul P dat în [2] orice subşir de forma (7), conţine ca ultim element un operator aritmetic diferit.

De aici urmează că pentru orice stare a memoriei după executarea unui oarecare operator diferit de operatorul de oprire urmează să se execute în mod obligatoriu un alt operator. Dacă ţinem seamă de echivalenţa între schemele logice de algoritmi şi schemele logice matriciale [1], rezultă că cel puţin pentru o stare a memoriei există în orice linie a schemei matriciale un element care are valoarea 1 şi de aicea rezultă suficienţa.

Primită la redacţie la 29 mai 1965

Institutul de calcul al
Academiei Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. И. И. Янов, *О логических схемах алгоритмов.* Проблемы кибернетики, *1*, п. 75—127, (1958).
2. L. Negrescu şi I. Păvăloiu, *Asupra verificării formale a schemelor logice de algoritmi.* St. cerc. mat., **17**, *2*, 271—286 (1965).
3. Р. И. Подловенко, *О преобразованиях схем программ и их применений в программировании.* Проблемы кибернетики, *7* (1962).

O TEOREMĂ RELATIVĂ LA REZOLVABILITATEA PROBLEMEI DE INTERPOLARE LACUNARĂ[1])

DE

A. B. NÉMETH

(Cluj)

În Nota de faţă se generalizează la familii interpolatoare problema de interpolare lacunară formulată de G. D. Birkhoff în [1] pentru polinoame algebrice. Se enunţă o teoremă relativă la rezolvabilitatea problemei formulate.

Notăm cu $\mathcal{C}\,[a,\ b]$ spaţiul funcţiilor reale şi continue definite pe intervalul $[a,\ b]$. Fie $\mathcal{F}$ o submulţime a acestui spaţiu, avînd forma $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{1}^{\infty} F_n$, unde F_n este o familie interpolatoare n parametrică definită pe $[a,b]$. În cele ce urmează vom presupune că F_ν pentru $\nu \leqq 0$ se reduce la funcţia identic nulă pe $[a,\ b]$.

Definim operatorul $B : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ în următorul fel:

1. B este liniar (aditiv şi omogen) pe fiecare din $F_\nu \subset \mathcal{F}$;
2. $B\,(F_n) = F_{n-s}$;
3. Dacă $\varphi \neq 0$, $\varphi \in F_n$ are $h \geqq ks$ rădăcini distincte, atunci B^k_φ nu este identic nul. Prin B^k_φ înţelegem aplicarea repetată de k ori a operatorului B la funcţia φ.

Un operator care posedă proprietăţile 1, 2 şi 3 este operatorul de diferenţiere în cazul cînd familiile interpolatoare F_n sînt generate de baze de forma:

$$1,\ x,\ \ldots\ x^{n-1}$$

În acest caz $B = D^s$, unde D este operatorul de diferenţiere.

---

[1] Comunicare prezentată la Sesiunea ştiinţifică din 11—12 decembrie 1964 a Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

ST. CERC. MAT., TOM 17, NR. 9, P. 1411–1413, BUCUREŞTI, 1965

Problema generală de B-interpolare se formulează în următorul fel :

Fie date punctele axei reale $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, numerele arbitrare y_i, $i=1, \ldots, n$, precum și numerele întregi nenegative k_i, $i=1, \ldots, n$. Să se determine funcția $\varphi \in F_n$ avînd proprietățile

$$B^{k_i} \varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Spunem că problema (1) de B-interpolare are soluție dacă există un singur element cu proprietățile cerute.

Problema (1) de B-interpolare este complet caracterizată de perechile :

$$(k_i, x_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Într-adevăr din liniaritatea lui B urmează :

LEMĂ. *Problema* (1) *de B-interpolare are soluție dacă și numai dacă matricea*

$$\| B^{k_i} \varphi_j(x_i) \|_{i,\, j=1,\ldots,n}$$

este nesingulară.

Prin $\varphi_s, \ldots, \varphi_n$ se înțelege o bază oarecare a spațiului F_n.

Problema de B-interpolare formulată mai sus nu are totdeauna soluție nici chiar în cazul simplu cînd B este operatorul de diferențiere, iar F_n este mulțimea polinoamelor de grad cel mult $n-1$. În acest caz, B-interpolarea revine la interpolarea lacunară cunoscută [1]. Exemple de probleme de interpolare lacunară fără soluție sînt date în lucrările [2] și [3].

Date fiind numerele k_i, $i=1, \ldots n$, vom zice că sînt fixate ordinele operatoriale ale B-interpolării.

DEFINIȚIE *Un sistem de ordine operatoriale se numește nedegenerat, dacă se poate determina cel puțin un sistem de puncte x_i, $i=1, \ldots, n$, astfel ca problema de interpolare* (1) *să fie rezolvabilă.*

Prima problemă care ne-am pus-o referitoare la B-interpolarea formulată mai sus este următoarea : În ce condiții sistemul de ordine operatoriale k_i, $i=1, \ldots, n$, ale B-interpolării cu operatorul B avînd proprietățile 1, 2 și 3 formează un sistem nedegenerat. Am demonstrat următoarea :

TEOREMĂ *Condiția necesară și suficientă pentru ca ordinele operatoriale k_i, $i=1, \ldots, n$ ale unei B-interpolări cu $s \geqq 1$ să formeze sistem nedegenerat, este ca să avem :*

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left(n - j - p\left\{ k_i \mid k_i > \frac{j}{s} \right\} \right) \neq 0.$$

Cu $p\,(A)$ se notează numărul elementelor din mulțimea finită A.

Pentru demonstrarea necesității s-au folosit numai condițiile 1 și 2 impuse asupra operatorului B. Suficiența se poate de asemenea demonstra în condiții mai generale decît cele de la punctele 1, 2 și 3. Aceste condiții sînt însă mai complicate şi nu au importanţă din punctul de vedere al cazurilor concrete la care se aplică teorema. La demonstrarea teoremei drept punct de plecare se foloseşte lema enunţată mai sus.

Aplicînd teorema la cazul concret al interpolării lacunare, ajungem la următorul

COROLAR *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca ordinele de derivare* k_i, $i = 1, \ldots, n$, *ale unei probleme de interpolare lacunară să formeze sistem nedegenerat este să fie îndeplinită condiţia*

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(n - j - p\left\{k_i \mid k_i > j\right\}\right) \neq 0 \cdot$$

Problema care se ridică în urma condiţiilor impuse operatorului B este următoarea :

Date fiind două familii interpolatoare F_n şi F_{n-s} există oare totdeauna un operator $B : F_n \to F_{n-s}$ care să verifice condiţiile 1, 2 şi 3? Dacă există un asemenea operator, atunci în ce condiţii va admite o prelungire în sensul ca să existe un subspaţiu $\mathscr{C}^{(B)}[a, b] \subset \mathscr{C}[a, b]$ astfel ca $B(\mathscr{C}^{(B)}[a, b]) = \mathscr{C}[a, b]$?

Primită la redacţie la 29 mai 1965

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. G. D. BIRKHOFF, *General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentation and quadrature* Trans. Amer. Math. Soc., **7**, 107—136 (1906).
2. J. SURÁNYI, P. TURÁN, *Notes on interpolation I.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., *6*, 66—79 (1955).
3. A. B. NÉMETH, *Interpolare cu lacune pe noduri distincte.* St. cerc. mat. (Cluj), **14**, 111—122 (1963).

ECHIVALENŢA SCHEMELOR EXPLICITE ŞI A ARBORILOR[1]

DE

T. RUS

(Cluj)

În lucrarea [2] se construieşte o limbă formală, cu ajutorul căreia se descriu algoritmii de rezolvare a unor probleme privind executarea calculelor analitice cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul. În lucrarea [9] se construieşte aşa-numita limbă a arborilor, comodă pentru rezolvarea cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul a unor probleme nearitmetice, nu neapărat de natura calculelor analitice. În lucrarea de faţă se rezolvă problema echivalenţei celor două limbaje, demonstrîndu-se următoarea teoremă :

Oricare - ar fi o problemă *P* formalizabilă în limbajul schemelor explicite, ea este formalizabilă şi în limbajul arborilor.

În lucrările [1], [2], [4], [5] s-a atacat problema folosirii maşinilor cifrice de calcul (m.c.c.) în scopul rezolvării cu ajutorul lor a unor probleme nearitmetice, numite probleme analitice. Ideea care stă la baza acestor cercetări este aceea a reprezentării problemei (stării ei iniţiale [11]) sub aşa-numita formă a schemelor explicite [1], [4]. După cum rezultă din aceste lucrări, clasa problemelor a căror stare iniţială se poate reprezenta sub formă de schemă explicită este destul de largă, ceea ce de fapt rezultă din diferitele genuri de probleme ce s-au putut ataca pe această cale, cum sînt acelea ale calculului analitic, a automatizării programării, a traducerii automate etc.

În lucrările [9], [11], ne-am pus problema construirii unei limbi algoritmice precum şi a algoritmilor în această limbă, care să fie de fapt algoritmii de rezolvare a problemelor nearitmetice care pot fi formalizate în limba construită, sau cu alte cuvinte a problemelor a căror stare inițială poate fi reprezentată în limba respectivă. Înțelesul cuvîntului nearitmetic din această frază este acela că unitățile elementare ale informației inițiale a problemelor la care ne referim sau al datelor inițiale, nu vor fi neapărat numai numerele și operațiile asupra lor, ci și mărimi de o altă natură.

---

[1] Lucrare prezentată la Sesiunea ştiinţifică a Academiei R.P.R., — Filiala Cluj din 11 – 12 decembrie 1964.

Algoritmii transformărilor T_η și T_ν construite de noi în lucrările mai sus citate putem spune că sînt universali pentru rezolvarea problemelor a căror stare inițială se poate reprezenta în limbajul arborilor marcați [11], [10]. Pentru a arăta lărgimea clasei de probleme nearitmetice care se pot rezolva cu ajutorul algoritmilor transformărilor T_η și T_ν (prin urmare cu ajutorul m.c.c., deoarece acești algoritmi sînt descriși în lucrările amintite în limba algoritmilor adresă, ceea ce îi face ușor de transcris în limba unei mașini), vom demonstra în această lucrare că din punct de vedere al reprezentării problemelor matematice, sau al formalizării lor noțiunea de schemă explicită este echivalentă cu noțiunea de arbore. Pentru aceasta vom prezenta pe scurt cîteva considerații despre scheme ținînd seamă de lucrările [1], [2], [4], [5], [6].

Definiția 1. Se numește schemă abstractă o listă de linii de forma următoare :

$$k_1 = k_1^1 k_1^2 \ldots k_1^{l_1}$$

$$k_2 = k_2^1 k_2^2 \ldots k_2^{l_2}$$

unde k_1, k_1^1, ... sînt numere întregi pozitive.

Vom nota în continuare schemele abstracte (sau, pe scurt, schemele) prin litera S (dacă este nevoie însoțită de indici).

Definiția 2. Se numește subschemă a unei scheme S date, orice schemă obținută din S prin ștergerea uneia sau a mai multor linii din S.

Vom presupune în continuare că nu are importanță ordinea liniilor în schemă. Fiecare linie de forma $k_i = k_i^1 k_i^2 \ldots k_i^{l_i}$ a unei scheme S are următorul conținut : obiectul k_i se construiește din obiectele k_i^1, $k_i^2, \ldots, k_i^{l_i} \cdot k_i$ se numește rezultat iar $k_i^1, \ldots, k_i^{l_i}$ se numesc argumente.

Definiția 3. Oricare ar fi linia $k_i = k_i^1 k_i^2 \ldots k_i^{l_i}$ a unei scheme S, spunem că fiecare argument este direct subordonat rezultatului său și scriem aceasta sub forma $k_i > k_i^s$, $s = 1, 2, \ldots l_i$.

Numerele care figurează într-o schemă pot fi împărțite în următoarele trei categorii :

a) Numere care figurează numai printre argumente, pe care le vom numi numere de bază.

b) Numere care figurează numai printre rezultate pe care le vom numi rezultate finale, sau numere rezultative.

c) Numere care nu sînt nici rezultate finale nici numere de bază, pe care le vom numi numere ajutătoare.

Definiția 4. O schemă S se va numi explicită dacă îndeplinește următoarele condiții :

1) Numerele rezultative ale schemei nu se repetă.

2) În schemă nu există lanțuri închise de forma $k_{i_1} > k_{i_2} > \ldots > k_{i_s} > k_{i_1}$.

Ținînd cont de cele de mai sus, într-o schemă se poate introduce o ordonare parțială. Pentru aceasta este suficient să spunem că k_{i_s} este subordonat lui k_{i_1} ($k_{i_1} > k_{i_s}$) dacă există lanțul $k_{i_1} > k_{i_2} > \ldots > k_{i}{}_{1}$.

Dacă $k_i = k_i^1\, k_i^2 \ldots k_i^{l_i}$ este o linie a schemei S, atunci l_i se va numi lungimea acestei linii.

Definiția 5. Două scheme S_1 și S_2 se numesc egale dacă se poate stabili o corespondență biunivocă între liniile lor, astfel ca liniile corespondente să aibă aceeași lungime.

Vom introduce acum noțiunea de schemă de calcul. Pentru aceasta să considerăm un cîmp oarecare de elemente matematice (în particular mulțimea $\mathcal{M}$ construită în [11]) în care un anumit sistem de obiecte (sau elemente) se va numi compatibil, și fiecare sistem compatibil de elemente se referă la elementele aceluiași cîmp. Subliniem că aici nu este vorba de compatibilitatea definită de noi în [7], ci despre o compatibilitate de forma următoare : dacă cîmpul de obiecte conține numerele și operațiile aritmetice asupra lor, printre care se găsește și operația : (împărțire), atunci sistemul : 2 0 nu este compatibil. Prin urmare compatibilitatea unui sistem de obiecte se referă la posibilitatea construirii efective a unui obiect nou din obiectele inițiale ale sistemului.

Definiția 6. O schemă S se numește satisfăcută în cîmpul $\mathcal{M}$ de elemente matematice dacă prin înlocuirea numerelor ei cu elemente ale cîmpului $\mathcal{M}$ sînt îndeplinite următoarele condiții :

1) Argumentele formează numai sisteme compatibile.

2) Prin înlocuirea argumentelor fiecărei linii cu elementele corespunzătoare ale cîmpului, sînt satisfăcute egalitățile care apar în schemă.

De observat că în definiția 6 este vorba de egalitatea definită în cîmpul $\mathcal{M}$ de elemente matematice.

Mulțimea A a elementelor cîmpului $\mathcal{M}$ cu care este satisfăcută schema S se numește înlocuirea schemei S în cîmpul $\mathcal{M}$ și se notează cu $S_{\mathcal{M}}$.

Se poate observa că o schemă S care poate fi satisfăcută într-un cîmp dat de elemente matematice, nu este altceva decît scheletul pe care se poate formaliza și rezolva [11] un tip dat de probleme în cîmpul $\mathcal{M}$.

Prin înlocuirea unei scheme, oricărui număr k al acesteia i se pune în corespondență în mod univoc un oarecare obiect m al cîmpului $\mathcal{M}$. Obiectul respectiv va fi numit înlocuirea numărului dat și se va nota prin $m = [k_m]$.

Definiția 7. Schema S se numește definită în cîmpul $\mathcal{M}$ dacă este dată înlocuirea numerelor ei de bază în acest cîmp. Vom numi această mulțime *înlocuire de bază* și o vom nota prin $S^0_{\mathcal{M}}$.

Definiția 8. Se numește schemă de calcul definită în cîmpul $\mathcal{M}$, construirea unei înlocuiri $S_{\mathcal{M}}$ a schemei S pentru care numerele de bază coincid cu înlocuirea de bază.

Definiția 9. O schemă S se numește echivalentă cu un arbore a relativ la un cîmp $\mathcal{M}$ de obiecte matematice dacă schema S este definită în cîmpul $\mathcal{M}$ și dacă ori care ar fi înlocuirea de bază a schemei S în cîmpul

$\mathcal{M}$ ea coincide cu mulţimea etichetelor care marchează nodurile arborelui a în cîmpul $\mathcal{M}$.

În continuare vom demonstra următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Oricare ar fi o schemă explicită S definită într-un cîmp $\mathcal{M}$ de obiecte matematice, ea este echivalentă cu un arbore a relativ la acest cîmp de obiecte matematice.*

Pentru a demonstra această teoremă vom proceda în felul următor : vom arăta că oricare ar fi o schemă explicită S definită în cîmpul $\mathcal{M}$ există un arbore a care are nodurile marcate de mulţimea elementelor cîmpului $\mathcal{M}$ care formează înlocuirea de bază a schemei S, şi reciproc, oricare ar fi arborele a cu nodurile marcate de elemente ale cîmpului $\mathcal{M}$ există schema explicită S definită în $\mathcal{M}$ pentru care înlocuirea de bază coincide cu mulţimea etichetelor arborelui a.

Fie pentru aceasta schema explicită S următoarea :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= k_1^1\, k_1^2 \dots k_1^{l_1} \\
k_2 &= k_2^1\, k_2^2 \dots k_2^{l_2} \\
&\dots\dots\dots \\
k_n &= k_n^1\, k_n^2 \dots k_n^{l_n}
\end{aligned}
$$

care, pentru început, presupunem că admite un singur element rezultativ. Fie $\mathcal{M}$ cîmpul de obiecte matematice în care este definită S şi fie $S^0_{\mathcal{M}}$ o înlocuire de bază a lui S.

Deoarece S este definită în $\mathcal{M}$, din ipoteza explicităţii ei urmează că ea este satisfăcută în cîmpul $\mathcal{M}$. De aici rezultă că putem presupune că în fiecare linie a ei se găseşte un element care indică cum se construieşte elementul din partea stîngă a egalităţii, din elementele din partea dreaptă a egalităţii. Acest element va fi numit în continuare operator. Printre elementele lui $S^0_{\mathcal{M}}$ se vor găsi atunci toţi operatorii care apar în schema S. Să presupunem că ei sînt primele componente ale liniilor în care apar, adică dacă $k_i = k_i^1\, k_i^2 \dots k_i^{l_i}$ este o linie a schemei S, atunci k_i^1 este operatorul respectiv. Vom ordona acum schema S cu ajutorul următorului algoritm :

1° Considerăm că k_1 este elementul rezultativ al schemei S. Acest lucru este posibil deoarece în schema S nu are importanţă ordinea liniilor. Prima linie a schemei va fi deci $k_1 = k_1^1\, k_1^2 \dots k_1^{l_1}$, k_1^1 fiind numărul de bază corespunzător operatorului acestei linii.

2° Dacă a fost ordonată schema S pînă la linia j şi dacă această linie are forma $k_j = k_j^1\, k_j^2 \dots k_j^{l_j}$, atunci următoarele linii ale schemei se vor obţine în felul următor :

Fie $k_j^{s_1}, k_j^{s_2}, \dots, k_j^{s_i}$ toate numerele acestei linii care nu sînt numere de bază ale schemei S astfel ca $1 \leqq s_1 < s_2 < \dots < s_i \leqq l_j$.

Atunci

$$k_i^{s_1} = k_{i+1}^{s_1^1} k_{i+1}^{s_1^2} \dots k_{i+1}^{s_1^{l_{i+1}^1}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$k_i^{s_i} = k_{i+1}^{s_i^1} k_{i+1}^{s_i^2} \dots k_{i+1}^{s_i^{l_{i+1}^i}}$$

vor fi următoarele i linii ale schemei S.

La următoarea aplicare a punctului 2°, ca linie j se va folosi linia $k_i^{s_1} = k_{i+1}^{s_1^1} k_{i+1}^{s_1^2} \dots k_{i+1}^{s_1^{l_i^1}}$, pentru $j=1, 2, \dots n$.

După un număr finit de aplicări ale punctului 2° al algoritmului de ordonare a schemei S, aceasta va apare sub forma

$$k_1 = k_1^1 k_1^2 \dots k_1^{l_1}$$

$$k_2 = k_2^1 k_2^2 \dots k_2^{l_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$k_n = k_n^1 k_n^2 \dots k_n^{l_n}$$

unde pentru oricare $1 \leqq i \leqq n$ avem $k_i > k_{i+1}$.

Să construim acum arborele a pentru care mulţimea $S^0_{\mathfrak{M}}$ este mulţimea etichetelor nodurilor sale.

Arborele a se va construi recursiv pe nivele conform următorului algoritm :

1. Schema S se ordonează cu ajutorul algoritmului descris mai sus.

2. Nivelul zero al arborelui a va fi format dintr-o rădăcină, marcată de înlocuirea elementului k_1^1 în schema S ordonată, şi anume de $[k_1^1]$.

3. Dacă nivelul i al arborelui a a fost construit, nivelul $i+1$ se construieşte în felul următor :

Fie $[k_i^{s_1}], [k_i^{s_2}], \dots, [k_i^{s_j}]$ elementele cîmpului $\mathfrak{M}$ care marchează nodurile arborelui a situate pe nivelul i şi fie liniile din care provin nodurile

$$k_i^1 = k_i^{s_1^2} k_i^{s_1^2} \dots k_i^{s_1^{l_i^1}}$$

$$k_i^2 = k_i^{s_2^1} k_i^{s_2^2} \dots k_i^{s_2^{l_i^2}}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$k_i^p = k_i^{s_p^1} k_i^{s_p^2} \dots k_i^{s_p^{l_i^p}} ,$$

unde $p \leqq s_j$. Nivelul $i+1$ va fi atunci format dintr-un număr de $\sum_{i=1}^{p} \delta([k_i^{s_i^1}])$ noduri dispuse de la dreapta la stînga în felul următor : fie nodul cel mai la dreapta al nivelului i marcat de $k_i^{s_1}$. Acesta se găseşte printre elementele liniei $k_i^1 = k_i^{s_1^1} k_i^{s_1^2} \dots k_i^{s_1^{l_i^1}}$. Dacă el este operator, atunci el este chiar $k_i^{s_1^1}$. În acest caz, cu liniile corespunzătoare lui $k_i^{s_1^2}, k_i^{s_1^3}, \dots, k_{i_1}^{s_1}$, se procedează ca și cu linia lui k_i^1, operatorul liniei $k_i^{s_1^2} = k_{i+1}^{s_q} k_{i+1}^{s_q^2} \dots k_{i+1}^{s_q^{l_{1i+1}}}$ marcînd primul nod al nivelului $i+1$, ș.a.m.d. Dacă $[k_i^{s_1}]$ nu este operator, atunci acesta se consideră ca și etichetă pentru nodul de pe nivelul i cel mai de la dreapta, se trece apoi la $[k_i^{s_2}]$ și la următorul nod de pe nivelul $i+1$ numărat de la dreapta spre stînga. Dacă s-a epuizat examinarea elementelor $[k_i^{s_1}], [k_i^{s_2}], \dots, [k_i^{s_j}]$, se trece la construcția următorului nivel al arborelui a. După un număr finit de aplicări ale punctului 3 al acestui algoritm al schemei S, toate elementele ei vor fi examinate și algoritmul se oprește. Arborele rezultat va fi arborele echivalent cu schema S.

Ultima afirmație de la punctul 3 al algoritmului descris mai sus rezultă din faptul că schema S este explicită și $k_1 > k_2 > \dots > k_n$. Pentru a clarifica cele expuse mai sus, să considerăm exemplul următor :

Fie schema S explicită cu un singur element rezultativ

$1 = +\ 2\ 3$

$2 = \times\ 4\ 5$

$3 =\ :\ 6\ 4$

$4 = \sqrt{7}$

$5 = +\ 8\ 6$

$6 = \exp.\ 9$

$7 = +\ 9\ 10$

$8 = \sin\ 4$

pe care am ales-o direct ordonată. Pentru această schemă avem o înlocuire de bază $S^0_{\mathfrak{M}} = \{+, \times, :, \sqrt{\ }, \sin, \exp, \times, a\}$, ceea ce rezultă direct din schemă, deoarece operatorii schemei i-am notat cu simbolurile lor obișnuite. Cuvîntul compatibil [7] reprezentat de această schemă cu înlocuirea amintită este expresia următoare :

$$E = \Big((\sqrt{(x) + (a))} \times \Big((\sin \Big(\sqrt{((x) + (a))}\,) \Big) + (\exp (x)) \Big) \Big) +$$
$$+ \Big((\exp (x)) : \Big(\sqrt{((x) + (a))} \Big).$$

Arborele a echivalent cu schema, construit după algoritmul descris mai sus, este cel prezentat în figură.

Să arătăm acum că are loc și afirmația inversă și anume că oricare ar fi arborele a cu o singură rădăcină, mulțimea simbolurilor cîmpului $\mathfrak{M}$ care marchează nodurile sale, coincide cu înlocuirea de bază a unei scheme explicite S.

Fie pentru aceasta arborele a dat și fie șirul tuturor subarborilor săi :

(1) $$a_0 ;\ a_1^1, a_2^1, \dots, a_p^1, \dots, a_1^k, a_2^k, \dots, a_{p_k}^k .$$

Şirul (1) presupunem că este construit în felul următor :

a_0 arborele a.

a^j_i subarborele arborelui a, care are rădăcina pe nivelul j şi este al i-lea pe acest nivel, numărat de la dreapta la stînga.

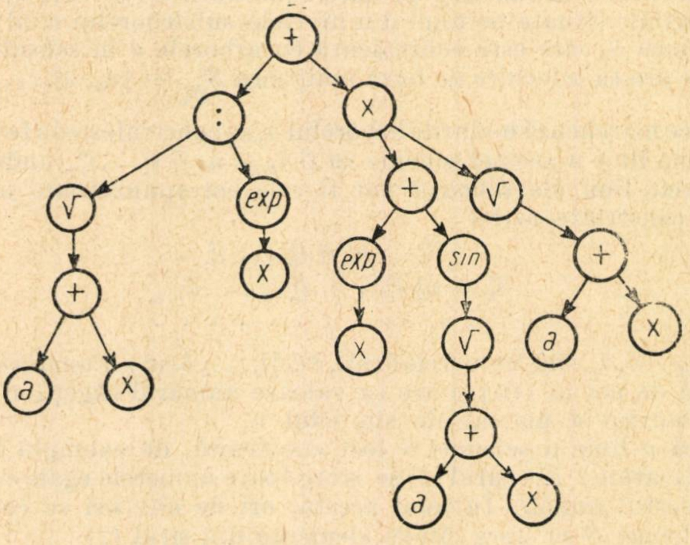


Fig. 1

Să construim acum şirurile

(2) $$i_0 *,\ i^1_1,\ i^1_2,\ldots,i^1_{p_1} *,\ldots,*,\ i^k_1,\ i^k_2,\ldots,i^{kk}_p *$$

(3) $$n_0 *,\ n^1_1,\ n^1_2,\ldots,n^1_p *,\ldots,*\ n^k_1,\ n^k_2,\ldots,n^{kk}_p *$$

în felul următor :

1) $i_0 = 1$ iar n_0 este simbolul care marchează rădăcina arborelui a.

2) $i^1_1 = 2$ iar n^1_1 este simbolul care marchează rădăcina arborelui a^1_1.

i^1_j se determină după următoarea formulă

$$i^1_j = \begin{cases} i^1_{j-1} + 1 & \text{dacă } a^1_j \neq a^1_{j-1}, \\ i^1_{j-1} & \text{dacă } a^1_j = a_{,-1}', \end{cases}$$

n^1_j fiind simbolul ce marchează rădăcina arborelui a pentru $j=1,2, \ldots p$.

În general avem $i^j_1 = i^{j-1}_1 + 1$ dacă printre subarborii şirului (1) care preced pe a^j_1 în acest şir, nu este nici unul egal cu el, şi i^j_1 este egal cu numărul şirului (2), corespunzător subarborelui din şirul (1) egal cu a^j_1, în caz contrar, iar

$$i^j_k = \begin{cases} i^j_{k-1} + 1 & \text{dacă în şirul (1) toţi arborii ce preced} \\ & \text{pe } a^j_k \text{ sînt diferiţi de acesta,} \\ i^l_s & \text{dacă } a^j_k = a^l_s,\ l \leqq j,\ s < k < p_k \\ & \text{pentru } k = 1, 2, \ldots, p_k \end{cases}$$

În oricare din cazurile analizate mai sus, n^j_k este simbolul ce marchează rădăcina arborelui a^j_k. Noțiunea de egalitate a arborilor o înțelegem în sensul introdus de noi în [11].

DEFINIȚIA 10. Numerele $i^j_1, i^j_2, \ldots, i^j_k$ din șirul (2) se numesc subordonate numărului i^s_r din același șir dacă subarborii $a^j_1, a^j_2, \ldots, a^j_k$ ai arborelui a au rădăcinile situate pe unul din nivelele subarborelui a^s_r al arborelui a.

Schema S, care este echivalentă cu arborele a în sensul definit mai sus și care are ca înlocuire de bază mulțimea $S^0_{\mathfrak{M}} = \{n_0, n^0_1, \ldots, n^k_{p_k}\}$ a simbolurilor ce marchează nodurile arborelui a, se construiește în felul următor :

Prima linie a acestei scheme va fi $i_0 = n_0\, i^1_1\, i^1_2 \ldots i^1_p$, unde $\delta(n_0) = p$. Următoarele linii ale schemei vor fi cele corespunzătoare numerelor i^1_1, $i^1_2, \ldots, i^1_p$ construite astfel :

$$\begin{gathered} i^1_1 = n^1_1\, i^2_1\, i^2_2 \ldots i^2_{l_1} \\ i^1_2 = n^1_2\, i^2_{l_1+1} + i^2_{l_1+2} \ldots i^2_{l_1+l_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

unde $l_1, l_2, \ldots, l_p$ sînt numerele $\delta(n^1_1), \delta(n^1_2), \ldots, \delta(n^1_p)$. Funcția $\delta(n)$ este cea construită de noi în [10] și are ca valoare numărul săgeților care ies din nodul arborelui a marcat de simbolul n.

Dacă o linie a schemei a fost construită, de exemplu linia $i^1_1 = n^1_1$ $i^2_1\, i^2_2 \ldots i^2_{l_1}$, atunci din șirul (2) se șterg toate numerele egale cu i^1_1 și subordonate acestui număr. În felul acesta, ori de cîte ori se construiește o linie a schemei S se șterg cîteva elemente din șirul (2).

În general liniile schemei S se definesc sub forma următoare :

$$\begin{gathered} i^i_1 = n^i_1\, i^{i+1}_1 \ldots i^{i+1}_{l^i_1} \\ i^i_1 = n^i_2\, i^{i+1}_{l^i_1+1} \ldots i^{i+1}_{l^i_1+l^i_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Se poate ușor observa că procedînd în felul descris mai sus, dat fiind arborele a, se construiește o schemă S cu nu număr de linii egal cu numărul elementelor mulțimii $S^0_{\mathfrak{M}}$. Dacă se șterg din această schemă liniile de forma $i^l_\gamma = n^l_\gamma$ și dacă se înlocuiesc toate simbolurile n^s_i care apar printre elementele schemei, cu numere întregi pozitive diferite de cele care se găsesc în schemă și diferite între ele, atunci se obține o schemă explicită S cu un singur element rezultativ, care are ca și înlocuire de bază mulțimea $S^0_{\mathfrak{M}}$. Pentru clarificarea celor expuse mai sus să considerăm exemplul următor : fie arborele a cel din figură. Șirul (1) va fi atunci format din subarborii a_0, a^1_1, a^1_2, a^2_1, a^2_2, a^2_3, a^2_4, a^3_1, a^3_2, a^3_3, a^3_4, a^3_5, a^4_1, a^4_2, a^4_3, a^4_4, a^4_5, a^4_6, a^5_1, a^6_1, a^6_2 unde avem următoarele egalități :

$$\begin{aligned} a^2_1 &= a^2_4 = a^4_3\,, \\ a^2_3 &= a^3_3\,, \\ a^3_1 &= a^3_5 = a^5_1\,, \\ a^3_4 &= a^4_1 = a^4_4 = a^4_5 = a^6_1\,, \\ a^4_2 &= a^4_6 = a^6_2\,. \end{aligned}$$

Ţinînd cont de aceste egalităţi şirurile (2) şi (3) vor fi

2′) $1\ast, 2, 3\ast, 4, 5, 6, 4\ast, 7, 8, 6, 9, 7\ast, 9, 10, 4, 9, 9, 10, \ast 7\ast, 9, 10\ast$

$+\ast, \times, :\ast, \sqrt{\;}, +, \exp, \sqrt{\;}\ast, +, \sin, \exp, \times, +\ast, \times, a, \sqrt{\;}, \times,$

3′) $\times, a\ast, +\ast, \times, a\ast$

Schema S construită după procedeul descris mai sus va fi următoarea :

$1 = +\ 2\ 3$
$2 = \times\ 4\ 5$
$3 = :\ 6\ 4$
$4 = \sqrt{\;}\ 7$
$5 = +\ 8\ 6$
$6 = \exp\ 9$
$7 = +\ 9\ 10$
$8 = \sin\ 4$
$9 = x$
$10 = a$

Se vede imediat că dacă ştergem liniile $9 = x$ şi $10 = a$, obţinem o schemă explicită egală cu cea de la exemplul precedent şi care are acelaşi element rezultativ.

Pentru a arăta că afirmaţia teoremei 1 este adevărată în cazul general al schemelor explicite cu p elemente rezultative, este suficient să observăm că oricare ar fi o schemă explicită S cu p elemente rezultative, ea se poate descompune în p subscheme ale primeia, cu cîte un singur element rezultativ. Un algoritm care realizează o asemenea descompunere se poate descrie relativ uşor. Acesta poate fi de exemplu algoritmul de ordonare a schemei S descris mai sus, pentru care se cere să se construiască toate şirurile de subordonări de forma $k_{i_1} > k_{i_2} > \ldots > k_{i_q}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, fiecare dintre acestea fiind de fapt corespunzător unei subscheme explicite cu un singur element rezultativ. În acest caz schema explicită respectivă, după cum se poate uşor observa, va fi echivalentă cu un arbore cu p rădăcini.

Să notăm în cele ce urmează cu Z_1 algoritmul prin care unei scheme S i se ataşează un arbore şi cu Z_2 algoritmul prin care unui arbore i se ataşează o schemă. Vom avea atunci următoarele egalităţi :

$$Z_1(S) = a$$

$$Z_2(a) = S'$$

$$S = S'$$

ultima egalitate înţelegîndu-se în sensul definit de noi mai sus iar primele două înţelegîndu-se în sensul definit în [3]. Se poate prin urmare face şi observaţia că două scheme explicite egale, definite în acelaşi cîmp $\mathcal{M}$, sînt egale şi în sensul egalităţii elementelor lor rezultative, adică sînt satisfăcute de aceleaşi elemente ale cîmpului $\mathcal{M}$.

Din cele de mai sus rezultă că este adevărată următoarea teoremă :

TEOREMA 2. *Oricare ar fi o problemă formalizabilă* [11] *în limbajul schemelor explicite, ea este formalizabilă şi în limbajul arborilor.*

Alegerea unuia sau a altuia dintre aceste limbaje pentru scrierea problemelor este determinată de scopul pe care îl urmărim, cu alte cuvinte de natura problemelor pe care ni le punem, precum şi de metodele (sau algoritmii) de rezolvare a acestor probleme.

Primită la redacţie la 29 mai 1965

Institutul de Calcul al Academiei
Republicii Socialiste România
— Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. КАНТОРОВИЧ, Л. Т. ПЕТРОВА, *О математической символике, удобной при вычислениях на машинах.* Труды третьего Всесоюзного матем. съезда, **II**, 153 (1956).
2. Л. В. КАНТОРОВИЧ, *Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах.* ДАН СССР, **113**, *4*, 738—741 (1957).
3. А. А. МАРКОВ, *Теория алгорифмов.* Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Москва, **XIII** (1954).
4. Л. Т. ПЕТРОВА, *О проведении аналитических выкладок на машинах с программным управлением.* Изв. выс. учеб. заведений, Матем., *5/6/*(1958).
5. Л. Т. ПЕТРОВА, *Некоторые примнения схемой символика.* Ж. вычисл. матем. и матем. физики, *I*, 3 (1961).
6. Л. Т. ПЕТРОВА, *Реализация на машине вычислений в исходном классе списков.* Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **LXVI**, 16—36 (1962).
7. T. RUS, *Asupra unui sistem formal (I).* St. cerc. mat., **15**, *4*, 459—470 (1964).
8. — *Asupra unui sistem formal (II)*, St. cerc. mat., **15**, *5*, 595—615 (1964).
9. — *Algoritmi de prelucrare a expresiilor formale cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul*, St. cerc. mat., **16**, *9*, 1129—1139, (1964).
10. — *Asupra reprezentării matriciale a arborilor*, St. cerc. mat., **16**, *9*, 1179—1185 (1964).
11. — *Folosirea arborilor la rezolvarea unor probleme nearitmetice cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul*, Lucrare de disertaţie.

ASUPRA OPERATORILOR CVASICOMPACŢI (I)

DE

V. I. ISTRĂŢESCU

Fie B un spaţiu Banach iar T un operator cvasicompact de ordin 1. În lucrare se dau cîteva teoreme referitoare la natura spectrului operatorului T.

1. Fie B un spaţiu Banach şi T un operator liniar şi continuu definit pe B.

Operatorul T se numeşte cvasicompact de ordin 1 [1] dacă există un operator compact S astfel încît

$$\|T - S\| < 1.$$

În cele ce urmează ne vom ocupa de spectrul unui asemenea operator.

TEOREMA 1.1. *Dacă operatorul T este cvasicompact, atunci fie*

$$f_n = (T - I)\ g_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

astfel ca $\{f_n\}$ să fie un şir convergent. Dacă $\{g_n\}$ este mărginit, atunci el conţine un subşir convergent.

Demonstraţie. Fie S operatorul care intervine în definiţia cvasicompactităţii lui T. Evident,

$$f_n = (T - S - I)\ g_n + Sg_n$$

sau

$$(T - S - I)^{-1} f_n = g_n + (T - S - I)^{-1}\ Sg_n$$

de unde

$$g_n = (T - S - I)^{-1} f_n - (T - S - I)^{-1}\ Sg_n$$

şi cum f_n este convergent iar $(T - S - I)^{-1}\ S$ este compact, rezultă afirmaţia făcută

TEOREMA 1.2. *Subspaţiul*

$$B_0 = (T - I)\ B$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1425–1428, BUCUREŞTI, 1965

este închis. Dacă 1 *nu este o valoare proprie pentru* T, *atunci operatorul* $(T - I)^{-1} : B \to B_0$ *este mărginit.*

Demonstraţie. Vom face mai întîi o observaţie.

Fie f fix în B_0 şi fie

$$Ef = \{ y \ , \ (T - I)_y = f \}.$$

Ef este o mulţime convexă şi închisă. În adevăr, dacă g_n este un şir mărginit, atunci, conform teoremei 1, putem extrage un subşir convergent. În acest caz însă există un element cu norma minimă. Să notăm aceste elemente cu f'.

Demonstrăm mai întîi ca

$$\|f'\| \leqslant M \, \|f\|.$$

În caz contrar, rezultă că există $f_n \in B$ astfel ca

$$\|f'_n\| > n \, \|f_n\|$$

aplicînd teorema 1 deducem că există un subşir f'_{nk} astfel ca

$$\lim \frac{f'_{nk}}{\|f'_{nk}\|} = f_0$$

deoarece

$$(T - I) \frac{f'_n}{\|f'_n\|} = \frac{f_n}{\|f'_n\|}$$

şi deci

$$(T - I) \, f_0 = 0$$

şi ţinînd seama de definiţia elementelor f'_n, deducem

$$\left\| \frac{f'_n}{\|f'_n\|} - f_0 \right\| \geqslant 1$$

ceea ce nu se poate.

Să arătăm că B_0 este închis. Fie $\{f_n\} \subset B$ şi $f_n \to f$.

Din observaţia făcută şi din teorema 1 rezultă că există un subşir f'_{nk} astfel ca $f'_{nk} \to f'$. În acest caz însă

$$\lim \, (T - I) \, f'_{nk} = \lim \, f_{nk} = (T - I) \, f' = f$$

şi teorema este demonstrată.

Să considerăm acum un număr complex λ_0 arbitrar, $|\lambda_0| \geqslant 1$. În acest caz are loc o teoremă analoagă cu teorema 1.1.

Teorema 1. 1. *Dacă*

$$f_n = (T - \lambda_0 I) g_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

este un şir convergent şi $\{ g_n \}$ *este mărginit, atunci* $\{ g_n \}$ *conţine un subşir convergent.*

Demonstrație. Dacă operatorul T este cvasicompact, atunci și operatorul λ_0 este cvasicompact.

Cum avem

$$\frac{f_n}{\lambda_0}\left(\frac{T}{\lambda_0} - I\right) g_n$$

sau

$$\frac{f_n}{\lambda_1} = \left(\frac{T}{\lambda_0} - I\right) g'_n$$

unde $|\lambda| \geqslant 1$. Aplicînd acestui operator teorema 1.1, se obține teorema de mai sus.

Menționăm că este adevărată și o afirmație ca în teorema 1.2 pentru subspațiul

$$B_{\lambda_0} = (T - \lambda_0 I)\ B.$$

2. Rezultate mai precise se obțin în cazul spațiilor Hilbert. Să presupunem că operatorul T mai satisface și condiția $S - T = Q$, unde Q este un operator autoadjunct.

Fie $\{e_i\}_1^\infty$ un șir ortonormal de elemente din H.

Să presupunem că

$$Te_k = \sum_1^{k-1} \alpha_{kj}\, e_j + \lambda_k e_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

În acest caz putem demonstra următoarea teoremă :

Teorema 2.1. *Avem* $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Im}(\lambda_k) = 0$.

Cum avem relația

$$Se_k = (S - T)e_k + Te_k = \sum_1^{k-1} \alpha_{kj}\, e_j + \lambda_k e_k - (S - T)\, e_k$$

deducem

$$\|Se_k - Se_s\| \geqslant |< Se_k - Se_s,\ e_k >| =$$

$$= |<Se_k, e_k> - <Se_s, e_k>| = |\lambda_k - <(S - T)\, e_k\, e_k> + <(S - T)\, e_s\, e_k>|$$

$$\geqslant |\operatorname{Im}\ (\lambda_k - <(S - T)\, e_k,\ e_k> + <(S - T)\, e_s, e_k>| =$$

$$= |\operatorname{Im}\ (\lambda_k) + \operatorname{Im} <(S - T)\, e_s, e_k>|_0$$

De aici rezultă evident că

$$(^*) \qquad |\operatorname{Im}(\lambda_k)| \leqslant \|Se_k - Se_s\| + |<(S - T)\, e_s,\ e_k>|.$$

și obținem ușor o contradicție dacă presupunem că afirmația teoremei este falsă.

În adevăr, dacă pentru un anumit subșir am avea

$$(^{**}) \qquad \lim |\operatorname{Im}(\lambda_{k_j})| = \delta > 0,$$

atunci, ţinînd seama că în relaţia de mai sus (*) operatorul S este complet continuu, şi $\{e_k\}_1^\infty$ este un şir ortonormal, (**) nu poate avea loc şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Dacă $S - T = iT_1$, unde T_1 este un operator autoadjunct se poate formula o teoremă analoagă celei de mai sus, privind însă părţile reale ale numerelor λ_k.

Cu ajutorul lemei de mai sus se pot demonstra uşor următoarele teoreme :

TEOREMA 2.2. Dacă λ_0 *este o valoare proprie imaginară pentru* T, *atunci*

$$(T - \lambda_0 I)H < H$$

TEOREMA 2.3. *Orice punct nereal al spectrului* $\sigma(T)$ *este o valoare proprie pentru* T.

TEOREMA 2.4. *Mulţimea punctelor imaginare ale spectrului* $\sigma(T)$ *este finită sau numărabilă.*

Observaţie. Teoremele date asupra structurii operatorilor din clasa considerată reprezintă generalizarea unor teoreme cunoscute pentru operatorii T definiţi pe un spaţiu Hilbert şi care au partea imaginară complet continuă [2].

3. Să considerăm acum un operator T evasicompact de ordin $m > 1$, (impar), adică un operator pentru care există $m > 1$ (impar) şi un operator compact S astfel ca

$$\|T^m - S\| < 1.$$

Este evident că toate proprietăţile stabilite la punctele 1 şi 2 sînt adevărate pentru $T_1 = T^m$.

Ţinînd seamă că

$$\sigma(T_1) = (\sigma(T))^m,$$

rezultă că teorema 2.4 rămîne adevărată şi pentru această clasă de operatori.

Proprietăţile de mai sus intervin în problemele legate de găsirea unui model triunghiular pentru operatorii de acest tip.

Primită la redacţie la 4 iunie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. O. ONICESCU, G. MIHOC, C. T. IONESCU TULCEA, *Calculul probabilităţilor.* Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1956.
2. M. S. BRODSKI, M. S. LIVŞIT, U.M.N., **XIII**, *1* (79) (1958).

PROBLEME LEGATE DE STUDIUL ȘIRURILOR NORMALE DE CIFRE

DE

ȘTEFAN N. BERȚI

Baia Mare

În șirurile normale de cifre apare problema studiului funcției

$$L(\mathbf{a}, r, g) = \sum_{j=1}^{r-k+1} j\mu S(\mathbf{a}, r, j) - \frac{r}{g^k}$$

despre care se știe că

$$\lim_{r\to\infty} L(\mathbf{a}, r, g) = 0(r).$$

În această lucrare vom evalua exact funcția L și vom stabili formule de recurență pentru unele probleme legate de șirurile normale de cifre.

§ 1. NOTAȚII

În cele ce urmează vom folosi următoarele notații : g, k, r, n numere întregi care satisfac cerințele $g \geqslant 2, 1 \leqslant k \leqslant r, n \geqslant 0$; $\overline{0, g-1}$ mulțimea $\{0, \ldots, g-1\}$ și $\overline{0, g-1}^k$ mulțimea sistemelor de forma $(a_1, \ldots, a_k)$ unde $a_j \in \overline{0, g-1}^k$, $(j = 1, \ldots, k)$.

Dacă $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \overline{0, g-1}^k$, atunci

$$I(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \mathbf{a} = \mathbf{a}', \\ 0 & \text{dacă } \mathbf{a} \neq \mathbf{a}' ; \end{cases}$$

cu ajutorul mărimii $I(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ definim mărimea

$$t(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{r-k+1} I(\mathbf{a}, \mathbf{b}^{(j)})$$

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1429–1441, BUCUREȘTI, 1965

unde $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r) \in \overline{0, g-1}^r$ şi $\mathbf{b}^{(j)} = (b_j, \ldots, b_{j+k-1})$. Astfel, $t(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ este numărul acelor sisteme din :

$$(b_1, \ldots, b_k),\ (b_2, \ldots, b_{k+1}),\ \ldots,\ (b_{r-k+1}, \ldots, b_r)$$

care sînt egale cu $\mathbf{a}$. Fie $S(\mathbf{a}, r, n)$ mulţimea acelor elemente $\mathbf{b} \in \overline{0, g-1}^r$ pentru care $t(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = n$, $S_1(\mathbf{a}, r, n)$ submulţimea lui $S(\mathbf{a}, r, n)$ formată din elementele $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ pentru care

$$(b_{r-k+2}, \ldots, b_r) = (a_1, \ldots, a_{k-1}),$$

iar $s(\mathbf{a}, r, n)$, respectiv $s_1(\mathbf{a}, r, n)$, numărul de elemente din mulţimile $S(\mathbf{a}, r, n)$, respectiv $S_1(\mathbf{a}, r, n)$.

Dacă $S \subseteq \overline{0, g-1}^r$, atunci mulţimii S îi asociem măsura

$$\mu S = \frac{s}{g^r},$$

unde s este numărul de elemente din S.

Elementele mulţimii $\overline{0, g-1}^k$ se împart în clase după periodicitatea lor. Dacă $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \overline{0, g-1}^k$ şi $a_i = a_{i+j}$, $1 \leqslant i < i + j \leqslant k$, atunci spunem că j este perioadă pentru elementul $\mathbf{a}$, iar cu $\pi(\mathbf{a})$ notăm cea mai mică perioadă a lui $\mathbf{a}$. Dacă elementul $\mathbf{a}$ nu are perioadă, atunci punem $\pi(\mathbf{a}) = 0$.

§ 2. INTRODUCERE

În lucrare stabilim expresia funcţiei

$$L(\mathbf{a}, r, g) = \sum_{j=1}^{r-k+1} j \cdot \mu\, S(\mathbf{a}, r, j) - \frac{r}{g^k}$$

care apare în teoria şirurilor normale de cifre. Este cunoscută formula lui Markov [4]

$$\lim_{r \to \infty} \frac{L(\mathbf{a}, r, g)}{r} = 0.$$

Arătăm că funcţia $L(\mathbf{a}, r, g)$ nu depinde de r, iar de $\mathbf{a}$ depinde numai prin intermediul lungimii lui $\mathbf{a}$, deci L depinde numai de g şi de k. În acest caz formula lui Markov se poate îmbunătăţi prin formula

$$\lim_{r \to \infty} \frac{L(\mathbf{a}, r, g)}{r^u} = 0,$$

care are loc oricare ar fi numărul pozitiv u.

Pentru stabilirea acestui rezultat, introducem funcţiile $s(\mathbf{a}, r, n)$ şi $s_1(\mathbf{a}, r, n)$ şi stabilim formule de recurenţă pentru calculul acestor funcţii.

În continuare, arătăm că aceste funcţii depind de $\mathbf{a}$ numai prin intermediul perioadei $\pi(\mathbf{a})$ şi a lungimii lui $\mathbf{a}$.

Expresiile efective ale funcţiilor s şi s_1 pentru $k = 2, 3$ sînt calculate în tabelele 1 şi 2 de la sfîrşitul lucrării. Relaţia de recurenţă din teorema 1 devine cunoscuta relaţie

$$C_{r+1}^{n} = C_r^n + C_r^{n-1}.$$

§ 3. EXEMPLU NUMERIC

Din exemplul prezentat în acest paragraf reiese importanţa pentru calcule a expresiilor funcţiilor s şi s_1 introduse în lucrarea de faţă.

Dacă $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, atunci $\pi(\mathbf{a}) = 1$, deoarece $a_j = a_{j+1}$, $j = 1, 2$. Introducînd notaţia

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \mathbf{b}^{(1+b+b_4(g-1)+b_3(g-1)^2+b_2(g-1)^3+b_1(g-1)^4)},$$

elementele mulţimii $\overline{0, g-1}^5$ se scriu sub forma

$$(0, 0, 0, 0, 0) = \mathbf{b}^{(1)}, (0, 0, 0, 0, 1) =$$
$$= \mathbf{b}^{(2)}, \ldots, (g-1, g-1, g-1, g-1, g-1) = \mathbf{b}^{(g^5)}.$$

În acest caz deducem că

$$S((0,0,0),5,3) = \{\mathbf{b}^{(1)}\} = A,$$
$$S((0,0,0),5,2) = \{\mathbf{b}^{(k)};\ k \in \overline{2, g}\} \cup \{\mathbf{b}^{(mg^4+1)};\ m \in \overline{1, g-1}\} = B \cup C,$$
$$S((0,0,0),5,1) = \{\mathbf{b}^{(k)};\ k \in \overline{g+1, g^2}\} \cup \{\mathbf{b}^{(kg^4+mg^3+1)};\ k \in \overline{0, g-1},\ m \in \overline{1, g-1}\} \cup$$
$$\cup \{\mathbf{b}^{(kg^4+m+1)};\ k \in \overline{1, g-1},\ m \in \overline{1, g-1}\} = D \cup E \cup F.$$

Mulţimea A are un singur element, deci $s((0, 0, 0), 5, 3) = 1$. Mulţimile B, C sînt disjuncte şi au cîte $g-1$ elemente, deci

$$s((0, 0, 0), 5, 2) = g - 1 + g - 1 = 2g - 2.$$

Mulţimile D, E, F sînt disjuncte cîte două şi au $g^2 - g$, $g(g-1)$ respectiv $(g-1)^2$ elemente, deci

$$s(((0,0,0),5,1) = g^2 - g + g^2 - g + g^2 - 2g + 1 = 3g^2 - 4g + 1.$$

Mulţimile $S((0, 0, 0), 5, j)$, $j \in \overline{0, 3}$, sînt disjuncte două cîte două şi reuniunea lor este $\overline{0, g-1}^5$, deci

$$s((0, 0, 0), 5, 0) = g^5 - 3g^2 - 4g + 1 + 2g - 2 + 1 = g^5 - 3g^2 - 2g.$$

Astfel, am aflat expresiile funcţiilor $s\ (\mathbf{a}, 5, j)$, $\overline{j \in 0, 3}$, pentru $\pi\ (\mathbf{a}) = 1$, care sînt prezentate în tabelul 2. În acest caz vom avea

$$L\ ((0, 0, 0), 5, g) = 1 \cdot \frac{s\ ((0, 0, 0), 5, 1)}{g^5} + 2 \cdot \frac{s\ ((0, 0, 0), 5, 2)}{g^5} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{s\ ((0, 0, 0), 5, 3)}{g^5} - \frac{5}{g^3} = \frac{3g^2 - 4g + 1 + 4g - 4 + 3 - 5g^2}{g^5} =$$

$$= - \frac{2g^2}{g^5} = - \frac{2}{g^3} \cdot$$

Calcule asemănătoare cu cele de sus ne arată că dacă $\pi(\mathbf{a}) = 0$, de exemplu, pentru $\mathbf{a} = (0,\ 1,\ 1)$ sau $\mathbf{a} = (0,\ 1,\ 2)$, obţinem

$$s\ (\mathbf{a}, 5, 0) = g^5 - 3g^2,\ s\ (\mathbf{a}, 5, 1) = 3g^2,\ s\ (\mathbf{a}, 5, 2) = s\ (\mathbf{a}, 5, 3) = 0$$

în care caz

$$L\ (\mathbf{a},\ 5,\ g) = \frac{3g^2 - 5g^2}{g^5} = - \frac{2}{g^3} \cdot$$

Dacă $\pi\ (\mathbf{a}) = 2$, de exemplu, pentru $\mathbf{a} = (0,\ 1,\ 0)$ deducem

$$s\ (\mathbf{a}, 5, 0) = g^5 - 3g^2 + 1,\ s\ (\mathbf{a}, 5, 1) = 3g^2 - 2,\ s\ (\mathbf{a}, 5, 2) = 1,\ s\ (\mathbf{a}, 5, 3) = 0,$$

deci în acest caz

$$L\ (\mathbf{a},\ 5,\ g) = \frac{3g^2 - 5g^2}{g^5} = - \frac{2}{g^3} \cdot$$

Din acest exemplu numeric observăm că în cazul studiat în acest paragraf, $L\ (\mathbf{a},\ r,\ g)$ nu depinde decît de lungimea lui $\mathbf{a}$ şi de g.

§ 4. ŞIRURI NORMALE DE CIFRE

É. Borel [1], punînd problema modelării caracterului de neregularitate totală a şirului de variabile aleatoare, problemă legată de schema bilei reîntoarse, introduce noţiunea de şir simplu normal de cifre ; astfel, un şir de cifre

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

este simplu normal, dacă frecvenţa de apariţie a unei cifre oarecare tinde spre o valoare constantă care nu depinde de cifra aleasă, valoare care este egală cu inversul numărului cifrelor considerate. Limita acestei frecvenţe, în cazul bazei de numeraţie g, va fi $\frac{1}{g} \cdot$

Astfel, numărul $\frac{3}{5}$ în baza 2 are reprezentarea 0, (1001) iar şirul de cifre corespunzător

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 1, \quad a_7 = 0, \quad a_8 = 0, \quad a_9 = 1, \ldots$$

este simplu normal, deoarece

$$A_n(0) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{0,a_j} = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{dacă } n \equiv 0 \pmod 4, \\ \frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{n}{2} & \text{dacă } n \equiv 2 \pmod 4, \\ \frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

şi

$$A_n(1) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{1,a_j} = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{dacă } n \equiv 0 \pmod 4, \\ \frac{n-1}{2} & \text{dacă } n \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{n}{2} & \text{dacă } n \equiv 2 \pmod 4, \\ \frac{n-1}{2} & \text{dacă } n \equiv 3 \pmod 4). \end{cases}$$

Rezultă, prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} A_n(0) = \lim_{n\to\infty} A_n(1) = \frac{1}{2} \cdot$$

D. G. Champernowne [2] introduce noţiunea mai complexă de şir normal de cifre. Dacă se asociază şirului (1) şirul de puncte din spaţiul aritmetic k-dimensional

$$(2) \qquad (a_1, \ldots, a_k), (a_2, \ldots, a_{k+1}), (a_3, \ldots, a_{k+2}), \ldots$$

numit k-întinderea lui (1), atunci se vor numi ,,cifre" cele g^k puncte din spaţiul aritmetic k-dimensional, avînd coordonatele 0, 1,..., $g - 1$. Dacă pentru orice număr natural k, k-întinderea (2) a şirului (1) este un şir simplu-normal, atunci şirul (1) se numeşte şir normal. Tot D. G. Champernowne dă primul exemplu de şir normal de cifre :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1,. . ., 9, 9, 1, 0, 0, 1, 0,1,...

format din cifrele numerelor scrise în baza 10, în ordine crescătoare.

Şirurile normale de cifre au aplicaţii la metoda Monte-Carlo, cu ajutorul acestora obţinîndu-se numere cvasialeatoare, numere care modelează numerele aleatoare. O. Onicescu [3] le consideră ca fiind numere fără caracter aleator care au proprietatea de neregularitate. Generarea numerelor cvasialeatoare, cu ajutorul calculatoarelor electronice, se poate efectua mult mai simplu decît generarea numerelor aleatoare.

§ 5. FORMULE DE RECURENŢĂ

Lema 1. *Dacă* $\mathbf{a} \in \overline{0, g-1}^k$ *şi* $g \geqslant 2$, $r \geqslant k$ *sînt numere întregi, atunci*

$$\sum_{n=0}^{r-k+1} s\,(\mathbf{a}, r, n) = g^r \tag{3}$$

şi

$$\sum_{n=0}^{r-k+1} s_1\,(\mathbf{a}, r, n) = g^{r-k+1}. \tag{4}$$

Demonstraţie. Din descompunerile în mulţimi disjuncte două cîte două

$$\overline{0, g-1}^r = \bigcup_{n=0}^{r-k+1} S\,(\mathbf{a}, r, n), \quad \overline{0, g-1}^{r-k+1} = \bigcup_{n=0}^{r-k+1} S_1\,(\mathbf{a}, r, n)$$

şi din faptul că $\overline{0, g-1}^r$, $\overline{0, g-1}^{r-k+1}$ sînt mulţimi cu g^r, respectiv, g^{r-k+1} elemente, rezultă relaţiile (3) şi (4).

Lema 2. *Dacă* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in \overline{0, g-1}^r$ *şi* $y \in \overline{0, g-1}$, *atunci din apartenenţa* $\mathbf{x} \in S_1\,(\mathbf{a}, r, n)$ *rezultă că*

$$\mathbf{x}y = (x_1, \ldots, x_r, y) \in \begin{cases} S\,(\mathbf{a}, r+1, n) & \text{dacă } y \neq a_k \text{ (în } g-1 \text{ cazuri),} \\ S\,(\mathbf{a}, r+1, n+1) & \text{dacă } y = a_k \text{ (într-un singur caz).} \end{cases}$$

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \ldots, x_r) \in S_1\,(\mathbf{a}, r, n)$, atunci

$$(x_{r-k+2}, x_{r-k+3}, \ldots, x_r) = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$$

şi $\mathbf{x} \in S\,(\mathbf{a}, r, n)$. Atunci $(x_{r-k+2}, x_{r-k+3}, \ldots, x_r, y) = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, y) = \mathbf{a}$, dacă şi numai dacă $y = a_k$, deci în acest caz $\mathbf{x}y \in S\,(\mathbf{a}, r+1, n+1)$. În celelalte cazuri, cînd $y \neq a_k$, avem $\mathbf{x}y \in S\,(\mathbf{a}, r+1, n)$.

Lema 3. *Dacă* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in S\,(\mathbf{a}, r, n) - S_1\,(\mathbf{a}, r, n)$, *atunci pentru orice* $y \in \overline{0, g-1}$ *are loc apartenenţa* $\mathbf{x}y \in S\,(\mathbf{a}, r+1, n)$.

Demonstrație. Din $\mathbf{x} \in S(\mathbf{a}, r, n) - S_1(\mathbf{a}, r, n)$ rezultă că $\mathbf{x} \notin S_1(\mathbf{a}, r, n)$, deci $\mathbf{x}y$ nu poate conține mai multe succesiuni $\mathbf{a}$ decît $\mathbf{x}$, adică

$$\mathbf{x}y \in S(\mathbf{a}, r + 1, n).$$

TEOREMA 1. *Dacă* $\mathbf{a} \in \overline{0, g - 1}^k$, $0 \leqslant n \leqslant r - k + 1$, *atunci*

$$s(\mathbf{a}, r + 1, n) = g \cdot s(\mathbf{a}, r, n) + s_1(\mathbf{a}, r, n - 1) - s_1(\mathbf{a}, r, n). \tag{5}$$

Demonstrație. Folosind lemele 2 şi 3, apartenența

$$\mathbf{x}y \in S(\mathbf{a}, r + 1, n)$$

are loc în următoarele cazuri :

a) $\mathbf{x} \in S_1(\mathbf{a}, r, n)$ şi $y \neq a_k$ (în $(g - 1)\, s_1(\mathbf{a}, r, n)$ cazuri),

b) $\mathbf{x} \in S_1(\mathbf{a}, r, n - 1)$ şi $y = a_k$ (în $s_1(\mathbf{a}, r, n - 1)$ cazuri),

c) $\mathbf{x} \in S(\mathbf{a}, r, n) - S_1(\mathbf{a}, r, n)$ (în $gs(\mathbf{a}, r, n) - gs_1(\mathbf{a}, r, n)$ cazuri).

Deci

$$s(\mathbf{a}, r + 1, n) = (g - 1)\, s_1(\mathbf{a}, r, n) + s_1(\mathbf{a}, r, n - 1) + gs(\mathbf{a}, r, n) -$$

$$- gs_1(\mathbf{a}, \mathrm{r}, n) = gs(\mathbf{a}, r, n) + s_1(\mathbf{a}, r, n - 1) - s_1(\mathbf{a}, r, n).$$

LEMA 4. *Are loc relația*

$$\sum_{n=1}^{r+1} ns(\mathbf{a}, r + 1, n) = g \sum_{n=1}^{r+1} ns(\mathbf{a}, r, n) + \sum_{n=0}^{r} s_1(\mathbf{a}, r, n). \tag{6}$$

Demonstrație. Înmulțind cei doi membri ai relației (5) cu n şi însumînd, avem

$$\sum_{n=1}^{r+1} ns(\mathbf{a}, r + 1, n) = g \sum_{n=1}^{r+1} ns(\mathbf{a}, r, n) + \sum_{n=1}^{r+1} ns_1(\mathbf{a}, r, n - 1) -$$

$$- \sum_{n=1}^{r+1} ns_1(\mathbf{a}, r, n) = g \sum_{n=1}^{r+1} ns(\mathbf{a}, r, n) + \sum_{n=0}^{r} (n + 1) s_1(\mathbf{a}, r, n) - ns_1(\mathbf{a}, r, n) -$$

$$- (r + 1)\, s_1(\mathbf{a}, r, r + 1) = g \sum_{n=1}^{r+1} ns(\mathbf{a}, r, n) + \sum_{n=0}^{r} s_1(\mathbf{a}, r, n).$$

LEMA 5. *Dacă* $\mathbf{a} \in \overline{0, g - 1}^k$, *atunci*

$$\mathrm{s}(\mathbf{a}, k, n) = \begin{cases} g^k - 1 & \text{dacă } n = 0, \\ 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 0 & \text{dacă } n > 1. \end{cases} \tag{7}$$

Demonstrație. Din faptul că mulțimea

$$S(\mathbf{a}, k, 1) = \{(b_1, \ldots, b_k);\ t(\mathbf{a}, (b_1, \ldots, b_k)) = 1\} = \{(a_1, .., a_k)\}$$

are un singur element, iar pentru $n > 1$

$$s\ (\mathbf{a},\ k,\ n) = \emptyset,$$

din lema 1 rezultă afirmaţia dorită.

TEOREMA 2. *Dacă* $\mathbf{a} \in \overline{0,\ g-1}^{k}$, *atunci are loc relaţia*

$$\sum_{n=1}^{r-k+1} ns\ (\mathbf{a},\ r,\ n) = (r-k+1)\ g^{r-k}. \tag{8}$$

Demonstraţie. Relaţia (8) are sens pentru $r \geqslant k$, deoarece peste tot se presupune că $\mathbf{a} \in \overline{0,\ g-1}^{k}$. Astfel, pentru $r = k$ din relaţia (7) obţinem

$$\sum_{n=1}^{k} ns\ (\mathbf{a},\ k,\ n) = s\ (\mathbf{a},\ k,\ 1) = 1 = (k-k+1)\, g^{k-k},$$

deci pentru $r = k$ relaţia (8) are loc. Aplicînd metoda inducţiei şi presupunînd că relaţia (8) are loc pentru r, din relaţia (6) deducem

$$\sum_{n=1}^{r+1} ns\,(\mathbf{a},\ r+1,\ n) = g\sum_{n=1}^{r} ns\,(\mathbf{a},\ r,\ n) + \sum_{n=0}^{r} s_1\,(\mathbf{a},\ r,\ n) = g\,(r-k+1)\,g^{r-k} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{r} s_1\,(\mathbf{a},\ r,\ n) = (r-k+1)\ g^{r-k+1} + \sum_{n=0}^{r} s_1\,(\mathbf{a},\ r,\ n).$$

Folosind acum relaţia (4), obţinem

$$\sum_{n=1}^{r+1} ns\,(\mathbf{a},\ r+1,\ n) = (r-k+1)\,g^{r-k+1} + g^{r-k+1} = (r+1-k+1)\,g^{r+1-k},$$

deci relaţia (8) are loc pentru $r+1$ şi astfel teorema este demonstrată.

§ 6. ÎMBUNĂTĂŢIREA FORMULEI LUI A. A. MARKOV

TEOREMA 3. *Dacă* $\mathbf{a} \in \overline{0,\ g-1}^{k}$, $r \geqslant k$, $g \geqslant 2$, *atunci*

$$L\,(\mathbf{a},\ r,\ g) = -\frac{k-1}{g^{k}}. \tag{9}$$

Demonstraţie. Folosind definiţiile date în paragraful 1 şi 2, avem

$$\mu S\,(\mathbf{a},\ r,\ j) = \frac{s\ (\mathbf{a},\ r,\ j)}{g^{r}}$$

şi

$$L\,(\mathbf{a},\ r,\ g) = \sum_{j=1}^{r-k+1} j\mu S\,(\mathbf{a},\ r,\ j) - \frac{r}{g^{k}} = \frac{1}{g^{r}}\sum_{j=1}^{r-k+1} js\ (\mathbf{a},\ r,\ j) - \frac{r}{g^{k}}\cdot$$

Din teorema (2) rezultă că are loc relaţia

$$L\,(\mathbf{a},\ r,\ g) = \frac{1}{g^{r}}\cdot (r-k+1)\,g^{r-k} - \frac{r}{g^{k}} = -\frac{k-1}{g^{k}}\cdot$$

§ 7. FORMULE SPECIALE DE RECURENŢĂ PENTRU FUNCŢIA s_1 ÎN CAZUL DIFERITELOR PERIOADE ALE LUI a

În funcţie de periodicitatea elementelor din $\overline{0, g-1}^k$, aceste elemente au funcţiile s şi s_1 diferite, după cum s-a văzut şi în § 3. În afară de formula de recurenţă (5), au loc şi alte formule de recurenţă care depind de perioada lui **a**.

Se pot stabili următoarele două leme :

Lema 6. *Dacă* $\pi(\mathbf{a}) = 1$, *atunci pentru* $r \geqslant 2k$ *avem formula*

$$(10)\quad s_1(\mathbf{a}, r, n) = (g-1)\, s(\mathbf{a}, r-k, n) + s_1(\mathbf{a}, r-1, n-1).$$

Lema 7. *Pentru* $\pi(\mathbf{a}) = 0$, *deci în cazul în care elementul* **a** *nu are perioadă, are loc relaţia de recurenţă* :

$$(11)\quad s_1(\mathbf{a}, r, n) = s(\mathbf{a}, r-k, n).$$

Demonstraţiile lemelor 6 şi 7 se deduc imediat folosind rezultatele de mai sus.

§ 8. FUNCŢIILE s ŞI s_1 ÎN CAZUL $k = 1$

În acest caz, funcţiile s şi s_1 sînt identice, deoarece condiţia ca ultimele $k-1=0$ cifre din **b** să fie identice cu primele $k-1=0$ cifre din **a**, este satisfăcută. Atunci formula (5) devine formula de recurenţă

$$(12)\quad s(\mathbf{a}, r+1, n) = (g-1)\, s(\mathbf{a}, r, n) + s(\mathbf{a}, r, n-1).$$

Din relaţia (12) obţinem pentru s formula

$$(13)\quad s(\mathbf{a}, r, n) = C_r^n (g-1)^{r-n}.$$

Aşadar, fromula de recurenţă (12) şi formula (13) ne conduc la relaţia clasică

$$(14)\quad C_{r+1}^n = C_r^n + C_r^{n-1}.$$

§ 9. TABELE PENTRU FUNCŢIILE s ŞI s_1 PENTRU CAZURILE $k = 2,3$

Cazul $k = 2$. Elementele pot avea fie perioada 1, cum este cazul elementului $\mathbf{a} = (0, 0)$, fie perioada 0, cum este cazul elementului $\mathbf{a} = (0, 1)$. Folosind formulele de recurenţă stabilite, se pot calcula expresiile funcţiilor s şi s_1 pentru aceste cazuri. În tabelul 1 sînt prezentate pentru $r = 1, 2, \ldots, 6$ funcţiile $s(\mathbf{a}, r, n)$ şi pentru $r = 1, 2, \ldots, 5$ funcţiile $s_1(\mathbf{a}, r, n)$ în cazul $k = 2$.

Cazul $k = 3$. Perioadele posibile pentru elementele din $\overline{0, g-1}^3$ după cum s-a arătat în § 3 sînt 0, 1 şi 2. În tabelul 2 se dau expresiile funcţiilor s şi s_1 pentru $r = 3, 4, \ldots, 9$.

Dacă k este arbitrar, sîntem conduşi la cercetarea unui număr de $k-1$ formule de recurenţă pentru funcţiile s şi s_1, deoarece în acest caz există $k-1$ perioade posibile în $\overline{0, g-1}^k$.

Primită la redacţie la 24 aprilie 1965

Institutul Pedagogic Baia Mare

Tabelul I

Expresiile funcţiilor s şi s_1 pentru $k=2$

$\pi(a)$	r	n	$s(a, r, n)$	$s_1(a, r, n)$
0	2	0	$g^2 - 1$	g
1	2	0	$g^2 - 1$	$g - 1$
0	2	1	1	
1	2	1	1	1
0	3	0	$g^3 - 2g$	$g^2 - 1$
1	3	0	$g^3 - 2g + 1$	$g^2 - g$
0	3	1	$2g$	1
1	3	1	$2g - 2$	$g - 1$
0	3	2		
1	3	2	1	1
0	4	0	$g^4 - 3g^2 + 1$	$g^3 - 2g$
1	4	0	$g^4 - 3g^2 + 2g$	$g^3 - g^2 - g + 1$
0	4	1	$3g^2 - 2$	$2g$
1	4	1	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - 1$
0	4	2	1	
1	4	2	$2g - 2$	$g - 1$
0	4	3		
1	4	3	1	1
0	5	0	$g^5 - 4g^3 + 3g$	$g^4 - 3g^2 + 1$
1	5	0	$g^5 - 4g^3 + 3g^2 + g - 1$	$g^4 - g^3 - 2g^2 + 3g - 1$
0	5	1	$4g^3 - 6g$	$3g^2 - 2$
1	5	1	$4g^3 - 6g^2 + 2$	$g^3 + g^2 - 5g + 3$
0	5	2	$3g$	1
1	5	2	$3g^2 - 3g$	$g^2 + g - 2$
0	5	3		
1	5	3	$2g - 2$	$g - 1$
0	5	4		
1	5	4	1	1
0	6	0	$g^6 - 5g^4 + 6g^2 - 1$	
1	6	0	$g^6 - 5g^4 + 4g^3 + 3g^2 - 4g + 1$	
0	6	1	$5g^4 - 12g^2 + 3$	
1	6	1	$5g^4 - 8g^3 - 3g^2 + 10g - 4$	
0	6	2	$6g^2 - 3$	
1	6	2	$4g^3 - 3g^2 - 6g + 5$	
0	6	3	1	
1	6	3	$3g^2 - 2g - 1$	
0	6	4		
1	6	4	$2g - 2$	
0	6	5		
1	6	5	1	

Tabelul II

Expresiile funcțiilor s si s_1 pentru $k=3$

(a)	r	n	$s\ (a,\ r,\ n)$	$s_1\ (a,\ r,\ n)$
0	3	0	$g^3 - 1$	g
1	3	0	$g^3 - 1$	$g - 1$
2	3	0	$g^3 - 1$	g
0	3	1	1	
1	3	1	1	1
2	3	1	1	
0	4	0	$g^4 - 2g$	g^2
1	4	0	$g^4 - 2g + 1$	$g^2 - g$
2	4	0	$g^4 - 2g$	$g^2 - 1$
0	4	1	$2g$	
1	4	1	$2g - 2$	$g - 1$
2	4	1	$2g$	1
0	4	2		
1	4	2	1	1
2	4	2		
0	5	0	$g^5 - 3g^2$	$g^3 - 1$
1	5	0	$g^5 - 3g^2 + 2g$	$g^3 - g^2$
2	5	0	$g^5 - 3g^2 + 1$	$g^3 - g - 1$
0	5	1	$3g^2$	1
1	5	1	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
2	5	1	$3g^2 - 2$	$g + 1$
0	5	2		
1	5	2	$2g - 2$	$g - 1$
2	5	2	1	
0	5	3		
1	5	3	1	1
2	5	3		
0	6	0	$g^6 - 4g^3 + 1$	$g^4 - 2g$
1	6	0	$g^6 - 4g^3 + 3g^2$	$g^4 - g^3 - g + 1$
2	6	0	$g^6 - 4g^3 + 2g + 1$	$g^4 - g^2 - 2g + 1$
0	6	1	$4g^3 - 2$	$2g$
1	6	1	$4g^3 - 6g^2 + 2g$	$g^3 - g^2 + g - 1$
2	6	1	$4g^3 - 4g - 2$	$g^2 + 2g - 2$
0	6	2	1	
1	6	2	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
2	6	2	$2g + 1$	1
0	6	3		
1	6	3	$2g - 2$	$g - 1$
2	6	3		
0	6	4		
1	6	4	1	1
2	6	4		
0	7	0	$g^7 - 5g^4 + 3g$	$g^5 - 3g^2$
1	7	0	$g^7 - 5g^4 + 4g^3 + g - 1$	$g^5 - g^4 - 2g^2 + 3g - 1$
2	7	0	$g^7 - 5g^4 + 3g^2 + 3g - 1$	$g^5 - g^3 - 3g^2 + g + 2$

Tabelul II (continuare)

(a)	r	n	$s\ (a,\ r,\ n)$	$s_1\ (a,\ r,\ n)$
0	7	1	$5g^4 - 6g$	$3g^2$
1	7	1	$5g^4 - 8g^3 + 3g^2 - 2g + 2$	$g^4 - g^3 + 2g^2 - 5g + 3$
2	7	1	$5g^4 - 6g^2 - 6g + 3$	$g^3 + 3g^2 - 2g - 4$
0	7	2	$3g$	
1	7	2	$4g^3 - 6g^2 + 3g - 1$	$g^3 - g^2 + 2g - 1$
2	7	2	$3g^2 + 3g - 3$	$g + 2$
0	7	3		
1	7	3	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
2	7	3	1	
0	7	4		
1	7	4	$2g - 2$	$g - 1$
2	7	4		
0	7	5		
1	7	5	1	1
2	7	5		
0	8	0	$g^8 - 6g^5 + 6g^2$	$g^6 - 4g^3 + 1$
1	8	0	$g^8 - 6g^5 + 5g^4 + 3g^2 - 4g + 1$	$g^6 - g^5 - 3g^3 + 5g^2 - 2g$
2	8	0	$g^8 - 6g^5 + 4g^3 + 6g^2 - 2g - 2$	$g^6 - g^4 - 4g^3 + g^2 + 4g$
0	8	1	$6g^5 - 12g^2$	$4g^3 - 2$
1	8	1	$6g^5 - 10g^4 + 4g^3 - 6g^2 + 10g - 4$	$g^5 - g^4 + 3g^3 - 9g^2 + 8g - 2$
2	8	1	$6g^5 - 8g^3 - 12g^2 + 6g + 6$	$g^4 + 4g^3 - 2g^2 - 8g + 1$
0	8	2	$6g^2$	1
1	8	2	$5g^4 - 8g^3 + 6g^2 - 8g + 5$	$g^4 - g^3 + 4g^2 - 9g + 5$
2	8	2	$4g^3 + 6g^2 - 6g - 6$	$g^2 + 4g - 2$
0	8	3		
1	8	3	$4g^3 - 6g^2 + 4g - 2$	$g^3 - g^2 + 3g - 3$
2	8	3	$2g + 2$	1
0	8	4		
1	8	4	$3g^2 - 4g + 1$	$g^2 - g$
2	8	4		
0	8	5		
1	8	5	$2g - 2$	$g - 1$
2	8	5		
0	8	6		
1	8	6	1	1
2	8	6		
0	9	0	$g^9 - 7g^6 + 10g^3 - 2$	
1	9	0	$g^9 - 7g^6 + 6g^5 + 6g^3 - 2g^2 + 3g$	
2	9	0	$g^9 - 7g^6 + 5g^4 + 10g^3 - 3g^2 - 6g$	
0	9	1	$7g^6 - 20g^3 + 3$	
1	9	1	$7g^6 - 12g^5 + 5g^4 - 12g^3 + 24g^2 - 14g + 2$	
2	9	1	$7g^6 - 10g^4 - 20g^3 + 9g^2 + 18g - 1$	
0	9	2	$10g^3 - 2$	
1	9	2	$6g^5 - 10g^4 + 10g^3 - 21g^2 + 22g - 7$	
2	9	2	$5g^4 + 10g^3 - 9g^2 - 18g + 3$	
0	9	3	1	
1	9	3	$5g^4 - 8g^3 + 9g^2 - 14g + 8$	
2	9	3	$3g^2 + 6g - 3$	

Tabelul II (continuare)

(a)	r	n	s (a, r, n)	s_1 (a, r, n)
0	9	4	$4g^3 - 6g^2 + 5g - 3$	
1	9	4		
2	9	4	1	
0	9	5	$3g^2 - 4g + 1$	
1	9	5		
2	9	5		
0	9	6	$2g - 2$	
1	9	6		
2	9	6		
0	9	7	1	
1	9	7		
2	9	7		

BIBLIOGRAFIE

1. É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1914.
2. D. G. Champerernowne, *The construction of decimals normal in the scale of ten.* L. London math. Soc., **8**, 254—260 (1933).
3. O. Onicescu, *Nombres et systèmes aleatoires*, Ed. Acad. R.P.R., București, 1964.
4. А. Г. Постников, *Арифметическое моделирование случайных процессов*. Труды мат. института им. В. А. Стеклова, 57 (1960).

PROFIL JUKOVSKI ÎNTR-UN CURENT FLUID CU DISTRIBUȚIE PARABOLICĂ DE VITEZE

DE

RODICA CHIRILĂ

În lucrarea de față, autorul tratează mişcarea unui fluid incompresibil în cazul distribuției parabolice (1), la infinit în amonte în prezența unui obstacol fix. Se determină prima aproximație a potențialului complex perturbator al mişcării din rezolvarea unei probleme Dirichlet cu ajutorul unei metode dată de Caius Iacob [1], [2], găsindu-se relația (28) şi (29).
Apoi se particularizează rezultatul găsit în general, pentru un profil Jukovski disimetric și simetric, obținînd pentru $F(z,t)$ expresiile (32), respectiv (33).

1. Mişcarea plană a unui fluid incompresibil în jurul unei plăci plane şi a unui cilindru circular, în cazul în care distribuția de viteze la mari distanțe e parabolică, a fost considerată prima dată în 1951 de H.T. Nagamatsu [3] în legătură cu o problemă care se prezintă în teoria undelor de şoc detaşate.

H. T. Nagamatsu a determinat prima aproximație considerînd că funcția de curent perturbatoare satisface ecuația lui Laplace cu anumite condiții la limită.

Aceeaşi problemă a fost apoi reluată în 1957 de E. E. Jones [4] pentru un profil subțire, J. D. Murray şi R. A. Mitchell [5] pentru un cilindru circular şi de J. D. Murray [6] pentru un cilindru oarecare, aceştia căutînd să calculeze a doua aproximație a funcției de curent perturbătoare.

În aproximația lui Nagamatsu problema a fost reluată de Horia Ene [7] în unele cazuri particulare.

În lucrarea de față vom determina prima aproximație a funcției de curent perturbatoare pentru un profil care poate fi reprezentat conform printr-o funcție rațională pe un cerc, utilizînd metoda dată de Caius

ST. CERC. MAT., TOM. 17. Nr. 9. P. 1443–1448, BUCUREȘTI, 1965

Iacob [1], [2], iar apoi vom exemplifica rezultatele obţinute pe un profil Jukovski disimetric.

2. Să considerăm mişcarea bidimensională a unui fluid incompresibil în jurul unui profil C în cazul în care distribuţia de viteze la mari distanţe e de forma :

$$(1)\qquad \begin{cases} u_0 = V_\infty(t) + 3\alpha y^2, \\ v_0 = 0, \end{cases}$$

unde α e o constantă, iar V_∞ e cel mult o funcţie de timp.

Am notat cu u_0 şi v_0 componentele vitezei neperturbate de profilul C.

Fie $z = x + iy$ şi $Z = X + iY$. Să presupunem că exteriorul profilului C, care se află în planul z, este reprezentat conform pe exteriorul unui cerc Γ din planul Z de rază r, al cărui centru se află în originea axelor de coordonate OX, OY prin relaţia

$$(2)\qquad z = \omega(Z),$$

unde admitem în plus că $\omega(Z)$ este o funcţie raţională de Z.

Ecuaţia de continuitate pentru fluidul neperturbat

$$(3)\qquad \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$$

este satisfăcută de funcţia de curent $\psi_0(x, y, t)$ definită de

$$(4)\qquad \begin{cases} u_0 = \dfrac{\partial \psi_0}{\partial y} \\ v_0 = -\dfrac{\partial \psi_0}{\partial x}. \end{cases}$$

Expresia vîrtejului este

$$(5)\qquad \zeta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) = -3\alpha y.$$

În virtutea lui (4) avem deci :

$$(6)\qquad -2\zeta_0 = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} = 6\alpha y.$$

Să notăm cu $\psi_1(x, y, t)$ funcţia de curent dată de perturbaţia produsă vitezei $\vec{v}_0$ de profilul C şi să o presupunem în modul destul de mică faţă de modulul lui ψ_0.

Acum mişcarea va fi determinată de funcţia de curent $\psi(y, x, t)$ unde

$$(7)\qquad \psi(x, y, t) = \psi_0(x, y, t) + \psi_1(x, y, t).$$

Vîrtejul depinde de funcţia de curent ψ, deci vom putea scrie :

$$(8)\qquad \Delta\psi = f(\psi).$$

Dacă în relaţia (8) înlocuim relaţia (7) şi considerăm $\psi_1(x, y, t) = 0$, deci cazul mişcării neperturbate, obţinem

$$\Delta \psi_0 = f(\psi_0)\,. \tag{9}$$

Din relaţiile (9) şi (6) rezultă

$$f(\psi_0) = 6\,\alpha y\,. \tag{10}$$

Din (8), (9) şi (10) rezultă :

$$\Delta\psi_1 = f(\psi_0 + \psi_1) - f(\psi_0)\,. \tag{11}$$

În ecuaţia (11) dezvoltăm membrul al doilea în serie Taylor şi obţinem :

$$\Delta \psi_1 = \frac{\mathrm{d}f(\psi_0)}{\mathrm{d}\psi_0}\,\psi_1 + \frac{1}{2\,!}\,\frac{\mathrm{d}^2 f(\psi_0)}{\mathrm{d}\psi_0^2}\,\psi_1^2 + \dots \tag{12}$$

Evaluăm apoi derivatele cu ajutorul relaţiilor (1), (4) şi (10) :

$$\frac{\mathrm{d}f(\psi_0)}{\mathrm{d}\psi_0} = \frac{6\alpha}{V_\infty}\left[1 - \frac{3\alpha}{V_\infty}\,y^2 + \dots\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(\psi_0)}{\mathrm{d}\psi_0^2} = -\frac{6\alpha}{V_\infty}\left[\frac{6\alpha}{V_\infty}\,y + \dots\right]$$

pe care le introducem în ecuaţia (12). Obţinem :

$$\Delta\psi_1 = \frac{6\alpha}{V_\infty}\left[1 - \frac{3\alpha}{V_\infty}\,y^2 + \dots\right]\psi_1 - \frac{1}{2\,!}\,\frac{6\alpha}{V_\infty}\left[\frac{6\alpha}{V_\infty}\,y + \dots\right]\psi_1^2 + \dots \tag{13}$$

În ipoteza $\frac{6\alpha}{V_\infty} \ll 1$, ecuaţia (11) poate fi aproximată cu ecuaţia lui Laplace :

$$\Delta\,\psi_1^{(0)} = 0 \tag{14}$$

găsind astfel prima aproximaţie a funcţiei de curent ψ_1 [3].

Pentru următoarea aproximaţie vom considera doar $\frac{18\alpha^2}{V^2} \ll 1$ şi din (13) obţinem ecuaţia :

$$\Delta\psi_1^{(1)} = \frac{6\,\alpha}{V_\infty}\,\psi_1^{(1)} \tag{15}$$

pentru a defini a doua aproximaţie a lui ψ_1 [4], [5], [6].

În lucrarea de faţă ne vom mărgini la a rezolva ecuaţia (14). Vom nota prima aproximaţie tot prin ψ_1. Condiţiile la limită sînt :

$$\lim_{|z| \to \infty} \psi_1 = 0 \tag{16}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ pe } C\,. \tag{17}$$

Calculînd expresia (17) obţinem :

$$\psi_1|_C = -(V_\infty y + \alpha y^3)_C . \tag{18}$$

Deoarece funcţia $\psi_1(x, y, t)$ este armonică, putem introduce conjugata sa armonică $\varphi_1(x, y, t)$ şi astfel vom construi funcţia de variabilă complexă $z = x + \mathrm{i}y$:

$$F_1(z, t) = \varphi_1(x, y, t) + \mathrm{i}\,\psi_1(x, y, t) . \tag{19}$$

Condiţiile la limită (16) şi (18) transcrise pentru funcţia $F_1(z)$ devin

$$\lim_{|z|\to\infty} \operatorname{Im}\{F_1(z, t)\} = 0 \tag{20}$$

$$\operatorname{Im}\{F_1(z, t)\}_C = P(y, t)|_C , \tag{21}$$

unde

$$P(y) = -(V_\infty y + \alpha y^3) \tag{22}$$

este o funcţie raţională de z şi $\bar{z}$.

Deci trebuie rezolvată problema lui Dirichlet (21) pentru funcţia $F_1(z, t)$, olomorfă în domeniul exterior lui C.

În aceste condiţii putem aplica metoda dată de Caius Iacob de rezolvare a problemelor lui Dirichlet cu date raţionale pe frontieră [1], [2].

Prin relaţia (2) trecem la planul Z şi funcţia $F_1(z, t)$ va deveni :

$$F_1(z, t) = F_1[\omega(Z), t] . \tag{23}$$

Să considerăm funcţia

$$G(Z, t) = -\mathrm{i}F_1[\omega(Z), t] \tag{24}$$

care este olomorfă de Z în domeniul exterior cercului Γ.

Condiţia pe C (21) se transformă prin (2) într-o condiţie pe frontiera Γ, a cercului din planul Z, pentru funcţia $G(Z)$.

Obţinem :

$$\operatorname{Re}\{G(Z, t)\}_\Gamma = P\left[\frac{\omega(Z) - \bar{\omega}\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)}{2\mathrm{i}}\right]_\Gamma = R(Z, t)_\Gamma \tag{25}$$

unde am folosit relaţia

$$Z\bar{Z} = r^2 \text{ pe } \Gamma .$$

Din (22) rezultă că funcţia $R(Z)$ va fi definită de relaţia :

$$R(Z, t) = \frac{V_\infty \mathrm{i}}{2}\left[\omega(Z) - \bar{\omega}\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right] - \frac{\alpha\mathrm{i}}{8}\left[\omega(Z) - \bar{\omega}\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]^3 . \tag{26}$$

Fie $R_0(Z, t)$ partea principală a funcţiei $R(Z, t)$ relativ la domeniul interior circumferinţei Γ.

Se ştie [1], [2] că soluţia problemei va fi dată de :

$$G(Z, t) = 2R_0(Z, t) + k(t) , \tag{27}$$

unde k e cel mult o funcţie de timpul t ce se determină impunînd condiţia ca într-un punct de pe Γ condiţia (25) să fie îndeplinită.

Dacă notăm cu $[\ ]_0$ partea principală a funcţiei din paranteze relativ la interiorul lui Γ, vom avea :

$$
\begin{aligned}
R_0(Z, t) = &-\frac{\alpha i}{8}[\omega^3(Z)]_0 + \frac{\alpha i}{8}\left[\bar{\omega}^3\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]_0 + \\
&+\frac{3\alpha i}{8}\left[\omega^2(Z).\bar{\omega}\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]_0 - \frac{3\alpha i}{8}\left[\omega(Z)\bar{\omega}^2\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]_0 + \\
&+\frac{V_\infty i}{2}[\omega(Z)]_0 - \frac{V_\infty i}{2}\left[\bar{\omega}\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]_0.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Vom obţine :

$$F_1(z, t) = iG[\omega^{-1}(z), t] = 2i\, R_0[\omega^{-1}(z), t] + ik(t). \tag{29}$$

3. Să studiem cazul în care profilul C din planul z este un profil Jukovski disimetric.

Funcţia $\omega(Z)$ care dă trecerea la cercul Γ de rază r, din planul Z, este dată de expresia :

$$\omega(Z) = Z - \beta + \frac{1}{Z-\beta}, \tag{30}$$

unde β este un număr complex ce verifică relaţia

$$|\beta| < r = |1 + \beta|. \tag{31}$$

Pentru a obţine pe $R_0(Z, t)$ va trebui să determinăm părţile principale relativ la interiorul cercului Γ ale funcţiilor ce intervin în relaţia (28).

În interiorul cercului vom avea polurile $Z = 0$ şi $Z = \beta$.

Astfel vom avea :

$$[\omega(Z)]_0 = \frac{1}{Z-\beta} \qquad \left[\bar{\omega}\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]_0 = \frac{r^2}{Z}$$

$$[\omega^3(Z)]_0 = \frac{1}{(Z-\beta)^3} + \frac{3}{Z-\beta} \qquad \left[\bar{\omega}^3\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]_0 = \frac{r^6}{Z^3} - \frac{3r^4\bar{\beta}}{Z^2} + \frac{3r}{Z}(1+\bar{\beta}^2)$$

$$
\begin{aligned}
\left[\omega^2(Z)\bar{\omega}\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]_0 = &\frac{1}{(Z-\beta)^2}\left[\frac{r^2-\beta\bar{\beta}}{\beta} + \frac{\beta}{r^2-\beta\bar{\beta}}\right] + \\
&+\frac{r^2}{Z-\beta}\left[\frac{1}{(r^2-\beta\bar{\beta})^2} - \frac{1}{\beta^2}\right] + \frac{r^2}{Z}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\omega(Z)\bar{\omega}^2\left(\frac{r^2}{\bar{Z}}\right)\right]_0 = &-\frac{r^4}{Z^2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{r^2}{Z}\left[r^2\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) + 2\bar{\beta}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right] + \\
&+\frac{1}{Z-\beta}\left(\frac{r^2-\beta\bar{\beta}}{\beta} + \frac{\beta}{r^2-\beta\bar{\beta})}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Ţinînd seama de (27), vom obţine soluţia problemei sub forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,G(Z,t) = {} & \frac{\alpha}{4}\frac{1}{(Z-\beta)^3} - \frac{\alpha}{4}\frac{r^6}{Z^3} - \frac{3\alpha}{4}\left(\frac{r^2-\beta\bar{\beta}}{\beta} + \frac{\beta}{r^2-\beta\bar{\beta}}\right)\frac{1}{(Z-\beta)^2} - \\ & - \frac{3\alpha}{4}\left(\beta + \frac{1}{\beta} - \bar{\beta}\right)\frac{r^4}{Z^2} - \frac{1}{Z-\beta}\left\{V_\infty + \frac{3\alpha}{4}\left[\frac{r^2-\beta^2}{(r^2-\beta\bar{\beta})^2} - \right.\right. \\ & \left.\left. - \frac{r^2+3\beta^2+(r^2-\beta\bar{\beta})^2}{\beta^2}\right]\right\} + \frac{r^2}{Z}\left\{V_\infty - \frac{3\alpha}{4}\left[3 - r^2 + (\beta-\bar{\beta})^2 + \right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{r^2-\beta\bar{\beta}}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta} - \bar{\beta}\right)\right]\right\} + \mathrm{i}k(t). \end{aligned} \tag{32}$$

Pentru a avea îndeplinită condiţia la limită (20), va trebui să avem:

$$k(t) = 0.$$

Dacă considerăm un profil Jukovski simetric, atunci în (30) β va fi un număr real, iar din (31) rămîne relaţia:

$$\beta < r = 1 + \beta. \tag{31'}$$

În cazul acestui profil soluţia va fi:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,G(Z,t) = {} & \frac{\alpha}{4}\frac{1}{(Z-\beta)^3} - \frac{\alpha}{4}\frac{(1+\beta)^6}{Z^3} - \frac{3\alpha}{4}\frac{5\beta^2+4\beta+1}{\beta(1+2\beta)}\cdot\frac{1}{(Z-\beta)^2} - \\ & - \frac{3\alpha}{4}\frac{(1+\beta)^4}{Z^2} + \frac{1}{Z-\beta}\left[\frac{16\beta^3+19\beta^2+10\beta+2}{\beta^2(1+2\beta)} - V_\infty\right] + \\ & + \frac{(1+\beta)^2}{Z}\left[V_\infty - \frac{3\alpha(\beta^4+\beta^2+2\beta+2)}{4\beta^2}\right]. \end{aligned} \tag{33}$$

Inversa funcţiei $\omega(Z)$ din (30) este:

$$Z = \omega^{-1}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2-4}\right) + \beta, \tag{34}$$

unde determinaţia radicalului este aleasă reală şi pozitivă pentru $z = x > 2$. Înlocuind această expresie a lui $\omega^{-1}(z)$ în (32) şi (33) se obţine direct expresia în funcţie de z a potenţialului complex perturbator $F_1(z)$ în cazul profilului Jukovski disimetric sau simetric.

Primită la redacţie la 19 mai 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. Caius Iacob, Comunicările Academiei R.P.R., **12**, *4*, 381–385 (1962).
2. — Comunicările Academiei R.P.R., **12**, *10*, 1071–1075 (1962).
3. H. T. Nagamatsu, Journal of Math. and Physics, **30**, *3*, 131–139 (1951).
4. E. E. Jones, Zeitschrift für angew. Math. und Mech., **37**, 362–370 (1957).
5. J. D. Murray, Quarterly J. of Mech. and Appl. math., **10**, 13–23 (1957).
6. — Quarterly J. of Mech. and Appl. math., **10**, 406–424 (1957).
7. H. Ene, St. şi cerc. mat., 17, *5*, 781–792 (1965).

DERIVATA *A* – AREOLARĂ

DE

ILEANA CHRISTU

Această Notă este consacrată introducerii noţiunii de derivată *A* – areolară şi extinderii unor rezultate stabilite de N. Teodorescu în [1], [2].

Diversele probleme ale fizicii matematice, precum şi studiul sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I în plan au condus la importanta noţiune de derivată areolară.

Această noţiune a fost definită pentru prima oară de către D. Pompeiu [3], care a considerat soluţiile sistemului Cauchy – Riemann neomogen.

În 1931, N. Teodorescu în teza sa [1] pune în adevărata sa lumină noţiunea de derivată areolară, formulează şi demonstrează un număr substanţial de teoreme, subliniind multiplele lor aplicaţii în fizica matematică.

1. Să considerăm un domeniu G al planului complex E, cu frontiera formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile şi închise, disjuncte două cîte două.

DEFINIŢIA 1. Fie $f(z)$ o funcţie continuă în G şi o familie regulată în $z_0 \in G$ de domenii δ, care conţin pe z_0 şi ale căror frontiere γ sînt curbe simple, rectificabile şi închise. *Derivata areolară* în z_0 a funcţiei $f(z)$ este limita raportului

$$\frac{\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)\,dz}{mes\,\delta}$$

cînd δ se strîng în jurul lui z_0, dacă această limită este independentă de familia $(\gamma, \delta) \subset G$.

Pentru derivata areolară se întrebuinţează notaţiile :

O funcţie se numeşte (α) — monogenă într-un domeniu G dacă admite derivată areolară în orice punct din G. O funcţie (α) — monogenă în G cu derivată areolară continuă în G, se numeşte (α) — olomorfă în G.

În [4] se arată că funcţiile (α) — olomorfe coincid cu funcţiile de clasă $C_{\bar z}$ introduse de I. N. Vekua în [5].

Pentru funcţiile (α) — olomorfe, N. Teodorescu a demonstrat teorema :

TEOREMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie $f(z)$ să fie (α) — olomorfă în domeniul G este ca să existe o funcţie $\varphi \in C(G)$ astfel încît relaţia*

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma} f(z)\,dz - \iint_{\delta} \varphi(z)\,d\omega_z = 0$$

să aibă loc pentru orice cuplu $(\gamma, \delta) \subset G$.

Deosebit de importantă este formula de reprezentare Pompeiu — Teodorescu, demonstrată de D. Pompeiu pentru funcţii poligene şi extinsă de către N. Teodorescu pentru funcţiile (α) — monogene :

Dacă funcţia $f(z)$ este (α) — monogenă în domeniul G, iar $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ este o funcţie măsurabilă şi mărginită în G, atunci :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{G} \frac{\partial f}{d\bar\zeta}\,\frac{d\omega_\zeta}{\zeta - z},$$

unde Γ este frontiera lui G, iar $z \in G$.

În [1], [2] N. Teodorescu a stabilit faptul că soluţia (α) — olomorfă a ecuaţiei omogene

$$Lw \equiv \partial_{\bar z} w - Aw = 0$$

este

$$w(z) = \Phi(z)\, e^{-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{A(\zeta)}{\zeta - z}\, d\omega_\zeta}$$

unde Φ este o funcţie olomorfă în G.

Tot în [1] N. Teodorescu introduce polinomul areolar de ordinul k în G:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{k} \Phi_j(z)\,\bar z^j,$$

unde Φ_j sînt funcţii olomorfe în G. Polinomul areolar $f(z)$ este o funcţie indefinit derivabilă şi satisface în G ecuaţia iterată

$$\frac{D^{k+1}f}{D\omega^{k+1}} = 0.$$

2. Bazîndu-ne pe rezultatele de mai sus, vom defini acum noţiunea de derivată A — areolară.

Fie $A \in L_{p,2}(E)$ $p > 2$, unde $L_{p,2}(E)$ este spaţiul Banach al funcţiilor f ce îndeplinesc condiţia

$$f \in L_p(E_1),\ f_2 \in L_p(E_1)$$

E_1 fiind cercul unitate, iar $f_2(z) = |z|^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Vom nota $\Omega(z)$ soluţia unică a ecuaţiei integrale

$$\Omega + T_E A \Omega = 1,$$

unde

$$T_E f(z) \equiv Tf(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\omega_\zeta$$

este operatorul lui Pompeiu.

DEFINIŢIA 2. Se numeşte *derivată* A — *areolară* în punctul $z_0 \in G$ a funcţiei $w(z)$, continuă în vecinătatea V a punctului z_0, numărul complex

$$\left.\frac{Dw}{D_A \omega}\right|_{z_0} = \lim_{\delta \to z_0} \frac{\frac{1}{2i} \int_\gamma \Omega(z)\, w(z)\, \mathrm{d}z}{\iint_\delta \Omega(z)\, \mathrm{d}\omega_z}$$

limita fiind luată pe o familie regulată în z_0 de domenii δ, conţinînd punctul z_0, limitate de contururile γ simple, rectificabile şi închise, dacă această limită este independentă de familia $(\gamma, \delta) \subset G$.

Ca şi în cazul derivatei areolare, funcţia w continuă va fi numită A — (α) monogenă în domeniul G dacă admite o derivată A — areolară în fiecare punct al acestui domeniu.

DEFINIŢIA 3. Funcţia w, A — (α) monogenă în domeniul G, a cărei derivată A — areolară este continuă în G se numeşte A — (α) *olomorfă* în acest domeniu.

TEOREMA 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie* $w(z)$ *continuă în* G *să fie* A — (α) *olomorfă în* G, *este ca să existe o funcţie* $\Phi \in C(G)$ *astfel încît relaţia*

$$\frac{1}{2i} \int_\gamma \Omega(z)\, w(z)\, \mathrm{d}z - \iint_\delta \Omega(z)\, \Phi(z)\, \mathrm{d}\omega_z = 0,$$

să aibă loc pentru orice cuplu (γ, δ) *din* G. *În acest caz,* Φ *este derivata* A — *areolară a lui* w *peste tot în* G.

Demonstraţia acestei teoreme repetă pe cea dată de N. Teodorescu pentru teorema 1.

DEFINIŢIA 4. Spunem că o funcţie este A — *olomorfă* în G dacă

$$\int_\gamma \Omega(z)\, w(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

pentru orice contur γ simplu, rectificabil şi închis, inclus în G împreună cu domeniul pe care îl mărgineşte.

Din această definiţie rezultă imediat conform teoremei precedente

TEOREMA 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie să fie A — olomorfă în G este ca derivata sa A — areolară să fie identic nulă în G.*

TEOREMA 4. *Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie w să satisfacă ecuaţia*

$$Lw \equiv \partial_{\bar{z}} w - Aw = 0 \tag{1}$$

în G este ca w să fie A — olomorfă în G.

Demonstraţia este imediată şi se bazează pe formula de reprezentare care caracterizează soluţiile ecuaţiei (1) dată de N. Teodorescu.

Din teorema 4 rezultă că derivata A — areolară a unei funcţii w este nulă dacă şi numai dacă w este soluţie a ecuaţiei (1).

Observaţie. Dacă $A \equiv 0$, se vede că $\Omega \equiv 1$ şi definiţia 2 revine la definiţia derivatei areolare dată de N. Teodorescu.

3. Să considerăm ecuaţia iterată

$$L^{k+1} w = 0, \tag{2}$$

unde A admite derivate continue pînă la ordinul $k+1$ inclusiv, iar

$$\frac{D^{k+1} A}{D\omega^{k+1}} \in L_p(E).$$

Vom da următoarea teoremă :

TEOREMA 5. *Condiţia necesară şi suficientă ca w să fie soluţie a ecuaţiei (2) este ca w să fie de forma*

$$w(z) = \sum_{j=0}^{k} w_j(z)\, \bar{z}^j$$

unde w_j sînt funcţii A — olomorfe.

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Într-adevăr, fie $k = 2$. Atunci

$$L^2 w = L(Lw) = 0$$

De aici rezultă

$$Lw = w_1 \tag{3}$$

Conform celor spuse anterior, $w_1(z) = \Phi_1(z)\, e^{TGA(z)}$ cu Φ_1 olomorf.

Vom rezolva ecuaţia (3) prin metoda variaţiei constantelor, constantele fiind în cazul nostru funcţiile olomorfe. Căutăm deci pe w de forma

$$w(z) = \Phi(z)\, e^{TGA(z)} \equiv \Phi(z)\, e^{-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{A(\zeta)}{\zeta - z}\, d\omega\zeta}.$$

Prin înlocuirea acestei expresii în (3) obţinem

$$\Phi_{\bar{z}} e^{TGA} + A\Phi e^{TGA} - A\Phi e^{TGA} = \Phi_1 e^{TGA}.$$

De aici

$$\Phi_{\bar z} = \Phi_1, \quad \Phi(z) = \bar z\Phi_1(z) + \Phi_0(z)$$

cu Φ_0 olomorf. Atunci

$$w(z) = [\bar z\Phi_1(z) + \Phi_0(z)]\, e^{TGA(z)} = \bar z w_1(z) + w_0(z),$$

unde w_1, w_0 sînt funcţii A — olomorfe.

Presupunem acum teorema adevărată pentru k paşi. S-o demonstrăm pentru $k+1$. Avem :

$$L^{k+1}w = L(L^k w) = 0$$

de unde

$$L^k w = w_k$$

cu w_k A — olomorfă. Soluţia acestei ecuaţii va fi suma dintre soluţia ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Dar prin raţionamentul de inducţie, pentru ecuaţia

$$L^k w = 0$$

soluţia este dată de

$$w(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \bar z^j w_j^*(z)$$

unde w_j^* sînt funcţii A — olomorfe.

Căutăm acum o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene sub forma

$$\Phi(z)\, e^{TGA(z)}.$$

Prin urmare

$$L^k w = L^{k-1}[L\Phi e^{TGA}] = L^{k-1}[\Phi_{\bar z} e^{TGA}] = \ldots = L[\Phi_{\bar z^{k-1}} e^{TGA}] = \Phi_{\bar z^k} e^{TGA}$$

deci trebuie să avem :

$$\Phi_{\bar z^k} e^{TGA} = \Phi_k e^{TGA},$$

unde

$$w_k(z) = \Phi_k(z)\, e^{TGA(z)}$$

şi Φ_k este olomorfă. Aşadar

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^{k} \bar z^j \Phi_j(z)$$

atunci

$$w(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \bar z^j w_j^*(z) + \left(\sum_{j=0}^{k} \bar z^j \Phi_j(z)\right) e^{TGA(z)}$$

deci

$$w(z) = \sum_{j=0}^{k} \Psi_j(z)\, e^{TGA(z)}\, \bar z^j$$

cu Ψ_j sume de funcţii olomorfe, deci funcţii olomorfe.

Rezultă că

$$w(z) = \sum_{j=0}^{k} \bar{z}^j w_j(z)$$

w_j fiind A — olomorfe.

Condiția este și suficientă. Într-adevăr, fie

$$w(z) = \sum_{j=0}^{k} \bar{z}^j w_j(z)$$

Atunci

$$L^{k+1}w = L^k(Lw) = L^k\left[L\sum_{j=0}^{k} \bar{z}^j w_j(z)\right] =$$

$$= L^k\left[\sum_{j=1}^{k} j\bar{z}^{j-1} w_j(z)\right] = \ldots = k!\; Lw_k = 0$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

DEFINIȚIA 5. Vom numi *polinom A — areolar* de ordinul k o expresie de forma

$$\sum_{j=0}^{k} \bar{z}^j w_j(z)$$

cu w_j funcții A — olomorfe.

Cu această definiție, teorema 5 se mai poate enunța :

Condiția necesară și suficientă ca $w(z)$ să fie polinom A — areolar de ordinul k este ca w să fie soluție a ecuației iterate (2).

4. Considerăm acum operatorii $\lambda_0[f]$, $\lambda_j[f]$, analogi operatorilor speciali $\Phi_j[f]$ introduși de N. Teodorescu în [1] pentru generalizarea teoremei lui Morera. Acești operatori vor fi dați de formulele :

$$\lambda_0[f] = f(z) - \frac{\bar{z}}{1!} Lf(z) + \ldots + (-1)^n \frac{\bar{z}^n}{n!} L^n f(z)$$

$$\lambda_j[f] = L^j f(z) - \frac{\bar{z}}{1!} L^{j+1} f(z) + \ldots + (-1)^{n-j} \frac{\bar{z}^{n-j}}{(n-j)!} L^n f(z)$$

unde $j = 1, \ldots, n$, iar

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} \bar{z}^j w_j(z)$$

w_j fiind A — olomorfe. Se vede imediat că

$$\lambda_0[L^j f] = \lambda_j[f].$$

De asemenea

$$\lambda_0[f] = w_0,\quad \lambda_j[f] = \frac{1}{j!} w_j \tag{4}$$

Deci f se poate scrie sub forma

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \bar{z}^{j} \lambda_j [f].$$

Din (4) se vede că λ_j $[f]$ sînt funcţii A — olomorfe, deci

$$\int_{\gamma} \Omega(z)\, \lambda_j [f]\, \mathrm{d}z = 0$$

pentru orice contur γ simplu, rectificabil şi închis, inclus în G împreună cu domeniul pe care îl mărgineşte.

Reciproc, dîndu-se $n + 1$ funcţii w_j, $j = 0, \ldots, n$, dacă are loc relaţia

$$\int_{\gamma} \Omega(z)\, \lambda_j [f]\, \mathrm{d}z = 0,$$

unde γ are proprietăţile de mai sus şi unde

$$\lambda_j [f] = w_j(z) - \frac{\bar{z}}{1!} w_{j+1}(z) + \ldots + (-1)^{n-j} \frac{\bar{z}^{n-j}}{(n-j)!} w_n(z), \; j = 0, \ldots, n,$$

atunci w_0 este un polinom A — areolar, iar w_j sînt derivatele sale A — areolare succesive.

Deci şi pentru polinoamele A — areolare este valabilă o teoremă de tip Morera.

5. Analog putem considera serii A — areolare (care vor fi de fapt serii areolare înmulţite cu factorul $e^{TGA(z)}$).

Teorema de tip Liouville pentru asemenea serii se poate demonstra fie direct, fie cu ajutorul teoremei corespunzătoare pentru seriile areolare. O vom demonstra direct. Pentru aceasta ne vom folosi de noţiunea de pseudomodul :

Dacă

$$w(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{z}^{j} w_j(z),$$

atunci

$$M(r, w) = \sum_{j=0}^{\infty} r^{j} M_j(r)$$

cu

$$M_j(r) = \max |w_j(z)| \text{ pe } |z| = r.$$

Se vede că

$$M_j(r) = \max |\Phi_j(z)| \max e^{TGA(z)} \qquad \text{pe } |z| = r$$

sau

$$M_j(r) = a \max |\Phi_j(z)| \qquad \text{pe } |z| = r.$$

TEOREMA 6. *Dacă seria A — areolară $w(z)$ satisface inegalitatea*

$$M(r_k, w) \leqslant r_k^n$$

pentru un şir de valori tinzînd la infinit odată cu k, n fiind un număr natural fix, atunci $w(z)$ este un polinom A — areolar cel mult de ordinul n.

Demonstraţia este asemănătoare celei care se găseşte în [6], dată de D. Pascali pentru serii areolare.

Într-adevăr, presupunînd $M(r, w) < \infty$, rezultă :

$$|w_j(z)| = a|\Phi_j(z)| < \frac{M(r_k, w)}{r_k^j}$$

pentru orice z cu $|z| \leqslant r_k$. Dar

$$M(r_k, w)\, r_k^{-p} \leqslant \mathrm{B}$$

cu B constant (din ipoteză). Deci

$$|\Phi_j(z)| \leqslant \frac{Ba^{-1}}{r_k^{n-p}}$$

şi în consecinţă $\Phi_j(z) \equiv 0$ pentru $j > n$, ceea ce demonstrează teorema.

Primită la redacţie la 24 iunie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique.* (Teză), Gauthier-Villars, Paris, 1931.
2. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire*, Bucureşti, 1936.
3. D. POMPEIU, *Sur une classe de functions d'une variable complexe.* Rendiconti Palermo, **33**, *1*, 108—113 (1912), **35**, *1*, 277—281 (1913).
4. N. TEODORESCU, *Funcţii olomorfe* (α) *şi funcţiile de clasă C_z.* Com. Acad. R. P. R., **X**, *6*, 491—499, 1960.
5. I. N. VEKUA, *Обобщённые аналитические функции*, Moscova, 1959.
6. D. PASCALI, *Reprezentarea soluţiilor unor tipuri de ecuaţii lineare cu derivate areolare.* Disertaţie, Bucureşti, 1964.
7. I. N. VEKUA, *Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек.* Мат. сб. 3k (73), *2*, 217—314.

ASUPRA DEFINIȚIEI FUNCȚIILOR MĂSURABILE

DE

VALENTIN POPESCU

În cazul măsurilor Radon se aduc simplificări definiției măsurabilității unei funcții, folosite de N. Bourbaki, obținîndu-se deci și un criteriu mai simplu de măsurabilitate; de asemenea se dă o caracterizare a măsurabilității, cu ajutorul noțiunii de continuitate pseudoaproximativă. În cazul ,,măsurilor abstracte'' se dă o definiție echivalentă cu cea a lui Bochner, care în plus este o extensiune imediată a definiției folosite pentru măsuri Radon și care se poate generaliza ușor la măsuri și funcții mai generale.

În [1] se studiază cu precădere măsurile Radon, dar nu este neglijat nici cazul ,,măsurilor abstracte'' (funcții complet aditive definite pe un semitrib) pentru care se transpun, la sfîrșitul fiecărui paragraf, principalele noțiuni și proprietăți tratate în paragraful respectiv pentru măsurile Radon. De fapt definițiile date în cazul ,,măsurilor abstracte'' sînt adaptări imediate ale celor utilizate pentru măsurile Radon cu singura excepție a noțiunii de măsurabilitate a unei funcții, pentru care se dau două definiții net distincte: pentru măsuri Radon se folosește teorema lui Luzin iar în cazul abstract se dă o definiție de tip Bochner aplicată local.

În cele ce urmează, vom obține, în cazul ,,măsurilor abstracte'', o definiție a măsurabilității unei funcții echivalentă cu cea din [1] și care va fi o extensiune imediată a teoremei lui Luzin. În plus, în cazul măsurilor Radon, vom aduce unele simplificări definiției măsurabilității din [1] obținînd deci și un criteriu de măsurabilitate mai simplu decît cel al lui Luzin. Vom utiliza notațiile și terminologia din [1] și [2].

1. CAZUL MĂSURILOR RADON

TEOREMA 1. *Fie E un spațiu local compact, μ o măsură Radon pe E iar F un spațiu topologic. O condiție necesară și suficientă ca o funcție $f: E \to F$ să fie măsurabilă, este ca pentru orice mulțime compactă $K \subset E$*

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1457 – 1461, BUCUREȘTI, 1965

de măsură nenulă, să existe o submulțime compactă $K' \subset K$ *de măsură nenulă astfel încît* $f \mid K'$ *(restricția funcției* f *la* K'*) să fie continuă.*

Demonstrație. Să presupunem că f satisface condiția din enunț. Dacă f nu ar fi măsurabilă, ar exista un compact $K \subset E$ și un număr $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice compact $K' \subset K$ cu $\mu(K \setminus K') < \varepsilon$ funcția $f \mid K'$ să nu fie continuă. Fie α marginea superioară a mulțimii numerelor ε' pentru care perechea K, ε' se bucură de aceeași proprietate ca și perechea K, ε. Rezultă clar existența unui șir $\{K_n\}_{n=1,2,\ldots}$ de submulțimi compacte ale lui K astfel încît $f \mid K_n$ să fie continuă $(n = 1, 2, \ldots)$ iar $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(K \setminus K_n) = \alpha$. Avem $\mu(K \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n) = \alpha$, deoarece din $\mu(K \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n) < \alpha$ ar rezulta $\mu(K \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{n_0} K_n) < \alpha$ pentru un indice n_0 suficient de mare, ceea ce contrazice alegerea numărului α, funcția $f \mid \bigcup\limits_{n=1}^{n_0} K_n$ fiind continuă. Dar $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, deci $K \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ conține un compact K' de măsură nenulă. Din ipoteză rezultă atunci existența unei mulțimi compacte $K'' \subset K'$ de măsură nenulă, astfel încît $f \mid K''$ să fie continuă. Fie N un indice astfel ca $\mu(K \setminus K_N) < \alpha - \mu(K'')$. Rezultă $\mu(K \setminus (K_N \cup K'')) < \alpha$ ceea ce nu se poate deoarece $f \mid K_N \cup K''$ este continuă. Astfel f este măsurabilă și teorema este demonstrată, deoarece necesitatea condiției este imediată.

Deoarece condiția din enunțul teoremei este mai simplă decît cea din enunțul teoremei lui Luzin, ea poate constitui o definiție a măsurabilității mai avantajoasă decît cea din [1]. Chiar și ca simplu criteriu de măsurabilitate, această condiție prezintă unele avantaje, deoarece este mult mai ușor și se arată că o anumită mulțime este de măsură nenulă decît să se verifice că măsura unei mulțimi este inferioară unui $\varepsilon > 0$ *apriori* dat. Ceva mai mult, în cazul măsurilor vectoriale, constatarea acestei ultime proprietăți nu se poate face decît folosind variația acelei mulțimi în vreme ce proprietatea unei mulțimi de a fi de măsură (vectorială) nenulă, se poate constata direct cu măsura dată.

Teorema precedentă poate fi obținută imediat din propoziția 3, § 1, Cap. V din [1] și din următoarea propoziție care, la rîndul ei, poate fi verificată printr-un raționament asemănător celui din demonstrația teoremei 1.

PROPOZIȚIA 1. *În condițiile propoziției 1 din* [*1*], *§ 1, Cap. V, o condiție necesară și suficientă ca o familie* $\mathfrak{K}$ *de părți compacte ale unei mulțimi* A *să fie* μ *— densă este ca pentru orice mulțime compactă* $K \subset A$ *de măsură nenulă, să existe o mulțime* $K' \in \mathfrak{K}$ *conținută în* K *și de măsură nenulă.*

În tot restul lucrării, F va fi un spațiu metric. Pentru o funcție $f : E \to F$ vom nota prin $\omega_f(M)$, $\omega_f(x_0)$ oscilațiile funcției f pe $M \subset E$, respectiv în $x_0 \in E$.

PROPOZIȚIA 2. *Cu notațiile din teorema* 1, *funcția* $f : E \to F$ *este măsurabilă dacă și numai dacă pentru orice compact* $K \subset E$ *și orice pereche de numere pozitive* ε, η *există un compact* $K' \subset K$ *astfel încît* $\mu(K \setminus K') < \varepsilon$ *iar oscilația funcției* $f \mid K'$ *să fie mai mică decît* η *în toate punctele.*

Demonstraţie. Presupunînd că f satisface condiţia din enunţ, fie date un compact $K \subset E$ şi un număr $\varepsilon > 0$. Există mulţimile compacte $K_n \subset K$ cu $\mu(K \setminus K_n) < \varepsilon/2^n$ astfel încît $f \mid K_n$ să fie de oscilaţie mai mică decît $\frac{1}{n}$ în toate punctele. Mulţimea $K' = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ este compactă, $\mu(K \setminus K') < \varepsilon$ iar $f \mid K'$ este continuă, deci f este măsurabilă.

COROLAR. *O condiţie necesară şi suficientă ca f să fie măsurabilă, este ca pentru orice compact $K \subset E$ şi orice $\eta > 0$ să existe o partiţie $K = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ cu $\mu(N) = 0$, unde K_i sînt mulţimi compacte sau vide, pentru care $f \mid K_i$ să fie de oscilaţie mai mică decît η în toate punctele.*

Folosind propoziţia 2 şi urmînd aceeaşi cale ca în demonstraţia teoremei 1 se poate obţine

PROPOZIŢIA 3. *O condiţie echivalentă cu măsurabilitatea funcţiei $f : E \to F$ este ca pentru orice parte compactă $K \subset E$ de măsură nenulă şi orice număr $\eta > 0$ să existe o submulţime compactă $K' \subset K$ de măsură nenulă, astfel ca $f \mid K'$ să fie de oscilaţie mai mică decît η în toate punctele.*

TEOREMA 2. *Cu notaţiile de mai sus, f este măsurabilă dacă şi numai dacă pentru orice compact $K \subset E$ de măsură nenulă, şi orice $\eta > 0$ există un compact $K' \subset K$ de măsură nenulă, astfel încît oscilaţia funcţiei f pe mulţimea K' să fie mai mică decît η.*

Demonstraţie. Suficienţa condiţiei fiind imediată, să presupunem că f este măsurabilă şi fie date K şi η. Din propoziţia 3 rezultă existenţa unui compact $K' \subset K$ de măsură nenulă, astfel încît oscilaţia funcţiei $f \mid K'$ să fie inferioară numărului $\eta/2$ în toate punctele mulţimii K'. Fiecare punct $x \in K'$ poate fi acoperit cu o vecinătate V_x pentru care $\omega_f(V_x \cap K') < \eta$. Extrăgînd din $\{V_x\}_{x \in K'}$ o acoperire finită $\{V_{x_i}\}_{i=1,\dots,n}$ a mulţimii K', cel puţin una din mulţimile $V_{x_i} \cap K$ va fi de măsură nenulă. Va exista un compact K'' de măsură nenulă inclus în acea mulţime, şi este evident că $\omega_f(K'') < \eta$.

Simplificările aduse definiţiei măsurabilităţii prin teorema 1 (respectiv familiilor μ-dense prin propoziţia 1) pot fi extinse şi asupra altor noţiuni (de exemplu definiţia măsurilor regulate, etc.). Prin aceleaşi procedee se poate construi, în cazul general al măsurilor Radon, un analog al „analizei aproximative” cu ajutorul căreia se se caracterizeze măsurabilitatea. Astfel, vom spune că un punct $x \in E$ este punct de pseudodensitate al unei mulţimi măsurabile $E' \subset E$ dacă pentru orice vecinătate deschisă V a lui x, mulţimea $V \cap E'$ este de măsură nenulă. Orice mulţime compactă de măsură nenulă are cel puţin un punct de pseudodensitate deoarece în cazul contrar s-ar putea realiza o partiţie finită a mulţimii respective în mulţimi de măsură nulă. De aici rezultă că local aproape toate punctele unei mulţimi E' sînt puncte de pseudodensitate. Într-adevăr, fie E'' mulţimea elementelor mulţimii E' care nu sînt puncte de pseudodensitate pentru E'. Dacă E'' n-ar fi local neglijabilă ar exista o mulţime compactă $K \subset E$ cu $\mu(K \cap E'') \neq 0$. Fie $K' \subset K \cap E''$ compactă cu $\mu(K') \neq 0$. K' conţine cel puţin un punct de pseudodensitate, care cu atît mai mult va fi punct de pseudodensitate pentru E'. Aceasta nu este însă posibil deoarece $K' \subset E''$.

Vom spune că o funcţie $f : E \to F$ (F spaţiu metric) este pseudoaproximativ continuă în punctul $x \in E$ dacă există o mulţime măsurabilă E' astfel încît $x \in E' \subset E$, x să fie punct de pseudodensitate pentru E' iar $f \mid E'$ să fie continuă. Pentru ca o funcţie să fie măsurabilă pe E, este necesar şi suficient ca ea să fie pseudoaproximativ continuă local aproape peste tot. Într-adevăr, facă f este măsurabilă, pentru orice mulţime compactă $K \subset E$ există o partiție cel mult numărabilă $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ astfel încît $\mu(K_0) = 0$ iar $f \mid K_i$ să fie continuă pentru orice $i \geqslant 1$. Notînd cu K_i' mulțimea punctelor de pseudodensitate ale mulțimii K_i, aparținînd lui K_i, se vede imediat că f este pseudoaproximativ continuă în toate punctele mulțimii $K' = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i'$ iar $\mu(K \setminus K') = 0$. Reciproc, presupunînd condiția îndeplinită, fie date $K \subset E'$ cu $\mu(K) \neq 0$ și $\eta > 0$. Există cel puțin un punct $x_0 \in K$ în care f să fie pseudoaproximativ continuă; există $K' \subset K$ astfel încît x_0 să fie punct de pseudodensitate pentru K' iar $f \mid K'$ să fie continuă în x_0. Alegînd o vecinătate compactă V a lui x_0 astfel încît $\omega_f(K' \cap V) < \eta$, din teorema 2 rezultă măsurabilitatea funcției f deoarece $\mu(K' \cap V) \neq 0$.

2. CAZUL MĂSURILOR ABSTRACTE

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $\{E, \Sigma, \mu\}$ *un spațiu cu măsură* (Σ *un semitrib de părți ale mulțimii oarecare* E, $\mu : \Sigma \to R$ *numărabil aditivă*), F *un spațiu metric și o aplicație* $f : E \to F$. *Următoarele propoziții sînt echivalente* :

(i) *Pentru orice număr* $\eta > 0$ *și orice* $A \in \Sigma$ *cu* $\mu(A) \neq 0$, *există* $A' \in \Sigma$ *cu* $A' \subset A$, $\mu(A') \neq 0$ *și* $\omega_f(A') < \eta$,

(ii) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ *și orice* $A \in \Sigma$ *cu* $\mu(A) < +\infty$ *există o partiție finită* $A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ *cu* $A_i \in \Sigma$, $\mu(A_0) < \varepsilon$ *iar pentru* $i \geqslant 1$, $\omega_f(A_i) < \eta$.

(iii) *Pentru orice* $\eta > 0$ *și orice* $A \in \Sigma$ *cu* $\mu(A) < +\infty$, *există o partiție cel mult numărabilă* $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ *cu* $A_i \in \Sigma$, $\mu(A_0) = 0$, *iar pentru* $i \geqslant 1$ *să avem* $\omega_f(A_i) < \eta$.

Dacă, în plus, μ *este* σ *— finită, atunci proprietățile precedente sînt echivalente și cu următoarea* :

(iii') *Pentru orice* $\eta > 0$ *există o partiție cel mult numărabilă* $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ *cu* $E_i \in \Sigma$, $\mu(E_0) = 0$ *și* $\omega_f(E_i) < \eta$ *pentru* $i \geqslant 1$.

Demonstrație. Va fi suficient să demonstrăm implicația (i) $\Rightarrow$ (iii), celelalte fiind evidente. Folosind teorema de descompunere a lui Hahn, se poate presupune $\mu \geqslant 0$. Presupunînd îndeplinită condiția (i) și fiind date $\eta > 0$ și $A \in \Sigma$ cu $\mu(A) < +\infty$, să notăm cu θ_1 marginea superioară a măsurilor mulțimilor $M \in \Sigma$ cu $M \subset A$ și $\omega_f(M) < \eta$. Fie A_1 o mulțime de acest tip cu $\mu(A_1) < \theta_1/2$. Presupunînd alese mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, fie θ_n marginea superioară a măsurilor mulțimilor $N \in \Sigma$ cu $N \subset A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ și $\omega_f(N) < \eta$. A_n va fi aleasă dintre mulțimile de acest tip, cu condiția $\mu(A_n) < \theta_n/2$. Fie $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Avem $\mu(B) = \mu(A)$ căci, în cazul contrar, din (i) ar rezulta existența unei mulțimi $P \in \Sigma$, $P \subset A \setminus B$ cu $\omega_f(P) < \eta$; dar $\theta_n \to 0$ (căci $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \leqslant 2\mu(B) \leqslant 2\mu(A)$) deci există $\theta_{n_0} < \frac{1}{2}\,\mu(P)$ ceea ce contrazice însă alegerea numărului θ_{n_0}

căci $P \subset A \setminus \bigcup_{i=1}^{n_0-1} A_i$. Pentru verificarea proprietăţii (iii) nu mai rămîne decît să scriem $A_0 = A \setminus B$.

TEOREMA 3. *Pentru ca* $f : E \to F$ *să fie măsurabilă (în sensul definiţiei din* [1], *Cap.* IV, § 5, *nr.* 7, *p.* 197) *este necear şi suficient să fie îndeplinite condiţiile (echivalente) din enunţul propoziţiei* 4.

Demonstraţie. Şi aici vom putea considera $\mu \geqslant 0$. Să presupunem f măsurabilă şi fie date $\eta > 0$ şi $A \in \Sigma$ cu $0 < \mu(A) < +\infty$. Va exista un şir $\{f_n\}$ de funcţii în scară pe Σ cu valori în F, care să tindă către f pe aproape toată mulţimea A. Din teorema lui Egorov rezultă existenţa unei mulţimi $A' \subset A$ cu $A' \in \Sigma$, $\mu(A') > 0$ astfel încît f_n să tindă uniform către f pe A'. Să fixăm un rang n_0 astfel ca $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \eta$ pentru orice $x \in A'$. Fie $\{B_i\}$ sistemul finit de mulţimi din semitribul Σ cu ajutorul cărora este definită f_{n_0}. Este evident că, pentru orice i, $\omega_f(A' \cap B_i) < \eta$ şi cel puţin una din mulţimile $A' \cap B_i$ este de măsură strict pozitivă.

Reciproc, presupunînd îndeplinită condiţia (iii), fie $A \in \Sigma$ cu $0 < \mu(A) < +\infty$. Pentru orice număr natural n, fie $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i^n$ cu $A_i^n \in \Sigma$, $\mu(A_0^n) = 0$ şi $\omega_f(A_i^n) < \frac{1}{n}$ pentru $i \geqslant 1$. Fie $k(n)$ cel mai mic întreg astfel ca $\sum_{i=1}^{k(n)} \mu(A_i^n) > \mu(A) - \frac{1}{n} \cdot$ Să alegem pentru fiecare A_i^n, cîte un punct arbitrar $x_i^n \in A_i^n$. Definind

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x_i^n) \text{ pentru } x \in A_i^n, \\ 0 \quad \text{în rest} \end{cases}$$

deducem măsurabilitatea funcţiei f din convergenţa a.p.t. a şirului $\{f_i\}$ către f pe A.

Teorema precedentă ne îndreptăţeşte să propunem drept definiţie a măsurabilităţii una din condiţiile echivalente (i), (ii), (iii), prima avînd însă avantajul simplităţii şi fiind — aşa cum ne-am propus — o extensiune a teoremei lui Luzin, sau, mai precis, a teoremei 1 din prezenta lucrare. Să observăm că n-am fi putut obţine o generalizare directă a teoremei lui Luzin, deoarece o funcţie de oscilaţie oricît de mică pe mulţimi de măsuri suficient de mari, este de fapt a.p.t. constantă.

Primită la redacţie la 8 aprilie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu, nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. N. BOURBAKI, *Intégration*, Chap. V, Paris, 1956.
2. A. DENJOY, *Métrique sans topologie. Définition des functions mésurables, non dogmatique, mais exigée, par l'intégration.* C. R. Acad. Sci., Paris, **257**, *19*, 2776—2781, (1963).
3. MIRON NICOLESCU, *Analiza matematică*, vol. III, Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.
4. N. DINCULEANU, *Teoria măsurii şi funcţiei reale.* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.

SCURGEREA CĂTRE UN DREN VERTICAL

DE

A. CÂRLIG

Se consideră mișcarea printr-un strat poros curb către un dren vertical de lățime foarte mică. Rezultatele obținute pentru acest strat poros, adică acelea referitoare la mărimea debitului și a distribuției de viteze de filtrație pe conturul drenului, sînt particularizate apoi pentru cazul în care drenul ajunge la stratul impermeabil de jos și pentru stratul poros dreptunghiular. Se regăsesc rezultatele cunoscute de la mișcările sub baraje și către o galerie infinită.

1. Lucrarea de față studiază un caz de mișcare plană staționară către un dren vertical de lățime foarte mică. În tratarea unei astfel de probleme, sau a scurgerii către o galerie infinită, mediul poros este considerat de obicei ca mărginit în plane paralele (de ex. [1]). În prezenta lucrare vom considera că scurgerea are loc într-un strat poros curb, omogen și izotrop.

Vom admite că mișcarea are loc într-un plan vertical și că stratul poros, simetric față de axa Oy (fig. 1), este mărginit de arcul de cerc BB', impermeabil, de rază $R = R_1$, dacă alegem originea sistemului de coordonate polare în centrul 0 al cercului din care face parte arcul BB' și luăm ca axă polară axa de simetrie, de liniile de alimentare BC și $B'C'$, de ecuații $\theta = \pm\,\theta_0$, de arcele de cerc CD și $C'D'$ impermeabile, de rază $R = R_2$, precum și de porțiunea de frontieră DED' care constituie drenul. Vom admite că lățimea drenului este foarte mică în comparație cu lungimea stratului poros, astfel încît în planul fizic al mișcării drenul să poată fi considerat ca o tăietură de ecuații $\theta = 0$, $R^* \leqslant R \leqslant R_2$.

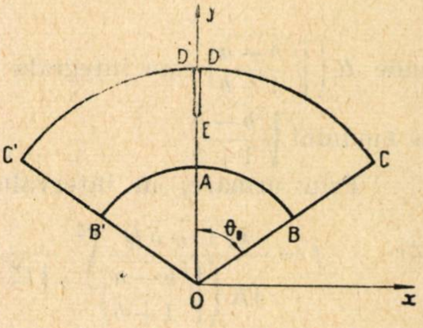


Fig. 1

ST. CERC. MAT., TOM 17, NR. 9, P. 1463 – 1471, BUCUREȘTI, 1965

Vom mai presupune că mişcarea este descrisă de legea lui Darcy. Ţinînd seamă de simetria mişcării, va fi suficient să ne ocupăm numai de mişcarea în domeniul *ABCDEA*.

În cele ce urmează vom stabili expresia debitului drenului Q şi distribuţia de viteze (de filtraţie) pe conturul drenului (DED'). Pentru rezolvarea problemei vom aplica metoda reprezentărilor conforme, utilizată în mod curent în hidrogazodinamica subterană [2].

Pe porţiunile de frontieră EAB şi CD, care sînt linii de curent, funcţia de curent ψ va lua următoarele valori : pe EAB, $\psi = 0$, pe DC, $\psi = -\frac{Q}{2}\cdot$ Pe linia de alimentare BC potenţialul vitezelor este constant şi ia valoarea $\varphi = -kH_1$, k fiind coeficientul de filtraţie al mediului poros, iar H_1 cota piezometrică a lichidului în bazinul de alimentare. Pe linia DE, potenţialul scurgerii va lua valoarea $\varphi = -kH_2$, H_2 fiind cota piezometrică a lichidului din dren ($H_1 > H_2$).

Prin urmare, în planul potenţialului complex $f = \varphi + \mathrm{i}\psi$, domeniul mişcării este un dreptunghi (fig. 2).

Să reprezentăm conform domeniul mişcării din planul $f = \varphi + \mathrm{i}\psi$ pe semiplanul superior al variabilei $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$, astfel încît punctul A să treacă în $\zeta = 0$, punctul B în $\zeta = 1$ şi C în $\zeta = \infty$ (fig. 3). Coordonatele punctelor D şi E le vom nota cu $-b$ şi respectiv $-a$.

Atunci, conform formulei Schwarz-Christoffel, vom avea :

$$f = M\int_{-b}^{\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta+a)(\zeta+b)}} - kH_2 - \mathrm{i}\frac{Q}{2}\cdot \tag{1}$$

Punînd condiţia ca pentru $\zeta = -a$ să avem $f = -kH_2$, din (1) rezultă următoarea expresie pentru M :

$$M = \frac{\mathrm{i}\sqrt{1+b}\,Q}{4K\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{1+b}}\right)},$$

unde $K\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{1+b}}\right)$ este integrala eliptică completă de specia întîi relativă la modulul $\sqrt{\dfrac{b-a}{1+b}}\cdot$

Prin urmare, în intervalul $-b \leqslant \zeta \leqslant -a$

$$f = \frac{\mathrm{i}\sqrt{1+b}\,Q}{4K\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{1+b}}\right)}\int_{-b}^{\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta+a)(\zeta+b)}} - kH_2 - \mathrm{i}\frac{Q}{2}. \tag{2}$$

Trecînd prin continuitate pe intervalul $-a \leqslant \zeta \leqslant 1$,

$$f = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{1+b}\,Q}{4K\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{1+b}}\right)}\int_{-a}^{\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta+a)(b+\zeta)}} - kH_2,$$

şi dacă ţinem seama că pentru $\zeta = 1$, $f = -kH_1$, rezultă pentru debitul drenului expresia următoare:

$$Q = 2k(H_1 - H_2)\frac{K\left(\sqrt{\frac{b-a}{1+b}}\right)}{K\left(\sqrt{\frac{1+a}{1+b}}\right)}. \tag{3}$$

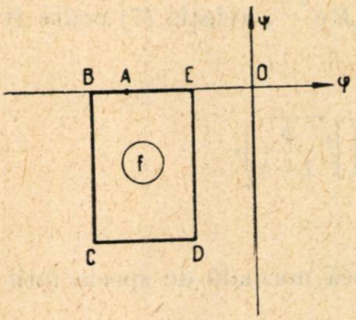


Fig. 2

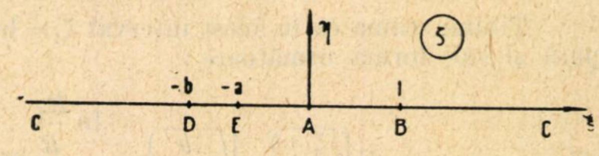


Fig. 3

Cu notaţia $\alpha = \sqrt{\frac{1+a}{1+b}}$ şi $\alpha' = \sqrt{\frac{b-a}{1+b}}$, relaţia (3) devine:

$$Q = 2k(H_1 - H_2)\frac{K(\alpha')}{K(\alpha)}, \tag{4}$$

modulii α şi α' fiind complementari ($\alpha'^2 = 1 - \alpha^2$).

După cum se vede din relaţia (3), la determinarea debitului este necesară cunoaşterea mărimilor a şi b. Pentru aflarea acestor mărimi vom introduce prin transformarea conformă

$$\zeta_1 = \ln z, \tag{5}$$

o nouă variabilă complexă ajutătoare $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$. În acest plan, domeniul mişcării din planul fizic se va transforma într-un dreptunghi (fig. 4).

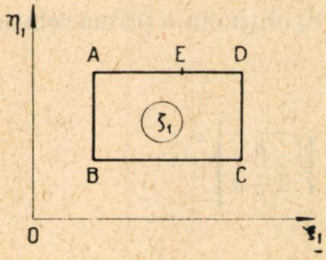


Fig. 4

În continuare vom transforma conform domeniul mişcării din planul (ζ_1) pe semiplanul superior al planului de variabilă complexă (ζ). Aplicînd iarăşi formula Schwarz-Christoffel, obţinem:

$$\zeta_1 = M_1\int_{-b}^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta+b)\zeta}} + \ln R_2\, e^{i\frac{\pi}{2}}. \tag{6}$$

Pentru determinarea constantei M_1 folosim corespondenţa $\zeta = 0$, $\zeta_1 = \ln R_1\, e^{i\frac{\pi}{2}}$. Din (6) rezultă:

$$M_1 = -\frac{\sqrt{1+b}\,\ln\frac{R_2}{R_1}}{2K\left(\sqrt{\frac{b}{1+b}}\right)}.$$

Deci în intervalul $-b \leqslant \zeta \leqslant 0$,

$$\zeta_1 = -\frac{\sqrt{1+b}\ln\frac{R_2}{R_1}}{2K\left(\sqrt{\frac{b}{1+b}}\right)}\int_{-b}^{\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta+b)\zeta}} + \ln R_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}. \tag{7}$$

Ţinînd seama că în acest interval $\zeta_1 = \ln R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, relaţia (7) poate fi pusă şi sub forma următoare :

$$F\sqrt{\frac{\zeta+b}{b}},\ \sqrt{\frac{b}{1+b}}\Bigg) = \frac{\ln\frac{R_2}{R}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\,K\left(\sqrt{\frac{b}{1+b}}\right), \tag{8}$$

unde $F\left(\sqrt{\frac{\zeta+b}{b}},\ \sqrt{\frac{b}{1+b}}\right)$ este integrala eliptică normală de specia întîi relativă la modulul $\sqrt{\frac{b}{1+b}}$.

Pentru $\zeta = -a$, $\zeta_1 = \ln R^{\star}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, şi din (8) obţinem o primă relaţie pentru determinarea mărimilor a şi b :

$$\frac{b-a}{b} = \mathrm{sn}^2\left(K\left(\sqrt{\frac{b}{1+b}}\right)\frac{\ln\frac{R_2}{R^{\star}}}{\ln\frac{R_2}{R_1}},\ \sqrt{\frac{b}{1+b}}\right). \tag{9}$$

Să trecem pe intervalul $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$. Pe acest interval relaţia (7) capătă atunci forma următoare :

$$\zeta_1 = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{1+b}\,\ln\frac{R_2}{R_1}}{2K\left(\sqrt{\frac{b}{1+b}}\right)}\int_{0}^{\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta+b)\zeta}} + \ln R_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},$$

de unde, ţinînd seama că pentru $\zeta = 1$, $\zeta_1 = \ln R_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)}$, obţinem cea de-a doua relaţie pentru determinarea constantelor a şi b :

$$\frac{K\left(\sqrt{\frac{b}{1+b}}\right)}{K\left(\sqrt{\frac{1}{1+b}}\right)} = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{\theta_0}. \tag{10}$$

Notînd cu $\beta = \sqrt{\dfrac{b}{1+b}}$ şi $\beta' = \sqrt{\dfrac{1}{1+b}}$, relaţia (10) se scrie astfel :

$$\frac{K(\beta)}{K(\beta')} = \frac{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}{\theta_0}. \tag{11}$$

Relaţia (11) permite determinarea mărimii $\beta\,(\beta'^2 = 1 - \beta^2)$ care după cum se vede mai departe, apare în expresiile finale ale elementelor hidrodinamice pe care ni le-am propus să le stabilim.

Ţinînd seama de relaţia (9), modulele α' şi α din relaţia (4), pot fi exprimate atunci numai în funcţie de mărimea β şi de elementele geometrice ale stratului poros astfel :

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha' = \sqrt{\frac{b-a}{1+b}} = \beta \operatorname{sn}\left(K(\beta)\frac{\ln \dfrac{R_2}{R^*}}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}},\ \beta\right) \\ \text{şi}& \\ &\alpha = \operatorname{dn}\left(K(\beta)\frac{\ln \dfrac{R_2}{R^*}}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}},\ \beta\right) \end{aligned}\right. \tag{12}$$

în care sn$u$ şi dn$u$ sînt funcţiile eliptice ale lui Jacobi.

În continuare să deducem expresia vitezei complexe de filtraţie : $w = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = u - \mathrm{i}v$. Cum

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\zeta_1}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\mathrm{d}z},$$

iar din relaţiile (2), (5) şi (7) se obţine,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{1+b}\,Q}{4K(\alpha')}\,\frac{1}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta+a)(\zeta+b)}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\mathrm{d}\zeta} = -\frac{\sqrt{1+b}\,\ln\dfrac{R_2}{R_1}}{2K(\beta)}\,\frac{1}{\sqrt{(\zeta-1)(\zeta+b)\zeta}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z},$$

după cîteva calcule simple, pentru viteza complexă de filtraţie găsim expresia :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{i}\,k\,(H_1 - H_2)\,K(\beta')}{\theta_0 K(\alpha)\,z}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta + a}}. \tag{13}$$

Relaţia (13) ne permite să determinăm distribuţia de viteze pe conturul drenului, linia DED'. Pe acest contur $z = \mathrm{i}R$ $(R^* \leqslant R \leqslant R_2)$.

Din relaţia (8), utilizînd cosinusul eliptic, deducem că

$$\zeta = -b\,\mathrm{cn}^2\left(K(\beta)\,\frac{\ln\frac{R_2}{R}}{\ln\frac{R_2}{R_1}},\ \beta\right).$$

Introducînd expresia lui ζ în relaţia (13) şi făcînd calculele, obţinem, pe conturul drenului, următoarea distribuţie de viteze de filtraţie :

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{k\,(H_1 - H_2)\,\mathrm{cn}\left(K(\beta)\,\dfrac{\ln\frac{R_2}{R}}{\ln\frac{R_2}{R_1}},\ \beta\right)}{R\theta_0\,K(\alpha)\sqrt{\mathrm{cn}^2\left(K(\beta)\,\dfrac{\ln\frac{R_2}{R}}{\ln\frac{R_2}{R_1}},\ \beta\right) - \mathrm{cn}^2\left(K(\beta)\,\dfrac{\ln\frac{R_2}{R^*}}{\ln\frac{R_2}{R_1}},\ \beta\right)}}. \\ v &= 0 \end{aligned}\right. \tag{14}$$

2. Formulele obţinute în paragraful precedent pot căpăta o formă mai simplă, utilă pentru calculele efective, observînd că de obicei raportul dintre grosimea şi lungimea stratului poros este mic, adică raportul $\ln\frac{R_2}{R_1} / \theta_0$ este mic. Atunci, din (11) rezultă că β va fi de asemenea mic. Prin urmare vom putea aplica integralelor eliptice complete de specia întîi, din relaţia (11) o evaluare asimptotică [3]. Rezultă :

$$\frac{K(\beta)}{K(\beta')} = \frac{\pi}{2\ln\frac{4}{\beta}} = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{\theta_0},$$

de unde :

$$\beta^2 = 16\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi\theta_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}. \tag{15}$$

Din prima relaţie din (12) se vede că modulul α', pentru β mic, se poate scrie astfel :

$$\alpha' = \beta \sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\ln\frac{R_2}{R^*}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right), \tag{16}$$

şi că este întotdeauna mai mic decît β.

Prin urmare vom putea evalua asimptotic şi integralele eliptice de specia întîi din relaţia (4). Se obţine :

$$\frac{K(\alpha')}{K(\alpha)} = \frac{\pi}{2\ln\frac{4}{\alpha'}},$$

de unde ţinînd seama şi de relaţiile (15) şi (16), (4) devine :

$$Q = \frac{2k\pi(H_1 - H_2)}{\dfrac{\pi\theta_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}} + \ln\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\ln\frac{R_2}{R^*}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)}} \tag{17}$$

Tot în acest caz, distribuţia de viteze pe conturul drenului va fi dată de relaţiile următoare :

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{k\pi(H_1 - H_2)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\ln\frac{R_2}{R}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)}{R\ln\dfrac{R_2}{R_1}\left(\dfrac{\pi\theta_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}} + \ln\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\ln\frac{R_2}{R^*}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)}\right)\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\ln\frac{R_2}{R^\star}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)}} \\ v &= 0 \end{aligned}\right. \tag{18}$$

ce rezultă din (14) prin înlocuirile corespunzătoare.

În cazul în care $R^\star = R_1$, adică drenul ajunge pînă la stratul impermeabil de jos, formulele (4) şi (17), şi (14) şi (18) capătă o structură foarte simplă :

$$Q = \frac{2k(H_1 - H_2)\ln\frac{R_2}{R_1}}{\theta_0}, \tag{19}$$

şi respectiv

$$
\left\{
\begin{aligned}
u &= -\frac{k(H_1 - H_2)}{R\theta_0} \\
v &= 0
\end{aligned}
\right.
\tag{20}
$$

ceea ce coincide cu rezultatul cunoscut de la mişcările sub baraje [4].

3. Vom face acum particularizarea la cazul stratului poros rectiliniu, acesta fiind un caz limită al stratului poros curb.

Prin trecerea la limită a expresiilor care dau debitul şi distribuţia de viteze pe conturul drenului, obţinute pentru stratul poros curb, căpătăm relaţii asemănătoare valabile pentru stratul rectiliniu.

Să notăm cu T_0, T şi T^* diferenţele $R_2 - R_1$, $R_2 - R$ şi respectiv $R_2 - R^*$, şi cu $2l$ lungimea stratului rectiliniu. Punînd condiţia ca $l = R_2\theta_0$ şi menţinînd aceeaşi grosime a stratului poros, pentru $R_2 \to \infty$

$$
\frac{\theta_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \to \frac{l}{T_0}, \text{ iar } \frac{\ln\frac{R_2}{R^*}}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \to \frac{T^*}{T_0}.
\tag{21}
$$

Dacă ne rezumăm la formulele obţinute în § 2, trecînd la limită expresia din partea dreaptă a relaţiei (17) şi ţinînd seama de (21), obţinem :

$$
Q = \frac{2k\pi(H_1 - H_2)}{\frac{\pi l}{T_0} + \ln\frac{1}{\sin^2\frac{\pi T^*}{2T_0}}},
\tag{22}
$$

relaţie care coincide cu formula dată de I. N. Kocina [1] pentru calculul debitului, pe unitatea de lungime a unei galerii infinite practicată într-un strat poros dreptunghiular.

Procedînd la fel ca în cazul formulei (17), relaţia (18) devine :

$$
\left\{
\begin{aligned}
u &= -\frac{k\pi(H_1 - H_2)\cos\frac{\pi T}{2T_0}}{T_0\left(\frac{\pi l}{T_0} + \ln\frac{1}{\sin^2\frac{\pi T^*}{2T_0}}\right)\sqrt{\cos^2\frac{\pi T}{2T_0} - \cos^2\frac{\pi T^*}{2T_0}}}. \\
v &= 0
\end{aligned}
\right.
\tag{23}
$$

Generalizării problemei studiate aici îi vor fi consacrate cercetări ulterioare.

Primită la redacţie la 30 aprilie 1965

Institutul de Studii şi Cercetări Hidrotehnice

BIBLIOGRAFIE

1. И. Х. Кочина, *Приток к несовершенной галерее*, Труды Моск. Нефт. Инст., выпуск **20**, 17 (1957).
2. В. И. Аравин, С. Н. Нумеров, *Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде*. Москва, 1953.
3. I. M. Rîjic, I. S. Gradstein, *Tabele de integrale, semne, serii și produse*, Ed. tehnică, București, 1955.
4. П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод*. Москва, 1952.

ALGEBRE UNIVERSALE DENSE ÎN SUMA DIRECTĂ COMPLETĂ

DE

GEORGE ISAC

1. În lucrare se pleacă de la noţiunea de *sumă subdirectă* de algebre universale de acelaşi tip şi de clasă Λ. Se studiază condiţia ca o sumă subdirectă de algebre universale de acelaşi tip şi de clasă Λ să fie densă în suma directă completă topologizată într-un anumit mod.

Rezultatele obţinute generalizează unele rezultate din teoria inelelor.

2. Fie dată o familie $\mathcal{F} = \{G_i\}_{i\in S}$ de algebre universale de acelaşi tip, cu domeniul de operaţii n-are $n \geqslant 0$ Ω şi de clasă Λ, indexată cu indici dintr-o mulţime de cardinal transfinit S.

Produsul cartezian $\prod\limits_{i\in S} G_i$ poate fi organizat ca o nouă algebră universală de acelaşi tip şi de aceeaşi clasă Λ cu fiecare algebră universală G_i, punînd, pentru orice operaţie n-ară, $n \geqslant 0$ $\omega \in \Omega$, oricare ar fi elementele

$$x_1(x_1^i),\ x_2(x_2^i),\ \ldots,\ x_n(x_n^i) \in \prod_{i\in S} G_i\ ,$$

$$x_1x_2\ldots x_n\ \omega = (x_1^i\, x_2^i \ldots x_n^i\, \omega).$$

Această algebră universală o numim *sumă directă completă a* algebrelor universale G_i şi o însemnăm $G = \sum_C \oplus G_i$.

Dacă H este o subalgebră universală a lui G şi dacă orice proiecţie $\varphi_i : H \to G_i$ este epimorfism, atunci subalgebra universală H o numim *sumă subdirectă* a algebrelor G_i şi o însemnăm $H = \sum_S \oplus G_i$.

Observaţia 1. Dacă $\mathcal{F}$ este o familie de Ω-grupuri, atunci putem considera următorul caz particular de sumă subdirectă.

Numim *sumă directă discretă* şi o însemnăm cu $\sum_d \oplus G_i$ mulţimea tuturor elementelor $x \in \sum_C \oplus G_i$ care au toate coordonatele egale cu 0 cu

ST. CERC. MAT., TOM 17, NR. 9, P. 1473 - 1477, BUCUREŞTI, 1965

excepţia unui număr finit dintre ele, unde am însemnat cu 0 elementul unitate al operaţiei de grup în fiecare Ω-grup G_i.

3. PROPOZIŢIA 1. *Oricare ar fi familia* $\mathcal{F} = \{G_i\}_{i \in S}$ *de algebre universale de acelaşi tip cu domeniul de operaţii n-are* Ω *şi de clasă* Λ, *există o algebră universală topologică separată de acelaşi tip cu fiecare algebră* G_i *şi de clasă* Λ.

Demonstraţie. Considerăm algebra universală $\sum_C \oplus G_i$ şi fie $a = (a^i) \in \sum_C \oplus G_i$. Dacă $s \subset S$ este o submulţime finită a lui S, atunci vom însemna cu

$$V_a^s = \{b \mid b \in \textstyle\sum_C \oplus G_i, \quad b^{i_j} = a^{i_j}\}_{i_j \in s}.$$

Cînd s parcurge mulţimea părţilor finite ale lui S, familia submulţimilor V_a^s ale algebrei universale $\sum_C \oplus G_i$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui a.

Să verificăm pentru familia de submulţimi $\{V_a^s\}_{s \subset S}$ axiomele bazei unui filtru de vecinătăţi :

α_1) dacă V_a^s şi $V_a^{s'} \in \{V_a^s\}_{s \subset S}$, atunci $V_a^s \cap V_a^{s'}$ este formată din mulţimea elementelor $x \in \sum_C \oplus G_i$ care coincid cu a pe poziţiile $s \cup s'$ de unde rezultă că $V_a^s \cap V_a^{s'}$ aparţine sistemului de vecinătăţi al lui a.

α_2) se poate verifica uşor că familia $\{V_a^s\}_{s \subset S}$ nu este vidă şi că nici o mulţime V_a^s nu este vidă.

Prin urmare în $\sum_C \oplus G_i$ avem un filtru de vecinătăţi care defineşte o topologie θ.

O mulţime deschisă în această topologie este o submulţime a mulţimii $\sum_C \oplus G_i$ care este vecinătate pentru orice punct al său.

Să verificăm acum că orice operaţie n-ară $\omega \in \Omega$ este continuă în această topologie.

Fie $a \in \sum_C \oplus G_i$ şi să presupunem că

$$x_1 x_2 \ldots x_n \omega = a, \text{ unde } x_1, x_2, \ldots, x_n \in \textstyle\sum_C \oplus G_i .$$

Dacă $s = \{i_1 \ldots i_n\}$ şi V_a^s este o vecinătate oarecare a lui a, atunci există mulţimile $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ astfel încît oricare ar fi

$$x_1' \in V_{x_1}, \ldots, x_n' \in V_{x_n} \text{ să avem } x_1', \ldots, x_n' \omega \in V_a^s .$$

În adevăr, dacă luăm $V_{x_1}^{\{i_1, \ldots, i_n\}}, \ldots, V_{x_n}^{\{i_1, \ldots, i_n\}}$, atunci oricare ar fi $x_1' \in V_{x_1}^{\{i_1 \ldots i_n\}}, \ldots, x_n' \in V_{x_n}^{\{i_1 \ldots i_n\}}$

$$x_1' \ldots x_n' \omega = (x_1'^{i_j} \, x_2'^{i_j} \ldots x_n'^{i_j} \, \omega) = (x_1^{i_j} \, x_2^{i_j} \ldots x_n^{i_j} \, \omega) \in V_a^{\{i_1 \ldots i_n\}} .$$

Cu aceasta este dovedit că $\sum_C \oplus G_i$ este o algebră universală topologică.

Am obţinut astfel algebra universală topologică $(\sum_C \oplus G_i, \theta, \Lambda)$.

Să mai arătăm că topologia θ este separată.

În adevăr, dacă $x, y \in \sum_C \oplus G_i$ şi $x \neq y$ rezultă că există $i \in S$ astfel încît $x^i \neq y^i$ şi să considerăm $s = \{i\}$, V_x^s, V_y^s. Presupunem că x diferă de y numai pe poziţia i.

Se observă că $V^s_x \cap V^s_y = \emptyset$ deoarece dacă $V^s_x \cap V^s_y \neq \emptyset$, rezultă că există x' astfel încît $x'^i = x^i$, $x'^i = y^i$ și obținem că $x^i = y^i$ ceea ce contrazice presupunerea făcută.

Se raționează la fel dacă presupunem că x diferă de y pe pozițiile $i_1, \ldots, i_n$ luînd $s = \{i_1, \ldots, i_n\}$.

4. Se pune problema cînd o sumă subdirectă de algebre universale de același tip și de clasă Λ este densă în suma directă completă?

Pentru cele ce urmează sînt necesare cîteva notații:

$$(G = \textstyle\sum_C \oplus G_i, \theta, \Lambda)$$

$$(H = \textstyle\sum_S \oplus G_i, \tau, \Lambda),$$

unde τ este topologia indusă în subalgebra H de topologia θ.

Notăm cu $I = C_G H$ complementara lui H față de G și cu σ topologia definită pe I astfel

$$\sigma = \{A \mid A \subset I, \ (\exists) B \in \theta, \ B \cap I = A\}.$$

PROPOZIȚIA 2. *Condiția necesară și suficientă ca suma subdirectă H de algebre universale de același tip și de clasă Λ, G_i să fie densă în suma directă completă, este ca oricare ar fi $A \subseteq I$, și $A \in \sigma$ să rezulte că $A \notin \theta$.*

Demonstrație. Oricare ar fi $A \in \sigma$ definim o subfamilie a familiei τ care să depindă de A prin care să caracterizăm proprietatea ca H să fie densă în G, punînd

$$\mathcal{D}_A = \{C \mid C \in \tau, \ C \cup A \in \theta\}.$$

Să observăm că $\mathcal{D}_A \subset \tau$ și că H este densă în G dacă și numai dacă oricare ar fi $A \in \sigma \Rightarrow \Phi \notin \mathcal{D}_A$.

Acest lucru echivalează cu a spune că H este densă în G dacă și numai dacă oricare ar fi $A \subseteq I$ și $A \in \sigma$, rezultă că $A \notin \theta$.

Acest criteriu mai poate fi formulat și astfel: *suma subdirectă H este densă în suma directă completă G dacă și numai dacă oricare ar fi $A \subseteq I$, $A \in \sigma$ există cel puțin un punct $x \in A$ astfel încît nici o mulțime V^s_x nu este conținută în A.*

5. Să presupunem acum că orice algebră universală $G_i \in \mathcal{F}$ este un Ω-grup și că familia $\mathcal{F}$ este de clasă primitivă Λ și să notăm cu 0 elementul nul al structurii de grup în fiecare Ω-grup.

Fie $H = \sum_S \oplus G_i$ suma subdirectă a Ω-grupurilor G_i.

Vom nota cu $B_i = \operatorname{Ker} \varphi_i$ unde φ_i sînt epimorfismele proiecție a Ω-subgrupului H pe Ω-grupul G_i.

Se știe, vezi [2], că B_i sînt ideale în H.

Dacă considerăm o mulțime finită de ideale B_{i_j} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ definite mai sus, atunci $\bigcap_{j=2}^{n} B_{i_j}$ este nevidă și este de asemenea un ideal al Ω-subgrupului H.

Deoarece un ideal este și Ω-subgrup, atunci idealul generat de B_{i_1} și $\bigcap_{j=2}^{n} B_{i_j}$ verifică următoarea relație :

$$\left\{ B_{i_1}, \bigcap_{j=2}^{n} B_{i_j} \right\} = B_{i_j} + \bigcap_{j=2}^{n} B_{i_j} = \left\{ a + b \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in B_{i_1} \\ b \in \bigcap_{j=2}^{n} B_{i_j} \end{array} \right\}$$

vezi [2].

PROPOZIȚIA 3. *Suma subdirectă H a Ω-subgrupurilor G_i de clasă Λ este densă în suma directă complexă dacă și numai dacă*

$$B_{i_1} + \bigcap_{j=2}^{n} B_{i_j} = H \text{ oricare ar fi } s = \{i_1, \dots, i_n\} \subset S.$$

Demonstrație. Dacă suma subdirectă H este densă în suma directă completă $G = \sum_C \oplus G_i$, atunci oricare ar fi $a \in G = \sum_C \oplus G_i$ și oricare ar fi $V_a^{s=\{i_1 \dots i_n\}}$ există cel puțin un element $b \in H$; $b = \{b_{i_j}\}$ astfel încît

$$a_{i_1}, b_{i_1}, \dots, a_{i_n} = b_{i_n},$$

dar se observă că această condiție este echivalentă cu următoarea condiție :

EE oricare ar fi $a \in G$ și oricare ar fi $V_a^{s=\{i_1 \dots i_n\}}$ există cel puțin un element $b \in H$, $b = \{b_{i_j}\}$ astfel încît

$$a_{i_1} = b_{i_1}, \quad b_{i_2} = 0, \dots, b_{i_n} = 0.$$

Reciproc, dacă această condiție este îndeplinită, rezultă că suma subdirectă H este densă în G.

Revenind la demonstrația propoziției enunțate, presupunem că H este densă în G și fie $a \in H$; atunci putem găsi $b \in H$ astfel încît

$$\begin{aligned} b_{i_1} &= a_{i_1} \\ b_{i_2} &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ b_{i_n} &= 0 \end{aligned}$$

de unde rezultă că $b \in \bigcap_{k=2}^{n} B_{i_k}$ și $a_{i_1} - b_{i_1} = 0$.

Avem mai departe $a_{i_1} - b_{i_1} = 0$, de unde folosind relația $a = (a - b) + b$ obținem că

$$H = B_{i_1} + \bigcap_{k=2}^{n} B_{i_k} \tag{α}$$

Să presupunem acum că are loc relația (α) și fie $a_{i_1} \in G_{i_1}$; deoarece H este sumă subdirectă a Ω-grupurilor G_i, atunci există un element $a \in H$ astfel încît $\varphi_{i_1}(a) = a_{i_1}$ iar din relația (α) rezultă că $a = c + b$, unde $c \in B_{i_1}$, $b \in \bigcap_{k=2}^{n} B_{i_k}$.

Prin urmare,

$$\varphi_{i_1}(a - b) = c_{i_1} = 0 \quad \text{şi} \quad b_{i_k} = 0, \qquad (k = 2, \ldots, n).$$

În acest mod, $b_{i_1} = a_{i_1}, b_{i_k} = 0, (k = 2, \ldots, n)$ ceea ce arată densitatea lui H în G.

Observaţia 2. Dacă în propoziţiile 2 şi 3 se particularizează domeniul Ω şi mulţimea de egalităţi Λ, se obţin criterii de densitate pentru sume subdirecte de semigrupuri, grupuri, inele, corpuri, spaţii vectoriale, module, inele Lie, inele Jordan etc.

Primită la redacţie la 27 aprilie 1965

Centrul de calcul al Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. NATHAN IACOBSON, *Structure of rings*. American Mathematical Society (1956).
2. А. Г. КУРОШ, *Лекции по общей алгебре*. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962.
3. R. MOORS, *Extensions d'une Espace topologique e douné pour les quelles CE et sa topologie sont comuns*, Bulletin de la Société Royale des sciences de Liége, **XXXII**, *9* (1963).
4. HELENA RASIOWA, ROMAN SIKORSKI, *The Mathematics of Metamathematics*. Warszawa, 1963.

EXTENSIA DEFINIŢIEI FUNCTORILOR DERIVAŢI PENTRU CATEGORII ABELIENE

DE

LUCIAN BĂDESCU

Folosind metoda scufundării unei categorii abeliene mici într-o categorie cu limite inductive exacte şi generatori, se definesc functorii derivaţi pentru un functor. Cazul cînd categoria este noetheriană dă loc la rezultate importante.

1. Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{D}$ două $\mathcal{U}$ categorii abeliene. Se presupune că mulţimea obiectelor lui $\mathcal{C}$ aparţine universului $\mathcal{U}$ (altfel spus este o $\mathcal{U}$-categorie mică) şi $\mathcal{D}$ cu limite inductive (sau cu sume directe). Fie $T\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ un functor covariant aditiv. Vom expune o metodă de definire a functorilor derivaţi la dreapta pentru functorul T şi vom găsi cîteva proprietăţi ale lor.

Considerăm functorul $h\colon \mathcal{C}\to\mathrm{Fonct}\,(\mathcal{C}^\circ, \mathrm{Ab})$ definit prin $h(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, X)$. Se ştie că h este deplin fidel şi exact la stînga. Dacă el este considerat ca functor $h\colon \mathcal{C}\to \mathrm{Sex}\,(\mathcal{C}^\circ, \mathrm{Ab})$, atunci el este chiar exact. (Prin Ab s-a notat categoria grupurilor abeliene, prin Fonct (C, D) categoria functorilor aditivi de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{D}$, iar prin Sex $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ subcategoria plină a lui Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ale cărei obiective sînt functorii exacţi la stînga.

Vom avea nevoie de rezultatul următor :

Propoziţia 1. *În ipotezele şi notaţiile de mai sus există un functor unic* $T^\star\colon \mathrm{Fonct}\,(\mathcal{C}^\circ, \mathrm{Ab})\to\mathcal{D}$ *aşa încît diagrama* :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "T"'] & & \mathrm{Fonct}\,(\mathcal{C}^\star, \mathrm{Ab}) \arrow[dl, "T^\star"] \\
& \mathcal{D} &
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Functorul $T^\star$ *admite un adjunct la dreapta* $S^\star$. *În plus asocierea* $T \rightsquigarrow (T^\star, S^\star)$ *defineşte o echivalenţă între categoria Fonct* $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

și categoria ale cărei obiecte sînt perechi de functorii adjuncți $(T^{\star}, S^{\star})$ *(morfismele acestei categorii se definesc într-un mod evident).*

Pentru demonstrație observăm că functorul T pune în evidență functorul $S^{\star} : D \to \mathrm{Sex}\,(\mathcal{C}^{\circ}, \mathrm{Ab})$ definit prin $(S^{\star}D)\,(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(TX,\ D)$ cu $D \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$ și $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. Observăm că pentru orice $F \in \mathrm{Ob\ Fonct}\,(\mathcal{C}^{\circ}, \mathrm{Ab})$ și $D \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$ există un obiect notat $T^{\star}F$ din $\mathcal{D}$, un morfism $\psi_F : F \to S^{\star}\,T^{\star}F$ așa încît oricare ar fi morfismul $\alpha : F \to SD$ diagrama următoare să se factorizeze în mod unic prin $\overline{\alpha} : T^{\star}F \to D$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\psi E"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & S^{\star}\,T^{\star}F \arrow[dl, "S^{\star}\overline{\alpha}"] \\
& S\,D &
\end{tikzcd}$$

În adevăr, știm că orice functor F este limită inductivă de functori reprezentabili : $F = \varinjlim_{i \in 1} h(X_i)$. Atunci :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}\,(\mathcal{C}^{\circ},\,\mathrm{Ab})}(F,\ SD) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}\,(\mathcal{C}^{\circ},\,\mathrm{Ab})}(\varinjlim h(X_i),\ SD) =$$

$$= \varprojlim_{i} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}\,(\mathcal{C}^{\circ},\,\mathrm{Ab})}(h(X_i),\ SD) = \varprojlim_{i}\,(SD)\,(X_i) =$$

$$= \varprojlim_{i} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(TX_i,\ D) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(\varinjlim_{i}\ TX_i,\ D).$$

Este suficient deci să punem prin definiție $T^{\star}F = \varinjlim\ T(X_i)$. Se știe atunci că asocierea $F \sim\!\to T^{\star}F$ definește un functor, care este tocmai functorul căutat.

Vom nota mai departe prin $T_{\star}$, restricția functorului $T^{\star}$ la subcategoria plină Sex $(\mathcal{C}^{\circ}, \mathrm{Ab})$. În general, functorul $T_{\star}$ nu mai admite un adjunct la dreapta. Avem însă următorul rezultat :

PROPOZIȚIA 2. *Functorul T este exact la dreapta dacă și numai dacă $T_{\star}$ admite un adjunct $S_{\star}$ (care este corestricția lui $S^{\star}$) Asocierea $T \sim\!\to (T_{\star}, S_{\star})$ definește o echivalență între categoria functorilor exacți la dreapta de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{D}$ și categoria ale cărei obiecte sînt perechi de functori adjuncți $(T_{\star}, S_{\star})$.*

Este suficient de arătat că $S_{\star}D$ este exact la stînga pentru orice $D \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$. Fie $X' \to X \to X'' \to 0$ un șir exact din $\mathcal{C}$. Cum T este exact la dreapta avem șirul exact $TX' \to TX \to TX'' \to 0$ de unde :
$S_{\star}D \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(TX'',\ D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(TX,\ D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(TX',\ D)$ sau : $0 \to$ $\to (S_{\star}\,D)\,(X'') \to (S_{\star}\,D)(X) \to (S_{\star}D)\ (X')$. Restul rezultă din propoziția precedentă.

PROPOZIȚIA 3. *Ipotezele și notațiile sînt cele ale propoziției 2. Se presupune în plus că $\mathcal{C}$ este o categorie noetheriană și $\mathcal{D}$ este cu* AB 5. *Atunci dacă T este exact la stînga, și $T_{\star}$ este exact la stînga.*

Fie $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ un şir exact din Sex $(\mathscr{C}^\circ, \mathrm{Ab})$. Cum Sex $(\mathscr{C}^\circ, \mathrm{Ab})$ este o categorie local noetheriană. $F = \sup\limits_{\alpha \in I} h(X_\alpha)$, unde $\{h(X_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sînt toate subiectele reprezentabile ale lui F. Atunci :

$$F' = [\sup_\alpha h(X_\alpha)] \cap F' = \sup_\alpha\, [h(X_\alpha) \cap F'].$$

Se ştie că $h(X_\alpha) \cap F'$ este reprezentabil ca subobiect al unui functor reprezentabil. Atunci $\dfrac{h(X_\alpha)}{h(X_\alpha) \cap F'} = \dfrac{h(X_\alpha) + F'}{F'}$ este reprezentabil şi

$$\sup_\alpha \frac{h(X_\alpha) + F'}{F'} = \frac{F}{F'} = F''$$

Avem deci şirul exact de functori reprezentabili :

$$0 \to h(X_\alpha) \cap F' \to h(X_\alpha) \to \frac{h(X_\alpha)}{h(X_\alpha) \cap F'} \to 0$$

Cum T_* comută cu limitele inductive şi Sex $(\mathscr{C}^\circ, \mathrm{Ab})$ verifică axioma AB 5 [3], T_* este exact la stînga.

2. Trecem la construirea functorilor derivaţi la dreapta ai functorului $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. (Ipotezele asupra categoriilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{D}$ rămîn aceleaşi). Cum Sex $(\mathscr{C}^\circ, \mathrm{Ab})$ este o categorie cu AB5 şi generatori Sex $(\mathscr{C}^\circ, \mathrm{Ab})$ este o categorie avînd suficiente obiecte injective. Functorii derivaţi pentru functorii definiţi pe această categorie se construiesc ca în capitolul V, [1].

Asociem functorului T şirul de functori $R^n T$ definit astfel :

$$(R^n T)(X) = (R^n T_*)\ (h\ (X)).$$

Lemă. *Şirul $R^n T$ este un δ-functor.*

Fie într-adevăr $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ un şir exact în $\mathscr{C}$. Atunci avem şirul exact :

$$0 \to h(X') \to h(X) \to h(X'') \to 0$$

pentru care avem şirul exact :

$$\to (R^n T_*)\,(h(X')) \to (R^n T_*)(h(X)) \to (R^n T_*)\,(h(X'')) \xrightarrow{\delta} (R^{n+1} T_*)\,(h(X')) \to$$

sau :

$$\to (R^n T)\,(X') \to (R^n T)\,(X) \to (R^n T)\ (X'') \xrightarrow{\delta} (R^{n+1} T)\ (X') \to$$

De aici deducem că $R^\circ T$ este exact la stînga.

Considerăm acum morfismul functorial

$$\tau_*^\circ : T_* \to R^\circ T_*.$$

Pentru obiecte de tipul $h(X)$; $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ se obţine morfismul τ°; $T \to R^\circ T$ definit prin $\tau^\circ(X) = \tau_*^\circ\,(h(X))$.

PROPOZIŢIA 4. *Morfismul functorial* τ° *induce izomorfismul functorial* $R^n\tau^\circ$; $R^n T \approx R^n(R^\circ T)$

În adevăr, $\tau^\circ_\star$ induce izomorfismul

$$R^n\tau^\circ_\star : R^n T_\star \approx R^n(R^\circ T_\star).$$

PROPOZIŢIA 5. *Presupunem că* $\mathcal{C}$ *este noetheriană. Dacă* T *este exact* $R^n T = 0$ $(n \geqslant 1)$ *şi dacă* X *este un obiect injectiv din* $\mathcal{C}$ *atunci* $(R^n T)(X) = 0$ $(n \geqslant 1)$.

Dacă T e exact, după propoziţiile 2 şi 3 rezultă că $T_\star$ este exact. Prima afirmaţie este astfel dovedită. Fie X un injectiv din $\mathcal{C}$, atunci $h(X)$ este un functor exact, deci injectiv (pentru că C este noetheriană) în Sex $(\mathcal{C}^\circ, \mathrm{Ab})$. În acest fel rezultă imediat şi afirmaţia a doua.

Se ştie că $R^\circ T_\star$ are o proprietate de universalitate. Pentru orice morfism functorial $\rho : T_\star \to H_\star$, unde $H_\star$ este exact la stînga, există un morfism functorial unic $\bar{\rho} : R^\circ T_\star \to H_\star$ aşa încît diagrama :

$$\begin{tikzcd}
T_\star \arrow[rr, "\tau^\circ_\star"] \arrow[dr, "\rho"'] & & R^\circ T_\star \arrow[dl, "\bar{\rho}"] \\
& H_\star &
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

PROPOZIŢIA 6. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie noetheriană. Atunci asocierea* $T \rightsquigarrow R^\circ T$ *defineşte un functor de la categoria Fonct* $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la Sex $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *care este un adjunct la stînga al functorului de incluziune.*

Pentru demonstraţie este suficient de arătat proprietatea de universalitate pentru $R^\circ T$.

Fie $H \in \mathrm{Ob}$ Sex $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Atunci după propoziţia 3, $H_\star$ este exact la stînga dacă $\mathcal{C}$ este noetheriană. Cum proprietatea de universalitate este adevărată pentru $R^\circ T_\star$, propoziţia rezultă luînd în particular obiecte de forma $h(X)$.

Această propoziţie este o consecinţă directă a propoziţiei 3. În [2] se dă o construcţie a functorului $R^\circ T$. Se vede că pentru categoriile noetheriene cei doi functori definiţi în moduri diferite coincid.

COROLAR. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este noetheriană, functorul* T *este exact la stînga dacă şi numai dacă* τ° *este un izomorfism.*

Această afirmaţie rezultă din propoziţiile din cap. II, [2].

Grothendieck dă o metodă de construcţie a functorilor sateliţi pentru T. Fie $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. Se consideră mulţimea S (X) a şirurilor exacte de forma $0 \to X \xrightarrow{f} Y \to Z \to 0$

Pe $S(X)$ se introduce o relaţie de ordine filtrată la dreapta într-un mod evident. Atunci :

$$(S^1 T)(X) = \varinjlim_{s \in S(X)} \mathrm{Coker}\ T(g).$$

PROPOZIŢIA 7. *Morfismul functorial* $\tau^\circ : T \rightarrow R^\circ T$ *se prelungeşte la morfismul* $\tau^n : S^n T \rightarrow R^n T^{(n \geqslant 1)}$. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este noetheriană şi* T *exact la stînga, morfismele* τ^n *sînt izomorfisme.*

Propoziţia rezultă imediat din definiţia functorilor sateliţi şi corolarul propoziţiei 6.

Observaţie. Se mai poate defini δ-functorul asociat lui T notat $(S^n T)'$ prin

$$(S^n T)'(X) = (X^n T_\star)(h(X)).$$

Se vede imediat că în general $(S^n T)$ nu este în general un δ-functor universal. Aceasta se întîmplă în cazul în care $\mathcal{C}$ este noetheriană şi $\mathcal{D}$ este cu AB 5.

Aplicaţie. Fie $\mathcal{D} = \mathrm{Ab}$ şi $T(x) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ unde A este un obiect fix din $\mathcal{C}$. Obţinem :

$$R^n T)(X) = Ext^n (A, X)$$

Primită la redacţie la 17 aprilie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. H. CARTAN, S. EILENBERG, *Homological Algebra.* Priceton, New Jersey, Priceton University Press, 1956.
2. P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes.* Bull. Math. de la Société France, 1962.
3. A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algébre homologique,* Tôhoku Mathematical Journal, Second Series, **9**, *2*, *3* (1957).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

RECENZIE

A. VESCAN — Sumabilitatea seriilor. În colecţia „Biblioteca Societăţii de Ştiinţe matematice din R.P.R.", Editura tehnică, Bucureşti, 1965, 110 p.

În această lucrare de întindere nu prea mare, autoarea caută să pună la îndemîna cititorilor diverse metode de sumare privind seriile divergente.

Lucrarea este împărţită în 4 capitole.

Primul capitol este consacrat însumării seriilor prin medii; aici sînt tratate însumarea prin medie aritmetică, metodele de însumare ale lui Hölder, Cesaro, Euler, Riesz şi metoda exponenţială. Sînt comparate apoi între ele aceste metode. Al doilea capitol se ocupă de principiul factorilor de convergenţă; sînt expuse aici metode particulare de însumare cu ajutorul factorilor de convergenţă, dependenţa sumei convenţionale de şirul sumatoriu, şiruri sumatorii canonice, şiruri sumatorii particulare. În al treilea capitol se studiază însumarea seriilor cu ajutorul transformărilor liniare; sînt date teoremele lui M. J. Schur şi diversele ei consecinţe. În sfîrşit, al patrulea capitol studiază diferitele metode de însumare cu ajutorul transformărilor liniare.

Scrisă foarte clar, lucrarea completează literatura matematică românească de analiză; prin conţinutul său, ea se adresează unui cerc foarte larg de cititori.

R. Theodorescu

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1966 FEB 22

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 304 p., 18,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
N. RANCU şi L. TÖVÍSSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.
N. DINCULESCU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 9, P. 1343–1486, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informaţia" — c. 3299

43831

Lei 12.

F 762

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

10

TOMUL 17

1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. GR. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU — membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie

Pentru a se asigura colecţia completă şi primirea la timp a revistei, reînnoiţi abonamentul dv. pe anul 1966.
În ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.
Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie, pe adresa : str. Mihail Eminescu, nr. 47, Bucureşti
Revista apare de 10 ori pe an.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

TOM. 17, Nr. 10
1965

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

UMAR

Pag.

T. RUS, Algoritmi de simplificare a expresiilor algebrice raţionale cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul . . . 1489

RODICA CHIRILĂ, Rezultanta şi momentul rezultant al presiunii pe un corp în cazul distribuţiei parabolice de viteze la infinit în amonte 1505

VALENTIN POPESCU, Măsuri cu valori în spaţii vectoriale topologice oarecare 1515

C. TELEMAN, Asupra unei clase de spaţii Riemann omogene 1529

MARIANA COROI-NEDELCU, Unele funcţii elementare în clasa funcţiilor olomorfe (α) în spaţiu 1539

R. GABRIEL, Extinderea complemenţilor algebrici generalizaţi la matrici oarecare 1567

EFTIMIE GRECU, Asupra spaţiilor lui Riemann cu conexiune constantă 1583

NOTĂ ISTORICĂ 1587

INDEX ALFABETIC 1589

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 10, P. 1487–1594, BUCUREŞTI, 1965

ALGORITMI DE SIMPLIFICARE A EXPRESIILOR ALGEBRICE RAŢIONALE CU AJUTORUL MAŞINILOR CIFRICE DE CALCUL 1)

DE

T. RUS
(Cluj)

În lucrare se expune un algoritm scris în limbajul arborilor, care aplicat unei expresii raţionale E o aduce la forma $E = E_1/E_2$, E_1 şi E_2 fiind expresii polinomiale întregi, prime între ele. În afară de acesta se prezintă de asemenea schemele graf ale algoritmilor de calcul cu numere raţionale cu ajutorul unei maşini cifrice de calcul, precum şi algoritmii calculului cu polinoame.

Fie $\mathcal{M}$ o mulţime infinită de obiecte matematice de unul din tipurile următoare :

Tipul $\mathcal{T}_0$ constante. Presupunem că mulţimea constantelor sînt cuvinte de o formă definită [5] în alfabetul $\{\ast, 0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

O constantă p în alfabetul $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ va fi numit în cele ce urmează constantă pozitivă. Dacă p este o constantă pozitivă, atunci $q = \ast\, p$ se va numi constantă negativă.

Tipul $\mathcal{T}_1$ — variabile — care va fi redus la o singură variabilă x.

Tipul $\mathcal{T}_2$ va fi format din elementele (şi) numite paranteze.

Tipul $\mathcal{T}_3$ — operatori — va fi format din operatorii $+$, $\times$ şi π (putere).

Pentru cazul cînd vom admite în tipul variabilă mai multe variabile diferite de x, vom înţelege că valorile lor sînt mulţimea constantelor de tipul $\mathcal{T}_0$. Din această cauză deseori vom folosi metasimboale pentru notarea elementelor de tip $\mathcal{T}_0$, care pot fi înţelese ca şi variabile. Pentru

---

1) Lucrare prezentată la Colocviul de aplicaţii ale matematicii în economie, Iaşi, 3–6 dec. 1964.

ST. CERC. MAT., TOM. 17. Nr. 10, P. 1489–1504 BUCUREŞTI, 1965

definirea valorii [6] cuvintelor compatibile [3] formate cu elementele mulțimii mai sus construite pornim de la următoarele axiome :

1. Dacă p și q sînt elemente de tip $\mathcal{T}_0$, atunci și $(+, p, q) = \gamma$ este un element de tip $\mathcal{T}_0$, unde γ se obține după regula obișnuită a adunării din aritmetică, $\gamma = p + q$.

2. Dacă p și q sînt elemente de tip $\mathcal{T}_0$, atunci și $(\times, p, q) = \gamma$ este un element de tip $\mathcal{T}_0$, unde γ se obține după regula obișnuită a produsului din aritmetică, $\gamma = p \times q$.

3. Dacă p este o constantă pozitivă și q o constantă, atunci și $(\pi, p, q) = \gamma$ este o constantă și anume constanta obținută după regula obișnuită de ridicare la putere pozitivă din aritmetică

$$\gamma = q^p.$$

Presupunem în cele ce urmează că avem un algoritm de obținere a unei constante c de tipul $\mathcal{T}_0$, din elemente de tip $\mathcal{T}_0$, p și q, care conține un șir finit de operații $+$ și $\times$. În prealabil vom presupune că avem algoritmul de obținere al constantei C_p^q, numită combinări de p elemente luate cîte q. Acest algoritm, după cum se știe, poate fi construit în mod recursiv destul de ușor după triunghiul lui Pascal.

Pentru simbolurile operatorilor $+$ și $\times$ presupunem că funcția δ, care dă numărul operanzilor necesari acestor operatori, definită în [2], [6], este egală cu orice număr natural finit mai mare sau egal cu 2. Aceasta rezidă din proprietățile de asociativitate a operatorilor $+$ și $\times$ care vor fi indicate mai jos.

Fie acum P un cuvînt compatibil [3] în sistemul formal al cărui alfabet este format de mulțimea definită mai sus, considerată ca și o mulțime finită de tipuri, și fie a arborele care reprezintă acest cuvînt [2], [4].

Vom nota în cele ce urmează arborii liniar și folosim următoarele axiome relative la structura lor.

I_1. Oricare ar fi arborii a_1 și a_2 are loc relația

$$(\oplus, a_1, a_2) = (\oplus, a_2, a_1).$$

I_2. Dacă a_1, a_2, a_3 sînt arbori, atunci are loc relația

$$(\oplus, a_1, (\oplus\ a_2, a_3)) = (\oplus, (\oplus, a_1, a_2), a_3) = (\oplus, a_1, a_2, a_3)$$

I_3. Dacă a este un arbore, atunci există în mulțimea arborilor formați dintr-un singur nod, arborele marcat de simbolul 0 cu proprietatea că

$$(\oplus, a, \textcircled{0}) = (\oplus, \textcircled{0}, a) = a .$$

I_4. Dacă a este un arbore, atunci există arborele a_1 cu proprietatea că

$$(\oplus, a, a_1) = (\oplus, a_1, a) = \textcircled{0} .$$

II_1. Oricare ar fi arborii a_1, a_2 are loc relația

$$(\otimes, a_1, a_2) = (\otimes, a_2, a_1).$$

II_2. Dacă a_1, a_2, a_3 sînt arbori, atunci

$$(\otimes, a_1 (\otimes, a_2, a_3)) = (\otimes, (\otimes, a_1, a_2), a_3) = (\otimes, a_1, a_2, a_3).$$

II_3. Oricare ar fi arborele a, există arborele format dintr-un singur nod, marcat de elemenul 1 cu proprietatea ca

$$(\otimes, a, \textcircled{1} = (\otimes, \textcircled{1}, a) = a.$$

III. Oricare ar fi arborii a_1, a_2, a_3 avem

$$(\otimes, a_1, (\oplus, a_2, a_3)) = (\oplus, (\oplus, a_1, a_2), (\otimes, a_1, a_3)).$$

IV_1. Dacă p_1 și p_2 sînt constante pozitive iar a un arbore, atunci

$$(\otimes, (\textcircled{π}, \textcircled{p}, a), (\textcircled{π}, \textcircled{p_2}, a)) = (\textcircled{π}, (\oplus, \textcircled{p_1}, \textcircled{p_2}), a)$$

IV_2. Dacă p este constantă pozitivă iar a_1 și a_2 sînt arbori, atunci

$$(\textcircled{π}, \textcircled{p}, (\otimes, a_1, a_2)) = (\otimes, (\textcircled{π}, \textcircled{p}, a_1), (\textcircled{π}, \textcircled{p}, a_2)).$$

IV_3. Elementele 0 și 1 introduse mai sus au proprietățile următoare, față de simbolul π, și un arbore arbitrar a,

$$(\textcircled{π}, \textcircled{0}, a) = \textcircled{1}\,; \ (\textcircled{π}, \textcircled{1}, a) = a.$$

Din axiomele enumerate mai sus urmează că are loc și următoarea proprietate care ne va servi în continuare.

Dacă p este o constantă pozitivă, iar a_1 și a_2 sînt arbori oarecare, atunci are loc relația

$$(\textcircled{π}, \textcircled{p}, (\oplus, a_1, a_2)) = (\oplus, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_p),$$

unde

$$\bar{a}_i = (\otimes, \textcircled{C_p^i}, (\textcircled{π}, (\oplus, \textcircled{p}, \textcircled{$*i$}), a_1), (\textcircled{π}, \textcircled{i}, a_2))$$

iar $\textcircled{$i$}$ este nodul marcat de numărul i.

În cele ce urmează vom numi nucleu orice arbore de structura $(\otimes, (\textcircled{$\pi$}, \textcircled{p}, \otimes), \textcircled{q})$ (fig. 1).

Constanta p va fi numită gradul nucleului.

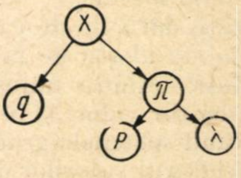


Fig. 1

DEFINIȚIA 1. *Arborele a se numește pus sub formă normală dacă*

$$a = (\oplus, a_0, a_1, \ldots, a_k),$$

unde a_i *este un nucleu de tipul* $(\otimes, (\textcircled{$\pi$}, \textcircled{$i$}, \otimes), \textcircled{p_i})$.

Se poate vedea ușor că orice arbore adus la forma normală este arborele ce reprezintă un polinom ordonat după puterile variabilei x. Binențeles că toți arborii despre care a fost vorba mai sus presupunem că au nodurile marcate de elementele mulțimii $\mathfrak{M}$ în felul următor :

1) Dacă din nodul O pleacă cel puțin o săgeată, atunci el este marcat de un element de tipul $\mathcal{T}_3$.

2) Dacă din nodul O nu pleacă nici o săgeată, el este marcat de un element de tipul $\mathcal{T}_0$ sau $\mathcal{T}_1$.

În lucrarea [7] am construit două tipuri de transformări şi anume T_η (transformare normală) şi T_ν (transformare pe nivelă) care au rolul de a transforma un arbore conform unor reguli date. În lucrarea [5] se prezintă asemenea transformări în cazul concret al arborilor marcaţi de elementele mulţimii $\mathcal{M}$, mai sus definite, şi anume se defineşte transformarea de tipul T_η care aplicată oricărui arbore a îl transformă pe acesta în arborele pus sub formă normală corespunzător lui a.

Cu ajutorul algoritmilor adresă [1] definiţi în lucrarea [7] această transformare se traduce în limba unei maşini cifrice de calcul şi execută operaţia de ordonare a unui polinom după puterile lui x. Să notăm cu Ω_0 algoritmul corespunzător acestei transformări.

În cele ce urmează vom admite că în afara simbolurilor de tipul $\mathcal{T}_3$ introduse mai sus mai avem şi simbolul : (împărţire), şi vom construi transformare de tip T_η care va transforma orice arbore ce reprezintă o expresie algebrică raţională în arborele ce reprezintă aceeaşi expresie simplificată. Pentru aceasta vom adăuga încă o axiomă privitoare la simbolurile de tip $\mathcal{T}_3$ şi anume axioma:

4. Dacă p şi q sînt constante, atunci şi $(:, p, q) = \gamma$ este o constantă pe care o numim constantă raţională.

Sensul constantei raţionale este acela al reprezentării numărului raţional $\gamma = p/q$. După cum se ştie din aritmetică, constanta γ admite o reprezentare zecimală aproximativă sub formă de cuvînt în alfabetul $\{*, 0,1,\dots,q\}\cup\{,\}$, unde separatorul ,, , ” se foloseşte pentru separarea părţii întregi de partea fracţională a numărului raţional r. Acesta este cazul obişnuit al reprezentării numerelor în maşină. În acest caz însă toate operaţiile care se execută au valori aproximative, determinate de faptul că reprezentările zecimale ale constantelor raţionale sînt aproximative. Uneori aceste aproximaţii sînt suficiente pentru necesităţile practice. Deoarece pe noi ne interesează în primul rînd unele probleme teoretice, vom presupune că orice constantă raţională r se reprezintă ca şi cuvînt în alfabetul $\{*, 0, 1, \dots, 9\}\cup\{ : \}$ sub forma $(:, p, q)$, a cărui codificare este dată fie de către o singură adresă, fie de către două adrese, ceea ce se stabileşte de la caz la caz. Deoarece valorile operatorilor $+$, $\times$, π au fost definite numai asupra constantelor întregi este necesară definirea acestor valori şi asupra constantelor raţionale. Vom preciza aceste valori, dînd schemele graf ale algoritmilor adresă care realizează aceste valori cu ajutorul valorilor definite de operaţiile asupra constantelor întregi. Înainte de aceasta este însă necesar să facem cîteva precizări cu privire la constantele raţionale.

Se ştie că dacă numerele întregi p şi q sînt prime între ele, atunci numărul raţional $r = p/q$ nu poate fi simplificat. Pornind de aici vom spune că constanta raţională $(:, p, q) = \gamma$ este redusă dacă numerele întregi reprezentate de p şi q sînt prime între ele.

Să construim acum algoritmul adresă care transformă orice constantă raţională $(:, p, q) = \gamma$ în constanta raţională redusă corespunzătoare ei.

Acest algoritm nu va fi altceva decît algoritmul de simplificare a unui număr raţional.

Primul pas al algoritmului de reducere a constantei raţionale $(:, p, q) = \gamma$ va consta atunci din găsirea celui mai mare divizor comun al numerelor reprezentate de p, q, după algoritmul lui Euclid.

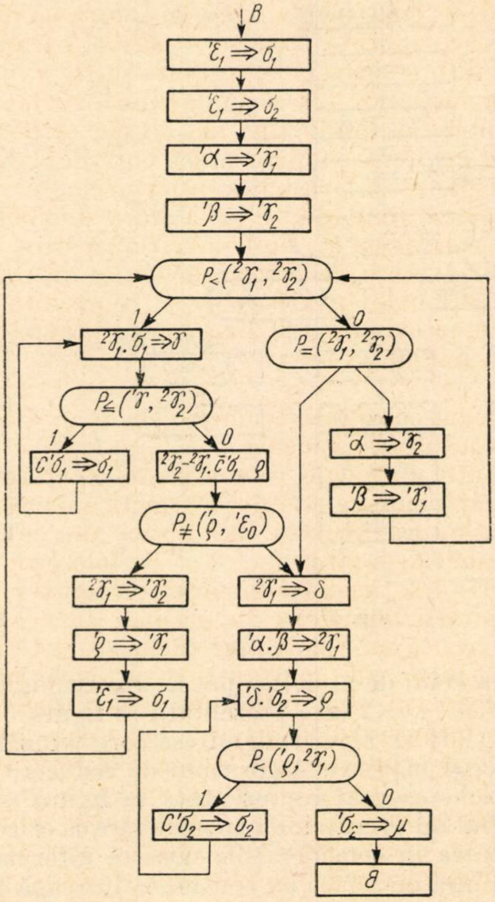

B
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_2$
$'\alpha \Rightarrow {'\gamma_1}$
$'\beta \Rightarrow {'\gamma_2}$
$P_<({}^2\gamma_1, {}^2\gamma_2)$
1
0
${}^2\gamma_1 . {'\sigma_1} \Rightarrow \gamma$
$P_=({}^2\gamma_1, {}^2\gamma_2)$
$P_\leq({'\gamma}, {}^2\gamma_2)$
1
0
$c'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
${}^2\gamma_2 - {}^2\gamma_1 . \bar{c}'\sigma_1 \; \rho$
$'\alpha \Rightarrow {'\gamma_2}$
$'\beta \Rightarrow {'\gamma_1}$
$P_\neq({'\rho}, {'\varepsilon_0})$
${}^2\gamma_1 \Rightarrow {'\gamma_2}$
${}^2\gamma_1 \Rightarrow \delta$
$'\rho \Rightarrow {'\gamma_1}$
$'\alpha . \beta \Rightarrow {}^2\gamma_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\delta . {'\sigma_2} \Rightarrow \rho$
$P_<({'\rho}, {}^2\gamma_1)$
1
0
$c'\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2$
$'\sigma_2 \Rightarrow \mu$
8

Fig. 2

Al doilea pas al algoritmului va consta în executarea împărţirii propriu-zise a lui p şi q cu c.m.m.d.c. Dacă c.m.m.d.c. este 1, atunci constanta r va fi numită redusă. Pentru construirea schemei graf a acestui algoritm definim transformarea (sau codificarea) în felul următor :

$$\alpha' = p, \quad '\beta = q, \quad '\varepsilon_1 = 1, \quad '\varepsilon_0 = 0.$$

Cu această codificare schema graf a primului pas al algoritmului descris mai sus va fi cea din figura 2.

În această schemă am notat prin δ şi μ două adrese care se folosesc pentru codificarea respectivă a c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. Deoarece în continuare vom avea nevoie şi de c.m.m.m.c., am convenit să-l calculăm o dată cu c.m.m.d.c. pentru a nu repeta anumiţi algoritmi.

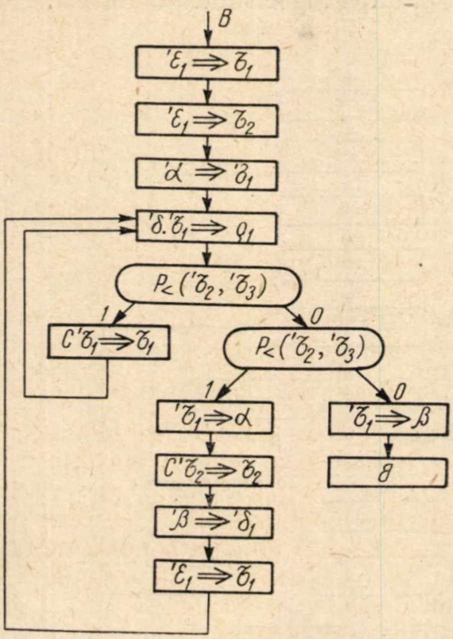

B
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_2$
$'\alpha \Rightarrow '\tau_1$
$'\delta . '\tau_1 \Rightarrow \varrho_1$
$P_<('\tau_2, '\tau_3)$
1
0
$C'\tau_1 \Rightarrow \tau_1$
$P_<('\tau_2, '\tau_3)$
1
0
$'\tau_1 \Rightarrow \alpha$
$'\tau_1 \Rightarrow \beta$
$C'\tau_2 \Rightarrow \tau_2$
B
$'\beta \Rightarrow '\delta_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \tau_1$

Fig. 3

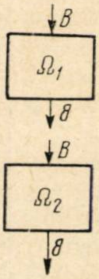

B
Ω_1
B
B
Ω_2
B

Fig. 4

Schema graf a celui de-al doilea pas al algoritmului cu aceeaşi codificare şi cu adăugirea $'\tau_3 = 2$ este prezentată în figura 3.

Să notăm cu Ω_1 şi Ω_2 algoritmii adresă corespunzători celor doi paşi ai algoritmilor descrişi mai sus. Algoritmul de reducere a unei constante raţionale va avea schema graf reprezentată în figura 4.

Prin urmare putem presupune în continuare că oricare ar fi constanta raţională care va intra în consideraţiile noastre ulterioare, aceasta va fi redusă. Dacă avem însă de-a face cu constanta întreagă p, atunci ea poate fi considerată ca şi constantă raţională redusă punînd-o sub forma $(: , p, 1)$.

Pentru definirea operaţiilor asupra constantelor raţionale vom construi algoritmii de obţinere a valorilor operaţiilor asupra constantelor raţionale cu ajutorul operaţiilor asupra constantelor întregi.

Primul dintre aceşti algoritmi va fi acela de găsire a c.m.m.d.c. a n constante întregi date. Acest algoritm în principiu este acelaşi cu cel descris mai sus la primul pas, algoritmul lui Euclid aplicîndu-se repetat în felul următor. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ constante întregi pentru care dorim să găsim c.m.m.d.c şi c.m.m.m.c. Pentru aceasta să notăm cu $d_1 = (p_1, p_2)$

c. m. m. d. c. al constantelor p_1 și p_2. Atunci $d_2 = (d_1, p_2), \ldots, d_i = (d_{i-1}, p_{i+1})$, d_{n-1} fiind în acest caz c.m.m.d.c.

Pentru c.m.m.m.c. vom considera constanta d corespunzătoare c.m.m.d.c. și produsul $p = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$. Atunci $m = p/d$, formulă bine cunoscută din aritmetică. Fie pentru algoritmul descris mai sus codificarea $\alpha_i' = p_i, i = 1, 2, \ldots, n$; $'\varepsilon_1 = 1$, $'\varepsilon_0 = 0$, $'\nu = n$. Schema graf a algoritmului adresă descris va fi atunci cea din figura 5. Să notăm cu Ω_3 acest algoritm. Algoritmul de adunare a constantelor raționale $(:, p_i, q_i) = \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cu codificarea

$$'\alpha_i = p_i,\ '\beta_i = q_i,\ i = 1,\ 2, \ldots, n,\ '\varepsilon_1 = 1,\ '\varepsilon_0 = 0,\ '\nu = n$$

va avea schema graf prezentată în figura 6, unde am notat cu Ω_4 algoritmul de reducere a constantelor raționale.

Algoritmul de obținere a produsului constantelor raționale de mai sus va avea schema graf prezentată în figura 7.

Deoarece pentru simbolul : presupunem $\delta (:) = 2$, algoritmul adresă de obținere a constantei raționale $(:, \gamma_1, \gamma_2) = \gamma$ va avea schema graf prezentată în figura 8, unde $(:, p_1, q_1) = \gamma_1$, $(:, p_2, q_2) = \gamma_2$, iar $\alpha'_1 = p_1$, $'\alpha_2 = p_2$, $'\beta_1 = q_1$ $'\beta_2 = q_2$.

Algoritmul adresă de obținere a constantei raționale (π, n, γ), unde n este o constantă întreagă pozitivă va avea schema graf din figura 9, unde $(:, p_1, q_1) = \gamma_1$, $(:, p, q) = \gamma$, $'\alpha = p$, $'\beta = q$, $'\alpha_1 = p_1$, $'\beta_1 = q_1$.

Să considerăm acum cuvîntul compatibil P în care este admis și operatorul :, reprezentat de arborele a. Adăugăm în continuare la axiomele relative la arbori prezentate mai sus și următoarele axiome :

V_1. Oricare ar fi arborele a are loc egalitatea $(\textcircled{:}, a, \textcircled{1}) = a$.

V_2. Dacă a este un arbore oarecare, atunci arborele $a^{-1} = (\textcircled{:}, a, \textcircled{1})$ va fi numit arbore invers al arborelui a. El are proprietatea că

$$(\otimes,\ a,\ a^{-1}) = \textcircled{1}.$$

De aici urmează că oricare arbore a de structura $(:, a_1, a_2)$ poate fi pus sub forma $(\otimes, a_1^{-1}, a_2)$.

V_3. Oricare ar fi arborii a_1, a_2, a_3, a_4 are loc egalitatea

$$(\oplus, (\textcircled{:}, a_1, a_2), (\textcircled{:}, a_3, a_4)) =$$
$$= (\textcircled{:}, (\oplus, (\otimes, a_1, a_4), (\otimes, a_2, a_3)), (\otimes, a_2, a_4)).$$

V_4. Oricare ar fi arborii a_1, a_2, a_3, a_4 are loc egalitatea

$$(\otimes, (\textcircled{:}, a_1, a_2), (\textcircled{:}, a_3, a_4)) = (\textcircled{:}, (\otimes, a_1, a_3), (\otimes, a_2, a_4))$$

V_4. Oricare ar fi arborii a_1, a_2 și constanta pozitivă întreagă p are loc egalitatea

$$(\textcircled{\pi}, \textcircled{p}, (\textcircled{:}, a_1, a_2)) = (\textcircled{:}, (\textcircled{\pi}, \textcircled{p}, a_1), (\textcircled{\pi}, \textcircled{p}, a_2)).$$

Fie acum arborii a_1, a_2 cu nodurile marcate de elementele mulțimii $\mathfrak{M}$. Presupunem că acești arbori sînt reduși la forma normală și considerăm polinoamele P_1 și P_2 reprezentate de ei.

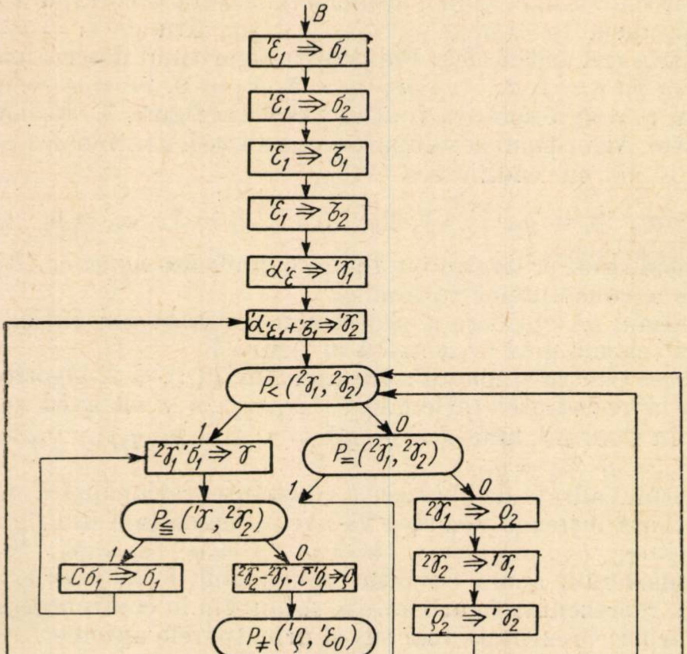

B
'ε₁ ⇒ σ₁
'ε₁ ⇒ σ₂
'ε₁ ⇒ τ₁
'ε₁ ⇒ τ₂
'α'ε ⇒ 'γ₁
'α'ε₁ + 'τ₁ ⇒ 'γ₂
P<(²γ₁, ²γ₂)
1
0
²γ₁'σ₁ ⇒ γ
P=(²γ₁, ²γ₂)
1
0
P≦('γ, ²γ₂)
²γ₁ ⇒ ρ₂
1
0
Cσ₁ ⇒ σ₁
²γ₂ - ²γ₁ . C'σ₁ ⇒ ρ
²γ₂ ⇒ 'γ₁
'ρ₂ ⇒ 'γ₂
P≠('ρ, 'ε₀)
P<('τ₁, 'ν)
1
0
²γ₁ ⇒ 'γ₂
²C'γ₁ ⇒ τ₁
²γ₁ ⇒ σ
'ρ ⇒ 'γ₁
'ε₁ ⇒ σ₁
'α₁ ⇒ σ₁
'ε₁ ⇒ σ₁
'δ₁ . 'α'ε₁ + 'σ₂ ⇒ δ₁
P<('σ₂, 'ν)
1
0
C'σ₂ ⇒ σ₂
'δ . 'τ₂ ⇒ σ₂
P<('δ₂, 'δ₁)
1
0
C'τ₂ ⇒ τ₂
'τ₂ ⇒ μ
B

Fig. 5

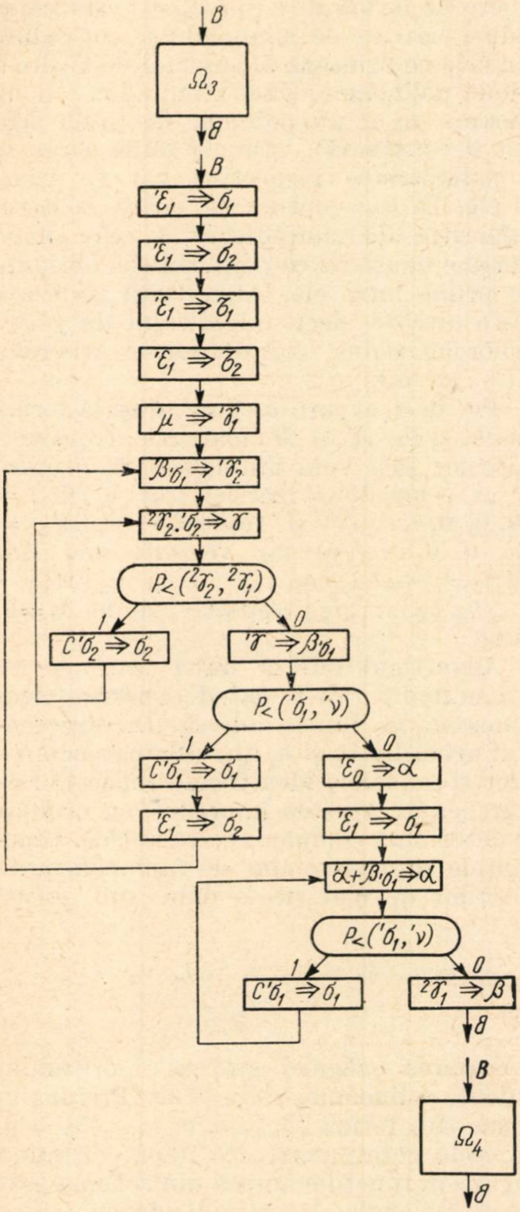

B
Ω₃
B
B
'ε₁ ⇒ σ₁
'ε₁ ⇒ σ₂
'ε₁ ⇒ τ₁
'ε₁ ⇒ τ₂
'μ ⇒ 'γ₁
β·σ₁ ⇒ 'γ₂
²γ₂·'σ₂ ⇒ γ
P<(²γ₂, ²γ₁)
1
0
C'σ₂ ⇒ σ₂
'γ ⇒ β·σ₁
P<('σ₁, 'ν)
1
0
C'σ₁ ⇒ σ₁
'ε₁ ⇒ σ₂
ε₀ ⇒ α
'ε₁ ⇒ σ₁
'α+'β·σ₁ ⇒ α
P<('σ₁, 'ν)
1
0
C'σ₁ ⇒ σ₁
²γ₁ ⇒ β
B
B
Ω₄
B

Fig. 6

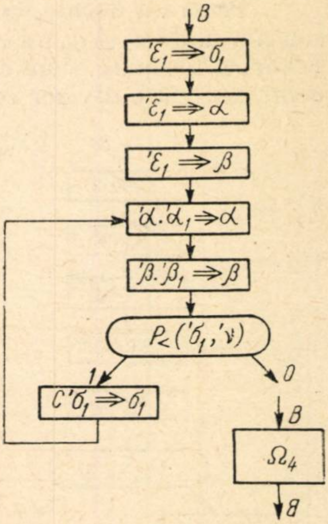

B
'ε₁ ⇒ σ₁
'ε₁ ⇒ α
'ε₁ ⇒ β
'α·'α₁ ⇒ α
'β·'β₁ ⇒ β
P<('σ₁, 'ν)
1
0
C'σ₁ ⇒ σ₁
B
Ω₄
B

Fig. 7

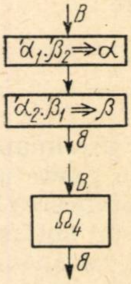
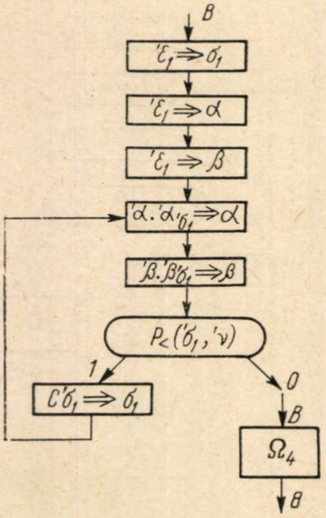

B
'α₁·'β₂ ⇒ α
'α₂·'β₁ ⇒ β
B
B
Ω₄
B

Fig. 8

DEFINIȚIA 2. *Arborele* $a = (\odot, a_1, a_2)$ *se va numi redus dacă polinoamele* P_1 *și* P_2 *sînt prime între ele.*

Pentru a decide dacă un arbore de forma $a = (\odot, a_1, a_2)$ este redus sau nu, unde a_1 și a_2 nu conțin noduri marcate de simbolul : și sînt reduse la forma normală, vom construi în cele ce urmează algoritmul de găsire a celui mai mare divizor comun a două polinoame. Dacă c.m.m.d.c. a două polinoame va fi un polinom de grad zero (adică o constantă), atunci, după cum se știe, polinoamele respective vor fi prime între ele. În caz contrar se poate construi un algoritm de simplificare a celor două polinoame în așa fel ca polinoamele obținute să fie prime între ele. Algoritmul respectiv nu este altceva decît algoritmul de găsire al arborelui redus corespunzător arborelui $a = (\odot, a_1, a_2)$.



B
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \alpha$
$'\varepsilon_1 \Rightarrow \beta$
$'\alpha . '\alpha_{'\sigma_1} \Rightarrow \alpha$
$'\beta . '\beta_{'\sigma_1} \Rightarrow \beta$
$P_<('\sigma_1, 'v)$
1
0
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
B
Ω_4
B

Fig. 9

Fie deci arborii a_1 și a_2 aduși la forma normală, și fie M_1 și M_2 matricile corespunzătoare lor [6]. Vom presupune că vectorii grad ai celor două matrici sînt $\delta_0(M_1) = (\delta_0^1, 0, 0, \ldots 0)$ și respectiv $\delta_0(M_2) = (\delta_0^2, 0, 0, \ldots 0)$ iar vectorii nod sînt $v_0(M_1) = (+, a_0, a_1, \ldots, a_n)$; $v_0(M_2) = (+, b_0, b_1, \ldots, b_m)$ respectiv, unde $\delta_0^1 = n$, $\delta_0^2 = m$.

Algoritmul adresă după care se va găsi c.m.m.d.c. va fi dat de scrierea algoritmului lui Euclid pentru polinoame în limba adresă. În reprezentarea de mai sus a vectorilor nod ai arborilor a_1 și a_2 am eliminat componentele corespunzătoare variabilelor și gradelor, identificînd nucleele respective cu constantele care le marchează. Acestea împreună cu ordinea lor de scriere și cu δ_0^1 respectiv δ_0^2 determină complet aceste nuclee. Bineînțeles că în cazul nostru, constantele respective sînt de fapt constante raționale reduse. Codificarea vectorilor de mai sus o dăm sub forma următoare :

$$'\alpha_i = a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n;\ '\delta_0^1 = n,\ '\delta_0^2 = m,\ '\varepsilon_1 = 1,\ '\varepsilon_0 = 0$$

$$'\beta_j = b_j,\ j = 0, 1, \ldots, m;$$

Să presupunem pentru construirea schemei graf a algoritmului adresă de găsire a c.m.m.d.c. a două polinoame, că $n > m$. Preiungim atunci codificarea introdusă mai sus sub forma $'\beta_{m+1} = 0, \ldots, '\beta_n = 0$. Prin α_i, β_j notăm bineînțeles adresele corespunzătoare unor constante raționale, iar operațiile care vor figura în funcțiile adresă din schema graf vor fi de asemenea operații cu numere raționale. Algoritmul adresă care va găsi polinomul c.m.m.d.c a două polinoame date, de gradul respectiv n și m și de o variabilă, a căror coeficienți sînt păstrați în adresele $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ și $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ va avea schema graf din figura 10.

În această schemă graf prin s.m.s. am notat un semn special care semnalizează că c.m.m.d.c. este de gradul zero, adică o constantă. Dacă rezultatul lucrului algoritmului descris de schema graf de mai sus nu este

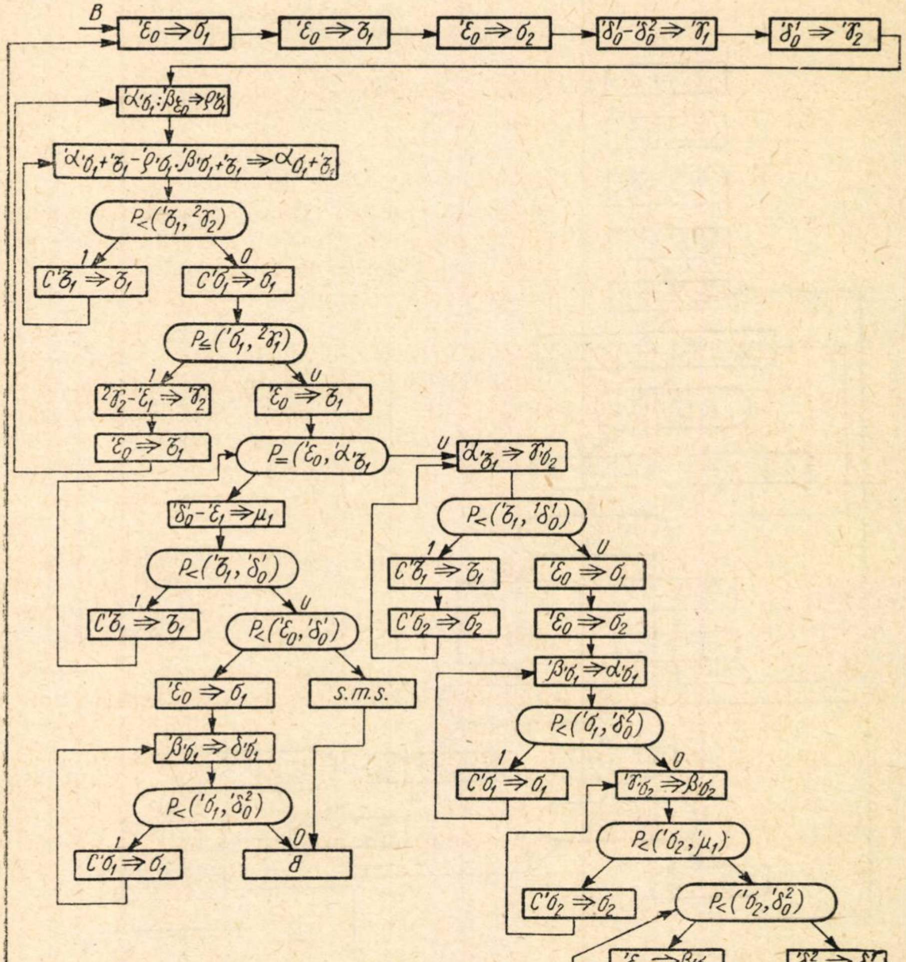

B
'ε0 ⇒ σ1
'ε0 ⇒ ζ1
'ε0 ⇒ σ2
'δ0' - 'δ0² ⇒ 'γ1
'δ0' ⇒ 'γ2
'α'σ1 : β'ε0 ⇒ ρ'σ1
'α'σ1+'ζ1 - 'ρ'σ1 · 'β'σ1+'ζ1 ⇒ α'σ1+'ζ1
P<('ζ1, ²γ2)
1
0
C'ζ1 ⇒ ζ1
C'σ1 ⇒ σ1
P≤('σ1, ²γ1)
1
0
²γ2 - 'ε1 ⇒ 'γ2
'ε0 ⇒ ζ1
'ε0 ⇒ ζ1
P=('ε0, 'α'ζ1)
0
'α'ζ1 ⇒ γ'σ2
'δ0' - 'ε1 ⇒ μ1
P<('ζ1, 'δ0')
1
0
C'ζ1 ⇒ ζ1
P<('ε0, 'δ0')
'ε0 ⇒ σ1
s.m.s.
'β'σ1 ⇒ δ'σ1
P<('σ1, 'δ0²)
1
0
C'σ1 ⇒ σ1
B
P<('ζ1, 'δ0')
1
0
C'ζ1 ⇒ ζ1
'ε0 ⇒ σ1
C'σ2 ⇒ σ2
'ε0 ⇒ σ2
'β'σ1 ⇒ α'σ1
P<('σ1, 'δ0²)
1
0
C'σ1 ⇒ σ1
'γ'σ2 ⇒ β'σ2
P<('σ2, 'μ1)
C'σ2 ⇒ σ2
P<('σ2, 'δ0²)
'ε0 ⇒ β'σ2
'δ0² ⇒ δ0'
C'σ2 ⇒ σ2
'μ1 ⇒ δ0²
δ0² ⇒ 'γ2

Fig. 10

s.m.s., atunci la polinoamele P_1 şi P_2 corespunzătoare arborilor a_1 şi a_2 se aplică un algoritm de simplificare care constă în împărţirea acestor polinoame cu polinomul de gradul $'\delta_0^2$, ai cărui coeficienți sînt păstrați în șirul de adrese $\delta_0, \delta_1, \ldots, '\delta_{\delta_0^2}$. Schema graf a algoritmului adresă după care se execută împărțirea unui polinom cu un polinom dat este prezentată în figura 11.

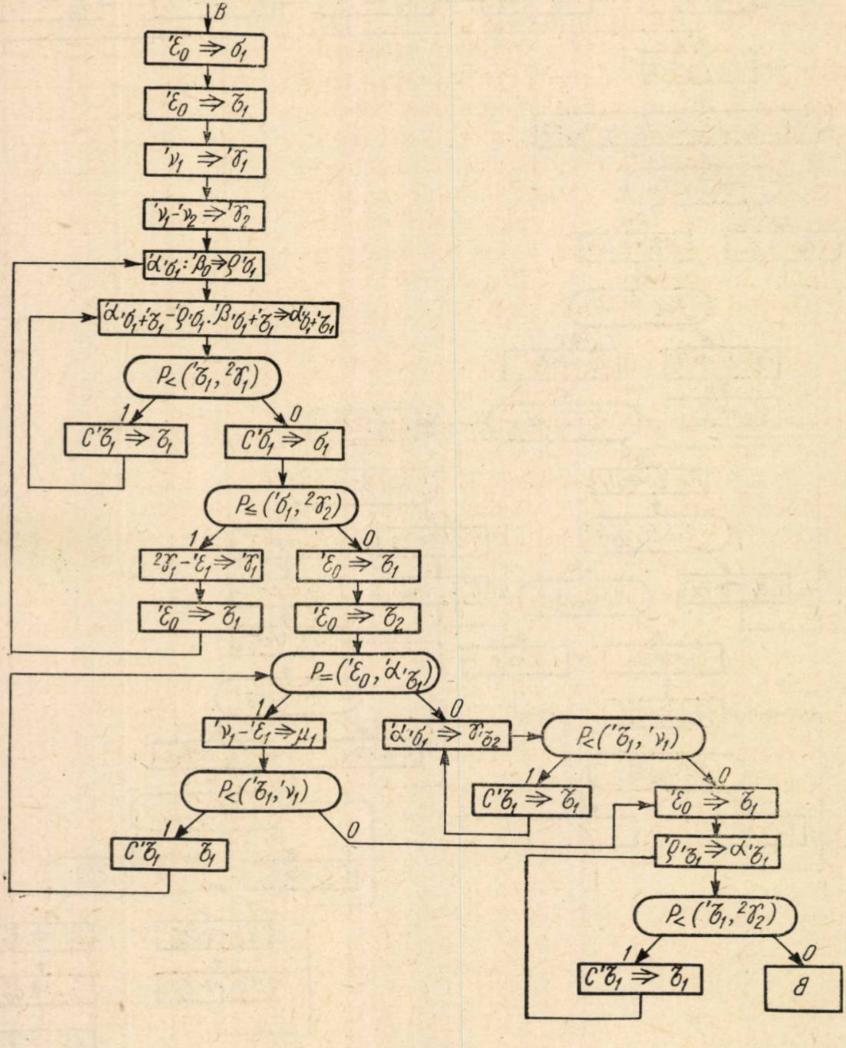

B
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \sigma_1$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \tau_1$
$'\nu_1 \Rightarrow '\gamma_1$
$'\nu_1 - '\nu_2 \Rightarrow '\gamma_2$
$'\alpha'\sigma_1 : '\beta_0 \Rightarrow \rho'\sigma_1$
$'\alpha'\sigma_1 + '\tau_1 - '\rho'\sigma_1 \cdot '\beta'\sigma_1 + '\tau_1 \Rightarrow \alpha'\sigma_1 + '\tau_1$
$P_<('\tau_1, {}^2\gamma_1)$
1
0
$C'\tau_1 \Rightarrow \tau_1$
$C'\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1$
$P_\leq('\sigma_1, {}^2\gamma_2)$
1
0
${}^2\gamma_1 - '\varepsilon_1 \Rightarrow '\gamma_1$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \tau_1$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \tau_1$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \tau_2$
$P_=('\varepsilon_0, '\alpha'\tau_1)$
1
0
$'\nu_1 - '\varepsilon_1 \Rightarrow \mu_1$
$'\alpha'\sigma_1 \Rightarrow \gamma'\tau_2$
$P_<('\tau_1, '\nu_1)$
$P_<('\tau_1, '\nu_1)$
1
0
$C'\tau_1 \Rightarrow \tau_1$
$C'\tau_1 \quad \tau_1$
$'\varepsilon_0 \Rightarrow \tau_1$
$'\rho'\tau_1 \Rightarrow \alpha'\tau_1$
$P_<('\tau_1, {}^2\gamma_2)$
1
0
$C'\tau_1 \Rightarrow \tau_1$
B

Fig. 11

În urma lucrului acestui algoritm, dacă cele două polinoame se împart fără rest, în locul primului polinom va apare polinomul cît, iar dacă polinoamele se împart cu rest, atunci restul apare în adresele $\{\gamma_{\sigma_2}\}$. Dacă dorim să simplificăm fracția P_1/P_2, atunci notăm cu Ω_5 și Ω_6 cei doi algoritmi descriși de schemele graf din figurile 10 și 11. Algoritmul de simplificare va avea schema graf din figura 12, unde prin $\Omega_5\,(P_1, P_2)$ am notat algoritmul adresă de găsire al c.m.m.d.c. pentru polinoamele P_1 și P_2 iar prin $\Omega_6\,(P)$ am notat algoritmul de împărțire a polinomului P cu polinomul obținut în urma lucrului algoritmului $\Omega_5\,(P_1\,P_2)$.

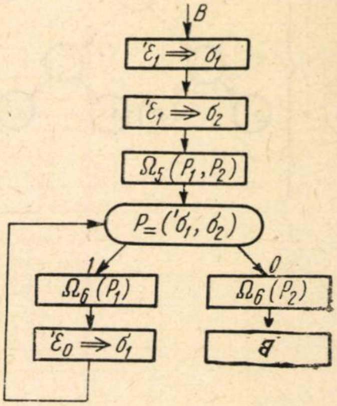


Fig. 12

Rezultă prin urmare că oricare ar fi arborii a_1, a_2, care nu conțin noduri marcate de simbolul :, există un algoritm care transformă arborele $a = (\odot, a_1, a_2)$ în arborele său redus. Acest algoritm poate fi scris în felul următor. Fie M_1, M_2 matricile corespunzătoare arborilor a_1, a_2 și fie Ω_0 algoritmul de aducere a lor la forma canonică [5]. Atunci algoritmul de reducere a arborelui a va avea schema graf din figura 13, unde prin $\Omega_7\,(M_1, M_2)$ am notat algoritmul a cărui schemă graf este cea din figura 12.

Rămîne în continuare să construim un algoritm care va transforma orice arbore a cu nodurile marcate de simbolurile mulțimii $\mathfrak{M} \cup \{ : \}$ în arborele $a = (\odot, a_1, a_2)$, unde a_1, a_2 sînt arbori care nu conțin noduri marcate de simbolul : . Acest algoritm va constitui de fapt algoritmul unei transformări de tip T_η. Operațiile care vor intra în definirea acestei transformări vor fi determinate de sistemul de axiome date mai sus.

Primul grup de asemenea operații vor fi de tipul T_2 [7], unde condiția $\mathfrak{C}$ care se impune asupra arborilor care generează această operație este să nu conțină noduri marcate de simbolul : . Această condiție are sens deoarece nodurile $\odot$ nu pot figura ca și vîrfuri ale unui arbore, prin urmare se vor găsi în arborele a subarbori care nu conțin noduri de forma $\odot$.

Prima dintre transformările de care vorbeam mai sus va fi notată cu T^1 și va fi definită de tripletul din figura 14.

Un asemenea tip de operații vor fi definite și pentru simbolurile $\times$, π_1, : de către tripletele din figura 15, pe care le notăm respectiv cu T^2, T^3, T^4.

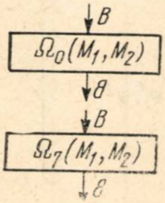


Fig. 13

Se vede simplu că în urma lucrului unor asemenea operații nodul $\odot$ se „trage'' pe nivelele succesive ale arborelui a spre rădăcina lui. Ele se vor aplica de atîtea ori pînă cînd nodul $\odot$ apare ca rădăcină a arborelui a, fapt care se obține după cum este simplu de observat după un număr finit de asemenea aplicări. Pentru a putea face însă acest lucru trebuie să uniformizăm oarecum apariția nodului $\odot$ în arborele a, uniformizare care reduce apariția lui la formele semnalate în operațiile mai sus precizate. Pentru aceasta vom aplica arborelui șirul de operații definite de tripletele din figura 16, notate cu T_1^1, T_2^1, $T_1^2\,T_2^2$, T_1^3, T_3^3 respective.

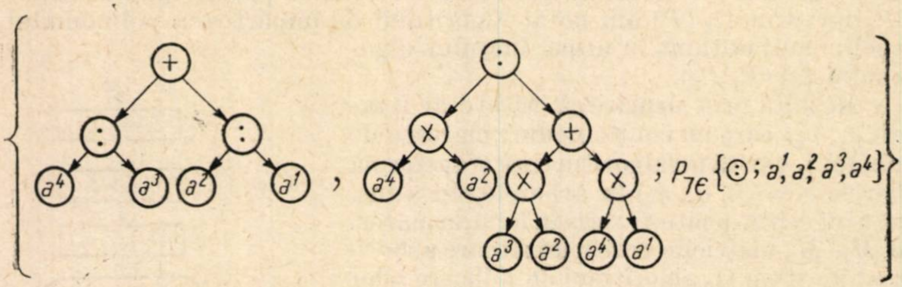

+
:
:
a⁴
a³
a²
a¹
,
:
×
+
a⁴
a²
×
×
a³
a²
a⁴
a¹
; P₇ϵ {⊙; a¹, a², a³, a⁴}

Fig. 14

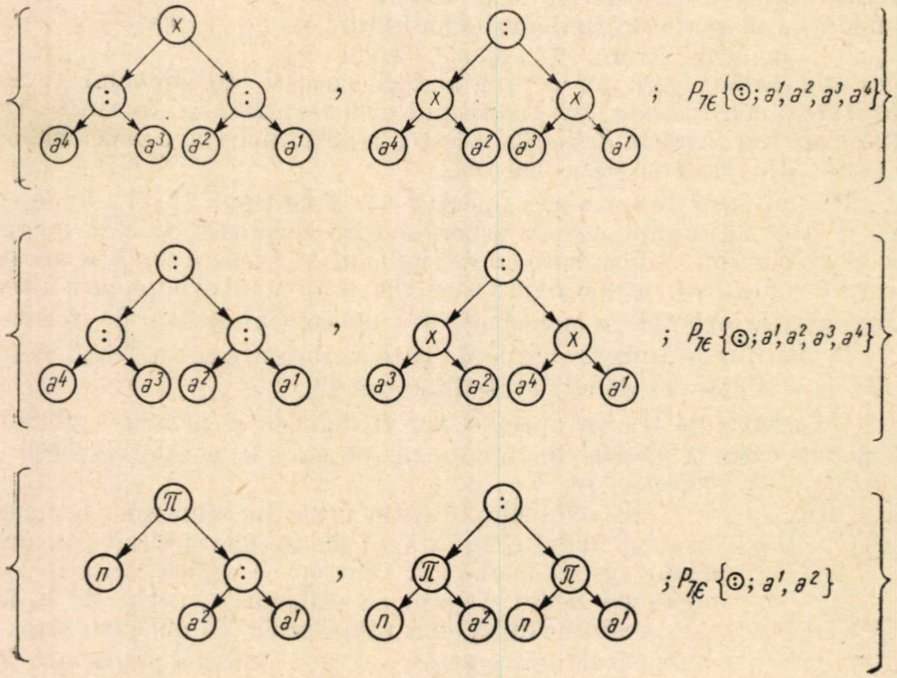

×
:
:
a⁴
a³
a²
a¹
,
:
×
×
a⁴
a²
a³
a¹
; P₇ϵ {⊙; a¹, a², a³, a⁴}
:
:
:
a⁴
a³
a²
a¹
,
:
×
×
a³
a²
a⁴
a¹
; P₇ϵ {⊙; a¹, a², a³, a⁴}
Π
n
:
a²
a¹
,
:
Π
Π
n
a²
n
a¹
; P₇ϵ {⊙; a¹, a²}

Fig. 15

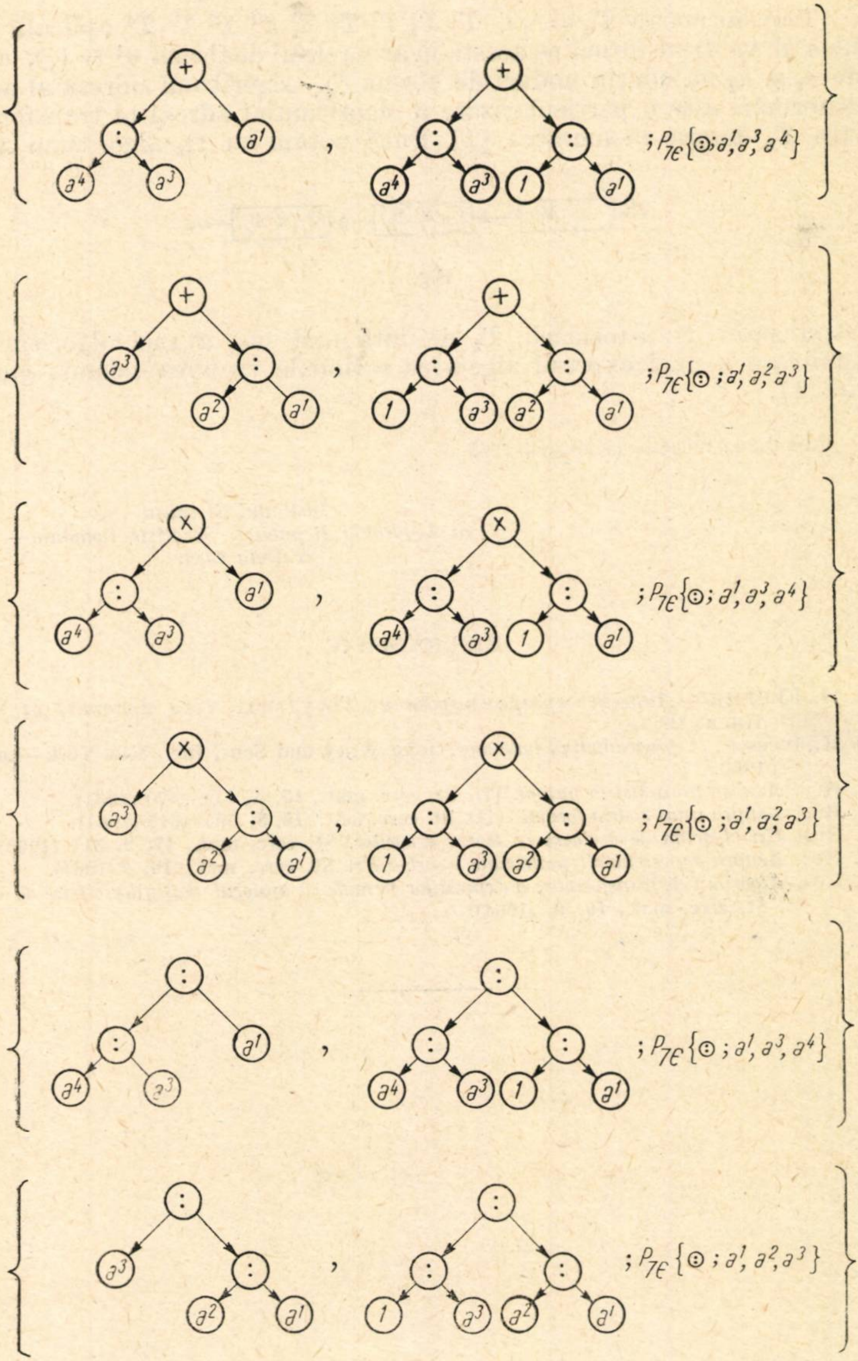

; P7ε{⊙; a1, a3, a4}
; P7ε{⊙; a1, a2, a3}
; P7ε{⊙; a1, a3, a4}
; P7ε{⊙; a1, a2, a3}
; P7ε{⊙; a1, a3, a4}
; P7ε{⊙; a1, a2, a3}

Fig. 16

Transformarea $T_\eta = \eta T_1^1\, T_2^1\, T_1^2\, T_2^2\, T_1^3\, T_2^3\, T^1\, T^2\, T^3\, T^4$ aplicată arborelui a îl va transforma pe acesta în arborele a^1 de forma $a^1 = (\odot,\ a_1, a_2)$, unde a_1 şi a_2 nu conţin noduri de forma $\odot$. Algoritmul adresă al acestei transformări este o particularizare a algoritmului adresă al transformării de tip T_η descris în lucrarea [7]. Dacă notăm cu Ω_8 algoritmul adresă corespunzător transformării T_η definită mai sus, atunci algoritmul de simplificare a unei expresii algebrice raţionale va avea schema graf din figura 17.

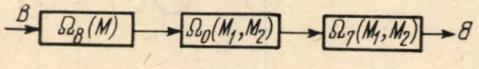


Fig. 17

Primită la redacţie la 29 mai 1965

Institutul de calcul
al Academiei Republicii Socaliste România —
Filiala Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. Э. Л. ЮЩЕНКО, *Адресное программирование*, Госуд. изд. техн. литературы, УССР, Киев, 1963.
2. E. K. IVERSON, *A programming language*. John Wiley and Sons, Inc., New York—London, 1962.
3. T. RUS, *Asupra unui sistem formal.* (I). St. cerc. mat., **15**, *4*, 459—470 (1964).
4. T. RUS, *Asupra unui sistem formal.* (II). St. cerc. mat., **15**, **5**, 595—615 (1964).
5. T. RUS, *Un algoritm de decidere în teoria arborilor.* St. cerc. mat., **17**, *2*, 311 (1965).
6. T. RUS, *Asupra reprezentării matriciale a arborilor.* St. cerc. mat., **16**, *9* (1964).
7. T. RUS, *Algoritmi de transformare a expresiilor formale cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul*, St. cerc. mat., **16**, *9*, (1964).

REZULTANTA ŞI MOMENTUL REZULTANT AL PRESIUNII PE UN CORP ÎN CAZUL DISTRIBUŢIEI PARABOLICE DE VITEZE LA INFINIT ÎN AMONTE

DE

RODICA CHIRILĂ

În această lucrare autorul determină expresia presiunii (19) unui fluid incompresibil pe un obstacol, în cazul în care la infinit în amonte distribuţia de viteze e considerată parabolică (3).

În continuare determină expresia rezultantei presiunilor pe obstacol (38) şi a momentului rezultant (52), arătînd existenţa paradoxului lui d'Alembert în cazul obstacolului circular.

1. INTRODUCERE

Mişcarea unui corp într-un curent fluid cu distribuţie parabolică de viteze la infinit în amonte a fost studiată găsindu-se pentru potenţialul complex al vitezelor soluţii aproximative.

H. T. Nagamatsu [1] determină prima aproximaţie din rezolvarea unei probleme Dirichlet pentru funcţia de curent perturbatoare ψ_1 şi rezolvă explicit această problemă în cazul particular al unui cilindru circular.

J. D. Murray şi A. R. Mitchell determină a doua aproximaţie a funcţiei ψ_1 pentru un cilindru oarecare în [2] şi pentru un cilindru circular în [3].

E. E. Jones determină a doua aproximaţie a funcţiei de curent perturbatoare ψ_1 pentru un profil Jukovski disimetric şi totodată calculează rezultanta şi momentul rezultant al presiunii pe acest profil.

În lucrarea de faţă vom calcula expresiile rezultantei şi momentului rezultant al presiunii pe obstacol în cazul general pentru o distribuţie parabolică de viteze la infinit în amonte, ţinînd seama de rezultatele găsite de Caius Iacob în [4] şi [5].

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 10, P. 1505–1513, BUCUREŞTI, 1965

2. CALCULUL PRESIUNII

Să considerăm un obstacol C aflat în mişcare într-un fluid incompresibil nelimitat. Să alegem un sistem fix de axe $O_1x_1y_1$ şi un sistem mobil Oxy solidar legat de profilul C.

Fie $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ şi $z = x + \mathrm{i}y$. Trecerea de la sistemul de axe mobil la cel fix, va fi dată de relaţia :

$$z_1 = z_0(t) + e^{\mathrm{i}\theta} z, \tag{1}$$

unde $z_0(t)$ este afixul punctului mobil O în raport cu axele fixe iar $\theta = \theta(t)$ este unghiul pe care-l fac axele Ox şi O_1x_1.

Avem relaţiile :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega(t), \qquad \theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

unde $\omega(t)$ este viteza unghiulară de rotaţie a corpului C.

Distribuţia de viteze la mari distanţe va fi de forma :

$$\begin{cases} u_0(x_1, y_1, t) = V_\infty(t) + 3\,\alpha y_1{}^2 \\ v_0(x_1, y_1, t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

şi dacă introducem funcţia de curent $\psi_0(x_1, y_1, t)$ vom avea relaţiile :

$$\begin{cases} u_0(x_1, y_1, t) = \dfrac{\partial \psi_0}{\partial y_1}, \\[2ex] v_0(x_1, y_1, t) = -\dfrac{\partial \psi_0}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{4}$$

Datorită prezenţei obstacolului C, viteza va fi perturbată şi introducînd funcţia de curent perturbatoare $\psi_1(x_1, y_1, t)$ vom avea relaţiile :

$$\begin{cases} u(x_1, y_1, t) = V_\infty(t) + 3\,\alpha y_1^2 + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \\[2ex] v(x_1, y_1, t) = \qquad -\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}, \end{cases} \tag{5}$$

unde

$$\psi(x_1, y_1, t) = \psi_0(x_1, y_1, t) + \psi_1(x_1, y_1, t). \tag{6}$$

În calculul vîrtejului H. T. Nagamatsu [1] reţine o parte din termeni şi obţine pentru $\psi_1(x_1, y_1, t)$ ecuaţia :

$$\Delta \psi_1 = 0 \tag{7}$$

găsind astfel prima aproximaţie. E. E. Jones [6] şi J. D. Murray [3] reţin un termen mai mult şi obţin ecuaţia :

$$\Delta\psi_1 = \frac{V_\infty}{6\alpha}\,\psi_1, \tag{8}$$

găsind a doua aproximaţie a funcţiei de curent perturbatoare $\psi_1(x_1, y_1, t)$.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (7) sau (8) sînt necesare condiţii la limită [4] :

— la mari distanţe :

$$\lim_{|z_1|\to\infty} \psi_1 = 0\,; \tag{9}$$

— pe curba C :

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = 0. \tag{10}$$

Folosind relaţiile (5), atunci (10) se mai scrie

$$\mathrm{d}\psi|_C = (v_x^{(0)} - \omega y)\,\mathrm{d}y - (v_y^{(0)} + \omega x)\,\mathrm{d}x, \tag{11}$$

unde v_x^0 şi v_y^0 sînt proiecţiile vitezei $\vec{v}_0$ a punctului O pe axele mobile, sau

$$\psi_1|_C = -V_\infty\, y_1 - \alpha y_1^3 + v_x^{(0)} y - v_y^{(0)} x - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2). \tag{12}$$

Să considerăm acum ecuaţiile de mişcare scrise sub forma lui Helmholtz în axele fixe :

$$\frac{\delta \vec{v}}{\delta t} + \mathrm{rot}\,\vec{v} \times \vec{v} = \mathrm{grad}\, H, \tag{13}$$

unde $\vec{v}(x_1, y_1, t)$ este vectorul viteză de componente $u(x_1, y_1, t)$ şi $v(x_1, y_1, t)$, iar H are expresia :

$$H(x_1, y_1, t) = U(x_1, y_1, t) - \frac{1}{2}V^2 - \frac{p}{\rho}. \tag{14}$$

Notaţia $\frac{\delta}{\delta t}$ înseamnă derivata parţială faţă de t pentru x_1, y_1 ficşi.

În (14) am notat cu U potenţialul forţelor masice, iar cu V^2 pătratul modulului vitezei $\vec{v}$.

Dacă înlocuim în (13) relaţiile (5) obţinem :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\delta u(x_1, y_1, t)}{\delta t} + 6\alpha y_1\, v(x_1, y_1, t) = \frac{\partial H}{\partial x_1},\\ &\frac{\delta v(x_1, y_1, t)}{\delta t} - 6\alpha y_1\, u(x_1, y_1, t) = \frac{\partial H}{\partial y_1}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Din ecuaţiile (15) şi (5) rezultă :

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial H}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 = V'_\infty(t)\,\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}\left(\frac{\delta\varphi_1}{\delta t}\right) - 6\alpha y_1\,\mathrm{d}\psi. \tag{16}$$

Să notăm cu ξ, η coordonatele centrului de greutate faţă de axele mobile ale plăcii D, mărginită de curba C, considerată omogenă şi fie A aria sa.

Integrînd relaţia (16) pe C şi ţinînd seama că

$$\begin{aligned}\int_C y_1\,\mathrm{d}\psi &= \int_C y_1\left[(v_x^{(0)} - \omega y)\,\mathrm{d}y - (v_y^{(0)} + \omega x)\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= \left[v_x^{(0)}\sin\theta + v_y^{(0)}\cos\theta + \omega(\xi\cos\theta - \eta\sin\theta)\right]A = a(t),\end{aligned} \tag{17}$$

obţinem :

$$H = V'_\infty(t)\,x_1 + \frac{\delta\varphi_1}{\delta t} - 6\,\alpha a(t). \tag{18}$$

Din relaţiile (14) şi (18) rezultă expresia presiunii :

$$p = \rho\left(U - \frac{1}{2}V^2 - V'_\infty(t)\,x_1 - \frac{\delta\varphi_1}{\delta t} - 6\alpha a(t)\right). \tag{19}$$

3. REZULTANTA PRESIUNII PE OBSTACOL.

Să notăm cu R_x şi R_y proiecţiile rezultantei $\vec{R}$ pe axele Ox şi Oy. Vom avea

$$R_x - \mathrm{i}R_y = -\,\mathrm{i}\int_C p\,\mathrm{d}\bar{z} \tag{20}$$

integrînd pe C în sens direct.

Prin înlocuirea în (20) a relaţiei (19) obţinem :

$$\frac{1}{\rho}(R_x - \mathrm{i}R_y) = -\mathrm{i}\int_C U\,\mathrm{d}\bar{z} + \frac{\mathrm{i}}{2}\int_C V^2\,\mathrm{d}\bar{z} + \mathrm{i}V'_\infty(t)\int_C x_1\,\mathrm{d}\bar{z} + \mathrm{i}\int_C \frac{\delta\varphi_1}{\delta t}\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{21}$$

Vom calcula fiecare integrală din relaţia (21) ţinînd seama de relaţiile :

$$V^2 = (V_\infty + 3\alpha y_1^2)^2 + 2(V_\infty + 3\alpha y_1^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\overline{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}}, \tag{22}$$

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta t} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial t} - \left[(v_x^{(0)} - \mathrm{i}v_y^{(0)}) - \mathrm{i}\omega\bar{z}\right]\overline{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \vec{v}_t\cdot\operatorname{grad}\psi_1\right), \tag{23}$$

(24)
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\overline{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}}\,\mathrm{d}\bar{z}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}(\mathrm{d}F-2\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}\psi_1).$$

În relația (23) am notat cu $\vec{v}_t$ viteza de transport, ale cărei proiecții pe axele mobile sînt :

(25)
$$\begin{cases} u_t=v_x^{(0)}-\omega y, \\ v_t=v_y^{(0)}+\omega x. \end{cases}$$

Înlocuind relațiile (22), (23) și (24) în (21), obținem :

(26)
$$\frac{1}{\rho}(R_x-\mathrm{i}R_y)=-\mathrm{i}\int_C U\,\mathrm{d}\bar{z}+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_C\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z+\mathrm{i}\int_C\overline{\frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}z}\,-$$
$$-\,\omega\int_C\overline{z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z}-\mathrm{i}(v_x^{(0)}-\mathrm{i}v_y^{(0)})\int_C\overline{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_C(V_\infty+3\alpha y_1^2)^2\,\mathrm{d}\bar{z}+I,$$

unde am notat

(27)
$$I=\mathrm{i}V'_\infty(t)\int_C x_1\mathrm{d}\bar{z}+\mathrm{i}\int_C(V_\infty+3\alpha y_1^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\bar{z}+\int_C\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}\psi_1-$$
$$-\int_C\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}\bar{z}+\int_C\vec{v}_t\cdot\mathrm{grad}\;\psi_1\mathrm{d}\bar{z}$$

Pentru a calcula expresia lui I, în (27) vom ține seama de relațiile :

(28)
$$\mathrm{i}V'_\infty(t)\int_C x_1\,\mathrm{d}\bar{z}=V'_\infty(t)\cdot e^{\mathrm{i}\theta}\cdot A,$$

(29)
$$\mathrm{i}\int_C(V_\infty+3\,\alpha y_1^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\bar{z}-\int_C(V_\infty+3\alpha y_1^2)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}y_1=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_C(V_\infty+3\alpha y_1^2)\,\mathrm{d}\varphi_1,$$

(30)
$$\int_C\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}(u_t\mathrm{d}y-v_t\mathrm{d}x)+\int_C\vec{v}_t\cdot\mathrm{grad}\;\psi_1\,\mathrm{d}\bar{z}=\int_C(u_t-\mathrm{i}v_t)\,\mathrm{d}\psi_1.$$

În aceste condiții, expresia lui I din (27) va deveni :

(31)
$$I=V'_\infty(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A+\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_C(V_\infty+3\alpha y_1^2)\,\mathrm{d}\varphi_1+\int_C(u_t-\mathrm{i}v_t)\mathrm{d}\psi_1-\int_C\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

Să calculăm integralele :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\int_C (V_\infty + 3\alpha y_1^2)\,\mathrm{d}\varphi_1 = \mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,(V_\infty + 3\alpha y_0^2)\int_C \overline{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z} + \\
& 3\,\alpha\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\int_C (y_1 - y_0)^2\,\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z - 6\alpha\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,y_0\,\mathrm{Im}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_C \overline{z\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z}\right\} - \\
& - 3\,\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_C [2\mathrm{i}\,y_0(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)^2]\,\mathrm{d}\psi_1 .
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
\int_C (u_t - \mathrm{i}v_t)\,\mathrm{d}\psi_1 = 3\alpha\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,\omega I_{x_1x_1} - \mathrm{i}\omega[(v_x^{(0)} - \mathrm{i}v_y^{(0)}) - V_\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{i}\omega(\xi - \mathrm{i}\eta)]A \tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int_C \frac{\partial\psi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}\bar{z} = -V'_\infty(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A - \mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,\omega V_\infty(t)\cdot A - \\
& - 3\alpha\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,\omega I_{x_1x_1} + \frac{\mathrm{d}(v_x^{(0)} - \mathrm{i}\,v_y^{(0)})}{\mathrm{d}t}A - \mathrm{i}(\xi - i\eta)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}A + \\
& + 6\alpha\varphi^{\mathrm{i}\theta}\left(\omega x_0 - \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}\right)\eta_1 A - 6\alpha\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,I_{x_1y_1} .
\end{aligned} \tag{34}
$$

În aceste relații am notat cu η_1 ordonata centrului de greutate față de axele fixe ale plăcii D considerată omogenă și cu $I_{x_1y_1}$, $I_{x_1x_1}$ momentele de inerție axiale în sistemul fix de coordonate, punînd

$$
I_{x_1x_1} = \iint_D y_1^2\,\mathrm{d}A , \qquad I_{x_1y_1} = \iint_D x_1 y_1\,\mathrm{d}A .
$$

Rezultă :

$$
\begin{aligned}
I = {} & \mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,(V_\infty + 3\alpha y_0^2)\int_C \overline{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z} - 6\,\alpha\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,y_0\,\mathrm{Im}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_C \overline{z\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z}\right\} + \\
& + 3\alpha\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\int_C (y_1 - y_0)^2\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z + K,
\end{aligned} \tag{35}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
K = {} & 18\,\alpha^2\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,y_0 I_{x_1x_1} + \Big[6\,\alpha\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\theta}\,y_0(V_\infty - \mathrm{i}\omega\bar{z}_0) + \frac{\mathrm{d}(v_x^{(0)} - \mathrm{i}v_y^{(0)})}{\mathrm{d}t} - \\
& - 6\alpha\mathrm{ie}^{2\mathrm{i}\theta}y_0\,(v_x^{(0)} - \mathrm{i}v_y^{(0)}) - \mathrm{i}\omega\,(v_x^{(0)} - \mathrm{i}v_y^{(0)}) - 6\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}\,\eta_1 - \\
& - 6\,\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\omega y_0(\xi_1 - \mathrm{i}\eta_1) + 6\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,(v_x^{(0)}\sin\theta + v_y^{(0)}\cos\theta)\eta_1 - \\
& - (\xi - \mathrm{i}\eta)\left(\omega^2 + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\Big]A .
\end{aligned} \tag{36}
$$

Astfel expresia (26) va deveni :

$$
\begin{aligned}
R_x - \mathrm{i}R_y = & -\mathrm{i}\rho\int_C U\,\mathrm{d}\bar{z} + \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\int_C\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + \mathrm{i}\rho\int_C\overline{\frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}z} - \omega\rho\int_C\overline{z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z} - \\
& -\mathrm{i}\rho[(v_x^{(0)} - \mathrm{i}v_y^{(0)}) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(V_\infty + 3\alpha y_0^2)]\int_C\overline{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z} + \\
& \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\int_C(V_\infty + 3\alpha y_1^2)^2\mathrm{d}\bar{z} - 6\,\alpha\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\rho y_0\,\mathrm{Im}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_C\overline{z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z}\right\} + \\
& + 3\alpha\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\rho\int_C(y_1 - y_0)^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z + K\rho.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Dacă considerăm obstacolul fix în fluid, deci dacă ω, θ, $\vec{v_0}$ sînt nuli şi în plus $U = 0$, $V_\infty = 0$, relaţia (37) devine :

$$
\begin{aligned}
R_x - \mathrm{i}R_y = & \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\int_C\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + \mathrm{i}\rho\int_C\overline{\frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}z} + \\
& + \frac{9\,\alpha^2\mathrm{i}\rho}{2}\int_C y^4\,\mathrm{d}\bar{z} + 3\alpha\mathrm{i}\rho\int_C\overline{y^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

În relaţia (36) am notat cu ξ_1 abscisa centrului de greutate al plăcii D, considerată omogenă, faţă de sistemul fix de axe.

4. MOMENTUL REZULTANT AL PRESIUNILOR PE OBSTACOL

Expresia momentului rezultant al presiunilor pe obstacol calculat în raport cu originea O a axelor mobile este :

$$
M_0 = \mathrm{Re}\left\{\int_C pz\,\mathrm{d}\bar{z}\right\}.
\tag{40}
$$

Dacă în (40) ţinem seamă de relaţia (19), obţinem :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}M_0 = \mathrm{Re}\Bigg\{ & \int_C zU\,\mathrm{d}\bar{z} - \frac{1}{2}\int_C zV^2\,\mathrm{d}\bar{z} - V'_\infty(t)\int_C x_1 z\,\mathrm{d}\bar{z} - \\
& - \int_C\frac{\delta\varphi_1}{\delta t}z\,\mathrm{d}\bar{z} + 6\alpha a(t)\int_C z\,\mathrm{d}\bar{z}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

În (41) dacă ţinem seama de relaţiile (22), (23) şi de

$$
\frac{\delta\varphi_1}{\delta t} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \vec{v_t}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_1,
\tag{42}
$$

obținem

$$\frac{1}{\rho} M_0 = \operatorname{Re}\left\{\int_C z\, U\, \mathrm{d}\bar{z} - \int_C \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} z\, \mathrm{d}\bar{z} - \frac{1}{2}\int_C z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_C z\,(V_\infty + 3\alpha y_1^2)^2\, \mathrm{d}\bar{z} + K\right\}, \tag{43}$$

unde

$$K = -V'_\infty(t)\int_C x_1 z\, \mathrm{d}\bar{z} + 6a(t)\,\alpha\int_C z\, \mathrm{d}\bar{z} + \int_C z\,[\,(u_t - \mathrm{i}v_t) -$$
$$(V_\infty + 3\alpha y_1^2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,]\, \mathrm{d}\varphi_1 . \tag{44}$$

Să calculăm integralele care intervin în relația (44) :

$$-V'_\infty(\mathrm{t})\int_C x_1 z\, \mathrm{d}\bar{z} = -V'_\infty(t)\,(\xi\sin\theta + \eta\cos\theta)\,A +$$
$$+ \mathrm{i}\,[\,V'_\infty(t)\,(\xi\sin\theta + \eta\cos\theta) + 2\,\xi_1] \tag{45}$$

$$-6\,\alpha a\,(t)\int_C z\, \mathrm{d}\bar{z} = 12\,\alpha \mathrm{i}\, a(t)\, A \tag{46}$$

$$\int_C [\,u_t - \mathrm{i}v_t) - (V_\infty + 3\,\alpha y_1^2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,]\, z \mathrm{d}\varphi_1 = [(v_x^{(0)} - \mathrm{i}v_y^{(0)}) - \tag{47}$$
$$-(V_\infty + 3\alpha y_0^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,] \times \left[\int_C z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z - \mathrm{i}\int_C z\, \mathrm{d}\,\psi_1\right] - \mathrm{i}\omega\int_C z\bar{z}\, \mathrm{d}\varphi_1 -$$
$$-3\alpha\, e^{\mathrm{i}\theta}\int_C (y_1^2 - y_0^2) z\, \mathrm{d}\varphi_1 .$$

Dacă introducem aceste relații în (44), vom obține :

$$\operatorname{Re}\{K\} = \operatorname{Re}\left\{[(v_x^{(0)} - \mathrm{i}v_y^{(0)}) - (V_\infty + 3\alpha y_0^2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,]\int_C z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z - \right.$$
$$\left. -3\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_C (y_1^2 - y_0^2) z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z - J\right\} - \tag{48}$$
$$-V'_\infty(t)\,(\xi\sin\theta + \eta\cos\theta)\,A,$$

unde

$$\operatorname{Re}\{J\} = (v_x^{(0)}\sin\theta + v_y^{(0)}\cos\theta)\,(6\,\alpha\eta_1 A - V_\infty A - 3\,\alpha\, I_{x_1x_1}) -$$
$$-6\,\alpha\omega\, x_0\eta_1 A - \omega(v_x^{(0)}\xi + v_y^{(0)}\eta)\,A + 6\,\alpha\omega\, I_{x_1y_1} - \tag{49}$$
$$-(V_\infty + 3\alpha y_0^2)\,[(\xi_1 - x_0) - V_\infty A - 3\,\alpha\, I_{x_1x_1}\,].$$

Dacă înlocuim relaţiile (48) şi (49) în (43) obţinem :

(50)
$$M_0 = \mathrm{Re}\left\{\rho\int_C zU\,\mathrm{d}\bar{z} - \rho\int_C z\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}\bar{z} - \frac{\rho}{2}\int_C z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z - \right.$$
$$- \frac{\rho}{2}\int_C z(V_\infty + 3\alpha y_1^2)^2\,\mathrm{d}\bar{z} + \rho[(v_x^{(0)} - \mathrm{i}\,v_y^{(0)}) - (V_\infty + 3\alpha y_0^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]\int_C z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z -$$
$$\left. 3\alpha\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_C (y_1^2 - y_0^2)z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\right\} + \rho L,$$

unde

(51)
$$L = -V'_\infty(\xi\sin\theta + \eta\cos\theta)\,A - \mathrm{Re}\,\{J\}.$$

În cazul în care considerăm obstacolul fix în fluid şi în plus $V_\infty = 0$ şi $U = 0$ vom obţine

(52)
$$M_0 = \mathrm{Re}\left\{-\frac{\rho}{2}\int_C z_1\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z_1}\right)^2\mathrm{d}z_1 - \frac{9\alpha^2\rho}{2}\int_C z_1 y_1^4\,\mathrm{d}\bar{z}_1 - 3\alpha\rho\int_C z_1 y_1^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z_1}\,\mathrm{d}z_1\right\}\cdot$$

Să considerăm că obstacolul C este un cerc de rază r. Se ştie din [7] că potenţialul complex al vitezelor va fi dat de :

(53)
$$F(z,t) = V_\infty r^2\frac{1}{z} - \frac{3\alpha r^4}{4}\cdot\frac{1}{z} + \frac{\alpha r^6}{4}\cdot\frac{1}{z^3}\cdot$$

Dacă introducem relaţia (53) în (39) şi (52) vom obţine :

(54)
$$R = 0$$

(55)
$$M_0 = \frac{r^4}{8}\left(\frac{3\alpha r^2}{2} - 2V_\infty\right)$$

ceea ce arată că paradoxul lui d'Alembert apare şi în acest caz.

Primită la redacţie la 29 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. H. T. Nagamatsu, Journal of Math. and Phys., **30**, 131–139 (1951).
2. J. D. Murray, Quat. J. of Mech. and appl. Math., **10**, 406–424 (1957).
3. J. D. Murray, A. R. Mitchel, Quat. J. of Mech. and. appl. Math., **10**, 13–23 (1957).
4. Caius Iacob, *Introductions mathematiques à la mécanique des fluides*. Ed. Acad. R.P.R. — Gauthier-Villars, 1960.
5. Caius Iacob, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, 6, 801–809 (1954).
6. E. E. Jones, Zeitschrift für angew. Math. und Mech., **37**, 362–370 (1957).
7. H. Ene, St. cerc. mat., **17**, *5* (1965).

[illegible] (69) în (50) obținem:

(61)

$$[illegible]$$

[illegible]

(62) [illegible]

[illegible]

(63)

$$[illegible]$$

[illegible]

(66) [illegible]

Pentru introducerea [illegible] (67) în (69) [illegible] vom obține:

(67) [illegible]

(68) [illegible]

[illegible]

[illegible] 29 [illegible]

BIBLIOGRAFIE

1. [illegible], Journal of Math. and Phys., [illegible] (1941).
2. [illegible], [illegible] of Mech. and appl. Math., [illegible] (1957).
3. [illegible], Quart. J. of Mech. and appl. Math., 10, [illegible]
4. [illegible]
   Gauthier-Villars, 1936.
5. [illegible]
   [illegible]
6. [illegible], 37, [illegible]
7. [illegible], 12, 4 (1954).

MĂSURI CU VALORI ÎN SPAȚII VECTORIALE TOPOLOGICE OARECARE

DE

VALENTIN POPESCU

Se stabilesc mai multe proprietăţi ale variaţiilor acestor măsuri care, împreună, suplinesc subaditivitatea (care poate lipsi dacă spaţiul valorilor măsurii nu este local convex). Se dă o definiţie a măsurabilităţii mai simplă şi efectiv mai generală decît cele folosite de către Bourbaki, Sâmboan, Bochner, Denjoy, Price, Rickart etc. Se studiază aplicaţiile mărginite.

Integrala finit aditivă a lui Kolmogorov ([6]) obţinîndu-se printr-o uşoară modificare a definiţiei integralei riemanniene (cu ajutorul sumelor Darboux), este foarte simplă şi cît se poate de naturală. Fiind însă destul de restrictivă şi nefiind complet aditivă, Kolmogorov a introdus integrala sa ,,complet aditivă'' prin procedee destul de complicate, iar Rickart ([12]) a obţinut o integrală şi mai generală, dar greu de mînuit din cauza definiţiei sale complicate. Un alt defect al acestei integrale este lipsa continuităţii absolute în cazul integrării în raport cu o măsură. În sfîrşit, ultimele două integrale nu se pretează la o interpretare fizică tot atît de naturală ca şi prima. De exemplu se ştie că există funcţii integrabile, atît în sensul integralei finit aditive (K) cît şi în cel al integralei complet aditive (K) (deci a fortiori integrabile Rickart) dar pentru care valoarea integralei finit aditive (K) diferă de valoarea comună a integralei complet aditive (K) şi Rickart.

Prezenta lucrare este prima dintr-o serie, al cărui prim scop va fi obţinerea, în cazul integrării în raport cu o măsură, a unei integrale complet aditive şi absolut continue de o generalitate comparabilă cu cea a integralei Rickart (deci cuprinzînd toate integralele ,,clasice''), prin procedee extrem de simple şi anume prin combinaţia definiţiei integralei finit aditive (K) cu procedeul de ,,esenţializare'' (în sensul din [2], cap. V, § 2, adică de definire a integrabilităţii şi integralei pe o mulţime atunci cînd se cunoaşte

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 10, P. 1515–1528, BUCUREŞTI, 1965

valoarea integralei pe o familie densă de submulțimi a acesteia) și cu unele din procedeele integrării slabe.

Simplitatea definițiilor și a raționamentelor a permis considerarea cazului mai general în care spațiile valoriilor măsurii, funcției și integralei nu sînt neapărat local convexe, de unde provine și titlul lucrării. Importanța acestei extensiuni este desigur discutabilă (deși este cerută de una din problemele deschise enunțate de Rickart în [12]), de aceea ea nu constituie decît unul din obiectivele secundare ale lucrării. Pe de altă parte, absența structurii de spațiu local convex n-a putut fi suplinită decît cu prețul introducerii unor mari complicații, fapt ce se opune scopului principal. Totuși, în marea majoritate a cazurilor se indică simplificările ce au loc în cazul spațiilor local convexe, astfel că cititorul poate urmări întreaga teorie numai în cazul acestor spații.

În § 1 se studiază proprietățile variației unei măsuri. Deoarece în cazul nostru aceste variații nu sînt subaditive, a fost necesară stabilirea unei serii de proprietăți ale acestor variații care, în paragrafele următoare, vor înlocui cu succes proprietatea de aditivitate completă. În cazul măsurilor cu valori într-un spațiu local convex, paragraful nu conține nici un rezultat nou.

Noțiunea de măsurabilitate a unei funcții, studiată în §2, reprezintă o generalizare a celei din [10]. Ea este efectiv mai generală decît noțiunea corespunzătoare folosită de Bourbaki, Sâmboan, Denjoy, Price, Rickart etc. chiar și în cazul spațiilor local convexe. În plus, ea nu prezintă deficiențele celor folosite de Price și Rickart pentru care, de exemplu, suma a două funcții măsurabile nu este întotdeauna o funcție măsurabilă etc.

O familie nevidă $\sum$ de părți ale unei mulțimi E se numește clan, dacă $A \cup A' \in \sum$ și $A \setminus A' \in \sum$ pentru fiecare pereche $A, A' \in \sum$. $\sum$ este trib dacă este clan și dacă conține reuniunea oricărei familii numărabile de mulțimi din $\sum$. $\sum$ se numește semitrib dacă este clan, iar pentru orice $A \in \sum$ urma $\sum_A$ a clanului $\sum$ pe A este un trib ; pentru aceasta este necesar și suficient ca $\sum$ să fie închis față de operația de intersecție numărabilă.

Fiind dat un spațiu vectorial topologic vom nota cu $\dot{F}$ spațiul vectorial topologic separat asociat iar $\hat{\dot{F}}$ va reprezenta completatul acestuia. Topologiile vor fi notate respectiv cu τ, $\dot{\tau}$, $\hat{\dot{\tau}}$, iar filtrele vecinătăților originei cu $\mathfrak{B}(0)$, $\dot{\mathfrak{B}}(0)$, $\hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$; prin $\varphi : F \rightarrow \hat{\dot{F}}$ vom nota aplicația canonică a spațiului F în $\hat{\dot{F}}$. Vom spune că o familie $\{\tau_\iota\}_{\iota \in I}$ de topologii pe F este suficientă, dacă τ_ι sînt compatibile cu structura vectorială a spațiului F iar marginea superioară a acestei familii este τ. Vom nota cu F_ι spațiul F înzestrat cu topologia τ_ι (respectiv $\dot{F}_\iota$, $\hat{\dot{F}}_\iota$) iar cu $\mathfrak{B}_\iota(0)$ ($\dot{\mathfrak{B}}_\iota(0)$, $\hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$) filtrul vecinătăților originei în $F_\iota(\dot{F}_\iota, \hat{\dot{F}}_\iota)$.

În cele ce urmează vom considera o mulțime E, un semitrib $\sum$ pe E și trei spații vectoriale topologice F', F'' și F. Pentru F rămîn valabile toate notațiile de mai sus, iar F', F'' vor primi cîte un accent, respectiv două. Aplicaţiile f de a căror integrabilitate ne vom ocupa vor fi definite pe E (sau pe submulţimi ale acesteia) şi vor avea valori, fie în mulţimea $\mathfrak{P}(F')$ a tuturor părţilor spaţiului F', fie în F'. Pentru a unifica cele două cazuri vom identifica orice punct $a' \in F'$ cu mulţimea $\{a'\}$, iar pentru $A \subset E$ vom scrie prin abuz de notaţie $f(A) = \bigcup_{x \in A} f(x)$, în afară de cazurile cînd se pot produce confuzii. F'' este spaţiul valorilor unei aplicaţii $m : \Sigma \rightarrow F'$ numărabil aditivă numită măsură, iar F spaţiul valorilor integralei.

Pentru orice $A \in \Sigma$ vom nota cu $\pi(A)$ mulţimea tuturor partiţiilor finite ale mulţimii A în mulţimi din Σ, iar pentru $V'' \in \mathfrak{V}''(0)$ vom nota prin $\varkappa(V'')$ mulţimea tuturor părţilor convexe şi echilibrate ale lui V''. Pentru orice $A' \in \Sigma_A$ şi $\Delta \in \pi(A)$ vom nota prin $\Delta_{A'}$ urma partiţiei Δ pe A'; evident, $\Delta_{A'} \in \pi(A')$.

§ 1. VARIAŢIA UNEI MĂSURI

DEFINIŢIA 1. *Vom spune că o mulţime* $E' \subset E$ *este* Σ*-măsurabilă (sau, mai simplu, măsurabilă), dacă* $\Sigma_{E'} \subset \Sigma$.

Evident, familia tuturor mulţimilor măsurabile din E este un trib ; E însăşi este o mulţime măsurabilă.

Fie $Q'' \subset F''$ o mulţime convexă şi echilibrată. După modelul funcţiei Minkowski vom ataşa acestei mulţimi funcţia

$$p_{Q''}(y) = \begin{cases} \inf\{\alpha : \alpha > 0,\ y \in \alpha Q''\} & \text{dacă aparţine spaţiului generat de } Q'', \\ +\infty \text{ în rest.} \end{cases}$$

Cu excepţia faptului că poate lua şi valori infinite, $p_{Q''}$ se bucură de toate proprietăţile seminormelor $(p_{Q''}(0) = 0$,

$$p_{Q''}(\lambda y) = |\lambda|\, p_{Q''}(y),\ p_{Q''}(y + z) \leqslant p_{Q''}(y) + p_{Q''}(z) \text{ etc.}).$$

DEFINIŢIA 2. *Fie* $V'' \in \mathfrak{V}''(0)$, $A \in \Sigma$, $\Delta = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ *şi* $Q'' \in \varkappa(V'')$. *Să notăm*

$$m_{p_{Q''}}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} p_{Q''}(m(A_i)),$$

$$m_{V''}(\Delta) = \inf_{Q'' \in \varkappa(V'')} m_{p_{Q''}}(\Delta),$$

$$m_{V''}(A) = \sup_{\Delta \in \pi(A)} m_{V''}(\Delta).$$

$m_{V''}(A)$ *se va numi* V''*-variaţia măsurii* m *pe* A. *Dacă* $m_{V''}(A) < +\infty$ *vom spune că* m *este cu* V'' *— variaţie mărginită pe* A ; *dacă aceasta are loc* *pentru orice* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$, *atunci* m *este cu variaţie mărginită pe* A. *Vom mai spune că* m *este cu variaţie finită pe o mulţime măsurabilă* $E' \subset E$ *dacă este cu variaţie mărginită pe fiecare mulţime* $A \in \sum_{E'}$.

LEMA 1. *Oricare ar fi* $A \in \sum$, $\Delta = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ *şi* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$, *variaţia* $m_{V''}(\Delta)$ *este finită.*

Demonstraţie. Fie $W'' \in \mathfrak{B}''(0)$ echilibrată cu $W'' + W'' + \ldots + W''$ (de n ori) $\subset V''$. Există $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ cu $m(A_i) \in \lambda_i W''$. Deoarece W'' este echilibrată, rezultă co $\left(\left\{0, \frac{1}{\lambda_i} m(A_i)\right\}\right) \subset W$ pentru orice i. Dar co $\left(\left\{0, \frac{1}{\lambda_1} m(A_1), \ldots, \frac{1}{\lambda_n} m(A_n)\right\}\right) \subset \sum_{i=1}^{n}$ co $\left(\left\{0, \frac{1}{\lambda_i} m(A_i)\right\}\right) \subset W'' + \ldots + W'' \subset V''$, deci înfăşurătoarea echilibrată Q'' a mulţimii $\left\{0, \frac{1}{\lambda_1} m(A_1), \ldots, \frac{1}{\lambda_n} m(A_n)\right\}$ este inclusă în V''. Rezultă $m_{V''}(\Delta) \leqslant m_{p_{Q''}}(\Delta) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < +\infty$.

PROPOZIŢIA 1. *V''-variaţiile $m_{V''}$ sînt monotone şi numărabil superaditive.*

Demonstraţie. Fie $A_i \in \sum (1 \leqslant i \leqslant n)$ disjuncte, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar. Există $\Delta_i \in \pi(A_i)$ cu $m_{V''}(A_i) < m_{V''}(\Delta_i) + \varepsilon/2n$. Evident, $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \in \pi(A)$. Să alegem $Q'' \in \varkappa(V'')$ astfel încît $m_{V''}(\Delta) > m_{p_{Q''}}(\Delta) + \varepsilon/2$. Atunci :

$$m_{V''}(A) \geqslant m_{V''}(\Delta) > m_{p_{Q''}}(\Delta) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{i=1}^{n} m_{p_{Q''}}(\Delta_i) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} m_{V''}(\Delta_i) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{n} m_{V''}(A_i) + \varepsilon$$

de unde rezultă superaditivitatea finită. Din aceasta rezultă imediat proprietatea de monotonie. Fie cum $A_i \in \sum (i = 1, 2, \ldots)$ disjuncte ; obţinem :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{V''}(A_i) \leqslant m_{V''}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant m_{V''}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

pentru orice n, deci

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_{V''}(A_i) \leqslant m_{V''}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

PROPOZIȚIA 2. *Dacă* $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\,(A_i \in \Sigma)$, V'', $W'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *cu* $W'' + \ldots + W''$ (de n ori) $\subset V''$ *și* $\Delta \in \pi(A)$, atunci

$$m_{V''}(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_{W''}(A_i),$$

$$m_{V''}(\Delta) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_{W''}(\Delta_{A_i}).$$

Demonstrație. Fie $\Delta' = \{A^k\}_{1\leqslant k\leqslant r} \in \pi(A)$ și $\varepsilon > 0$ arbitrare. Evident $\Delta'_{A_i} = \{A_i \cap A^k\}_{1\leqslant k\leqslant r} \in \pi(A_i)$. Să alegem $Q''_i \in \varkappa(W'')$ astfel încît $m_{p_{Q''_i}}(\Delta_i) < m_{W''}(\Delta_i) + \frac{\varepsilon}{n}\cdot$ Să observăm că $Q'' = \sum_{i=1}^{n} Q''_i \in \varkappa(V'')$; deoarece Q''_i conține originea, rezultă $Q'' \supset Q''_i$ pentru orice i. Atunci

$$m_{V''}(\Delta') \leqslant m_{p_{Q''}}(\Delta') = \sum_{k=1}^{r} p_{Q''}(m(A^k)) = \sum_{k=1}^{r} p_{Q''}\left(\sum_{i=1}^{n} m(A^k \cap A_i)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} p_{Q''}(m(A^k \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} p_{Q''}(m(A^k \cap A_i)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k+1}^{r} p_{Q''_i}(m(A^k \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} p_{Q''_i}(\Delta'_{A_i}) < \sum_{i=1}^{n} m_{W''}(\Delta'_{A_i}) + \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} m_{W''}(A_i) + \varepsilon$$

de unde rezultă $m_{V''}(\Delta') \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_{W''}(A_i)$. Dar Δ' este arbitrară, deci prima inegalitate din enunțul propoziției este verificată. A doua rezultă din relațiile de mai sus pentru $\Delta' = \Delta$.

PROPOZIȚIA 3. *Fie* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *și un șir de vecinități echilibrate* $V''_i \in \mathfrak{B}''(0)$ *cu* $V''_0 + V''_0 \subset V''$, $\ldots$, $V''_{i+1} + V''_{i+1} \subset V''_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. *Atunci pentru orice șir* $A_i \in \Sigma$ *pentru care* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$, *avem*

$$m_{V''}(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_{V''_i}(A_i),$$

iar pentru orice partiție $\Delta \in \pi(A)$

$$m_{V''}(\Delta) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_{V''_i}(\Delta_{A_i}).$$

Demonstrație. Fie date $\Delta' = \{A^k\}_{1\leqslant k\leqslant r} \in \pi(A)$ și $\varepsilon > 0$. Atunci $\Delta'_{A_i} = \{A_i \cap A^k\}_{1\leqslant k\leqslant r} \in \pi(A_i)$. Să alegem $Q''_i \in \varkappa(V''_i)$ cu proprietatea $m_{p_{Q''_i}}(\Delta'_{A_i}) < m_{V''_i}(\Delta'_{A_i}) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\cdot$ Fie $\widetilde{Q}''_n = \sum_{i=1}^{n} Q''_i$, $Q''_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{Q}''_n$. Deoarece Q''_i conține originea, rezultă $Q''_0 \supset Q''_i$ pentru orice i iar șirul Q''_n este ascendent, deci Q''_0 este convexă și echilibrată. Pe de altă parte $Q''_n =$

$= Q_1'' + \ldots + Q_{n-1}'' + Q_n'' \subset V_1'' + \ldots + V_{n-2}'' + (V_{n-1}'' + V_n'') \subset V_1'' + \ldots + V_{n-3}'' + (V_{n-2}'' + V_{n-2}'') \subset \ldots \subset V_1'' + V_1'' \subset V_0''$ oricare ar fi n, deci $Q_0'' \subset V_0''$, iar de aici rezultă $Q_0'' \in \varkappa(V_0'')$.

Fie $W_0'' \in \mathfrak{B}''(0)$ echilibrată cu $W'' + \ldots + W''$ (de r ori) $\subset V_0''$. Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i \cap A^k)$ există pentru orice k, se poate găsi un rang N astfel încît, notînd $y_N^k = \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} m(A_i \cap A^k) = m\left(\bigcup\limits_{i=N+1}^{\infty} A_i \cap A^k\right)$, să avem $y_N^k \in \dfrac{\varepsilon}{2r} W''$. Înfăşurătoarea convexă şi echilibrată a mulţimii $\left\{\dfrac{2r}{\varepsilon} y_N^k\right\}_{1 \leqslant k \leqslant r}$ este inclusă în V_0'' (vezi demonstrația lemei 1), deci înfăşurătoarea convexă şi echilibrată Q'' a mulţimii $Q_0'' \cup \left\{\dfrac{2r}{\varepsilon} y_N^k\right\}_{1 \leqslant k \leqslant r}$ va fi inclusă în V'', adică $Q'' \in \varkappa(V'')$. În plus, oricare ar fi k, $p_{Q''}(y_N^k) < \dfrac{\varepsilon}{2r}\cdot$ Atunci

$$m_{V''}(\Delta') \leqslant m_{p_{Q''}}(\Delta') = \sum_{k=1}^{r} p_{Q''}(m(A^k)) = \sum_{k=1}^{r} p_{Q''}\left(\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i \cap A^k)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{N} p_{Q''}(m(A_i \cap A^k)) + p_{Q''}(y_N^k)\right) < \sum_{i=1}^{N} m_{p_{Q''}}(\Delta'_{A_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} m_{p_{Q_i''}}(\Delta'_{A_i}) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{N} m_{V_i''}(\Delta'_{A_i}) + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{N} m_{V_i''}(A_i) + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_{V_i''}(A_i) + \varepsilon$$

şi prima parte a teoremei este demonstrată, deoarece Δ' şi ε sînt arbitrare. Pentru partea a doua se va lua $\Delta' = \Delta$.

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $A_i \in \sum$ *disjuncte cu* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \sum$ *și* $\Delta \in \pi(A)$. *Atunci pentru orice* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *și orice* $\varepsilon > 0$ *există un rang* N *astfel încît, notînd* $\overline{A}_n = \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i$, *să avem* $m_V''(\Delta_{\overline{A}_n}) < \varepsilon$ *pentru orice* $n \geqslant N$.

Demonstrație. Fie $\Delta = \{A^k\}_{1 \leqslant k \leqslant r}$ şi să alegem $W'' \in \mathfrak{B}''(0)$ echilibrată cu $W'' + \ldots + W''$ (de n ori) $\subset V''$. Notînd, şi aici, $y_n^k = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} m(A_i \cap A^k) = m(\overline{A}_n \cap A_k)$ vom putea găsi un rang N astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ să avem $y_n^k \in \dfrac{\varepsilon}{2r} W''$ oricare ar fi k. Presupunînd $n \geqslant n$, fie Q_n'' înfăşurătoarea convexă şi echilibrată a mulţimii $\left\{\dfrac{2r}{\varepsilon} y_n^1, \ldots, \dfrac{2r}{\varepsilon} y_n^r\right\}$. Evident, $Q_n'' \in \varkappa(V'')$. Atunci

$$m_{V''}(\Delta_{\overline{A}_n}) \leqslant m_{p_{Q_n''}}(\Delta_{\overline{A}_n}) = \sum_{k=1}^{r} p_{Q_n''}(m(\overline{A}_n \cap A^k)) = \sum_{k=1}^{r} p_{Q_n''}(y_n^k) < \varepsilon.$$

COROLAR. *Fie* $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$ *un şir descendent de mulţimi din* $\sum$ *cu intersecţia vidă. Atunci pentru orice* $\Delta \in \pi(A_1)$ *şi orice* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} m_{V''}(\Delta_{A_i}) = 0.$$

DEFINIŢIA 3. *Dacă* F'' *este separat, o mulţime măsurabilă* $N \subset E$ *se numeşte local m-neglijabilă dacă pentru orice* $A \in \sum_N$ *avem* $m(A) = 0$. *Dacă, în plus,* $N \in \sum$, *atunci* N *se va numi m-neglijabilă.*

Dacă F'' *nu este separat, vom spune că* N *este (local) m-neglijabilă dacă este (local)* $\varphi'' \circ m$ *— neglijabilă.*

În mod asemănător se introduc noţiunile „aproape peste tot" şi „local aproape peste tot".

Evident, orice reuniune numărabilă de mulţimi local m-neglijabile este local m-neglijabilă. Dacă reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi m-neglijabile aparţine semitribului $\sum$, atunci ea este m-neglijabilă.

PROPOZIŢIA 5. *O condiţie necesară şi suficientă ca* $A \in \sum$ *să fie m-neglijabilă, este ca pentru orice* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *să avem* $m_{V''}(A) = 0$.

Demonstraţie. Vom putea presupune spaţiul F'' separat. Necesitatea condiţiei fiind evidentă, să presupunem că deşi această condiţie este îndeplinită, există $A' \in \sum_A$ cu $m(A') \neq 0$. Fie $V_1'' \in \mathfrak{B}''(0)$ cu $m(A') \notin V_1''$. În acest caz pentru orice $Q'' \in \varkappa(V_1'')$ avem $m_{p_{Q''}}(\{A', A \setminus A'\}) \geqslant \geqslant p_{Q''}(m(A')) \geqslant 1$ de unde $m_{V_1''}(\{A', A \setminus A'\}) \geqslant 1$ şi *a fortiori* $m_{V_1''}(A) \geqslant 1$.

Dacă spaţiul F'' este local convex, atunci, luînd $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ convexă şi echilibrată, obţinem $m_{V''}(\Delta) = m_{p_{V''}}(\Delta)$ deci $m_{V''}(A)$ este variaţia obişnuită construită cu ajutorul seminormei $p_{V''}$. Se ştie că această variaţie este numărabil aditivă. De aici rezultă

LEMA 2. *Fie* $A_i \in \sum$ *cu* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sum$ *şi* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$. *Dacă* F'' *este local convex iar m este cu* V''*-variaţie finită pe* A, *atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un rang* N *astfel încît, oricare ar fi* $n \geqslant N$, *să avem*

$$m_{V''}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) < \varepsilon .$$

LEMA 3. *Dacă* F'' *este local convex, iar* $\{A_i\}_{i=1,2}\dots$ *este un şir descendent de mulţimi din* $\sum$ *cu intersecţia vidă, atunci pentru orice* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *pentru care m este cu* V''*-variaţie finită pe cel puţin o mulţime* A_i *avem*

$$\lim_{i\to\infty} m_{V''}(A_i) = 0.$$

LEMA 4. *Dacă* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *este convexă şi echilibrată, atunci pentru orice* $A \in \sum$, $A' \in \sum_A$ *şi* $\Delta \in \pi(A)$ *avem*

$$m_{V''}(A') - m_{V''}(\Delta_{A'}) \leqslant m_{V''}(A) - m_{V''}(\Delta_A).$$

Demonstrație. Dacă $m_{V''}(A) = +\infty$, relația este evidentă. În cazul contrar, notînd cu Δ' partiția obținută prin compunerea partițiilor Δ și $\{A', A \setminus A'\}$ vom obține

$$m_{V''}(A) - m_{V''}(\Delta_A) \geqslant m_{V''}(A) - m_{V''}(\Delta'_A) = m_{V''}(A') +$$
$$+ m_{V''}(A \setminus A') - m_{P_{V''}}(\Delta'_A) \geqslant (m_{V''}(A') - m_{V''}(\Delta_{A'})) +$$
$$+ (m_{V''}(A \setminus A') - m_{V''}(\Delta_{A \setminus A'})) \geqslant m_{V''}(A') - m_{V''}(\Delta_{A'}).$$

§ 2. APLICAȚII MĂSURABILE

DEFINIȚIA 4. *Vom spune că o aplicație* $f: E \rightarrow \mathfrak{P}(F')$ *este m-măsurabilă (sau, mai simplu, măsurabilă) pe mulțimea* $A \in \sum$ *dacă satisface condiția :*

(M$_1$). *Pentru orice* $V' \in \mathfrak{B}'(0)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *și* $\eta > 0$ *există* $Q' \in \varkappa(V')$ *și o partiție finită* $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ *cu* $m_{V''}(A_1) < \eta$ *iar pentru* $i \geqslant 2$ *mulțimea* $f(A_i)$ *(reprezentînd, conform abuzului de notație acceptat,* $\bigcup\limits_{x \in A_i} f(x)$*) să fie mică în raport cu* Q' *(adică* $f(A_i) - f(A_i) \subset Q'$*).*

Vom spune de asemenea că f este m-măsurabilă pe o mulțime măsurabilă $E' \subset E$ *dacă ea este măsurabilă pe fiecare mulțime din* $\sum_{E'}$.

PROPOZIȚIA 6. *Dacă* F'' *este local convex iar m este cu variație mărginită pe A, atunci condiția* (M$_1$) *este echivalentă cu fiecare din următoarele condiții :*

(M$_2$). *Pentru fiecare pereche* $V' \in \mathfrak{B}'(0)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *există* $Q' \in \varkappa(V')$ *astfel încît pentru orice* $\eta > 0$ *să existe o partiție finită* $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ *cu* $m_{V''}(A_1) < \eta$ *iar pentru* $i \geqslant 2$ *mulțimea* $f(A_i)$ *să fie mică în raport cu* Q'.

(M$_3$). *Pentru orice* $V' \in \mathfrak{B}'(0)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *există o mulțime* $Q' \in \varkappa(V')$ *și o descompunere* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ *cu* $A_i \in \sum$, $m_{V''}(A_1) = 0$ *iar pentru* $i \geqslant 2$ *mulțimea* $f(A_i)$ *să fie mică în raport cu* Q'.

(M$_4$). *Pentru* $V' \in \mathfrak{B}'(0)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *există* $Q' \in \varkappa(V')$ *astfel încît pentru orice* $A' \in \sum_A$ *cu* $m_{V''}(A') \neq 0$ *să existe* $A'' \in \sum_{A'}$ *cu* $m_{V''}(A'') \neq 0$ *astfel ca* $f(A'')$ *să fie mică în raport cu* Q'.

Demonstrație. Să verificăm implicația (M$_4$) $\Rightarrow$ (M$_3$). Presupunînd (M$_4$) îndeplinită și V', V'' date, fie $Q' \in \varkappa(V')$ cu proprietatea din enunțul condiției (M$_4$). Dacă $m_{V''}(A) = 0$, condiția (M$_3$) este satisfăcută ; în cazul contrar există mulțimi $M \in \sum_A$ pentru care $f(M)$ să fie mică în raport cu Q' iar $m_{V''}(M) > 0$. Fie $\theta_2 = \sup\limits_{M \in \Sigma_A} m_{V''}(M)$ și $A_2 \in \sum_A$ cu $m_{V''}(A_2) > \frac{\theta_2}{2}$. Presupunînd definite mulțimile $A_2, \ldots, A_{i-1}$ dacă $m_{V''}(A \setminus \bigcup\limits_{j=2}^{i-1} A_j) = 0$, condiția (M$_3$) este verificată ; în caz contrar fie $\theta_i = \sup m_{V''}(M)$, marginea superioară fiind luată pentru toate mulțimile $M \in \sum_{A \setminus \bigcup_{j=2}^{i-1} A_j}$ pentru care $f(M)$ este mică în raport cu Q'. A_i va fi ales dintre mulțimile de acest tip cu $m_{V''}(A_i) > \frac{\theta_i}{2}$. Presupunînd că această construcție nu se oprește pentru nici un indice finit, fie $A_1 = A \setminus \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i$. Vom arăta că $m_{V''}(A_1) = 0$ și prin aceasta condiția (M_3) va fi satisfăcută. Presupunînd $m_{V''}(A_1) > 0$, ar exista $M_0 \in \sum_{A_1}$ cu $m_{V''}(M_0) > 0$ și $f(M_0)$ mică în raport cu Q'. Dar $\theta_i \to 0$ deoarece $\sum_{i=2}^{\infty} \theta_i \leqslant 2 \sum_{i=2}^{\infty} m_{V''}(A_i) \leqslant 2\, m_{V''}(A) < +\infty$, deci există $\theta_{i_0} < \frac{1}{2} m_{V''}(M_0)$ ceea ce contrazice alegerea numărului θ_{i_0} căci $M_0 \subset A \setminus \bigcup_{i=2}^{i_0-1} A_i$. Să observăm că în acest raționament n-am folosit ipoteza că F'' este local convex.

Presupunînd îndeplinită (M_3), fie $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ cu $A_i \in \sum$ disjuncte, descompunerea din enunțul condiției (M_3) și $\eta > 0$ arbitrar dat. Folosind lema 2 vom găsi un rang n astfel încît, notînd $A_0 = A_1 \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$, să avem $m_{V''}(A_0) < \eta$. Atunci (M_2) este satisfăcută de partiția $\{A_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

Implicația (M_2) $\Rightarrow$ (M_1) este evidentă. În sfîrșit, presupunînd îndeplinită (M_1) și luînd $\eta < m_{V''}(A)$, din faptul că $m_{V''}$ este aditivă rezultă că pe cel puțin una din mulțimile A_i ($i \geqslant 1$) din enunțul condiției (M_1) variația $m_{V''}$ este diferită de zero, de unde rezultă îndeplinirea condiției (M_4).

Dacă spațiul F' este local convex, enunțurile celor patru condiții (M_1) — (M_4) se simplifică suprimîndu-se „există o mulțime $Q' \in \varkappa(V')$" și folosind V' în locul mulțimii Q'.

PROPOZIȚIA 7. *Proprietatea „f este m-măsurabilă pe mulțimea măsurabilă $E' \subset E$" este echivalentă cu fiecare din proprietățile :*

— „f este $\varphi''\circ\, m$-măsurabilă pe E'"

— „$\varphi'\circ f$ este m-măsurabilă pe E'"

— „$\varphi'\circ f$ este $\varphi''\circ\, m$-măsurabilă pe E'"

PROPOZIȚIA 8. *Orice aplicație egală local aproape peste tot cu o aplicație măsurabilă, este măsurabilă.*

PROPOZIȚIA 9. *Mulțimea tuturor aplicațiilor $f : E' \to \mathfrak{P}(F')$ măsurabile pe E' formează un spațiu vectorial (real sau complex după cum este și spațiul F').*

Demonstrație. Fie f_1, f_2 măsurabile, α_1, α_2 scalari și $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$. Pentru $A \in \sum_{E'}$, $V' \in \mathfrak{V}'(0)$, $V'' \in \mathfrak{V}''(0)$ să alegem $W' \in \mathfrak{V}'(0)$, $W'' \in \mathfrak{V}''(0)$ cu $|\alpha_1| W' + |\alpha_2| W' \subset V'$ respectiv $W'' + W'' \subset V''$. Există $Q_1', Q_2' \in \varkappa(W')$ astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe cîte o partiție $\{A_j^1\}_{1 \leqslant j \leqslant n_1}$, $\{A_k^2\}_{1 \leqslant k \leqslant n_2} \in \pi(A)$ cu $m_{W''}(A_1^1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $m_{W''}(A_1^2) < \frac{\varepsilon}{2}$

iar pentru j, $k \geqslant 2$ mulțimile $f\,(A_j^1)$, $f\,(A_k^2)$ să fie mici în raport cu Q' respectiv Q'_2. Fie $Q' = |\,\alpha_1|\,Q'_1 + |\,\alpha_2|\,Q'_2 \subset |\,\alpha_1|\,W'_1 + |\,\alpha_2|\,W'_2 \subset V'$. Evident, Q' este convexă și echilibrată deci $Q' \in \varkappa\,(V')$. Să notăm $A_1 = A_1^1 + A_1^2$ și fie $\{A_i\}_{2 \leqslant i \leqslant n}$ familia tuturor intersecțiilor finite de mulțimi din $\{A_j^1\}_{2 \leqslant j \leqslant n_1}$, $\{A_k^2\}_{2 \leqslant k \leqslant n_2}$. Pentru orice i avem $f\,(A_i) - f\,(A_i) = \alpha_1\,(f_1\,(A_i) - f_1\,(A_i)) + \alpha_2\,(f_2\,(A_i) - f_2\,(A_i)) \subset |\,\alpha_1|\,Q'_1 + |\,\alpha_2|\,Q'_2 \subset Q'$ iar, pe de altă parte, din propoziția 2 rezultă $m_{V''}\,(A_1) \leqslant m_{W''}\,(A'_1) + m_{W''}\,(A_1^2) < \varepsilon$ deci f este măsurabilă pe E'.

PROPOZIȚIA 10. *O aplicație măsurabilă rămîne măsurabilă dacă se înlocuiește una sau ambele topologii ale spațiilor F', F'' cu topologii mai slabe (compatibile cu structurile vectoriale respective).*

Reciproc, pentru ca o aplicație să fie măsurabilă este (necesar și) suficient ca să existe două familii suficiente de topologii $\{\tau'_\alpha\}$, $\{\tau''_\beta\}$ pentru F' respectiv F'' astfel ca aplicația să fie măsurabilă pentru fiecare pereche de topologii τ'_α, τ''_β (adică relativ la spațiile F'_α, F''_β).

PROPOZIȚIA 11. *Fie E un spațiu local compact, μ o măsură Radon pe E și F' un spațiu local convex separat. O condiție necesară și suficientă ca o aplicație $f : E \to F'$ să fie scalar μ-măsurabilă (în sensul din* [2], *Cap. VI) este ca f să fie măsurabilă în sensul definiției noastre, atunci cînd înzestrăm F' cu topologia slăbită.*

Demonstrație. Măsurabilitatea scalară înseamnă măsurabilitatea (în sensul din [2]) a fiecărei aplicații $z' \circ f$, z' parcurgînd dualul spațiului F'. Dar $z' \circ f$ este măsurabilă dacă și numai dacă f este măsurabilă (în sensul din [1]) în topologia lui F' definită de seminorma $|\,z'\,|$. Deoarece această topologie este semimetrizabilă, din teorema 2 din [10] rezultă că în ea măsurabilitatea definită în [2] și cea din prezenta lucrare coincid. Nu mai rămîne decît să aplicăm propoziția precedentă.

Observație. Deoarece există funcții scalar μ-măsurabile care nu sînt μ-măsurabile din propoziția precedentă, rezultă că noțiunea noastră de măsurabilitate a unei aplicații este efectiv mai largă decît cea din [2].

§ 3. APLICAȚII MĂRGINITE

DEFINIȚIA 5. *Fie $E' \subset E$ măsurabilă și $f : E' \to \mathfrak{P}\,(F')$. Vom spune că*

1. *f este mărginită pe E' (și vom nota această proprietate prin* (B)) *dacă mulțimea* co $(f\,(E'))$ *este mărginită în F'.*

2. *f este aproape mărginită* (PB) *pe E' dacă există o mulțime m-neglijabilă $N \in \sum_{E'}$ astfel încît* co $(f\,(E' \setminus N))$ *să fie mărginită.*

3. *f este cvasiaproape mărginită* (QPB) *pe E' dacă pentru orice $V' \in \mathfrak{B}'\,(0)$ există o mulțime m-neglijabilă $N \in \sum_{E'}$ astfel încît* co $(f\,(E' \setminus N))$ *să fie absorbită de V'.*

4—6. *f posedă local pe E' una din proprietățile de mai sus (și vom nota aceasta prin* (LB), (LPB), (LQPB), *dacă are acea proprietate pe orice $A \in \sum_{E'}$.*

7—12. *f este cvasiaproape semimărginită pe E'* (QPSB) *dacă pentru orice $V' \in \mathfrak{B}'\,(0)$ există o mulțime m-neglijabilă $N \in \sum_{E'}$ astfel încît mulți-*

mea $f(E' \setminus N)$ *să fie absorbită de* V'. *În mod asemănător se definesc și celelalte cinci noțiuni* (SB), (PSB), (LSB), (LPSB), *și* (LQPSB).

Oricare din aceste proprietăţi este mai restrictivă decît o altă proprietate dacă literele folosite pentru prescurtarea denumirii primeia apar şi la cea de-a doua. Dacă F' este local convex, atunci oricare din cele şase condiţii de ,,mărginire'' este echivalentă cu proprietatea corespunzătoare de ,,semimărginire''. Dacă F' este semimetrizabil, atunci oricare din cele patru proprietăţi de ,,cvasimărginire'' este echivalentă cu proprietatea corespunzătoare de ,,mărginire''. Astfel, dacă F' este semimetrizabil şi local convex, nu rămîn decît patru condiţii distincte : (B), (PB), (LB) şi (LPB).

Este evident că oricare din aceste proprietăţi rămîne îndeplinită dacă se înlocuieşte topologia spaţiului F' cu o topologie mai slabă (compatibilă cu structura vectorială). Reciproc avem

PROPOZIŢIA 12. *O condiție (necesară și) suficientă ca* f *să posede una din proprietățile de ,,cvasiaproape mărginire''* (QPB), (LQPB), (QPSB) *sau* (LQPSB) *pe* E' *este ca să existe o familie de topologii* $\{\tau_\iota\}$ *suficientă pentru spațiul* F' *astfel ca* f *să posede acea proprietate pentru fiecare din aceste topologii.*

COROLAR. *Dacă* E *este local compact,* F' *local convex iar* μ *o măsură Radon pe* E, *o condiție necesară și suficientă ca* f *să fie (local) cvasiaproape mărginită în topologia slăbită a spațiului* F', *este ca* f *să fie (local) scalar aproape mărginită (în sensul din* [1]).

Combinînd măsurabilitatea cu mărginirea, obţinem următoarele două proprietăţi, care se vor dovedi utile în teoria integrării :

DEFINIŢIA 6. *Vom spune că* f *are, pe mulțimea* E', *proprietatea*

(M_5), *dacă pentru* $A \in \sum_{E'}$, $V' \in \mathfrak{B}'(0)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ şi $\varepsilon > 0$ *arbitrari există* $Q' \in \varkappa(V')$ *și* $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ *astfel ca* A_1 *să fie m-neglijabilă,* $m_{V''}(A_2) < \varepsilon$, V' *să absoarbă* co $(f(A_2))$ *iar pentru* $i \geqslant 3$ *mulțimea* $f(A_i)$ *să fie mică în raport cu* Q',

(M_6) *dacă pentru orice* $A \in \sum_{E'}$ *și* $V' \in \mathfrak{B}'(0)$ *există* $Q' \in \varkappa(V')$ *și* $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ *astfel încît fiecare* $f(A_i)$ *să fie mică în raport cu* Q'.

Evident, (M_6) implică (M_5). Să mai observăm că (M_6) nu depinde de m ci numai de $\sum$.

PROPOZIŢIA 13. 1. *Pentru oricare din cele 14 proprietăți introduse prin definițiile 5 și 6 mulțimea tuturor aplicațiilor* $f : E' \to \mathfrak{P}(F')$ *(sau de forma* $f : E' \to F'$*) care posedă acea proprietate pe* E', *formează un spațiu vectorial (în raport cu același corp ca și spațiul* F'*).*

2. *Dacă* f *posedă una din cele 14 proprietăți pe* E', *atunci ea posedă acea proprietate pe orice submulțime măsurabilă a lui* E'.

3. *Dacă* f *posedă una din aceste proprietăți pe o familie finită de mulțimi măsurabile, atunci ea posedă acea proprietate și pe reuniunea lor.*

4. *Dacă o aplicație este egală aproape peste tot cu o aplicație care posedă una din proprietățile de mai sus, atunci și ea posedă acea proprietate. Pentru* (M_5), (M_6) *și cele șase proprietăți de ,,local mărginire''* ((LB), ... (LQPSB)), *este suficient ca cele două aplicații să fie egale local aproape peste tot.*

PROPOZIȚIA 14. *O aplicație măsurabilă și local cvasiaproape mărginită pe o mulțime măsurabilă E' posedă proprietatea* (M_5) *pe acea mulțime.*

Demonstrație. Fie $A \in \sum_{E'}$, $V' \in \mathfrak{B}'(0)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ și $\varepsilon > 0$. f fiind cvasiaproape mărginită pe A, există o mulțime m-neglijabilă A_1 astfel încît V' să absoarbă co $(f(A \setminus A_1))$. Deoarece f este și m-măsurabilă, există $Q' \in \varkappa(V')$ și $\{A_i\}_{2 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A \setminus A_1)$ astfel ca $m_{V''}(A_2) < \varepsilon$ iar pentru $i \geqslant 3$ mulțimea $f(A_i)$ să fie mică în raport cu Q'. Propoziția este astfel demonstrată.

COROLAR. *Dacă F' este local convex, atunci proprietatea* (M_5) *este echivalentă cu îndeplinirea simultană a condițiilor de m-măsurabilitate și local cvasiaproape mărginire.*

Demonstrație. Să presupunem că f posedă proprietatea (M_5) pe $E' \subset \subset E$. Ea este evident m-măsurabilă. Fie $A \in \sum_{E'}$ și $V' \in \mathfrak{B}'(0)$ convexă și echilibrată; să alegem $W' \in \mathfrak{B}'(0)$ cu $W' + W' \subset V'$. Din (M_5) rezultă existența unei partiții $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ și a unui număr $\lambda_i > 0$ cu A_1 m-neglijabilă, $\lambda_2 f(A_2) \subset W' \subset V'$ iar pentru $i \geqslant 3$ mulțimea $f(A_i)$ să fie mică de ordinul W'. Să fixăm pentru fiecare $i \geqslant 3$, $y_i \in f(A_i)$. Atunci $f(A_i) \subset \subset y_i + W$. Fie λ_i $(0 < \lambda_i < 1)$ astfel ca $\lambda_i y_i \in W'$; de aici rezultă $\lambda_i f(A_i) \subset \lambda_i y_i + \lambda_i W' \subset W' + W' \subset V'$. Notînd $\lambda = \min\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$ rezultă $\lambda f(A \setminus A_1) \subset V'$.

LEMA 5. *Fie f o aplicație posedînd proprietatea* (M_6) *pe $A \in \sum$. Să notăm, pentru orice $V' \in \mathfrak{B}'(0)$, $B_{V'} = \{x : x \in A,\ f(x) \notin V'\}$. În aceste condiții, există o mulțime $A_{V'} \in \sum$ astfel ca $B_{V'+V'} \subset A_{V'} \subset B_{V'}$.*

Demonstrație. Fie $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ cu proprietatea că $f(A_i)$ este mică de ordinul V' pentru fiecare i. Oricărui $x \in B_{V'+V'}$ îi corespunde un indice i_x $(1 \leqslant i_x \leqslant n)$ astfel ca $x \in A_{i_x}$; să observăm că $A_{i_x} \subset B_{V'}$, deci putem lua $A_{V'} = \bigcup\limits_{x \in B_{V'+V'}} A_{i_x}$.

Se spune că un șir de aplicații $f_n : E' \to \mathfrak{P}(F')$ converge ((local) aproape peste tot) către o aplicație $f : E' \to F'$ dacă pentru orice (pentru (local) aproape orice) $x \in E$ și orice vecinătate $V' \in \mathfrak{B}'(0)$ există un rang N astfel încît $n \geqslant N$ să implice $f_n(x) \subset f(x) + V'$. În mod asemănător se definește convergența uniformă.

PROPOZIȚIA 15 (Egorov). *Presupunînd spațiul F' semimetrizabil dacă șirul $f_n : E' \to \mathfrak{P}(F')$ de aplicații m-măsurabile pe $E' \subset E$ converge local aproape peste tot în E' către $f : E' \to F'$, atunci pentru orice $A \in \sum_{E'}$,*

$\Delta \in \pi(A)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ și $\varepsilon > 0$ *există* $A' \in \sum_A$ *cu* $m_{V''}(A \setminus A') < \varepsilon$ *astfel ca* f_n *să convergă uniform pe* A' *către* f.

Demonstrație. Fie $\{V'_i\}_{i=1,2,\ldots}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale originei în F' satisfăcînd relațiilor $V'_{i+1} + V'_{i+1} \subset V_i$ $(i = 1,2, \ldots)$ și $\{V''_j\}_{j=0,1,\ldots}$ un șir de vecinătăți din $\mathfrak{B}''(0)$ astfel ca $V''_0 + V''_0 \subset V''$, $V''_{i+1} + V''_{i+1} \subset V''_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Pentru fiecare aplicație f_n și fiecare indice $i \geqslant 1$ există o partiție finită $\{A_{n,i,k}\}_k \in \pi(A)$ cu $m_{V''_{n+i+2}}(A_{n,i,1}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+i+1}}$, iar pentru $k \geqslant 2$, $f(A_{n,i,k}) - f(A_{n,i,k}) \subset V_i$. Să notăm $A'' = \bigcup_{n,i} A_{n,i,1}$ și $A''' = A \setminus A'$. Din $m_{V''_{n+1}}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i,1}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_{V''_{n+i+2}}(A_{n,i,1}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ rezultă $m_{V''_0}(A'') = m_{V''_0}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} A_{n,i,1}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m_{V''_{n+1}}(A_{n.i.1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Evident, f posedă proprietatea (M_5) pe A'''.

Să notăm $B^i_{m,n} = \{x : x \in A''', f_m(x) - f_n(x) \not\subset V_i\}$. Folosind lema precedentă să alegem cîte o mulțime $A^i_{m,n} \in \sum$ astfel încît $B^i_{m,n} \subset A^i_{m,n} \subset B^{i+1}_{m,n}$. Fie $B^i_N = \bigcup_{m,n \geqslant N} B^i_{m,n}$, $A^i_N = \bigcup_{m,n \geqslant N} A^i_{m,n}$. Evident, $A^i_N \in \sum$ și $B^i_N \subset A^i_N \subset B^{i+1}_N$.

Folosind propoziția 4 vom găsi un rang N_i pentru care $m_{V''_{i+1}}\left(\Delta_{A^i_{N_i}}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\cdot$ Notînd $A^{IV} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i_{N_i}$ obținem $m_{V''_0}(A^{IV}) < \sum_{i=1}^{\infty} m_{V''_{i+1}}(A^i_{N_i}) < \frac{\varepsilon}{2}$ deci $m_{V''}(\Delta_{A'' \cup A^{IV}}) \leqslant m_{V''_0}(A'') + m_{V''_0}(\Delta_{A^{IV}}) < \varepsilon$. Teorema este astfel demonstrată deoarece șirul f_n este în mod evident uniform convergent către f pe $A' = A \setminus (A'' \cup A^{IV})$.

COROLAR. *Dacă* F' *este semimetrizabil,* F'' *este local convex, iar șirul* $f_n : E' \to \mathfrak{P}(F')$ *converge local a.p.t. către* $f : E' \to F'$, *atunci pentru orice* $A \in \sum_{E'}$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *și* $\varepsilon > 0$ *există* $A' \in \sum_A$ *cu* $m_{V''}(A \setminus A') < \varepsilon$ *astfel încît* f_n *să conveargă uniform către* f *pe* A'.

Primită la redacție la 8 aprilie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. G. BIRKHOFF, *Integration of functions with values in a Banach Space.* Trans. Amer. Math. Soc., **38**, 357–378 (1935).
2. N. BOURBAKI, *Intégration.* Chap. I–VI, Hermann, Paris, 1952, 1956, 1959.
3. A. DENJOY, *Métrique sans topologie. Définition des fonctions mesurables, non dogmatique mais exigée par l'intégration.* C.R. Acad. Sci., Paris, **257**, 2776–2781 (1963).

4. N. Dinculeanu, *Teoria măsurii şi funcţii reale*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
5. N. Dinculeanu, *Mesures vectorielles sur les espaces localement compacts*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phis. R.P.R., **2 (50)**, 137—163 (1958).
6. A. Kolmogoroff, *Untersuchungen über den Integralbegriff*. Math. Ann., **103**, 654—696 (1930).
7. Miron Nicolescu, *Analiza matematică*. vol. III, Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.
8. Miron Nicolescu, *Sur les fonctions mesurables* (*J*). Bulletin des Sciences Math., **57**, 276—281 (1933).
9. R. S. Phillips, *Integration in a convex linear topological space*. Trans. Amer. Math. Soc., **47**, 114—145 (1940).
10. V. Popescu, *Asupra definiţiei funcţiilor măsurabile*. St. cerc. mat., **17**, *9*, 1457—1461 (1965).
11. G. B. Price, *The theory of integration*. Trans. Amer. Math. Soc., **47**, 1—50 (1940).
12. C. E. Rickart, *Integration in a convex linear topological space*. Trans. Amer. Math. Soc., **52**, 498—528 (1942).
13. G. Sâmboan, *Vectorial measures*. Révue de Mathematiques pures et appliquées, Acad. R.P.R., 7, 383—415 (1962).

ASUPRA UNEI CLASE DE SPAȚII RIEMANN OMOGENE

DE

C. TELEMAN

În această lucrare se dau unele proprietăți ale spațiilor riemanniene omogene, a căror metrică, față de hărți locale convenabile, este de forma (1). Aceste spații se obțin din spații riemanniene omogene H'/K (K fiind subgrup compact al grupului Lie H), căutînd grupuri Lie Γ ce admit pe H' ca subgrup invariant de codimensiune 1, printr-un procedeu ce este descris în lucrare. Spațiul omogen H'/K admite o familie de metrici invariante de forma (18).

În lucrările anterioare [1], [2] am arătat că dacă un spațiu Riemann cu curbură variabilă omogen V_n de dimensiune n ($n = 2p$ sau $n = 2p + 1$) admite un grup de mișcări G avînd dimensiunea r mai mare decît $n + p^2$, atunci metrica spațiului se poate aduce, printr-o alegere convenabilă a unei hărți locale, la forma

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{-2y^{m'}} [(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^m)^2] + \mathrm{d}\sigma^2,$$

unde $\mathrm{d}\sigma^2$ este o metrică în coordonatele $y^1, \ldots, y^{m'}$, ai cărei coeficienți nu depind de coordonata $y^{m'}$ și unde $m > m'$, $n = m + m'$.

În această lucrare vom studia spațiile omogene avînd în raport cu hărți locale convenabil alese, metrici de forma (1).

1. În [2] am arătat că grupul local G^0 de mișcări al metricii (1) este format din transformări de forma

$$(2_1) \qquad x'^h = \mathrm{e}^{-a}(c^h_k x^k + c^h), \qquad (h, k = 1, \ldots, m;\ c^h_k c^h_l = \delta_{kl}),$$

$$(2_2) \qquad y'^\alpha = \varphi^\alpha(y^1, \ldots, y^{m'+h}), \qquad (\alpha = 1, \ldots, m'),$$

$$(2_3) \qquad y'^{m'+1} = y^{m'+1} + a.$$

Transformările $(2_2) + (2_3)$ formează un grup local Γ^0, de dimensiune $r - \dfrac{m(m+1)}{2}$, de mișcări ale metricii $\mathrm{d}\sigma^2$ și acest grup local este tranzitiv, deoarece spațiul V_n este omogen.

ST. CERC. MAT., TOM., 17, NR. 10. P. 1529–1537, BUCUREȘTI, 1965

Transformările $(2_2) + (2_3)$, pentru care $a = 0$, formează un divizor normal H^0 al grupului Γ^0, de dimensiune $r - \frac{m(m+1)}{2} - 1$.

Să notăm cu g^0 grupul local de dimensiune 1 format din transformările

$$x'^h = e^{-2a} x^h, \; y'^\alpha = y^\alpha, \; y'^{m'} = y^{m'} + a, \tag{3}$$

cu A_m grupul format din transformările (2_1), iar cu D_m divizorul normal al grupului A_m, format din transformările (2_1) cu $a = 0$.

Algebra Lie $L(G)$ a grupului G admite o bază formată din $m(m+1)/2$ elemente $X_p \in L(D_m)$, din $r - \frac{m(m+1)}{2} - 1$ elemente $Y_q \in L(H^0)$ și dintr-un element $Z \in L(g)$ și avem formule de forma

$$[X_{p'}, X_{p''}] = C^p_{p'p''} X_p, \tag{4_1}$$

$$[Z, X_{p'}] = C^p_{p'} X_p \tag{4_2}$$

$$[Y_{q'}, Y_{q''}] = d^q_{q'q''} Y_q, \tag{4_3}$$

$$[Z, Y_{q'}] = d^q_{q'} Y_q \tag{4_4}$$

$$[X_p, Y_q] = 0. \tag{4_5}$$

Simbolic, aceste relații se pot scrie sub forma

$$[L(D_m), L(D_m)] \subset L(D_m), \; [L(H^0), L(H^0)] \subset L(H^0),$$

$$[L(g), L(D_m)] \subset L(D_m), \; [L(g), L(H^0)] \subset L(H^0), \; [L(D_m), L(H^0)] = 0.$$

Coeficienții $C^p_{p'p''}$ sînt determinați, D_m fiind grupul mișcărilor spațiului euclidian E^m. De asemenea, coeficienții $C^p_{p'}$ sînt complet determinați.

Coeficienții $d^q_{q'q''}$, $d^q_{q'}$ depind de metrica $d\sigma^2$ și se pot caracteriza fie prin condiția ca $L(H^0)$ să fie un ideal al algebrei $L(\Gamma^0)$, fie spunînd că formulele

$$Y_{q'} \to d^q_{q'} Y_q \tag{5}$$

definesc o derivare [3] δ a algebrei $L(H^0)$. Într-adevăr, vom arăta că dacă ultimele două condiții (evident echivalente) sînt îndeplinite, atunci formulele (4) sînt formulele de structură ale algebrei Lie a grupului de mișcări al unui spațiu Riemann de tipul (1).

Într-adevăr, fie Γ un grup Lie avînd algebra Lie $L(\Gamma)$ izomorfă cu algebra definită de formulele (4_3), (4_4). Acest grup va admite un divizor normal H, avînd algebra Lie cu structura (4_3). Fie R grupul aditiv al numerelor reale. Acest grup acționează în grupul H ca grup de automorfisme dacă punem pentru orice $t \in R$ și $h \in H$,

$$h^t = \exp(tZ)^{-1} h \exp(tZ). \tag{6}$$

Cu ajutorul acestei acţiuni putem forma o *extindere* a grupului R prin grupul H, definind o înmulţire în produsul cartezian de mulţimi $R \times H$ prin formula

$$(t, h)\,(t', h') = (t + t',\ h^{t'} h'),\quad (t,\ t' \in R;\ h,\ h' \in H). \tag{7}$$

Obţinem atunci un grup Lie Γ', local izomorf cu Γ, avînd un divizor normal H' izomorf cu H (format din elementele de forma $(0, h)$) şi astfel încît Γ'/H' este un grup izomorf cu R. De asemenea, Γ' conţine un subgrup R' izomorf cu R, anume subgrupul format din elementele (t, e), e unitatea lui H'.

Să observăm acuma că grupul A_m/D_m este de asemenea izomorf cu R, deci avem două epimorfisme de grupuri Lie $\varphi : A_m \to R$, $\psi : \Gamma' \to R$. Să considerăm atunci produsul direct $A_m \times \Gamma'$ al grupurilor A_m, Γ' şi să notăm cu G subgrupul grupului $A_m \times \Gamma'$, format din perechile (α, γ), $(\alpha \in A_m,\ \gamma \in \Gamma')$, pentru care $\varphi(\alpha) \in \psi(\gamma)$. Algebra Lie a grupului G va avea structura dată de formulele (4).

Fie K un subgrup compact al grupului H' şi fie O_m subgrupul grupului D_m, format din transformările (2_1) cu $a = C^h = 0$. Grupul $\mathcal{J} = O_m \times K$ este un subgrup compact al grupului G, deci spaţiul omogen $G/\mathcal{J}$ admite o structură riemanniană invariantă.

Din consideraţiile precedente rezultă :

TEOREMA 1. *Spaţiile omogene admiţînd metrici invariante de forma* (1) *sînt determinate de cîte un număr întreg m şi de un triplet de grupuri Lie* (Γ', H', K), *unde H' este divizor normal al lui Γ', astfel ca $\Gamma'/H' \approx R$ şi K este un subgrup compact al grupului H'.*

Să observăm că metrica unui astfel de spaţiu omogen nu este în general determinată. De exemplu dacă grupul K este subgrupul lui H' redus la elementul unitate, metrica $d\sigma^2$ este o combinaţie pătratică, definit pozitivă, cu coeficienţi constanţi, dar altfel arbitrară, de $r - \dfrac{m\,(m+1)}{2}$ forme Pfaff liniar independente ale grupului Γ'.

Un exemplu de triplet (Γ', H', K) este dat de tripletul $(A_{m'}, D_{m'}, O_{m'})$. Metrica $d\sigma^2$ corespunzătoare acestui triplet şi definită în spaţiul omogen $A_{m'}/O_{m'}$ se poate scrie sub forma

$$d\sigma^2 = \Big[1 + \sum_{i=1}^{m'} (y^i)^2\Big]\,(dy^{m'+1})^2 + 2\, dy^{m'+1} \sum_{i=1}^{m'} y^i\, dy^i + \sum_{i=1}^{m'} d(y^i)^2 \tag{7'}$$

şi este o metrică cu curbură constantă -1, ce se obţine din metrica lui Beltrami

$$\frac{(dz^1)^2 + \ldots + (dz^{m'+1})^2}{(z^{m'+1})^2}$$

făcînd transformarea

$$z^{m'+1} = \mathrm{e}^{y^{m'+1}}, \; z^i = y^i \, \mathrm{e}^{y^{m'+1}}, \qquad (i = 1, \ldots, m').$$

Se poate vedea aceasta considerînd metrica $\mathrm{d}\sigma^2$ sub forma echivalentă $(\mathrm{d}x^0)^2 + \mathrm{e}^{2x^0} \, [(\mathrm{d}x')^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^{m'})^2]$ şi observînd că grupul $A_{m'}$ acţionează în $R^{m'+1}$ astfel încît să lase această formă invariantă şi astfel ca grupul de stabilitate al punctului $(1, 0, \ldots, 0)$ să fie grupul $D_{m'}$.

Spaţiul omogen $A_{m'}/O_{m'}$ este omeomorf cu spaţiul numeric $R^{m'+1}$.

2. Revenind la cazul general, să observăm că spaţiul omogen $G/\mathcal{J}$ este un subspaţiu al spaţiului omogen

$$\frac{A \times \Gamma'}{\mathcal{J}} = \frac{A \times \Gamma'}{O \times K},$$

care este izomorf cu produsul cartezian al spaţiilor omogene A_m/O_m, Γ'/K. Fie p, q restricţiile la $G/\mathcal{J}$ ale proiecţiilor canonice $(A_m \times \Gamma')/\mathcal{J} \to A_m/O_m$, $(A_m \times \Gamma')/\mathcal{J} \to \Gamma'/K$; aplicaţiile

$$p : G/\mathcal{J} \to A_m/O_m, \; q : G/\mathcal{J} \to \Gamma'/K$$

sînt transformări diferenţiabile *pe* şi definesc în spaţiul $G/\mathcal{J}$ două fibrări, avînd ca fibre tranşele corespunzătoare. De exemplu pentru un punct $x \in A_m/O_m$, $p^{-1}(x) \in G/\mathcal{J}$ este o varietate difeomorfă cu un subspaţiu $E_x \subset \Gamma'/K$, difeomorf cu spaţiul omogen H'/K. Deci $G/\mathcal{J}$ este un spaţiu fibrat peste A_m/O_m cu fibra tip H'/K. A_m/O_m fiind contractibil, rezultă

TEOREMA 2. *Spaţiul omogen $G/\mathcal{J}$ este difeomorf cu produsul cartezian $R^{m+1} \times H'/K$.*

3. Să considerăm grupul Γ' construit mai sus. Am arătat că Γ' conţine un divizor normal H' izomorf cu H şi format din elementele de forma $(0, h)$, $(h \in H)$. De asemenea Γ' conţine un subgrup R' izomorf cu R, anume subgrupul

$$R' = \{(t, e) \, ; \; t \in R\},$$

e fiind unitatea lui H.

Grupul Γ' este produsul (nedirect) al subgrupurilor R', H' în sensul că orice element $\gamma \in \Gamma'$ se scrie în mod unic sub forma

$$r = t'h', \qquad t' \in R', \qquad h' \in H',$$

componentele t', h' fiind date de formulele

$$t' = (t, e), \qquad h' = (0, h), \qquad \gamma = (t, h)$$

şi produsul a două elemente $\gamma_1 = t'_1 \, h'_1$, $\gamma_2 = t'_2 \, h'_2$ este dat de formula echivalentă cu (7),

$$\gamma_1 \gamma_2 = t'_1 \, h'_1 \, t'_2 \, h'_2 = t'_1 \, t'_2 \cdot t'^{-1}_2 \, h'_1 \, t'_2 \cdot h'_2 = t'_1 \, t'_2 \cdot h'_1 \, t'_2 \, h'_2. \tag{8}$$

Fie K un subgrup compact al grupului H'.

După Poincaré, spaţiul Γ'/K este format din clasele de resturi

$$\{\gamma\} = \gamma K = \{\gamma k\,;\ k \in K\}$$

şi Γ' operează în acest spaţiu prin formula

(9) $$\gamma'\{\gamma\} = \{\gamma'\gamma\} = (\gamma'\gamma)K.$$

Prin fiecare punct $\{\gamma\}$ al spaţiului Γ'/K trece cîte o hipersuprafaţă $H'\{\gamma\} = \{\{h'\gamma\}\,;\ h' \in H'\}$ şi cîte o curbă $R'\{\gamma\} = \{\{t'\gamma\}\,;\ t' \in R'\}$. Curba $R'\{\gamma\}$, cu $\gamma = t'h'$, intersectează hipersuprafaţa $H'\{\varepsilon\}$, ($\varepsilon =$ unitatea grupului Γ' deci $\varepsilon = (0, e)$) în punctul $\{h'\} = h'K$ şi rezultă că *varietatea* Γ'/K *este difeomorfă cu produsul direct al varietăţilor* R, $H'\{\varepsilon\} = H'/K$, prin difeomorfismul

$$\{\gamma\} \to (t, h'K), \qquad (t' = (t, e), \qquad \gamma = t'h').$$

Fie $d\sigma^2$ o metrică invariantă în spaţiul omogen Γ'/K. Dacă alegem o hartă locală $\{x^i\}$ în spaţiul H'/K, obţinem o hartă locală $\{t, x^i\}$ în $\Gamma'/K = R \times H'/K$ adăugînd o nouă coordonată t. Faţă de o astfel de hartă, translaţiile $\tau_{t'} : \{\gamma\} \to \{t'\gamma\}$ sînt date de formule de forma

$$\tau_t : \bar{x}^i = x^i, \qquad \bar{t} = t + a, \qquad (t' = (t, e))$$

iar hipersuprafeţele $H'\{\gamma\}$ au ecuaţii de forma

$$t = \text{const.}$$

Cum hipersuprafeţele $H'\{\gamma\}$ sînt permutate între ele de translaţiile $\tau_{t'}$, metricile induse de $d\sigma^2$ pe aceste hipersuprafeţe au aceeaşi expresie în coordonatele x^i, considerate ca formînd o hartă pe fiecare $H'\{\gamma\}$.

Deoarece translaţiile $\tau_{t'}$ lasă invariantă metrica $d\sigma^2$, scriind această metrică în coordonatele locale $\{t, x^i\}$, obţinem o metrică cu coeficienţii nedepinzînd de t. Avem deci o relaţie de forma

$$d\sigma^2 = d\sigma_0^2 + 2\omega dt + \rho\, dt^2,$$

unde $d\sigma_0^2$ este o metrică invariantă a spaţiului omogen H'/K (anume metrica indusă pe acest spaţiu de $d\sigma^2$), iar ω şi ρ sînt respectiv o formă Pfaff şi o funcţie, definite pe H'/K. $d\sigma_0^2$, ω şi ρ nu sînt invarianţi faţă de transformările (9) ale spaţiului omogen Γ'/K. Dimpotrivă, dt este o formă invariantă pe spaţiul omogen Γ'/K.

4. Să considerăm cîmpul de vectori X al spaţiului Γ'/K care se obţine asociind fiecărui punct $\{\gamma\} \in \Gamma'/K$ vectorul unitar şi normal hipersuprafeţei $H'\{\gamma\}$, situat de aceeaşi parte a acestei hipersuprafeţe cu vectorul tangent la drumul $t \to (t', e)\{\gamma\}$. X este un cîmp invariant al spaţiului omogen Γ'/K. Raportul dintre lungimea unui arc de pe o traiectorie a cîmpului X şi diferenţa coordonatelor t ale extremităţilor arcului este un invariant al spaţiului omogen Γ'/K, deci este egal cu o constantă c.

Rezultă că X *este cîmpul transformărilor infinitezimale ale unui grup de transformări* $\{T_t\}_{t \in R}$, *cu un parametru, în spaţiul* Γ'/K. Într-adevăr, fie l o traiectorie, maximală într-un sens a cîmpului X, ce pleacă dintr-un punct $\{\gamma_0\} \in H'/K$; l este un arc deschis la a doua extremitate. Fie a marginea superioară a distanţelor de la $\{\gamma_0\}$ la punctele arcului l. Dacă a este finit, putem considera hipersuprafaţa

$$t = t_0, \quad t_0 = \pm \frac{a}{c},$$

semnul fiind astfel încît punctele arcului l să aibă coordonatele $t \in [0, t_0]$; o traiectorie oarecare l' a cîmpului X, orientată spre hipersuprafaţa $t = 0$ şi plecînd dintr-un punct y_0 al hipersuprafeţei $t = t_0$, întîlneşte o hipersuprafaţă $t = t_1$, $t_1 \in [0, t_0)$ într-un punct y_1. Fie x_1 punctul traiectoriei l situat pe aceeaşi hipersuprafaţă $t = t_1$ şi fie h'_0 elementul grupului H' pentru care

$$h'_0\, x_1 = y_1.$$

Un astfel de element există, deoarece H' operează tranzitiv pe fiecare suprafaţă $H'\{\gamma\}$. Vom avea atunci $h'_0\, l = l''$, unde l'' este o traiectorie ce pleacă dintr-un punct al hipersuprafeţei $t = 0$ şi ajunge în punctul y_0, şi conţinînd traiectoria l'. Atunci $h_0'^{-1}\, l''$ va fi o traiectorie ce conţine l şi întîlneşte hipersuprafaţa $t = t_0$, ceea ce contrazice ipoteza că l este maximală. Deci avem $a = \infty$, ceea ce demonstrează afirmaţia de mai sus.

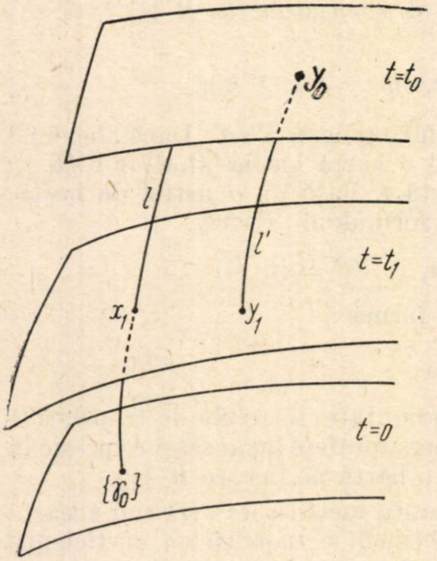


Fig. 1

5. Să considerăm punctele varietăţii H'/K în care forma Pfaff ω nu este nulă şi fie U mulţimea acestor puncte, care este deschisă. ω fiind o formă analitică, punctele din H'/K în care $\omega = 0$ formează o mulţime de măsură nulă sau $U = \Phi$; în ultimul caz, cîmpul X generează tocmai grupul g al translaţiilor $\tau_{t'}$, $\rho = c$ şi metrica (9) este reductibilă.

Să considerăm cazul $U \neq \Phi$ şi să considerăm în varietatea $R'\,U \subset \Gamma'/K$ cîmpul Υ care se obţine asociind fiecărui punct $x \in R'U$ proiecţia cîmpului Z ce generează grupul g, pe planul tangent în x la hipersuprafaţa $H'x$. Avem $\Upsilon \neq 0$ în fiecare punct $x \in R'\,U$.

În punctele mulţimii $R'\,U$ metrica $d\sigma^2$ este de forma

$$d\sigma^2 = d\tau^2 + c^2\, dt^2, \tag{10}$$

unde

$$d\tau^2 = d\sigma_0^2 + 2\,\omega\, dt + (\rho^2 - c^2)\, dt^2$$

este o formă diferenţială pătratică de rang $p = \dim U = \dim (H'/K)$, în variabilele x^i, t, cu coeficienţii independenţi de t. Ecuaţia $d\tau^2=0$ este echivalentă cu sistemul diferenţial care are ca integrale traiectoriile cîmpului Y şi care este de forma

$$\frac{dx^i}{dt} = \lambda^i(x), \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Putem alege coordonatele locale x^i astfel încît să avem $\lambda^i=1$, $(i=1, \ldots, p)$, şi în acest sistem de coordonate ecuaţia $d\tau^2 = 0$ este echivalentă cu sistemul

$$dx^1 = dt, \ldots, dx^p = dt,$$

şi deci avem o relaţie de forma

$$d\tau^2 = a_{ij}(dx^i - dt)(dx^j - dt).$$

Făcînd în R' U transformarea de coordonate

$$y^i = x^i - t, \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

metrica $d\tau^2$ capătă forma

$$d\tau^2 = \sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}\, dy^i dy^j, \tag{11}$$

unde a_{ij} sînt funcţii de $y^1 + t, \ldots, y^p + t$.

6. Să revenim acum la spaţiul omogen $G/\mathcal{J}$, care faţă de hărţi locale convenabile are metrica de forma (1). Comparînd formulele (10), (11) cu $m' = p$, $y^{m'+1} = t$, rezultă formula

$$ds^2 = c^2dt^2 + e^{-2t}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^m)^2] + \sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}dy^idy^j, \tag{12}$$

unde a_{ij} depind de t prin combinaţiile $y^1 + t, \ldots, y^{p-1} + t, y^p + t$.

Grupul spaţiului omogen $G/\mathcal{J}$ lasă invariante formele ds^2, dt, $d\tau^2$, deci transformările lui sînt de forma

$$\begin{aligned} t' &= t + c, \\ x'^{\alpha} &= e^c a^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}, \\ y'^i &= \psi^i(y^1, \ldots, y^p), \end{aligned} \tag{13}$$

deoarece sistemul $dy^i = 0$ este echivalent cu ecuaţia invariantă $d\tau^2 = 0$, deci este invariant.

Să notăm cu $d\sigma_t^2$ metrica $d\tau^2$ în variabilele y^i, considerată pentru valori fixe ale parametrului t.

Metricile $d\sigma_0^2$, $d\tau^2$ coincid pe hipersuprafeţele $t = \text{const.}$ şi rezultă că formula (11) defineşte o familie de metrici $d\sigma_t^2$ depinzînd de parametrul t

şi echivalente cu aceeaşi metrică $\mathrm{d}\sigma_0^2$. Transformările spaţiului Γ'/K transformă forma $\mathrm{d}\sigma_t^2$ după legea

$$(14) \qquad \gamma(\mathrm{d}\sigma_{t+c}^2) = \mathrm{d}\sigma_t^2 \quad \text{sau} \quad \gamma(\mathrm{d}\sigma_t^2) = \mathrm{d}\sigma_{t-c}^2,$$

dacă $\gamma = (c, h)$, $c \in R$, $h \in H'$, deoarece aplicînd formei $\mathrm{d}\sigma_t^2$ transformarea (13), forma $\mathrm{d}\sigma_t^2$ nu se schimbă.

Dacă luăm $t' = 0$, rezultă că transformările grupului H' lasă invariantă fiecare din metricile $\mathrm{d}\sigma_t^2$.

Metrica $\mathrm{d}\sigma_t^2$ se poate scrie sub forma

$$(15) \qquad \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha \mathrm{d}\sigma_\alpha^2,$$

unde $\mathrm{d}\sigma_\alpha^2$ sînt forme diferenţiale pătratice în $\mathrm{d}y^i$, independente de t şi invariante faţă de acţiunile grupului H', iar φ_α sînt funcţii de t, invariante faţă de H', deci independente de variabilele y^i. Putem presupune că formele $\mathrm{d}\sigma_\alpha^2$ sînt distincte două cîte două. În acest caz, fiecare formă $\varphi_\alpha \mathrm{d}\sigma_\alpha^2$ este invariantă faţă de întreg grupul Γ' şi rezultă că prin aceste transformări φ_α, $\mathrm{d}\sigma_\alpha^2$ se transformă prin formule de forma

$$(16) \qquad (\mathrm{d}\sigma_\alpha^2) = \mathrm{e}^{m_\alpha t} \mathrm{d}\sigma_\alpha^2, \ \gamma(\varphi_\alpha)(t) = \varphi_\alpha(t + t') = \mathrm{e}^{-m_\alpha t'} \varphi_\alpha(t),$$

şi rezultă relaţii de forma

$$\varphi_\alpha(t) = n_\alpha^2 \mathrm{e}^{-m_\alpha t}, \ n_\alpha = \text{const}.$$

deoarece multiplicatorii lui $\mathrm{d}\sigma_\alpha^2$ şi φ_α definesc cîte o reprezentare a grupului R în grupul multiplicativ al numerelor reale > 0 şi aceste reprezentări sînt de forma $t \to \mathrm{e}^{mt}$, m fiind constante reale ce pot fi presupuse distincte două cîte două, deoarece dacă de exemplu $m_1 = m_2$, putem grupa formele cu $\alpha = 1, 2$ într-o singură formă $\mathrm{e}^{-m_1 t}(\mathrm{d}\sigma_1^2 + \mathrm{d}\sigma_2^2)$.

Avem deci o relaţie de forma

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = \sum_{\alpha=1}^{q} \mathrm{e}^{-m_\alpha t} \omega_\alpha$$

unde formele $\omega_\alpha = n_\alpha^2 \mathrm{d}\sigma_\alpha^2$ se transformă prin grupul Γ' prin formulele

$$(17) \qquad \gamma(\omega_\alpha) = \mathrm{e}^{m_\alpha t} \omega_\alpha,$$

şi sînt invariante faţă de grupul H'.

Avem deci

TEOREMA. *Spaţiul omogen H'/K admite o familie de metrici invariante*

$$(18) \qquad \mathrm{d}\sigma_t^2 = \sum_{\alpha=1}^{q} \mathrm{e}^{-m_\alpha t} \omega_\alpha$$

unde ω_α sînt forme diferenţiale pătratice în coordonatele unei hărţi locale $\{y^i\}$ în H'/K. În domeniul acestei hărţi, transformările (13) (*citite în varia-*

bilele y^i) *dau o reprezentare a unui grup local conținut în grupul* Γ' *și prin aceste transformări formele* ω_α *se transformă după legea* (17).

Din forma coeficienţilor a_{ij} ai metricii (11) rezultă că această metrică verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial\,(\mathrm{d}\,\tau^2)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p} \frac{(\mathrm{d}\,\tau^2)}{\partial y^i}.$$

Ţinînd seama de (18) rezultă formulele

$$-m_\alpha \omega_\alpha = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial y^i}. \tag{19}$$

Dacă punem $\pi_\alpha = \mathrm{e}^{-m_\alpha y^1}\omega_\alpha$, formele π_α verifică ecuaţia

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \pi}{\partial y^i} = 0$$

şi rezultă că π_α au coeficienţii egali cu nişte funcţii de $y^i - y^1$ şi avem

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^{q} \mathrm{e}^{+m_\alpha(y^1-t)}\,\pi_\alpha + c^2\mathrm{d}t^2.$$

Ca exemplu, putem să considerăm cazul următor, în care π_α sînt metrici euclidiene în variabile separate :

$$\mathrm{d}\sigma^2 = c^2\mathrm{d}t^2 + \sum_{i,\alpha} m_\alpha^2 \mathrm{e}^{2m_\alpha\,(y_\alpha^i + t)}\,(\mathrm{d}y_i^\alpha)^2.$$

Metricile $\mathrm{d}\sigma_t^2$ se pot considera definite pe întreg spaţiul $H'/K = H'\{\varepsilon\}$ şi se pot interpreta în modul următor : Pentru fiecare $t \in R$, putem proiecta hipersuprafaţa $H'\{\varepsilon\}$ ortogonal, pe hipersuprafaţa $H'\{t'\}$, $(t' = (t, e)$. Această proiecţie va transforma metrica indusă de $\mathrm{d}\sigma^2$ pe $H'\{t'\}$ tocmai în metrica $\mathrm{d}\sigma_t^2$. Invarianţa metricilor $\mathrm{d}\sigma_t^2$ faţă de grupul H' rezultă atunci din faptul că fiecare element al construcţiei precedente este invariant faţă de H'.

Primită la redacţie la 3 iulie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. C. TELEMAN, St. cerc. mat., V 143–171 (1954).
2. C. TELEMAN, Journ. of the Math. Soc. of Japan, **15**, 134–158 (1963).
3. C. CHEVALEY, *La théorie des groupes de Lie.* vol. II, Paris, 1951.

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

UNELE FUNCŢII ELEMENTARE ÎN CLASA FUNCŢIILOR OLOMORFE (α) ÎN SPAŢIU

DE

MARIANA COROI-NEDELCU

În spaţiul funcţiilor olomorfe (α) în spaţiu E_m, sau de clasa $C^1_\gamma(\Delta)$ adică funcţiile matrici definite de N. Teodorescu, care admit derivate spaţiale (γ) într-un domeniu dat, se definesc funcţii elementare analoage lui $e^{\alpha z}$, $e^{\alpha z^k}$, sh αz, ch αz, sin αz, cos αz, $\frac{1}{1+\alpha z}$, ln $(1+\alpha z)$, $F(\alpha_1, \beta, \gamma; z)$, $P_n(z)$, $J_n(z)$, cu α matrice constantă, α_1, β, γ constante pozitive, k întreg pozitiv, n întreg pozitiv sau nul F fiind funcţia hipergeometrică, P_n polinomul Legendre de ordinul n şi J_n funcţia Bessel de speţa a I -a de ordinul n. Se găsesc de asemenea şi ecuaţiile cu derivate spaţiale (respectiv sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale) care le satisfac, dînd pentru primele 8 chiar soluţiile generale depinzînd de o funcţie arbitrară care se determină prin probleme la limită. Problema la limită se reduce la o problemă la limită pentru o funcţie olomorfă în sapţiu în sensul N. Teodorescu şi Gr. C. Moisil.

În 1931, N. Teodorescu, în teza sa de doctorat [14], consideră pentru prima dată derivata areolară, dată de Pompeiu în 1912 [11], ca o operaţie funcţională, independentă de cea de derivată parţială, ceea ce constituie astăzi punctul de vedere modern în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. Astfel, el a extins noţiunile de monogeneitate şi olomorfie la monogeneitate (α) şi olomorfie (α).

Condiţia necesară şi suficientă ca $f(z) \in C^\circ(\Delta)$ să fie olomorfă (α) în Δ este ca să existe o funcţie $\varphi(z) \in C^\circ$ astfel ca

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_D \varphi(v)\,d\omega = 0$$

pentru orice contur C închis, simplu rectificabil, limitînd domeniul $D \subset \Delta$.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 10, P. 1539-1565, BUCUREŞTI, 1965

În acest caz, $\varphi = \dfrac{Df}{D\omega}$ este derivata areolară în sens larg al lui f. În cazul cînd $f \in C^1$, $\dfrac{Df}{D\omega} = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\cdot$ Formula de mai sus generalizează teorema lui Cauchy pentru funcţiile olomorfe.

Dacă f este olomorfă (α) în domeniul D, mărginit de una sau mai multe curbe închise C, în număr finit şi fără puncte comune, şi dacă $f(z) \in C^\circ$ în $D + C$ şi $\dfrac{Df}{D\omega}$ este integrabilă în D, are loc formula Pompeiu-Teodorescu

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{Df}{D\omega}\,\frac{1}{\nu-\zeta}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} f(\zeta) & \text{pentru } \zeta \in D \\ 0 & \text{pentru } \zeta \in \operatorname{ext} D \end{cases}$$

formulă care generalizează integrala lui Cauchy pentru funcţiile olomorfe.

N. Teodorescu, în [14], a definit polinoamele areolare ca funcţii olomorfe (α) satisfăcînd ecuaţia $\dfrac{D^n f}{D\omega^n} = h_0(z)$ cu $h_0(z)$ funcţie olomorfă şi a căror expresie este un polinom de ordinul n în $\bar{z}$ cu coeficienţi funcţii olomorfe. Dacă $f \in C^\infty(D)$, polinomul areolar a fost extins la serii.

Prin analogie cu cazul plan, extinderea noţiunii de derivată areolară la spaţiul cu m dimensiuni a fost făcută de N. Teodorescu şi Gr. C. Moisil [2], [12] cu ajutorul numerelor ipercomplexe sau cu ajutorul calculului matricial. În cele ce urmează vom adopta simbolismul matricial.

După definiţiile date de N. Teodorescu, condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie (un cîmp matricial) $\varphi = \{\varphi_j^h\} \in C^\circ(\Delta)$ să fie de clasa $\Lambda_\gamma^1(\Delta)$ este ca să existe o funcţie Φ sumabilă pe Δ astfel ca

$$\int_\sigma (\vec{n}_M \cdot \gamma)\ \varphi(M)\ \mathrm{d}\sigma_M + \int_\omega \Phi(Q)\ \mathrm{d}\omega_Q = 0 \tag{1}$$

să aibă loc pentru orice pereche regulată $(\omega, \sigma) \subset \Delta$.

Prin $(\vec{n}_M \cdot \gamma)$ se înţelege produsul scalar între normala interioară la σ şi vectorul γ de componente matrici $(\gamma^1, \ldots, \gamma^m)$. Matricea Φ se va numi derivata spaţială a matricii φ în raport cu matricile constante γ $(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^m)$ şi se va nota $\Phi = D\varphi$. Dacă $D\varphi \in C^\circ$, atunci vom spune că $\varphi \in C_\gamma^1(\Delta)$. Relaţia (1) generalizează pe cea dată în plan pentru funcţiile olomorfe (α)

Dacă $\varphi \in C^1(\Delta)$, operatorul

$$D\varphi = \sum_{i=1}^{m} \gamma^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

(2) şi

$$\widetilde{D}\varphi = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\gamma^i,$$

unde $\widetilde{D}$ este operatorul adjunct lui D. Pentru $\widetilde{D}$ există o relație de tip (1) în care φ este permutată cu $(\vec{n}_M \cdot \gamma)$ și $\Phi = \widetilde{D}\varphi$. $\widetilde{D}$ se va numi derivata spațială (γ) la dreapta în timp ce D va fi numită derivata spațială (γ) la stînga.

Operatorul liniar

$$\overline{D} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3}$$

astfel ca pentru orice $\varphi \in C^1 (\Delta)$ să avem

$$\overline{D}\, D = e \Delta$$

impune condițiile

$$\overline{\gamma}^k \gamma^i + \overline{\gamma}^i \gamma^k = 2 \delta^{ki} e \tag{4}$$

unde e este matricea unitate, se numește coderivata spațială (γ) la stînga, iar $\widetilde{\overline{D}} = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial}{\partial x^k} \overline{\gamma}^k$ coderivata spațială (γ) la dreapta.

După cum a arătat Gr. C. Moisil, relația (4) implică și

$$\gamma^k \overline{\gamma}^i + \gamma^i \overline{\gamma}^k = 2 \delta^{ik} e$$

adică permutabilitatea operatorilor D și $\overline{D}$.

Pentru $\overline{D}$ și $\widetilde{\overline{D}}$ se dau relații de tip (1) cînd $\varphi \in C^{\circ} (\Delta)$. N. Teodorescu a arătat că în condițiile (4) cel puțin numărul liniilor sau coloanelor matricilor φ este par.

Gr. C. Moisil a arătat pentru $\varphi \in C^1 (\Delta)$ iar N. Teodorescu pentru $\varphi \in C^1_{\gamma} (\Delta)$ că are loc următoarea formulă de reprezentare Pompeiu-Teodorescu-Moisil care o generalizează pe cea pentru funcțiile olomorfe (α) din plan:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m} (\vec{n}_M \cdot \gamma)\ \varphi (M)\, \mathrm{d}\sigma_M + \\ &+ \frac{1}{s_m} \int_{\Omega} \frac{(\overrightarrow{QP} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{QP}^m} D\varphi (Q)\, \mathrm{d}\omega_Q = \begin{cases} \varphi (P) \text{ pentru } P \in \Omega < \Delta \\ 0 \text{ pentru } P \in \operatorname{ext} \Omega \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

și alte 3 relații asemănătoare pentru $\widetilde{D}$, $\overline{D}$ și $\widetilde{\overline{D}}$, unde s_m este aria hipersferei unitate în E_m și Σ ipersuprafața care mărginește Ω și admite normală continuă în orice punct ($\vec{n}_M$ este normala interioară la Σ).

N. Teodorescu a transpus noțiunile de monogeneitate, olomorfie, monogeneitate (α) și olomorfie (α) din plan în E_m față de operatorul D.

Astfel în (1) și (5) făcînd $D\,\varphi \equiv 0$ obținem formulele pentru funcțiile olomorfe în Δ care generalizează respectiv integrala Cauchy și formula lui Cauchy din plan.

Analog cu definiția dată de N. Teodorescu în plan, am numit în [7] polinom spațial (γ) de ordinul n în $\Delta \subset E_m$ o funcție ψ olomorfă (α) [8], [9] în spațiu care admite derivate spațiale (γ) succesive, derivata de ordinul n fiind olomorfă în Δ, adică

$$D^n \psi (P) = \varphi (P),$$

unde $\varphi (P)$ este olomorfă în Δ $(P \in \Delta)$.

Expresia polinomului spațial (γ) de ordinul n este dată în [8], [9] și anume :

$$\begin{aligned} \psi (P) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^k (M, P) (\vec{n}_M \cdot \gamma) \psi_{0k} (M) \, d\sigma_M = \\ &= \sum_{k=0}^{n} [\xi^k, \psi_{0k}]_P = I^n (D^n \psi) + \sum_{k=0}^{n-1} \Bigg[I_P^k (D^k \psi) + \\ &\quad + \sum_{h=k+1}^{n} \sum_{l=1}^{h-k} \sum_{\substack{(AR)^l_{h-k+1-l} (i_1, i_2, \dots, i_l) \\ i_1 + \dots + i_l = h-k \\ (i_1, i_2, \dots, i_l) \in (1, 2, \dots, h-k)}} (-1)^l I_P^{k, i_1, \dots, i_l} (D^h \psi) \end{aligned} \tag{4'}$$

unde $\xi^k (M, P)$ este dat în [8] și reprezintă echivalentul lui $\frac{\overline{z}^k}{k!}$ operator la stînga și este dedus pornind de la funcțiile poliarmonice elementare astfel încît $D^{k+1} \frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^k (M, P) = D \frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m} = 0$. ψ_{0k} sînt componentele olomorfe ale polinomului (fiind funcții olomorfe, $D \psi_{0k} (P) = 0$ și sînt date de

$$\begin{aligned} \psi_{0k} (P) &= D^k \psi (P) + \\ &+ \sum_{h=k+1}^{n} \sum_{l=1}^{h-k} \sum_{\substack{(AR)^l_{h-k+1-l} (i_1, \dots, i_l) \\ i_1 + \dots + i_l = h-k \\ (i_1, \dots, i_l) \in (1, 2, \dots, h-k),}} (-1)^l I_P^{i_1, \dots, i_l} (D^h \psi) \qquad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \tag{5'}$$

Ele determină unic polinomul și sînt determinate unic de ψ și derivatele sale spațiale (γ).

S-a notat cu $\underset{\substack{i_1 + \dots + i_l = j \\ (i_1, \dots, i_l) \in (1, 2, \dots, j)}}{(AR)^l_k (i_1, \dots, i_l)}$ aranjamentele cu repetiție de k, obiecte luate cîte l : $i_1, i_2, \ldots, i_l$ cînd suma lor este j şi $(i_1, \ldots, i_l) \in (1, 2, \ldots, j)$, iar

$$I_P^{i_1, \ldots, i_l}(D^h \psi) = \frac{1}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{\overline{M_1P}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{M_1P}^m} \xi^{i_1}(M_1, P)\,(\vec{n}_M \cdot \gamma)\left\{\frac{1}{s_m} \times\right.$$

$$\times \int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{\overline{M_2M_1}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{M_2M_1}^m} \xi^{i_2}(M_2, M_1)\,(\vec{n}_{M_2} \cdot \gamma)\Bigg[\cdots\Bigg(\frac{1}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{\overline{M_lM_{l-1}}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{M_lM}_{l-1}^m} \xi^{i_l}(M_l, M_{l-1}) \times$$

$$\left. \times (\vec{n}_{M_l} \cdot \gamma)\, D^h \psi(M_l)\, \mathrm{d}\sigma_{M_l}\Bigg)\cdots\Bigg]\mathrm{d}\sigma_{M_2}\right\}\mathrm{d}\sigma_{M_1}.$$

Proprietăţile polinomului ca funcţie poliarmonică, teorema lui Morera şi alte proprietăţi au fost demonstrate în [8] şi [9].

Pe baza operatorilor $\xi^k(M, P)$ şi proprietăţilor lor, vom construi în cele ce urmează cîteva funcţii elementare în clasa funcţiilor $C_\gamma^1(D)$.

TEOREMA 1 1). *Seriile* :

$$E^{\alpha\xi}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^n(M, P)\,(\vec{n}_M \cdot \gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M \cdot \alpha^n = \tag{6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m}\int_\Sigma \xi^{*n}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,(\vec{n}_M \cdot \gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M \cdot \alpha^n.$$

$$\widetilde{E}^{\alpha\xi}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M \cdot \gamma)\,\frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^n(M, P)\,\mathrm{d}\sigma_M = \tag{7}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M \cdot \gamma)\,\xi^{*n}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M.$$

$$E^{\alpha\eta}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^n(M, P)\,(\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M \cdot \alpha^n = \tag{8}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m}\int_\Sigma \eta^{*n}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\,(\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M \cdot \alpha^n.$$

$$\widetilde{E}^{\alpha\eta}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\,\frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^n(M, P)\,\mathrm{d}\sigma_M = \tag{9}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\,\eta^{*n}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{\overline{MP}} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M$$

---

1) Funcţiile definite de această teoremă au fost utilizate la soluţionarea ecuaţiilor liniare cu derivate spaţiale de diferite ordine încă în [9].

sînt uniform și absolut convergente pentru $P \in \Omega(\Sigma) \subset E_m$ *pentru orice domeniu* $\Omega \subset E_m$ *limitat de ipersuprafața închisă* Σ *care admite normală în fiecare punct.* $\vec{n}_M$ *este vectorul normalei interioare la* Σ, s_m *aria ipersferei unitate în* E_m *și* α *matrice constantă. Aceste serii au următoarele proprietăți :*

$$
\begin{aligned}
&DE^{\alpha\xi}(P) = E^{\alpha\xi}(P)\,\alpha,\\
&\widetilde{D}\widetilde{E}^{\alpha\xi}(P) = \alpha\widetilde{E}^{\alpha\xi}(P),\\
&\overline{D}E^{\alpha\eta}(P) = E^{\alpha\eta}(P)\,\alpha,\\
&\widetilde{\widetilde{D}}\widetilde{E}^{\alpha\eta}(P) = \alpha\widetilde{E}^{\alpha\eta}(P).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Din [9], formula (VI, 11), rezultă că

$$
\left.\begin{array}{l}
|\xi^{n}(M,P)|\\
|\xi^{*n}(M,P)|\\
|\eta^{n}(M,P)|\\
|\eta^{*n}(M,P)|
\end{array}\right\} < \frac{K\left(\frac{R}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n}{2}\right]!},
\tag{11}
$$

unde

$$
\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{pentru } n \text{ par},\\[2mm] \dfrac{n-1}{2} & \text{pentru } n \text{ impar}, \end{cases}
$$

K este o constantă iar $R = \max|\overline{MP}|$; prin modulul unei matrici se înțelege rădăcina pătrată din suma pătratelor componentelor sale sau maximum modulului componentelor sale.

Din reprezentarea matricii unitate e prin integrale de tip Cauchy, rezultă că

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{1}{s_m}\int_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M = \frac{1}{s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\gamma)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M =\\
&= \frac{1}{s_m}\int_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M = \frac{1}{s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M\,.
\end{aligned}
$$

Deci termenul general u_n al oricărei serii din (6), (7), (8) şi (9) este majorat de

$$|u_n| < \frac{|\alpha|^n K\left(\frac{R}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n}{2}\right]!} \tag{12}$$

adică este majorat de termenul general al unei serii pozitive convergente.

Deci seriile (6), (7), (8) şi (9) sînt absolut şi uniform convergente. Dacă se formează seriile derivate după operatorii respectiv D, $\widetilde{D}$, $\overline{D}$ şi $\widetilde{\overline{D}}$ ţinînd seama de definiţiile operatorilor ξ^n, η^n din [8], adică

$$D\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{MP^m}\,\xi^n(M,P) = D\xi^{*n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} = \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{n-1}(M,P) =$$

$$= \xi^{*n-1}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} = \widetilde{D}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^n(M,P) =$$

$$= \widetilde{D}\xi^{*n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}, \tag{13}$$

$$\overline{D}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^n(M,P) = \overline{D}\,\eta^{*n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m} = \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^{n-1}(M,P) =$$

$$= \eta^{*n-1}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m} = \widetilde{\overline{D}}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^n(M,P) = \widetilde{\overline{D}}\,\eta^{*n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m},$$

atunci seriile derivate sînt de acelaşi tip şi deci absolut şi uniform convergente.

În plus, un calcul simplu arată că relaţiile (10) sînt adevărate.

Observaţia 1. Din (6), (7), (8), (9) şi (10) se observă că funcţiile definite de aceste serii sînt echivalente cu următoarele funcţii din plan

$$\left.\begin{matrix} E^{\alpha\xi}(P) \\ \widetilde{E}^{\alpha\xi}(P) \end{matrix}\right\} \sim e^{\alpha\bar{z}}, \quad \left.\begin{matrix} E^{\alpha\eta}(P) \\ \widetilde{E}^{\alpha\eta}(P) \end{matrix}\right\} \sim e^{\alpha z}.$$

Apar cîte două expresii pentru fiecare din ele, căci avem cîte o derivată spaţială (γ) şi cîte o coderivată spaţială (γ) la dreapta şi la stînga. Ele diferă de echivalenţii operatorilor $e^{\alpha\bar{z}}$ şi $e^{\alpha z}$ definiţi în [9] cu ajutorul lui ξ^n şi η^n care sînt echivalenţii operatori ai lui $\frac{\bar{z}^n}{n!}$ şi $\frac{z^n}{n!}$.

Dacă în (6), (7), (8) şi (9) ipersuprafaţa Σ se restrînge în jurul lui P tinzînd către zero, atunci expresiile devin egale cu e, matricea unitate, ceea ce corespunde cu $e^0 = 1$.

Observaţia 2. Din (13) rezultă că avem următorii echivalenţi ai funcţiilor :

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
&\bar{z}^n \sim \begin{cases}
\dfrac{n\,!}{s_m}\displaystyle\int_\Sigma \dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^n(M, P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M = \\[2ex]
= \dfrac{n\,!}{s_m}\displaystyle\int_\Sigma \xi^{*n}(M, P)\,\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M \\[2ex]
\dfrac{n\,!}{s_m}\displaystyle\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^n(M, P)\,\mathrm{d}\sigma_M = \\[2ex]
= \dfrac{n\,!}{s_m}\displaystyle\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\xi^{*n}(M, P)\,\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M
\end{cases}\\[3ex]
&z^n \sim \begin{cases}
\dfrac{n\,!}{s_m}\displaystyle\int_\Sigma \dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^n(M, P)\,(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M = \\[2ex]
= \dfrac{n\,!}{s_m}\displaystyle\int_\Sigma \eta^{*n}(M, P)\,\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M \\[2ex]
\dfrac{n\,!}{s_m}\displaystyle\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^n(M, P)\,\mathrm{d}\sigma_M = \\[2ex]
= \dfrac{n\,!}{s_m}\displaystyle\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\eta^{*n}(M, P)\,\dfrac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M\,.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Observaţia 3. Dacă dorim să schimbăm în funcţiile echivalente lui $e^{\alpha\bar{z}}$ sau $e^{\alpha z}$ pe $\bar{z}$ sau z cu $\beta + \delta\bar{z}$ sau $\beta + \delta z$, va trebui să înlocuim punctul $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ din expresiile lui (6), (7), (8) şi (9) cu punctul $P'(\beta + \delta x_1, \beta + \delta x_2, \ldots, \beta + \delta x_m)$ cu β şi δ constante date ; în felul acesta definim

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
E^{\alpha(\beta+\delta\xi)}(P) &= E^{\alpha\xi}(P')\\
\widetilde{E}^{\alpha(\beta+\delta\xi)}(P) &= \widetilde{E}^{\alpha\xi}(P')\\
E^{\alpha(\beta+\delta\eta)}(P) &= E^{\alpha\eta}(P')\\
\widetilde{E}^{\alpha(\beta+\delta\eta)}(P) &= \widetilde{E}^{\alpha\eta}(P')
\end{aligned}
$$

Proprietăţile funcţiilor $e^{\alpha(\beta+\delta\bar{z})}$ sau $e^{\alpha(\beta+\delta z)}$ se aplică şi funcţiilor (15).

TEOREMA 2. *Seriile*

$$(16)\qquad E^{\alpha\xi^k}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!\,s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, \xi^{kn}(M, P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\, \mathrm{d}\sigma_M\cdot\alpha^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!\,s_m} \int_{\Sigma} \xi^{*kn}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, \mathrm{d}\sigma_M\cdot\alpha^n$$

$$(17)\qquad \widetilde{E}^{\alpha\xi^k}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!\ \alpha^n}{n!\,s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, \xi^{*kn}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, \mathrm{d}\sigma_M =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!\ \alpha^n}{n!\ s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, \xi^{*kn}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, \mathrm{d}\sigma_M$$

$$(18)\qquad E^{\alpha\eta^k}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!\,s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\, \eta^{kn}(M, P)\, (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\, \mathrm{d}\sigma_M\cdot\alpha^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!\,s_m} \int_{\Sigma} \eta^{*kn}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\, \mathrm{d}\sigma_M\cdot\alpha^n$$

$$(19)\qquad \widetilde{E}^{\alpha\eta^k}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!\ \alpha^n}{n!\ s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\, \eta^{kn}(M, P)\, \mathrm{d}\sigma_M =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!\ \alpha^n}{n!\ s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\, \eta^{*kn}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\, \mathrm{d}\sigma_M$$

sînt uniform și absolut convergente pentru $P \in \Omega(\Sigma) \subset E_m$ *pentru orice domeniu* $\Omega \subset E_m$ *limitat de ipersuprafața închisă* Σ *care admite normală în fiecare punct ·* $\vec{n}_M$ *este vectorul normalei interioare la* Σ, s_m *aria ipersferei unitate în* E_m, α *o matrice constantă și* k *număr întreg pozitiv. Aceste serii au următoarele proprietăți :*

$$(20)\qquad \begin{aligned} DE^{\alpha\xi^k}(P) &= k\,((k-1)!\ \xi^{k-1},\ E^{\alpha\xi^k}(P))\,\alpha \\ \widetilde{D}\widetilde{E}^{\alpha\xi^k}(P) &= k\alpha\ ((k-1)!\ \xi^{k-1},\ \widetilde{E}^{\alpha\xi^k}(P)) \\ \overline{D}E^{\alpha\eta^k}(P) &= k\,((k-1)!\ \eta^{k-1},\ E^{\alpha\eta^k}(P))\,\alpha \\ \overline{\widetilde{D}}\,\widetilde{E}^{\alpha\eta^k}(P) &= k\alpha\,((k-1)!\ \eta^{k-1},\ \widetilde{E}^{\alpha\eta^k}(P)) \end{aligned}$$

unde s-a notat prin paranteză :

$$(21)\qquad \left(k!\,\xi^k, \frac{n!}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^n\,(M,\,P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\,\sigma_M\right) =$$

$$= \frac{(n+k)!}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{k+n}\,(M,\,P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M$$

și altă relație asemănătoare în care ξ^n *este înlocuit prin* η^n *(la fel cînd în loc de* ξ^n *avem* ξ^{*n} *sau în loc de* η^n, η^{*n}*). După cum se vede, operatorului echivalent cu* $\bar{z}^n$ *sau* z^n *i se urcă gradul cu gradul indicat de primul termen din paranteză. Dacă al doilea termen din paranteză este o serie ca în (20), atunci fiecare termen al seriei suferă transformarea (21).*

Demonstrația teoremei 2 este evidentă, după cum reiese din demonstrația teoremei 1 pe baza relațiilor (11) și (12).

Pentru demonstrarea relațiilor (20) se fac calculele necesare. Vom face calculul numai pentru prima relație (20) și pentru prima expresie (16) :

$$DE^{\alpha\xi^k}\,(P) = D\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn)!}{n!\,s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{kn}\,(M,\,P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn)!}{n!\,s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{kn-1}(M,\,P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{kn\,(kn-1)!}{n\,(n-1)!\,s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{kn-1}\,(M,\,P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^n =$$

$$= k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn-1)!}{(n-1)!\,s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{kn-1}\,(M,\,P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^{n-1}\cdot\alpha =$$

$$= k\,((k-1)!\;\xi^{n-1},\,E^{\alpha\xi^k}\,(P))\,\alpha.$$

folosind notația (21).

Observația 4. Din (16), (17), (18), (19) și (20) se observă că funcțiile definite de aceste serii sînt echivalente cu următoarele funcții din plan

$$\left.\begin{matrix} E^{\alpha\xi^k}\,(P) \\ \widetilde{E}^{\alpha\xi^k}\,(P)\end{matrix}\right\} \sim \mathrm{e}^{\alpha\bar{z}^k},\qquad \left.\begin{matrix} E^{\alpha\eta^k}\,(P) \\ \widetilde{E}^{\alpha\eta^k}\,(P)\end{matrix}\right\} \sim \mathrm{e}^{\alpha z^k}.$$

Cele două expresii sînt echivalente celor două derivate respectiv coderivate la stînga și la dreapta. Dacă în (16), (17), (18) și (19) ipersuprafața Σ se restrînge în jurul punctului tinzînd către zero, atunci expresiile devin egale cu matricea unitate ceea ce corespunde cu $e^0 = 1$.

Observaţia 5. Observaţia 3 rămîne valabilă şi aici.

TEOREMA 3. *Seriile*

$$\operatorname{Sh} \alpha\xi\,(P) = \frac{1}{2}\,[E^{\alpha\xi}\,(P) - E^{-\alpha\xi}\,(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^{m}}\, \xi^{2n+1}\,(M,\, P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M \alpha^{2n+1} = \tag{22}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \xi^{*2n+1}\,(M,\, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^{m}}\,(\vec{n}_M\cdot\gamma\,(\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^{2n+1}$$

$$\widetilde{\operatorname{Sh}}\, \alpha\xi\,(P) = \frac{1}{2}\,[\widetilde{E}^{\alpha\xi}\,(P) - \widetilde{E}^{-\alpha\xi}\,(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^{m}}\, \xi^{2n+1}\,(M,\, P)\,\mathrm{d}\sigma_M = \tag{23}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\gamma)\; \xi^{*2n+1}\,(M,\, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^{m}}\,\mathrm{d}\sigma_M$$

$$\operatorname{Sh} \alpha\eta\,(P) = \frac{1}{2}\,[E^{\alpha\eta}\,(P) - E^{-\alpha\eta}\,(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^{m}}\, \eta^{2n+1}\,(M,\, P)\,(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^{2n+1} = \tag{24}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \eta^{*2n+1}\,(M,\, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^{m}}\,(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^{2n+1}$$

$$\widetilde{\operatorname{Sh}}\;\; \alpha\eta\,(P) = \frac{1}{2}\,[\widetilde{E}^{\alpha\eta}\,(P) - \widetilde{E}^{-\alpha\eta}\,(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^{m}}\, \eta^{2n+1}\,(M,\, P)\,\mathrm{d}\sigma_M = \tag{25}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\; \eta^{*2n+1}\,(M,\, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^{m}}\,\mathrm{d}\sigma_M$$

$$\operatorname{Ch}\, \alpha\xi\,(P) = \frac{1}{2}\,[E^{\alpha\xi}\,(P) + E^{-\alpha\xi}\,(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^{2n} (M, P) (\vec{n}_M \cdot \gamma) \, \mathrm{d}\sigma_M \, \alpha^{2n} = \tag{26}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \xi^{*2n} (M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \, \mathrm{d}\sigma_M \, \alpha^{2n}$$

$$\widetilde{\mathrm{Ch}} \; \alpha \xi (P) = \frac{1}{2} [\widetilde{E}^{\alpha\xi} (P) + \widetilde{E}^{-\alpha\xi} (P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^{2n} (M, P) \, \mathrm{d}\sigma_M = \tag{27}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \xi^{*2n} (M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \, \mathrm{d}\sigma_M$$

$$\mathrm{Ch} \; \alpha \eta (P) = \frac{1}{2} [E^{\alpha\eta} (P) + E^{-\alpha\eta} (P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} \eta^{2n} (M, P) (\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma}) \, \mathrm{d}\sigma_M \, \alpha^{2n} = \tag{28}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \eta^{*2n} (M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma}) \, \mathrm{d}\sigma_M \alpha^{2n}$$

$$\widetilde{\mathrm{Ch}} \; \alpha \eta (P) = \frac{1}{2} [\widetilde{E}^{\alpha\eta} (P) + \widetilde{E}^{-\alpha\eta} (P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma}) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} \eta^{2n} (M, P) \, \mathrm{d}\sigma_M = \tag{29}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma}) \eta^{*2n} (M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} \, \mathrm{d}\sigma_M$$

$$\mathrm{Sin} \; \alpha \xi (P) = \frac{1}{2\mathrm{i}} [(E^{\mathrm{i}\alpha\xi} (P) - E^{-\mathrm{i}\alpha\xi} (P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^{2n+1} (M, P) (\vec{n}_M \cdot \gamma) \, \mathrm{d}\sigma_M \, \alpha^{2n+1} = \tag{30}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_m} \int_{\Sigma} \xi^{*2n+1} (M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \, \mathrm{d}\sigma_M \, \alpha^{2n+1}$$

$$\widetilde{\mathrm{Sin}} \; \alpha \xi (P) = \frac{1}{2\mathrm{i}} [\widetilde{E}^{\mathrm{i}\alpha\xi} (P) - \widetilde{E}^{-\mathrm{i}\alpha\xi} (P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^{2n+1}(M, P)\, \mathrm{d}\sigma_M = \tag{31}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \gamma)\, \xi^{*2n+1}(M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \mathrm{d}\sigma_M$$

$$\mathrm{Sin}\, \alpha\eta\, (P) = \frac{1}{2\mathrm{i}} [E^{\mathrm{i}\alpha\eta}(P) - E^{-\mathrm{i}\alpha\eta}(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} \eta^{2n+1}(M, P)\, (\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma})\, \mathrm{d}\sigma_M\, \alpha^{2n+1} = \tag{32}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_m} \int_{\Sigma} \eta^{*2n+1}(M, P) \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma})\, \mathrm{d}\sigma_M \alpha^{2n+1}$$

$$\widetilde{\mathrm{Sin}}\ \alpha\eta\, (P) = \frac{1}{2} [\widetilde{E}^{\alpha\eta}(P) - \widetilde{E}^{-\alpha\eta}(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma}) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} \eta^{2n+1}(M, P)\, \mathrm{d}\sigma_M = \tag{33}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma})\, \eta^{*2n+1}(M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} \mathrm{d}\sigma_M$$

$$\mathrm{Cos}\, \alpha\xi\, (P) = \frac{1}{2} [E^{\mathrm{i}\alpha\xi}(P) + E^{-\mathrm{i}\alpha\xi}(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^{2n}(M, P)\, (\vec{n}_M \cdot \gamma)\, \mathrm{d}\sigma_M\, \alpha^{2n} = \tag{34}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_m} \int_{\Sigma} \xi^{*2n}(M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} (\vec{n}_M \cdot \gamma)\, \mathrm{d}\sigma_M\, \alpha^{2n}$$

$$\widetilde{\mathrm{Cos}}\, \alpha\xi\, (P) = \frac{1}{2} [\widetilde{E}^{\mathrm{i}\alpha\xi}(P) + \widetilde{E}^{-\mathrm{i}\alpha\xi}(P)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \xi^{2n}(M, P)\, \mathrm{d}\sigma_M = \tag{35}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \gamma)\, \xi^{*2n}(M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \bar{\gamma})}{\overline{MP}^m} \mathrm{d}\sigma_M$$

$$\mathrm{Cos}\, \alpha\eta\, (P) = \frac{1}{2}\, [E^{\mathrm{i}\eta}\, (P) + E^{-\mathrm{i}\eta}\, (P)] =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\, \eta^{2n}\, (M, P)\, (\overline{n}_M \cdot \overline{\gamma})\, \mathrm{d}\sigma_M\, \alpha^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_m} \int_{\Sigma} \eta^{*2n}(M,P)\, \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\, (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\, \mathrm{d}\sigma_M\, \alpha^{2n} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\widetilde{\mathrm{Cos}}\, \alpha\eta\, (P) = \frac{1}{2}\, [\widetilde{E}^{\mathrm{i}\eta}\, (P) + \widetilde{E}^{-\mathrm{i}\eta}\, (P)] =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\, \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\, \eta^{2n}\, (M, P)\, \mathrm{d}\sigma_M = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\, \eta^{*2n}\, (M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\, \mathrm{d}\sigma_M \end{aligned} \tag{37}$$

sînt uniform și absolut convergente pentru $P \in \Omega\, (\Sigma) \subset E_m$ *pentru orice domeniu* $\Omega \subset E_m$ *limitat de ipersuprafața închisă* Σ *care admite normală în fiecare punct.* $\vec{n}_M$ *este vectorul normalei interioare la* Σ, s_m *aria ipersferei unitate în* E_m *și* α *o matrice constantă. Aceste serii au următoarele proprietăți* :

$$\begin{gathered} D\ \mathrm{Sh}\, \alpha\xi\, (P) = \mathrm{Ch}\ \alpha\xi\, (P)\, \alpha \\ D\ \mathrm{Ch}\, \alpha\xi\, (P) = \mathrm{Sh}\ \alpha\xi\, (P)\, \alpha \\ \widetilde{D}\ \widetilde{\mathrm{Sh}}\, \alpha\xi\, (P) = \alpha\ \widetilde{\mathrm{Ch}}\ \alpha\xi\, (P) \\ \widetilde{D}\ \widetilde{\mathrm{Ch}}\, \alpha\xi\, (P) = \alpha\ \widetilde{\mathrm{Sh}}\ \alpha\xi\, (P) \\ \overline{D}\ \mathrm{Sh}\, \alpha\eta\, (P) = \mathrm{Ch}\ \alpha\eta\, (P)\ \alpha \\ \overline{D}\ \mathrm{Ch}\, \alpha\eta\, (P) = \mathrm{Sh}\ \alpha\eta\, (P)\ \alpha \\ \widetilde{\overline{D}}\ \widetilde{\mathrm{Sh}}\, \alpha\eta\, (P) = \alpha\ \widetilde{\mathrm{Ch}}\ \alpha\eta\, (P) \\ \widetilde{\overline{D}}\ \widetilde{\mathrm{Ch}}\, \alpha\eta\, (P) = \alpha\ \widetilde{\mathrm{Sh}}\ \alpha\eta\, (P) \\ D\ \mathrm{Sin}\, \alpha\xi\, (P) = \mathrm{Cos}\ \alpha\xi\, (P)\, \alpha \\ D\ \mathrm{Cos}\, \alpha\xi\, (P) = -\ \mathrm{Sin}\ \alpha\xi\, (P)\, \alpha \\ \widetilde{D}\ \widetilde{\mathrm{Sin}}\, \alpha\xi\, (P) = \alpha\ \widetilde{\mathrm{Cos}}\ \alpha\xi\, (P) \\ \widetilde{D}\ \widetilde{\mathrm{Cos}}\, \alpha\xi\, (P) = -\ \alpha\ \widetilde{\mathrm{Sin}}\ \alpha\xi\, (P) \\ \overline{D}\, \mathrm{Sin}\, \alpha\eta\, (P) = \mathrm{Cos}\ \alpha\eta\, (P)\ \alpha \end{gathered} \tag{38}$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{D}\ \mathrm{Cos}\ \alpha\eta\,(P) = -\ \mathrm{Sin}\ \alpha\eta\,(P)\,\alpha\\
(38)\qquad &\overline{\widetilde{\overline{D}}}\ \widetilde{\mathrm{Sin}}\ \alpha\eta\,(P) = \alpha\ \widetilde{\mathrm{Cos}}\ \alpha\eta\,(P)\\
&\widetilde{\overline{D}}\ \widetilde{\mathrm{Cos}}\ \alpha\eta\,(P) = -\ \alpha\ \widetilde{\mathrm{Sin}}\ \alpha\eta\,(P)
\end{aligned}
$$

și de asemenea avem reprezentările de tip Euler :

$$
\begin{aligned}
&E^{\alpha\xi}(P) = \mathrm{Ch}\ \alpha\xi\,(P) + \mathrm{Sh}\ \alpha\xi\,(P)\\
&\widetilde{E}^{\alpha\xi}(P) = \widetilde{\mathrm{Ch}}\ \alpha\xi\,(P) + \widetilde{\mathrm{Sh}}\ \alpha\xi\,(P)\\
&E^{\alpha\eta}(P) = \mathrm{Ch}\ \alpha\eta\,(P) + \mathrm{Sh}\ \alpha\eta\,(P)\\
(39)\qquad &\widetilde{E}^{\alpha\eta}(P) = \widetilde{\mathrm{Ch}}\ \alpha\eta\,(P) + \widetilde{\mathrm{Sh}}\alpha\eta\,(P)\\
&E^{i\alpha\xi}(P) = \mathrm{Cos}\ \alpha\xi\,(P) + i\ \mathrm{Sin}\ \alpha\xi\,(P)\\
&\widetilde{E}^{i\alpha\xi}(P) = \widetilde{\mathrm{Cos}}\ \alpha\xi\,(P) + i\ \widetilde{\mathrm{Sin}}\ \alpha\xi\,(P)\\
&E^{i\alpha\eta}(P) = \mathrm{Cos}\ \alpha\eta\,(P) + i\ \mathrm{Sin}\ \alpha\eta\,(P)\\
&\widetilde{E}^{i\alpha\eta}(P) = \widetilde{\mathrm{Cos}}\ \alpha\eta\,(P) + i\ \widetilde{\mathrm{Sin}}\ \alpha\eta\,(P)
\end{aligned}
$$

Demonstrația teoremei 3 este evidentă după modelul demonstrației teoremei 1 în baza relațiilor (11) și (12).

Pentru demonstrarea relațiilor (38) și (39) se efectuează calculele indicate.

Observația 6. Din relațiile (22)—(39) se observă că funcțiile definite de seriile respective sînt echivalente cu următoarele funcții din plan

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}\mathrm{Sh}\ \alpha\xi\,(P)\\ \widetilde{\mathrm{Sh}}\ \alpha\xi\,(P)\end{matrix}\right\}\sim \mathrm{sh}\ \alpha\bar{z}, &&\left.\begin{matrix}\mathrm{Sh}\ \alpha\eta\,(P)\\ \widetilde{\mathrm{Sh}}\ \alpha\eta\,(P)\end{matrix}\right\}\sim \mathrm{sh}\ \alpha z,\\
&\left.\begin{matrix}\mathrm{Ch}\ \alpha\xi\,(P)\\ \widetilde{\mathrm{Ch}}\ \alpha\xi\,(P)\end{matrix}\right\}\sim \mathrm{ch}\ \alpha\bar{z}, &&\left.\begin{matrix}\mathrm{Ch}\ \alpha\eta\,(P)\\ \widetilde{\mathrm{Ch}}\ \alpha\eta\,(P)\end{matrix}\right\}\sim \mathrm{ch}\ \alpha z,\\
&\left.\begin{matrix}\mathrm{Sin}\ \alpha\xi\,(P)\\ \widetilde{\mathrm{Sin}}\ \alpha\xi\,(P)\end{matrix}\right\}\sim \sin\ \alpha\bar{z}, &&\left.\begin{matrix}\mathrm{Sin}\ \alpha\eta\,(P)\\ \widetilde{\mathrm{Sin}}\ \alpha\eta\,(P)\end{matrix}\right\}\sim \sin\ \alpha z,\\
&\left.\begin{matrix}\mathrm{Cos}\ \alpha\xi\,(P)\\ \widetilde{\mathrm{Cos}}\ \alpha\xi\,(P)\end{matrix}\right\}\sim \cos\ \alpha\bar{z}, &&\left.\begin{matrix}\mathrm{Cos}\ \alpha\eta\,(P)\\ \widetilde{\mathrm{Cos}}\ \alpha\eta\,(P)\end{matrix}\right\}\sim \cos\ \alpha z.
\end{aligned}
$$

Existența a cîte două expresii corespunde celor două derivate respectiv coderivate la stînga și la dreapta. Dacă în relațiile (22) și (37) ipersuprafața Σ se restrînge în jurul lui P tinzînd către zero, atunci expresiile (22)—(25) și (30)—(33) devin zero corespunzător lui $\mathrm{sh}\ 0 = \sin\ 0 = 0$ iar expresiile (26)—(29) şi (34)—(37) devin egale cu e, matricea unitate, ceea ce corespunde lui ch $0 = \cos 0 = 1$.

Observaţia 7. Observaţia 3 şi metoda de exprimare a puterii argumentului pentru k întreg pozitiv dată în teorema 2 cu observaţiile 4 şi 5 rămîn valabile.

TEOREMA 4. *Seriile*

$$\frac{1}{1+\alpha\xi}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, \xi^n(M, P)\, (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, d\sigma_M\, \alpha^n = \tag{40}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{s_m} \int_{\Sigma} \xi^{*n}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, d\sigma_M\, \alpha^n$$

$$\frac{\widetilde{1}}{1+\alpha\xi}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!\,\alpha^n}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, \xi^n(M, P)\, d\sigma_M = \tag{41}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!\,\alpha^n}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, \xi^{*n}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, d\sigma_M$$

$$\frac{1}{1+\alpha\eta}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\, \eta^n(M, P)\, (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\, d\sigma_M\, \alpha^n = \tag{42}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{s_m} \int_{\Sigma} \eta^{*n}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\, (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\, d\sigma_M\, \alpha^n$$

$$\frac{\widetilde{1}}{1+\alpha\eta}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!\,\alpha^n}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\, \eta^n(M, P)\, d\sigma_M = \tag{43}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!\,\alpha^n}{s_m} \int_{\Sigma} (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\, \eta^{*n}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\, d\sigma_M$$

$$\mathrm{Ln}(1+\alpha\xi)(P) = \tag{44}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(n+1)s_m} \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, \xi^{n+1}(M, P)\, (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, d\sigma_M\, \alpha^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(n+1)s_m} \int_{\Sigma} \xi^{*n+1}(M, P)\, \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, (\vec{n}_M\cdot\gamma)\, d\sigma_M\, \alpha^{n+1}$$

$$\widetilde{\mathrm{Ln}}\,(1+\alpha\xi)(P)= \tag{45}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!\,\alpha^{n+1}}{(n+1)s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\gamma)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{n+1}(M,P)\,\mathrm{d}\sigma_M=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!\,\alpha^{n+1}}{(n+1)s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\xi^{*n+1}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M$$

$$\mathrm{Ln}\,(1+\alpha\eta)(P)= \tag{46}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!}{(n+1)s_m}\int_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^{n+1}(M,P)(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^{n+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!}{(n+1)s_m}\int_{\Sigma}\eta^{*n+1}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M\,\alpha^{n+1}$$

$$\widetilde{\mathrm{Ln}}\,(1+\alpha\eta)(P)= \tag{47}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!\,\alpha^{n+1}}{(n+1)s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M+\overline{\gamma})\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^{n+1}(M,P)\,\mathrm{d}\sigma_M=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!\,\alpha^{n+1}}{(n+1)s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\eta^{*n+1}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M$$

sînt absolut și uniform convergente pentru $P\in\Omega(\Sigma)\subset E_m$ *astfel încît după (11),* $R\,|\alpha|<1$, $\vec{n}_M$ *este vectorul normalei interioare la ipersuprafața* Σ *care limitează* $\Omega\subset E_m$, s_m *aria ipersferei unitate în* E_m *și* α *o matrice constantă. Aceste serii au următoarele proprietăți :*

$$\begin{aligned}
&D\,\mathrm{Ln}\,(1+\alpha\xi)(P)=\frac{1}{1+\alpha\xi}(P)\,\alpha\\
&\widetilde{D}\,\widetilde{\mathrm{Ln}}\,(1+\alpha\xi)(P)=\alpha\frac{\widetilde{1}}{1+\alpha\xi}(P)\\
&\overline{D}\,\mathrm{Ln}\,(1+\alpha\eta)(P)=\frac{1}{1+\alpha\eta}(P)\cdot\alpha\\
&\widetilde{\overline{D}}\,\widetilde{\mathrm{Ln}}\,(1+\alpha\eta)(P)=\alpha\frac{\widetilde{1}}{1+\alpha\eta}(P).
\end{aligned}\tag{48}$$

Demonstrația acestei teoreme se face ținînd seama de majorările (11) și (12), din relațiile (13), (14) și (15) și aplicînd criteriul raportului din analiză. Relațiile (48) se verifică imediat efectuînd calculele indicate.

Observația 8. Din relațiile (40)—(48) rezultă că funcțiile definite de seriile respective sînt echivalente cu următoarele funcții din plan :

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{1+\alpha\xi}(P)\\ \dfrac{\widetilde{1}}{1+\alpha\xi}(P)\end{matrix}\right\}\sim\frac{1}{1+\alpha\bar{z}},\qquad \left.\begin{matrix}\dfrac{1}{1+\alpha\eta}(P)\\ \dfrac{\widetilde{1}}{1+\alpha\eta}(P)\end{matrix}\right\}\sim\frac{1}{1+\alpha z},$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{Ln}\,(1+\alpha\xi)(P)\\ \widetilde{\mathrm{Ln}}\,(1+\alpha\xi)(P)\end{matrix}\right\}\sim\ln(1+\alpha\bar{z}),\qquad \left.\begin{matrix}\mathrm{Ln}\,(1+\alpha\eta)(P)\\ \widetilde{\mathrm{Ln}}\,(1+\alpha\eta)(P)\end{matrix}\right\}\sim\ln(1+\alpha z).$$

Existența celor două expresii corespunde celor două derivate, respectiv coderivate la stînga și la dreapta. Dacă în expresiile (40) — (47) ipersuprafața Σ se restrînge în jurul lui P tinzînd către zero, atunci expresiile (40)—(43) devin egale cu e, matricea unitate, ceea ce corespunde lui $\dfrac{1}{1+0} = 1$ iar expresiile (44)—(47) devin egale cu zero ceea ce corespunde lui $\ln 1 = 0$.

Observația 9. Observația 3 și metode de exprimare a puterii argumentului pentru k întreg pozitiv dată în teorema 2 cu observațiile 4 și 5 rămîn valabile.

Astfel, de exemplu, pentru a obține echivalentul lui $\dfrac{1}{\bar{z}}$ sau $\ln\bar{z}$, luăm $\alpha = e$ (matricea unitate în E_m) și în loc de P punctul P' din observația 3 cu $\beta = -1$ și $\delta = 1$.

TEOREMA 5. *Fie expresiile :*

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)s_m}\times$$
$$\times\int_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\xi^n(M,P)(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)s_m}\times$$
$$\times\int_{\Sigma}\xi^{*n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M \tag{49}$$

$$\tag{50} \widetilde{F}(\alpha, \beta, \gamma;\ \xi)(P) = e + $$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)\, s_m} \times$$

$$\times \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \gamma) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, \xi^n(M,P)\, \mathrm{d}\sigma_M = e +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)\, s_m} \times$$

$$\times \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \gamma)\, \xi^{*n}(M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, \mathrm{d}\sigma_M$$

$$\tag{51} F(\alpha, \beta, \gamma;\ \eta)\ (P) = e +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\ \beta(\beta+1)\ (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)\, s_m} \times$$

$$\times \int_{\Sigma} \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\, \eta^n(M,P)\, (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\, \mathrm{d}\sigma_M = e +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)\, s_m} \times$$

$$\times \int_{\Sigma} \eta^{*n}(M, P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m} (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\, \mathrm{d}\sigma_M$$

$$\tag{52} \widetilde{F}(\alpha, \beta, \gamma;\ \eta)\ (P) = e +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)\, s_m} \times$$

$$\times \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma}) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\, \eta^n(M, P)\, \mathrm{d}\sigma_M = e +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)\, s_m} \times$$

$$\times \int_{\Sigma} (\vec{n}_M \cdot \overline{\gamma})\, \eta^{*n}(M,P) \frac{(\overrightarrow{MP} \cdot \gamma)}{\overline{MP}^m}\, \mathrm{d}\sigma_M$$

Notînd cu

$$c_{2l} = \frac{[(l-1)\,(2l-1) - p\,(2p+1)]\,[(l-2)\,(2l-3) - p\,(2p+1)]\,\ldots\,[1\cdot 3 - p\,(2p+1)]\,[-p\,(2p+1)]}{(2l-1)\,!!\,l\,!}$$

$$c_{2l+1} = \frac{[l\,(2l-1)-(p+1)\,(2p+1)]\,[(l-2)\,(2l-3)-(p+1)\,(2p+1)]\,\ldots\,[2\cdot 3-(p+1)\,(2p+1)]\,[1-(p+1)\,(2p+1)]}{(2l+1)\,!!\,l\,!}$$

(53)

vom avea în continuare :

(54)
$$L_{2p}\,(\xi)\,(P) =$$
$$= C\left[e + \sum_{l=1}^{p} C_{2l}\,\frac{(2l)\,!}{s_m}\int_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^{m}}\,\xi^{2l}\,(M,\,P)\;(\vec{n}_M\cdot\gamma)\;\mathrm{d}\sigma_M\right] =$$
$$= C\left[e + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l}\,(2l)\,!}{s_m}\int_{\Sigma}\xi^{*2l}\,(M,\,P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^{m}}\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\;\mathrm{d}\sigma_M\right]$$

(55)
$$\widetilde{L}_{2p}\,(\xi)\,(P) =$$
$$= C\left[e + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l}\,(2l)\,!}{s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^{m}}\,\xi^{2l}\,(M,\,P)\;\mathrm{d}\sigma_M\right] =$$
$$= C\left[e + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l}\,(2l)\,!}{s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\gamma)\;\xi^{*2l}\,(M,\,P)\;\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^{m}}\,\mathrm{d}\sigma_M\right]$$

(56)
$$L_{2p}\,(\eta)\,(P) =$$
$$= C\left[e + \sum_{l=1}^{p} C_{2l}\,\frac{(2l)\,!}{s_m}\int_{\Sigma}\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^{m}}\,\eta^{2l}\,(M,\,P)\;(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\;\mathrm{d}\sigma_M\right] =$$
$$= C\left[e + \sum_{l=1}^{p} C_{2l}\,\frac{(2l)\,!}{s_m}\int_{\Sigma}\eta^{*2l}\,(M,\,P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^{m}}\,(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\;\mathrm{d}\sigma_M\right]$$

(57)
$$\widetilde{L}_{2p}\,(\eta)\,(P) =$$
$$= C\left[e + \sum_{l=1}^{p} C_{2l}\,\frac{(2l)\,!}{s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^{m}}\,\eta^{2l}(M,P)\,\mathrm{d}\sigma_M\right] =$$
$$= C\left[e + \sum_{l=1}^{p} C_{2l}\,\frac{(2l)\,!}{s_m}\int_{\Sigma}(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\;\eta^{*2l}\,(M,\,P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^{m}}\,\mathrm{d}\,\sigma_M\right]$$

$$L_{2p+1}(\xi)(P) = \tag{58}$$

$$= C\left[\frac{1}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^1(M, P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l+1}(2l+1)!}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{2l+1}(M, P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M\right] =$$

$$= C\left[\frac{1}{s_m}\int_\Sigma \xi^{*1}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l+1}(2l+1)!}{s_m}\int_\Sigma \xi^{*2l+1}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M\right.$$

$$\widetilde{L}_{2p+1}(\xi)(P) = \tag{59}$$

$$= C\left[\frac{1}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^1(M, P)\,\mathrm{d}\sigma_M + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l+1}(2l+1)!}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{2l+1}(M, P)\,\mathrm{d}\sigma_M\right] =$$

$$= C\left[\frac{1}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\xi^{*1}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l+1}(2l+1)!}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\xi^{*2l+1}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\overline{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M\right]$$

$$L_{2p+1}(\eta)(P) = \tag{60}$$

$$= C\left[\frac{1}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^1(M,P)\,(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l+1}(2l+1)!}{s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^{2l+1}(M, P)\,(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M\right] =$$

$$= C\left[\frac{1}{s_m}\int_\Sigma \eta^{*1}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l+1}(2l+1)!}{s_m}\int_\Sigma \eta^{*2l+1}(M, P)\,\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,(\vec{n}_M\cdot\overline{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M\right]$$

$$(61)\qquad \widetilde{L}_{2p+1}(\eta)(P) = C\left[\frac{1}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^1(M,P)\,\mathrm{d}\sigma_M + \right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l+1}(2l+1)!}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^{2l+1}(M,P)\,\mathrm{d}\sigma_M\right] =$$

$$= C\left[\frac{1}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\eta^{+1}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M + \right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{p}\frac{C_{2l+1}(2l+1)!}{s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\eta^{*2l+1}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M\right]$$

$$(62)\qquad J_n(\xi)(P) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)!}{k!\,(k+n)!\,2^{2k+n}\,s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{2k+n}(M,P)\,(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)!}{k!\,(k+n)!\,2^{2k+n}\,s_m}\int_\Sigma \xi^{*2k+n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}(\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\mathrm{d}\sigma_M$$

$$(63)\qquad \widetilde{J}_n(\xi)(P) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)!}{k!\,(k+n)!\,2^{2k+n}\,s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\xi^{2k+n}(M,P)\,\mathrm{d}\sigma_M =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)!}{k!\,(k+n)!\,2^{2k+n}\,s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\gamma)\,\xi^{*2k+n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M$$

$$(64)\qquad J_n(\eta)(P) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)!}{k!\,(k+n)!\,2^{2k+n}\,s_m}\int_\Sigma \frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^{2k+n}(M,P)\,(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)!}{k!\,(k+n)!\,2^{2k+n}\,s_m}\int_\Sigma \eta^{*2k+n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}(\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\mathrm{d}\sigma_M$$

$$(65)\qquad \widetilde{J}_n(\eta)(P) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)!}{k!\,(k+n)!\,2^{2k+n}\,s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\eta^{2k+n}(M,P)\,\mathrm{d}\sigma_M =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)!}{k!\,(k+n)!\,2^{2k+n}\,s_m}\int_\Sigma (\vec{n}_M\cdot\bar{\gamma})\,\eta^{*2k+n}(M,P)\frac{(\overrightarrow{MP}\cdot\gamma)}{\overline{MP}^m}\,\mathrm{d}\sigma_M$$

Aceste expresii sînt definite pentru orice $P \in \Omega(\Sigma) \subset E_m$, $\vec{n}_M$ *fiind normala interioară la ipersuprafaţa* Σ *care limitează* $\Omega \subset E_m$, s_m *aria ipersferei unitate în* E_m, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *constante date, p şi n întregi pozitivi sau nuli. Seriile (62)–(65) în aceste condiţii sînt absolut şi uniform convergente iar seriile (49)–(52) în condiţia suplimentară* $R < 1$ *cu R definit de (11). În plus avem următoarele relaţii satisfăcute (utilizînd notaţia (21) :*

$$(66)\quad (2!\,\xi^2, D^2F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P)) - (1!\,\xi^1, D^2F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P)) + \\ + (1+\alpha+\beta)(1!\,\xi^1, DF(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P)) - \gamma\, DF(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P) + \\ + \alpha\beta F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P) = 0$$

$$(2!\,\xi^2, \widetilde{D}^2\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P)) - (1!\,\xi^1, D^2F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P)) + \\ + (1+\alpha+\beta)(1!\,\xi^1, \widetilde{D}\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P)) - \\ - \gamma\,\widetilde{D}\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P) + \alpha\beta\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\xi)(P) = 0$$

$$(2!\,\eta^2, \overline{D}^2F(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P)) - (1!\,\eta^1, \overline{D}^2F(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P)) + \\ + (1+\alpha+\beta)(1!\,\eta^1, \overline{D}F(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P)) - \\ - \gamma\,\overline{D}F(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P) + \alpha\beta F(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P) = 0$$

$$(2!\,\eta^2, \widetilde{\overline{D}}^2\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P)) - (1!\,\eta^1, \widetilde{\overline{D}}^2\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P)) + \\ + (1+\alpha+\beta)(1!\,\eta^1, \widetilde{\overline{D}}\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P)) - \\ - \gamma\,\widetilde{\overline{D}}\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P) + \alpha\beta\widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\eta)(P) = 0$$

$$D^2L_n(\xi)(P) - (2!\,\xi^2, D^2L_n(\xi)(P)) - \\ - 2(1!\,\xi^1, DL_n(\xi)(P)) + n(n+1)L_n(\xi)(P) = 0$$

$$\widetilde{D}^2\widetilde{L}_n(\xi)(P) - (2!\,\xi^2, \widetilde{D}^2\widetilde{L}_n(\xi)(P)) - 2(1!\,\xi^1, \widetilde{D}\widetilde{L}_n(\xi)(P)) + \\ + n(n+1)\widetilde{L}_n(\xi)(P) = 0$$

$$\overline{D}^2L_n(\eta)(P) - (2!\,\eta^2, \overline{D}^2L_n(\eta)(P)) - 2(1!\,\eta^1, \overline{D}L_n(\eta)(P)) + \\ + n(n+1)L_n(\eta)(P) = 0$$

$$\widetilde{\overline{D}}^2\widetilde{L}_n(\eta)(P) - (2!\,\eta^2, \widetilde{\overline{D}}^2\widetilde{L}_n(\eta)(P)) - 2(1!\,\eta^1, \widetilde{\overline{D}}\widetilde{L}_n(\eta)(P)) + \\ + n(n+1)\widetilde{L}_n(\eta)(P) = 0$$

$$(2!\,\xi^2, D^2J_n(\xi)(P)) + (1!\,\xi^1, DJ_n(\xi)(P)) + (2!\,\xi^2, J_n(\xi)(P)) - \\ - n^2J_n(\xi)(P) = 0$$

$$(2\,!\ \xi^2, \widetilde{D}^2 \widetilde{J}_n(\xi)(P)) + (1\,!\ \xi^1, \widetilde{D}\,\widetilde{J}_n(\xi)(P)) + (2\,!\ \xi^2, \widetilde{J}_n(\xi)(P)) -$$
$$- n^2 \widetilde{J}_n(\xi)(P) = 0$$

$$(2\,!\ \eta^2, \overline{D}^2 J_n(\eta)(P)) + (1\,!\ \eta^1, \overline{D}\,J_n(\eta)(P)) + (2\,!\ \eta^2, J_n(\eta)(P)) -$$
$$- n^2 J_n(\eta)(P) = 0$$

$$(2\,!\ \eta^2, \widetilde{\overline{D}}^2 \widetilde{J}_n(\eta)(P)) + (1\,!\ \eta^1, \widetilde{\overline{D}}\,\widetilde{J}_n(\eta)(P)) + (2\,!\ \eta^2, \widetilde{J}_n(\eta)(P)) -$$
$$- n^2 \widetilde{J}_n(\eta)(P) = 0$$

Demonstrația acestei teoreme se face ținînd seama de majorările (11), și (12), de relațiile (13), (14) și (15) și aplicînd procedeele de la teoremele 1 și 4.

Relațiile (66) se verifică direct prin calcul.

Observația 10. Funcțiile definite de această teoremă sînt echivalente cu următoarele funcții din plan :

$$\left.\begin{matrix} F(\alpha, \beta, \gamma; \xi)(P) \\ \widetilde{F}(\alpha, \beta, \gamma; \xi)(P) \end{matrix}\right\} \sim F(\alpha, \beta, \gamma; \overline{z}), \quad \left.\begin{matrix} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta)(P) \\ \widetilde{F}(\alpha, \beta, \gamma; \eta)(P) \end{matrix}\right\} \sim F(\alpha, \beta, \gamma; z)$$

adică cu funcția ipergeometrică,

$$\left.\begin{matrix} L_n(\xi)(P) \\ \widetilde{L}_n(\xi)(P) \end{matrix}\right\} \sim P_n(\overline{z}), \quad \left.\begin{matrix} L_n(\eta)(P) \\ \widetilde{L}_n(\eta)(P) \end{matrix}\right\} \sim P_n(z).$$

adică cu polinomul Legendre de ordinul n, iar

$$\left.\begin{matrix} J_n(\xi)(P) \\ \widetilde{J}_n(\xi)(P) \end{matrix}\right\} \sim J_n(\overline{z}), \quad \left.\begin{matrix} J_n(\eta)(P) \\ \widetilde{J}_n(\eta)(P) \end{matrix}\right\} \sim J_n(z)$$

adică cu funcția Bessel de speța a I-a de ordin întreg pozitiv n.

În cazul polinoamelor Legendre, sînt determinate, cu excepția unui factor lăsat arbitrar C. Astfel, pentru a obține coeficienții obișnuiți, va trebui să luăm de exemplu pentru $n = 0$, $C = 1$; $n = 1$, $C = 1$; $n = 2$, $C = -\frac{1}{2}$; $n = 3$, $C = -\frac{3}{2}$; etc.

Analog se pot defini analogii altor polinoame ortogonale cunoscute din analiză.

Dacă în expresiile definite de teorema 5, ipersuprafața Σ se restrînge în jurul punctului P tinzînd către zero, în expresiile (49)—(52) obținem e, matricea unitate, corespunzător lui $F(\alpha, \beta, \gamma;\ 0) = 1$, în expresiile (54)—(57) C este corespunzător lui $P_{2p}(0) = C$ (dat pentru fiecare polinom), în expresiile (58)—(61) zero corespunzător lui $P_{2p+1}(0) = 0$ și în expresiile (62)—(65) zero pentru $n > 0$ și e, matricea unitate, pentru $n = 0$, ceea ce corespunde lui $J_n(0) = 0$, $n > 0$ și $J_0(0) = 1$

TEOREMA 6. *Soluțiile generale ale ecuațiilor cu derivate spațiale următoare :*

$$
\begin{aligned}
&D\varphi_1 = \varphi_1\,\alpha ;\ \widetilde{D}\varphi_2 = \alpha\varphi_2 ;\ \overline{D}\varphi_3 = \varphi_3\alpha ;\ \widetilde{\overline{D}}\varphi_4 = \alpha\varphi_4 ;\\
&D\varphi_5 = k\,((k-1)\,!\ \xi^{k-1},\ \varphi_5)\,\alpha ;\ \widetilde{D}\varphi_6 = k\alpha\,((k-1)\,!\ \xi^{k-1},\ \varphi_6) ;\\
&\overline{D}\varphi_7 = k((k-1)\,!\ \eta^{k-1},\ \varphi_7)\ \alpha ;\ \widetilde{\overline{D}}\varphi_8 = k\alpha\ ((k-1)\,!\ \eta^{k-1},\ \varphi_8) ;\\
&D\varphi_9 = \varphi_{10}\,\alpha,\ D\varphi_{10} = \varphi_9\,\alpha ;\ \widetilde{D}\varphi_{11} = \alpha\,\varphi_{12},\ \widetilde{D}\varphi_{12} = \alpha\,\varphi_{11} ;\\
(67)\qquad &\overline{D}\varphi_{13} = \varphi_{14}\,\alpha,\ \overline{D}\varphi_{14} = \varphi_{13}\,\alpha ;\ \widetilde{\overline{D}}\varphi_{15} = \alpha\,\varphi_{16},\ \widetilde{\overline{D}}\varphi_{16} = \alpha\,\varphi_{15} ;\\
&\overline{D}\varphi_{17} = \varphi_{18}\varphi,\ D\varphi_{18} = -\,\varphi_{17}\,\alpha ;\ \widetilde{D}\varphi_{19} = \alpha\,\varphi_{20},\ \widetilde{D}\varphi_{20} = -\,\alpha\,\varphi_{19} ;\\
&\overline{D}\varphi_{21} = \varphi_{22}\,\alpha,\ \overline{D}\varphi_{22} = -\,\varphi_{21}\,\alpha ;\ \widetilde{\overline{D}}\varphi_{23} = \alpha\,\varphi_{24},\ \widetilde{\overline{D}}\varphi_{24} = -\,\alpha\,\varphi_{23} ;\\
&D\varphi_{25} = \frac{1}{1+\alpha\xi}\,(P)\alpha ;\ \widetilde{D}\varphi_{26} = \alpha\,\frac{\widetilde{1}}{1+\alpha\,\xi}\,(P) ;\\
&\qquad\qquad \overline{D}\varphi_{27} = \frac{1}{1+\alpha\eta}\,(P)\ \alpha ;\ \widetilde{\overline{D}}\varphi_{28} = \alpha\,\frac{\widetilde{1}}{1+\alpha\eta}\,(P).
\end{aligned}
$$

cu k întreg pozitiv și α matrice constantă, sînt date de :

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(P,h) = E^{\alpha\xi}(P,h) ;\quad \varphi_2(P,h) = \widetilde{E}^{\alpha\xi}(P,h) ;\\
&\varphi_3(P,h) = E^{\alpha\eta}(P,h) ;\quad \varphi_4(P,h) = \widetilde{E}^{\alpha\eta}(P,h) ;\\
&\varphi_5(P,h) = E^{\alpha\xi^k}(P,h) ;\quad \varphi_6(P,h) = \widetilde{E}^{\alpha\xi^k}(P,h) ;\\
&\varphi_7(P,h) = E^{\alpha\eta^k}(P,h) ;\quad \varphi_8(P,h) = \widetilde{E}^{\alpha\eta^k}(P,h) ;\\
&\varphi_9(P,h) = \mathrm{Sh}\,\alpha\xi\,(P,h) ;\quad \varphi_{10}(P,h) = \mathrm{Ch}\,\alpha\xi\,(P,h) ;\\
&\varphi_{11}(P,h) = \widetilde{\mathrm{Sh}}\,\alpha\xi\,(P_1\,h) ;\quad \varphi_{12}(P,h) = \widetilde{\mathrm{Ch}}\,\alpha\xi\,(P,h) ;\\
&\varphi_{13}(P,h) = \mathrm{Sh}\,\alpha\eta\,(P,h) ;\quad \varphi_{14}(P,h) = \mathrm{Ch}\,\alpha\eta\,(P,h) ;\\
(68)\qquad &\varphi_{15}(P,h) = \widetilde{\mathrm{Sh}}\,\alpha\eta\,(P,h) ;\quad \varphi_{16}(P,h) = \widetilde{\mathrm{Ch}}\,\alpha\eta\,(P,h) ;\\
&\varphi_{17}(P,h) = \mathrm{Sin}\,\alpha\xi\,(P,h) ;\quad \varphi_{18}(P,h) = \mathrm{Cos}\,\alpha\xi\,(P,h) ;\\
&\varphi_{19}(P,h) = \widetilde{\mathrm{Sin}}\,\alpha\xi\,(P,h) ;\quad \varphi_{20}(P,h) = \widetilde{\mathrm{Cos}}\,\alpha\xi\,(P,h) ;\\
&\varphi_{21}(P,h) = \mathrm{Sin}\,\alpha\eta\,(P,h) ;\quad \varphi_{22}(P,h) = \mathrm{Cos}\,\alpha\eta\,(P,h) ;\\
&\varphi_{23}(P,h) = \widetilde{\mathrm{Sin}}\,\alpha\eta\,(P,h) ;\quad \varphi_{24}(P,h) = \widetilde{\mathrm{Cos}}\,\alpha\eta\,(P,h) ;\\
&\varphi_{25}(P) = Ln\,(1+\alpha\xi)\,(P) + h_1\,(P) ;\\
&\varphi_{26}\ (P)\ \widetilde{Ln}\,(1+\alpha\xi)\,(P) + h_2\,(P)\\
&\varphi_{27}(P) = \widetilde{Ln}\,(1+\alpha\eta)\,(P) + h_3(P) ;\\
&\varphi_{28}(P) = \widetilde{Ln}\,(1+\alpha\eta)\,(P) + h_4(P)
\end{aligned}
$$

iar ecuațiile următoare

$$
\begin{aligned}
&(2\,!\,\xi^2, D^2\varphi_1) - (1\,!\,\xi^1, D^2\varphi_1) + (1+\alpha+\beta)(1\,!\,\xi^1, D\varphi_1) - \\
&\quad -\gamma D\varphi_1 + \alpha\beta\varphi_1 = 0 \\
&(2\,!\,\xi^2, \widetilde{D}^2\varphi_2) - (1\,!\,\xi^1, \widetilde{D}^2\varphi_2) + (1+\alpha+\beta)(1\,!\,\xi^1, \widetilde{D}\varphi_2) - \\
&\quad -\gamma\widetilde{D}\varphi_2 + \alpha\beta\varphi_2 = 0 \\
&(2\,!\,\eta^2, \overline{D}^2\varphi_3) - (1\,!\,\eta^1, \overline{D}^2\varphi_3) + (1+\alpha+\beta)(1\,!\,\eta^1, \overline{D}\varphi_3) - \\
&\quad -\gamma\bar{D}\varphi_3 + \alpha\beta\varphi_3 = 0 \\
&(2\,!\,\eta^2, \widetilde{\overline{D}}^2\varphi_4) - (1\,!\,\eta^1, \widetilde{\overline{D}}^2\,\varphi_4) + (1+\alpha+\beta)(1\,!\,\eta^1, \widetilde{\overline{D}}\varphi_4) - \\
&\quad -\gamma\widetilde{\overline{D}}\varphi_4 + \alpha\beta\varphi_4 = 0 \\
&D^2\varphi_5 - (2\,!\,\xi^2, D^2\varphi_5) - 2\,(1\,!\,\xi^1, D\varphi_5) + n(n+1)\,\varphi_5 = 0 \\
&\widetilde{D}^2\varphi_6 - (2\,!\,\xi^2, \widetilde{D}^2\varphi_6) - 2\,(1\,!\,\xi^1, \widetilde{D}\varphi_6) + n(n+1)\,\varphi_6 = 0 \\
&\overline{D}^2\varphi_7 - (2\,!\,\eta^2, \overline{D}^2\varphi_7) - 2\,(1\,!\,\eta^1, \overline{D}\varphi_7) + n(n+1)\,\varphi_7 = 0 \\
&\widetilde{\overline{D}}^2\varphi_8 - (2\,!\,\eta^2\widetilde{\overline{D}}^2\varphi_8) - 2\,(1\,!\,\eta^1, \widetilde{\overline{D}}\varphi_8) + n(n+1)\,\varphi_8 = 0 \\
&(2\,!\,\xi^2, D^2\varphi_9) + (1\,!\,\xi^1, D\varphi_9) + (2\,!\,\xi^2, \varphi_9) - n^2\varphi_9 = 0 \\
&(2\,!\,\xi^2, \widetilde{D}^2\varphi_{10}) + (1\,!\,\xi^1, \widetilde{D}\varphi_{10}) + (2\,!\,\xi^2, \varphi_{10}) - n^2\varphi_{10} = 0 \\
&(2\,!\,\eta^2, \overline{D}^2\varphi_{11}) + (1\,!\,\eta^1, \overline{D}\varphi_{11}) + (2\,!\,\eta^2, \varphi_{11}) - n^2\varphi_{11} = 0 \\
&(2\,!\,\eta^2, \widetilde{\overline{D}}^2\varphi_{12}) + (1\,!\,\eta^1, \widetilde{\overline{D}}\varphi_{12}) + (2\,!\,\eta^2, \varphi_{12}) - n^2\varphi_{12} = 0
\end{aligned}
\tag{69}
$$

admite ca soluții :

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(P,h) = F(\alpha,\beta,\gamma;\ \xi)(P,h);\ \varphi_2(P,h) = \widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\ \xi)(P,h); \\
&\varphi_3(P,h) = F(\alpha,\beta,\gamma;\ \eta)(P,h);\ \varphi_4(P,h) = \widetilde{F}(\alpha,\beta,\gamma;\ \eta)(P,h); \\
&\varphi_5(P,h) = L_n(\xi)(P,h);\ \varphi_6(P,h) = \widetilde{L}_n(\xi)(P,h);\ \varphi_7(P,h) = \\
&\qquad = L_n(\eta)(P,h); \\
&\varphi_8(P,h) = \widetilde{L}_n(\eta)(P,h);\ \varphi_9(P,h) = J_n(\xi)(P,h);\ \varphi_{10}(P,h) = \\
&\qquad = \widetilde{J}_n(\xi)(P,h); \\
&\varphi_{11}(P,h) = J_n(\eta)(P,h);\ \varphi_{12}(P,h) = \widetilde{J}_n(\eta)(P,h),
\end{aligned}
\tag{70}
$$

unde h este o funcție (matrice) continuă arbitrară, h_1, h_2 h_3 și h_4 satisfac $Dh_1 = 0$, $\widetilde{D}h_2 = 0$, $\overline{D}h_3 = 0$ și $\widetilde{\overline{D}}h_4 = 0$, iar prin $\psi(P, h)$ din membrul doi s-a considerat că sub semnul integral se introduce funcția $h(M) \in C^0$ la dreapta lui $(\vec{n}_M \cdot \gamma)$ sau $(\vec{n}_M \cdot \bar{\gamma})$ în cazul acționării operatorilor D și $\bar{D}$ și la stînga *acestor matrici în cazul acţionării operatorilor* $\widetilde{D}$ *şi* $\widetilde{\widetilde{D}}$, *M fiind punctul în raport cu care se integrează.*

Ţinînd seama de rezultatele din teoremele 1—5 şi modul cum s-a făcut calculul, se vede că soluţiile (68) şi (70) satisfac ecuaţiile respectiv (67) şi (69).

Orice ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul I va depinde de o funcţie arbitrară, deci soluţiile (68) sînt soluţiile generale ale ecuaţiilor (67). În [9] s-au integrat şi alte tipuri de ecuaţii liniare de ordinul I, II etc., cu derivate spaţiale şi funcţia arbitrară se introduce tot sub aceeaşi formă. Funcţia h astfel introdusă va putea fi determinată prin probleme la limită. Din cele arătate în [9], problemele se reduc la determinarea unei probleme la limită pentru o funcţie olomorfă sau coolomorfă în spaţiu.

Primită la redacţie la 14 iunie 1965.

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la Physique Mathématique.* Bucarest, I, 1931.
2. Gr. C. Moisil şi N. Teodorescu, *Fonctions holomorphes dans l'espace.* Bul. Soc. de Şt. Cluj, *6*, 177—194 (1931).
3. Mariana Nedelcu, *Polinomul areolar de ordinul n în spaţiul cu trei dimensiuni.* St. cerc. mat., **7**, *1—2* (1956).
4. Mariana Nedelcu, *Formule de mediaţie pentru polinomul areolar de ordinul n în spaţiul cu 3 dimensiuni.* Bul. ştiinţ., Acad. R.P.R., seria matematică, **8**, *1* (1956).
5. Mariana Nedelcu, *Le théorème de Morera pour le polynôme aréolaire d'ordre n dans l'espace à 3 dimensions.* Bull. Mathématique, **1** (**49**), *1*.
6. Мариана Неделку, *Теорема Морера для ареолярных многочлена и в трехмерном пространстве.* Бюллетень Научной Информации. Акад. РНР, **4**, *71* (1959).
7. Mariana Nedelcu, *La théorie des polynômes aréolaires dans l'espace à n dimensions. I. Le polynôme aréolaire de l'ordre* I. Rev. de math. pures et appl. Acad. R.P.R., **4**, *4* (1959).
8. Mariana Nedelcu, *The theory of the areolar polynomials in the m-dimensional space. II. The n-order areolar polynomial.* Rev. de math. pures et appl. Acad. R.P.R., **5**, *1* (1960).
9. Mariana Nedelcu, *La théorie des polynômes aréolaires dans l'espace à n dimensions. III. Théorème de Morera et applications du polynôme aux équations à dérivées aréolaires et aux problèmes aux limites.* Bull. Math. **3** (**51**), *2*, 165—207 (1959).
10. Miron Nicolescu, *Recherches sur les fonctions polyharmoniques.* Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure 52.
11. D. Pompeiu, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* Rendiconti Palermo, **33** (1912).
12. N. Teodorescu, *Sur l'emploi de conditions globales dans quelques problèmes physiques.* Annali di Matematica, **11**, 325—362 (1933).
13. N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire.* Bucarest, 1936.
14. N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique Mathématique.* Thèse, Paris, 1931.
15. N. Teodorescu, *Cercetări româneşti şi sovietice în teoria derivatei areolare şi a funcţiilor monogene* (α). Analele româno-sovietice, Seria Mat. Fiz., 1958.

EXTINDEREA COMPLEMENȚILOR ALGEBRICI GENERALIZAȚI LA MATRICI OARECARE

DE

R. GABRIEL
(Timişoara)

Inversa generalizată a unei matrici a fost introdusă de E. H. Moore, A. Bjerhammar, R. Penrose. O nouă definiţie a fost dată de Em. Arghiriade şi A. Dragomir pentru o matrice de rang maximal. În lucrare se generalizează noţiunile şi rezultatele pentru o matrice dreptunghiulară oarecare.

Inversa generalizată a fost introdusă de E. H. Moore [1] şi regăsită în cazul unei matrici de rang maximal de A. Bjerhammar [2] şi pentru o matrice oarecare de R. Penrose [3] şi de [4]. E. H. Moore şi R. Penrose definesc inversa generalizată ca fiind soluţia unică a sistemului de ecuaţii matriciale :

$$A\,X\,A = A \qquad (AX)^* = AX,$$

$$X\,A\,X = X \qquad (XA)^* = XA.$$

Definiţia lui A. Bjerhammar va fi expusă la începutul primului paragraf.

O nouă definiţie a inversei generalizate a fost dată de prof. Em. Arghiriade şi A. Dragomir [5], [6]. Fiind dată o matrice $\underset{r,\,n}{A}$ cu r linii şi s coloane (rang $A = r$, complementul algebric generalizat al elementului a_{ij} se determină astfel : se consideră toţi minorii maximali care conţin pe a_{ij} şi fiecare luat conjugat se înmulţeşte cu complementul algebric al lui a_{ij} în acest minor ; suma tuturor produselor obţinute ne dă complementul algebric generalizat al lui a_{ij}.

Se defineşte o normă ca fiind det $(A\,A^*)$. Matricea complemenţilor algebrici generalizaţi, transpusă şi divizată cu norma, ne dă inversa generalizată.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, Nr. 10, P. 1567 – 1581, BUCUREŞTI, 1965

Asupra inversei generalizate mai menţionăm lucrările [7], [8], [9]. În lucrarea de faţă îmi propun ca definiţia dată inversei generalizate de prof. Em. Arghiriade şi A. Dragomir cu ajutorul complemenţilor algebrici generalizaţi să o extind de la o matrice de rang maximal la o matrice oarecare. În acest scop în primul paragraf se generalizează metoda lui A. Bjerhammar pentru calculul inversei generalizate. În paragraful 2 rezolvăm problema principală a lucrării, iar la urmă găsim o formulă simplă prin care se exprimă complemenţii algebrici generalizaţi în cazul matricilor reale oarecare. În afara acestui caz se lucrează cu matrici avînd ca elemente numere complexe.

§ 1. În acest paragraf generalizăm metoda lui A. Bjerhammar pentru calculul inversei generalizată, care a formulat metoda lui pentru matrici de rang maximal. Fie $\underset{r,\, s}{A}$ o matrice orizontală [1]) de rang maximal ($r \leqslant s$, rang $A = r$) şi fie $\underset{s\ r,\, n}{B}$ o matrice de rang maximal cu proprietatea $AB^* = 0$. Metoda lui A. Bjerhammar pentru calculul inversei generalizată a matricei A este conţinută în egalitatea :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^{-1} = (A^{(-1)}, B^{(-1)}),$$

unde $A^{(-1)}$ şi $B^{(-1)}$ sînt respectiv inversele generalizate ale matricilor A şi B.

Fie acum :

$$\underset{t,\, s}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ . & . & . & . \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{ts} \end{pmatrix}$$

o matrice dreptunghiulară oarecare (nu facem nici o ipoteză asupra rangului ei, deci $r \leqslant \min.\ (t, s)$), şi fie :

$$\underset{p\ s}{B} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & \dots & \tau_{1s} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & \dots & \tau_{2s} \\ . & . & . & . & . \\ \tau_{p1} & \tau_{p2} & \tau_{p3} & \dots & \tau_{ps} \end{pmatrix}$$

o matrice tot oarecare, care satisface la condiţia :

$$AB^* = 0. \tag{1.1}$$

---

[1]) Înţelegem printr-o matrice orizontală o matrice dreptunghiulară care are mai multe coloane decît linii. În notaţia $\underset{r,\, s}{A}$, r reprezintă numărul de linii, iar s numărul de coloane.

Enunţul generalizării metodei lui A. Bjerhammar este :

TEOREMA 1. *Dacă X este inversa generalizată a matricei A, Y inversa generalizată a matricei B, unde A şi B verifică relaţia* (1.1), *atunci* $Z = (X, Y)$ *este inversa generalizată a matricei* $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

Demonstraţie. Perechile A, X şi B, Y verifică fiecare ecuaţiile lui Penrose :

$$\begin{array}{llll} \text{I} & AXA = A & \text{I}' & BYB = B \\ \text{II} & XAX = X & \text{II}' & YBY = Y \\ \text{III} & (AX)^* = AX & \text{III}' & (BY)^* = BY \\ \text{IV} & (XA)^* = XA & \text{IV}' & (YB)^* = YB \end{array}$$

Mai întîi stabilim unele relaţii. Egalitatea IV′ se mai scrie

$$B^*Y^* = YB.$$

Dacă înmulţim această egalitate la stînga cu A şi ţinem seama de (1.1) obţinem :

$$AYB = AB^*Y^* = (AB^*)\ Y^* = 0.$$

Am obţinut deci

$$AYB = 0. \tag{1.2}$$

Dacă înmulţim acum egalitatea II′ la stînga cu A şi ţinem seama de (1.2) obţinem

$$AY = A\ (YBY) = (AYB)\ Y = 0,$$

deci

$$AY = 0. \tag{1.3}$$

Din (1.1) obţinem prin transpunere şi conjugare $B\ A^* = 0$. Procedînd analog ca înainte cu relaţiile IV şi II, obţinem ca rezultat

$$BXA = 0 \tag{1.4}$$

şi

$$BX = 0. \tag{1.5}$$

Ca să demonstrăm că $Z = (X, Y)$ este inversa generalizată a matricii $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ va trebui să arătăm că matricile Z şi C satisfac ecuaţiile lui Moore-Penrose, dat fiind că aceste ecuaţii determină în mod univoc inversa generalizată

Avem (acolo unde punem paranteze ţinem seama de (1.3) sau (1.5)) :

$$\text{I}''.\quad CZC = \begin{pmatrix} \underset{t,\,s}{A} \\ \underset{p,\,s}{B} \end{pmatrix} \left(\underset{s,\,t}{X}, \underset{s,\,p}{Y}\right) \begin{pmatrix} \underset{t,\,s}{A} \\ \underset{p,\,s}{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AXA + (AY)B \\ (BX)A + BYB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AXA \\ BYB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = C$$

$$\text{II}''.\quad ZCZ = (X, Y)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}(X, Y) = (XAX + Y(BX), X(AY) + YBY) =$$

$$= (XAX, YBY) = (X, Y) = Z$$

$$\text{III}'.\qquad (CZ)^* = \begin{pmatrix} AX & (AY) \\ (BX) & BY \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} AX & 0 \\ 0 & BY \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (AX)^* & 0 \\ 0 & (BY)^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} AX & 0 \\ 0 & BY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX & (AY) \\ (BX) & BY \end{pmatrix} = CZ$$

$$\text{IV}''.\qquad (ZC)^* = (XA + YB)^* = (XA)^* + (YB)^* = ZC.$$

În aceste verificări ale ecuaţiilor lui Moore-Penrose am ţinut seama în ultimele etape, de faptul că perechile de matrici X, A şi Y, B verifică ecuaţiile lui Penrose. În rezumat am obţinut egalităţile :

$$\text{I}''\ CZC = C \qquad \text{III}''\ (CZ)^* = CZ$$

$$\text{II}''\ ZCZ = Z \qquad \text{IV}''\ (ZC)^* = ZC$$

relaţii care ne spun că $Z = (X, Y)$ este inversa generalizată a matricei $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Cu aceasta generalizarea este demonstrată. În concluzie teorema I ne spune că ori de cîte ori avem $A \cdot B^* = 0$, avem şi formula

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^{(-1)} = (A^{(-1)}, B^{(-1)}). \tag{1.6}$$

Exact ca mai înainte, sau prin transpunerea relaţiei (1.6), se demonstrează că ori de cîte ori $A \cdot B^* = 0$, că avem

$$(A, B)^{(-1)} = \begin{pmatrix} A^{(-1)} \\ B^{(-1)} \end{pmatrix}.$$

Pentru a valorifica practic rezultatul exprimat în formula (1.6), trebuie să alegem matricea B în aşa fel încît $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ să fie de rang maximal. În felul acesta devine posibil calculul inversei generalizate $C^{(-1)}$ prin metoda sau formula lui A. Bjerhammar din cazul matricilor de rang maximal. În acest scop alegem matricea B ca avînd dimensiunile $(s-r,\ s)$, rangul maximal, astfel încît să satisfacă condiţia (1.1). Matricea

$$\underset{s+t-r,\,s}{C} = \left(\begin{array}{cc} & s \\ t & \boxed{\ A\ } \\ s-r & \boxed{\ B\ } \\ & s \end{array}\right)$$

este verticală sau pătrată căci $r \leqslant t$. Rangul matricei C este egal cu s, deci maximal. Dacă pentru calculul inversei generalizate $C^{(-1)}$ folosim metoda lui A. Bjerhammar, construim matricea pătrată F:

$$\underset{s+t-r,\ s+t-r}{F} = \left(\begin{array}{ccc} & s & t-r \\ \begin{smallmatrix}c\\ |\\ \Psi\\ +\\ c\end{smallmatrix} & \boxed{\ C\ } & \boxed{\ D\ } \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c}\boxed{A}\\[4pt] \boxed{B}\end{array} & \boxed{\ D\ } \end{pmatrix}$$

unde matricea $\underset{s+t-r,\ t-r}{D}$ este de rang maximal şi satisface relaţia $C^*D = 0$. Inversa generalizată a matricei A se găseşte prin inversarea matricei pătrate nesingulare F

$$F^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} & t & s-r \\ s & \boxed{A^{(-1)}} & \boxed{B^{(-1)}} \\ t-r & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\qquad D^{(-1)} \qquad}} \end{array}\right). \tag{1.7}$$

§ **2**. În acest paragraf extindem noţiunea de complement algebric generalizat la matrici dreptunghiulare de rang arbitrar. După cum am spus la început, complemenţii algebrici generalizaţi au fost introduşi de Em. Arghiriade pentru matrici de rang maximal.

Fie $\underset{r,\,s}{A}$ o matrice orizontală de rang maximal. Em. Arghiriade introduce mai întîi o normă a matricei A prin formula:

$$N(A) = |A\ A^*| \tag{2.1}$$

iar complementul algebric generalizat corespunzător elementului a_{ij}

$$B_{ij} = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < j < \ldots < \alpha_r \leqslant s} \overline{A}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{smallmatrix}\right) A_{ij}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{smallmatrix}\right) \tag{2.2}$$

unde $A\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{smallmatrix}\right)$ este un minor maximal care conţine elementul a_{i_j} iar $A_{ij}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{smallmatrix}\right)$ este complementul algebric al elementului a_{ij} în minorul $A\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{smallmatrix}\right)$.

Un element A_{ij} al inversei generalizate $A^{(-1)}$ se află prin următoarea formulă:

$$A_{ij} = \frac{1}{N(A)}\, B_{ji} = \frac{1}{|AA^*|} \sum \overline{A}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & i & \ldots & \alpha_r \\ 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{smallmatrix}\right) A_{ji}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & i & \ldots & \alpha_r \\ 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{smallmatrix}\right). \tag{2.3}$$

În cazul general considerăm o matrice $\underset{t,\,s}{A}$ de dimensiunile (t, s) şi de rang r ($r \leqslant \min. (t, s)$). În decursul demonstraţiei ce urmează convenim să notăm prin $A_\alpha = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$ submatricea orizontală din A formată cu liniile liniar independente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ şi prin $A^\beta = A\ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ submatricea verticală formată din coloanele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$. Dacă vrem să arătăm că o submatrice A_α conţine linia de ordinul i din A o notăm prin $A_{\alpha,\, i}$; deci $A_{\alpha,\, i} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$. Prin $A \binom{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_r}{\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_r}$ înţelegem ca întotdeauna minorul care se află la intersecţia liniilor $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ cu coloanele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, iar prin $A_{ij} \binom{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots j \ldots \alpha_r}{\beta_1\ \beta_2 \ldots i \ldots \beta_r}$ complementul algebric al elementului A_{ij} în minorul $A \binom{\alpha_1 \ldots j \ldots \alpha_r}{\beta_1 \ldots i \ldots \beta_r}$.

Definiţie. Definim norma matricei $\underset{t,\,s}{A}$ prin egalitatea

$$N(A) = \sum_{\substack{1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_r \leqslant s \\ 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \leqslant t}} A \binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_r}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \beta_r} \overline{A} \binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_r}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_r} \tag{2.4}$$

iar complementul algebric generalizat corespunzător elementului A_{ij} prin formula :

$$B_{ij} = \sum_{\substack{1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < j < \ldots < \beta_r \leqslant s \\ 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < i < \ldots < \alpha_r \leqslant t}} \overline{A} \binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots j \ldots \beta_r}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots i \ldots \alpha_r} A_{ij} \binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots j \ldots \beta_r}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots i \ldots \alpha_r} \tag{2.5}$$

Teorema II. *Un element* A_{ij} *al inversei generalizate* $A^{(-1)}$ *ne este dat de următoarea formulă :*

$$A_{ij} = \frac{1}{N(A)} B_{ji}$$

adică

$$A_{ij} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_r \leqslant s \\ 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \leqslant t}} A \binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_r}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_r} \overline{A} \binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_r}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_r}} \sum_{\substack{1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < i < \ldots < \beta_r \leqslant s \\ 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < j < \ldots < \alpha_r \leqslant t}} \overline{A} \binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots i \ldots \beta_r}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots j \ldots \alpha_r} A_{ji} \binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots i \ldots \beta_r}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots j \ldots \alpha_r} \tag{2.6}$$

Demonstraţie. Pornim de la formula (1.6)

$$\begin{pmatrix} \underset{t,\,s}{A} \\ \underset{p,\,s}{B} \end{pmatrix}^{(-1)} = \left(\underset{s,\,t}{A^{(-1)}}, \underset{s,\,p}{B^{(-1)}} \right) \quad (\text{cînd } AB^* = 0).$$

Alegem şi aici matricea $\underset{p,\,s}{B}$ ca avînd $s - r$ linii şi rangul maximal (o astfel de alegere este evident posibilă). Cu această alegere, (1.6) se scrie :

$$\begin{pmatrix} \underset{t-s}{A} \\ \underset{s-r,\,s}{B} \end{pmatrix}^{(-1)} = \left(\underset{s,\,t}{A^{(-1)}}, \underset{s,\,s-r}{B^{(-1)}} \right).$$

Să notăm ca în § 1 $C = \begin{pmatrix} \underset{t,\,s}{A} \\ \underset{s-r,\,s}{B} \end{pmatrix}$ iar prin A_{ij}, B_{ij} și C_{ij} respectiv elementele inverselor generalizate $A^{(-1)}$, $B^{(-1)}$ și $C^{(-1)}$. Între aceste elemente avem, datorită relației (1.6), următoarele relații :

$$C_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{cînd } 1 \leqslant j \leqslant t, \\ B_{ij} & \text{cînd } t < j \leqslant s + t - r. \end{cases} \tag{27}$$

Întrucît $r \leqslant t$, deci $t - r \geqslant 0$ avem $s + t - r \geqslant s$. De aici rezultă că matricea C este verticală (sau pătrată cînd $r = t$).

Rangul matricei C este egal cu s, deci maximal. În consecință pentru calculul unui element al inversei generalizate $C^{(-1)}$ putem să folosim formula (2.3) al lui Em. Arghiriade :

$$C_{ij} = \frac{1}{|C^* C|} \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < j < \ldots < \alpha_p < \beta_{p+1} < \ldots < \beta_s \leqslant s+t-r} \overline{C}\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & & & s \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_p, & \beta_{p+1} \ldots & \beta_s \end{pmatrix} C_{ji} \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & & & & & s \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & j, & \ldots, & \alpha_p & \beta_{p+1} \ldots & \beta_s \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, j, \ldots, \alpha_p$ sînt ordinile liniilor luate din matricea A iar $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_s$ sînt ordinile liniilor luate din matricea B. Întrucît ne interesează elementele inversei generalizate $A^{(-1)}$, am considerat deja : $1 \leqslant j \leqslant t$. Conform relațiilor (2.7) avem :

$$A_{ij} = \frac{1}{|C^* C|} \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < j < \ldots < \alpha_p < \beta_{p+1} < \ldots < \beta_s \leqslant s+t-r} \overline{C}\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & s \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, j \ldots & \alpha_p, & \beta_{p+1}, \ldots & \beta_s \end{pmatrix} C_{ji} \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & s \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, j \ldots & \alpha_p, & \beta_{p+1} \ldots & \beta_s \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Un minor maximal oarecare din matricea C este :

$$C\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & & & s \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_p, & \beta_{p+1}, \ldots, & \beta_s \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1,1} & a_{\alpha_1,2} \cdots\cdots\cdots & a_{\alpha_1,s} \\ a_{\alpha_2,1} & a_{\alpha_2,2} \cdots\cdots\cdots & a_{\alpha_2,s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{\alpha_p,1} & a_{\alpha_p,2} \cdots\cdots\cdots & a_{\alpha_p,s} \\ \tau_{\beta_{p+1}-t,1} & \tau_{\beta_{p+1}-t,2}, \cdots\cdots & \tau_{\beta_{p+1}-t,s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \tau_{\beta_s-t,1} & \tau_{\beta_s-t,2} \cdots\cdots\cdots & \tau_{\beta_s-t,s} \end{vmatrix}$$

Dat fiind că rangul matricei A este r, liniile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sînt liniar dependente cînd $p > r$, și în acest caz minorul considerat se anulează. Este evident că numărul de linii pe care-l luăm din matricea $\underset{s-r,\,s}{B}$, adică $s - p$, este mai mic sau egal cu numărul de linii existente în $\underset{s-r,\,s}{B}$, adică $s - r$.

Deci avem $s - p \leqslant s - r$ de unde rezultă $p \geqslant r$. În concluzie pentru un minor $C\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & \dots & \dots & \dots & s\\ \alpha_1, & \alpha_2 & \dots & \alpha_p & \beta_{p+1} \dots & \beta_s\end{smallmatrix}\right)$ diferit de zero avem, pe de o parte $p \leqslant r$, iar pe de altă parte $p \geqslant r$, de unde rezultă $p = r$. Prin urmare minorii maximali nenuli din matricea C conțin r linii din matricea A și $s - r$ linii din matricea B, adică matricea B în întregime. Un astfel de minor va fi de forma

$$C\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & \dots & & & & & s\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_r, & t+1, & t+2, & \dots & s+t-r\end{smallmatrix}\right). \tag{2.10}$$

Cu această observație (2.9) devine :

$$A_{ij} = \frac{1}{|C^*C|} \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < j < \dots < \alpha_r \leqslant t} \overline{C}\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & \dots & & & & & s\\ \alpha_1, & \alpha_2 & \dots & j & \dots & \alpha_r, & t+1, \dots & s+t-r\end{smallmatrix}\right) C_{ji}\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & \dots & & & & & & s\\ \alpha_1 & \alpha_2, & \dots & j & \dots & \alpha_r, & t+1, & t+2, \dots & s+t-r\end{smallmatrix}\right) \tag{2.11}$$

În această formulă luăm numai liniile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, j, \dots, \alpha_r$ care sînt liniar independente. În cele ce urmează folosim de mai multe ori următoarea proprietate [10] :

Dacă $\underset{r,s}{G}$ și $\underset{r-s,s}{H}$ sînt două matrici orizontale ($r < s$) ale căror ranguri sînt egale cu numărul de linii (deci maximale) și care verifică relația $GH^* = 0$, între coordonatele lor grassmaniene (minori maximali) există următoarele relații :

$$F\,G\left(\begin{smallmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \dots, & \gamma_r\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{smallmatrix}\right) = (-1)^{(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_r)-(1+2+\dots+r)}\,\overline{H}\left(\begin{smallmatrix}\beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_{s-r}\\ 1, & 2, & \dots, & s-r\end{smallmatrix}\right), \tag{2.12}$$

unde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, \beta_1, \beta_2 \dots, \beta_{s-r}$ reprezintă o permutare a numerelor $1, 2, \dots, s$, deci $\gamma_\mu \neq \beta_\nu$, $1 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r \leqslant s$, $1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{s-r} \leqslant s$ iar F este o constantă. În continuare să observăm că din faptul că la noi $\underset{t,s}{A}\ \underset{s,s-r}{B^*} = 0$, rezultă că aceeași relație există și între $\underset{r,s}{A_\alpha}$ și matricea $\underset{s-,r,s}{B}$, adică

$$A_\alpha B^* = 0 \tag{2.13}$$

$\underset{s-r,s}{B}$ și $\underset{r,s}{A_\alpha}$ fiind de rang maximal între coordonatele lor grassmaniene, avem relația (2.12) :

$$F_\alpha A_\alpha\left(\begin{smallmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \dots, & \gamma_r\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{smallmatrix}\right) = (-1)^{(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_r)-(1+2+\dots+r)}\,\overline{B}\left(\begin{smallmatrix}\beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_{s-r}\\ 1, & 2, & \dots, & s-r\end{smallmatrix}\right), \tag{2.14}$$

unde $\gamma_\mu \neq \beta_\nu$, $1 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r \leqslant s, 1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{s-r} \leqslant s$ iar F_α este o constantă care depinde numai de matricea A_α.

Vom găsi în continuare niște exprimări pentru mărimile ce intervin în formula (2.11). Începem prin a calcula minorul maximal $C\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & \dots & & & & & s\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_r, & t+1, & t+2, & \dots & s+t-r\end{smallmatrix}\right)$. Pentru aceasta folosim succesiv regula lui Laplace, pentru dezvoltarea unui determinant după minorii complementari, formula (2.14) și formula lui Cauchy-Binet pentru dezvoltarea determinantului $|\underset{r,s}{A_\alpha}\underset{s,r}{A^*_\alpha}|$. Astfel avem următoarele egalități :

$$C\binom{1,\ 2,\ \dots,\ \qquad\qquad\qquad\quad ,s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_r,\ t+1,\ t+2,\ \dots,\ s+t-r} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1,1} & a_{\alpha_1,2} & \dots & a_{\alpha_1,s} \\ a_{\alpha_2,1} & a_{\alpha_2,2} & \dots & a_{\alpha_2,s} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{\alpha_r,1} & a_{\alpha_r,s} & \dots & a_{\alpha_r,s} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,s} \\ \hdotsfor{4} \\ b_{s-r,1} & b_{s-r,2} & \dots & b_{s-r,s} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_r<s,\ 1\leqslant\beta_1<\beta_2<\dots<\beta_{s-r}\leqslant s} (-1)^{(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_r)-(1+2+\dots+r)} A_\alpha\binom{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots\ \gamma_r}{1,\ 2,\ \dots\ r} B\binom{\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_{s-r}}{1,\ 2,\ \dots,\ s-r} =$$

$$= \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_r\leqslant s} \overline{F}_\alpha A_\alpha\binom{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_r}{1,\ 2,\ \dots,\ r}\overline{A}_\alpha\binom{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_r}{1,\ 2,\ \dots,\ r} =$$

$$= \overline{F}_\alpha \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_r\leqslant s} A_\alpha\binom{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_r}{1,\ 2,\ \dots,\ r}\overline{A}_\alpha\binom{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_r}{1,\ 2,\ \dots,\ r} = \overline{F}_\alpha\,|A_\alpha A^*{}_\alpha|.$$

Deci am obținut

$$C\binom{1,\ 2,\ \dots,\ \qquad\qquad\qquad\quad s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_r,\ t+1,\ t+2,\ \dots,\ s+t-r} = \overline{F}_\alpha\,|A_\alpha\, A^*{}_\alpha|. \tag{2.15}$$

În formula (2.11) vom avea

$$C\binom{1,\ 2,\ \dots,\ \qquad\qquad\qquad\quad ,s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_r,\ t+1,\ t+2,\ \dots,\ s+t-r} = \overline{F}_{\sigma,j}\,|A_{\alpha j}\, A^*{}_{\alpha,j}|$$

și prin conjugare

$$\overline{C}\binom{1,\ 2,\ \dots,\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad ,s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ j,\ \dots\ \alpha_r,\ t+1,\ t+2,\ \dots,\ s+t-r} = F_{\alpha,j}\,|A_{\alpha,j}\, A^*{}_{\alpha,j}| \tag{2.16}$$

întrucît $|A_{\alpha,j}\ A^*_{\alpha,j}|$ este număr real.

Să calculăm acum mărimea $C_{ji}\binom{1,\ 2,\ \dots\ \qquad\qquad\qquad s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ j\ \dots\ \alpha_r,\ t+1,\ \dots,\ s+t-r}$ din (2.11) care este complementul algebric al elementului a_{ji} în minorul $C\binom{1,\ 2,\ \dots,\ \qquad\qquad\qquad ,s}{\alpha_1,\ \dots,\ j\ \dots\ \alpha_r,\ t+1,\ t+2,\ \dots,\ s+t-r}$. Avem :

$$C_{ji}\binom{1,\ 2,\ \dots,\ \qquad\qquad\qquad\quad ,s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ j\ \dots\ \alpha_r,\ t+1,\ s+2,\ \dots,\ s+t-r} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{\alpha_1,1} & a_{\alpha_1,2} & \dots & a_{\alpha_1,i} & \dots & a_{\alpha_1,s} \\ a_{\alpha_2,1} & a_{\alpha_2,2} & \dots & a_{\alpha_2,i} & \dots & a_{\alpha_2,s} \\ \hdotsfor{6} \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,i} & \dots & a_{j-1,s} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,i} & \dots & a_{j+1,s} \\ \hdotsfor{6} \\ a_{\alpha_r,1} & a_{\alpha_r,2} & \dots & a_{\alpha_r,i} & \dots & a_{\alpha_r,s} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,i} & \dots & b_{1,s} \\ \hdotsfor{6} \\ b_{s-r,1} & b_{s-r,2} & \dots & b_{s-r,i} & \dots & b_{s-r,s} \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} A^{j,i}_{\alpha,j} \\ B \end{pmatrix}\right|$$

unde $A^{j\,i}_{\alpha,j}$ este evident matricea care se află pe primele r linii ale determinantului de mai sus. Dezvoltăm determinantul $\left|\begin{pmatrix} A^{j\,i}_{\alpha,j} \\ B \end{pmatrix}\right|$ după minorii primelor r respectiv ultimilor $s - r$ linii :

$$\left|\begin{pmatrix} A^{j\,i}_{\alpha,j} \\ B \end{pmatrix}\right| = \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_r\leqslant s,\ 1\leqslant\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{s-r}\leqslant s} (-1)^{(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_r)-(1+2+\ldots+r)} A^{j\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_r}{1,\ 2, \ldots r} B\binom{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s-r}}{1,\ 2, \ldots,\ s-r} =$$

$$= \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots< i <\ldots<\gamma_r\leqslant s,\ 1\leqslant\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{s-r}\leqslant s,\ \gamma_\mu\neq\beta_\nu} (-1)^{(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+i+\ldots+\gamma_r)-(1+2+\ldots+r)} A^{i\,j}_{\alpha,i}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i \ldots r}{1,\ r, \ldots \qquad r} B\binom{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s-r}}{1,\ 2, \ldots,\ s-r} +$$

$$+ \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_r\leqslant s,\ 1\leqslant\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{s-r}\leqslant s,\ \gamma_\mu\neq\beta_\nu \text{ și } \gamma_\mu\neq i} (-1)^{(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_r)-(1+2+\ldots+r)} A^{j\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots,\ r} B\binom{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s-r}}{1,\ 2, \ldots,\ s-r}$$

Termenul al 2-lea al sumei de mai sus se anulează întrucît determinantul $A^{j\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \ldots, \gamma_r}{1, \ldots, r}$ conține o linie de elemente nule. Astfel obținem :

$$\left|\begin{pmatrix} A^{j\,i}_{\alpha,j} \\ B \end{pmatrix}\right| = \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots< i <\ldots<\gamma_r\leqslant s,\ 1\leqslant\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{s-r}\leqslant s,\ \gamma_\mu\neq\beta_\nu \text{ și atunci } \beta_\nu\neq i} (-1)^{(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_r)-(1+2+\ldots+r)} A^{j\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots \qquad r} B\binom{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s-r}}{1,\ 2, \ldots\ s-r}$$

(2.17)

Dacă introducem (2.14) în (2.17) obținem :

$$(2.18) \quad \left|\begin{pmatrix} A^{j\,i}_{\alpha,j} \\ B \end{pmatrix}\right| = \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots< i <\ldots<\gamma_r\leqslant s} \overline{F}_{\alpha,j}\,\overline{A}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots, \qquad r} A^{j\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots \qquad r} =$$

$$= \overline{F}_{\alpha,j} \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots< i <\ldots\ \gamma_r\leqslant s} \overline{A}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots, \qquad r} A^{j,\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots, \qquad r}$$

Observăm că determinantul $A^{j,\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots \qquad r}$ se obține înlocuind în determinantul $A_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots j, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots, \qquad r}$ linia $(a_{j,\gamma_1}, a_{j,\gamma_2} \ldots a_{ji} \ldots a_{j\gamma_r})$ prin linia $(0, 0, \ldots \overset{i}{1} \ldots 0)$. Înseamnă că $A^{j\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots. \qquad r}$ este complementul algebric al elementului a_{ji} în minorul $A_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i \ldots \gamma_r}{1,\ 2, \ldots, \qquad r}$. Astfel fiind observăm prin comparație cu (2.3) că mărimea $a^{j\,i}_{\alpha,j}$ pe care o introducem prin egalitatea :

$$(2.19) \qquad a^{j\,i}_{\alpha,j} = \sum_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots< i <\gamma_r< s} \overline{A}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r}{1,\ 2, \ldots, \qquad r} A^{j\,i}_{\alpha,j}\binom{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r}{1,\ 2, \ldots\ r}$$

este complementul algebric generalizat al elementului a în matricea orizontală de rang maximal $A_{\alpha j}$. Dacă înlocuim (2.19) în (2.18) obținem :

$$(2.20) \qquad C_{ji}\binom{1,\ 2, \ldots, \qquad\qquad\qquad\qquad s}{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots j, \ldots \alpha_r,\ t+1,\ t+2 \ldots s+t-r} = \left|\begin{pmatrix} A^{ji}_{\alpha j} \\ B \end{pmatrix}\right| = \overline{F}_{\alpha,j}\ a^{ji}_{\alpha,j},$$

În continuare calculăm determinantul $|\,C^*\ C\,|$. Pentru aceasta folosim succesiv formula lui Cauchy-Binet, observația (2.10) și formula (2.15).

Avem :

$$|C^* C| = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p < \beta_{p+1} < \ldots < \beta_s \leqslant s+t-r} C\binom{1,\ 2,\ \ldots,\ \ldots\ \ldots,\ s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_p,\ \beta_{p+1} \ldots \beta_s} \overline{C}\binom{1,\ 2,\ \ldots,\ \ldots\ \ldots,\ s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p,\ \beta_{p+1} \ldots \beta_s} =$$

$$= \sum_{\underbrace{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \leqslant t}_{\text{linii liniar independente}}} C\binom{1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ \ldots,\ s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r,\ t+1 \ldots s+t-r} \overline{C}\binom{1,\ 2,\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ s}{\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_s,\ t+1,\ t+2,\ldots\ s+t-r} =$$

$$= \sum_{\alpha} \overline{F}_\alpha\, |A_\alpha\, A_\alpha^*|\, F_\alpha\, |A_\alpha\, A_\alpha^*| = \sum_{\alpha} F_\alpha\, \overline{F}_\alpha\, |A_\alpha\, A_\alpha^*|^2 .$$

Deci

$$|C^* C| = \sum_{\alpha} F_\alpha\, \overline{F}_\alpha\, |A_\alpha\, A_\alpha^*|^2 . \tag{2.21}$$

Să revenim acum la expresia elementului inversei generalizate A_{ij} din formula (2.11). Dacă înlocuim în această formulă, exprimările mărimilor $\overline{C}\binom{1\ 2 \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ s}{\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots j \ldots \alpha_r,\ t+1,\ t+2 \ldots s+t-r}$, $C_{ji}\binom{1\ 2\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ s}{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ j \ldots \alpha_r,\ t+1,\ t+2,\ s+t-r}$ şi $|C^*\ C|$ din formulele (2.16), (2.20) şi (2.21) avem :

$$A_{ij} = \frac{1}{\sum\limits_{\tau} F_\tau\, \overline{F}_\tau\, |A_\tau\, A_\tau^*|^2} \sum_{\alpha} F_{\alpha j}\, |A_{\alpha,j}\ A_{\alpha j}^*|\ \overline{F}_{\alpha j}\ a_{\alpha,j}^{ji} = \tag{2.22}$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{\tau} F_\tau\, \overline{F}_\tau\, |A_\tau\, |A_\tau^*|^2} \sum_{\tau} F_{\alpha j}\ \overline{F}_{\alpha,j}\ |A_{\alpha,j}\ A_{\alpha j}^*|\ a_{\alpha,j}^{ji} .$$

Pentru a găsi nişte exprimări pentru coeficienţii F_α să revenim la formula (2.14) unde aceştia au fost introduşi :

$$F_\alpha\, A_\alpha\binom{\gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_r}{1\ \ 2\ \ldots\ r} = (-1)^{(\gamma_1+\gamma_2+\ \ldots\ +\gamma_r)-(1+2+\ \ldots\ +r)}\, \overline{B}\binom{\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_{s-r}}{1\ \ 2\ \ldots\ \ s-r} \tag{2.14'}$$

Fie $B\binom{\beta_1^0,\ \beta_2^0,\ \ldots \beta_{s-r}^0}{1,\ \ 2 \ldots\ s-r}$ un minor din matricea B diferit de zero. Atunci şi $A_\alpha\binom{\gamma_1^0,\ \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0}{1,\ \ 2, \ldots, r}$ este diferit de zero în ipoteza că $\gamma_\mu^0 \neq \beta_\nu^0$. Considerînd $1 \leqslant \gamma_1^0 < \gamma_2^0 < \ldots < \gamma_r^0 \leqslant s$ şi $1 \leqslant \beta_1, < \ldots < \beta_{s-r}^0 \leqslant s$ formula (2.14) ne dă în particular :

$$F_\alpha A_x \begin{pmatrix} \gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \ldots, & \gamma_r^0 \\ 1, & 2, & \ldots, & r \end{pmatrix} = (-1)^{(\gamma_1^0+\gamma_2^0+\ldots+\gamma_r^0)-(1+2+\ \ldots r)}\, \overline{B}\begin{pmatrix} \beta_1^0 & \beta_2^0, & \ldots, & \beta_{s-r}^0 \\ 1 & 2, & \ldots, & s-r \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Dacă notăm $(\gamma_1^0+\gamma_2^0+\ldots+\gamma_r^0)-(1+2+\ldots+r)=\gamma_0$ şi $B\begin{pmatrix} \beta_1^0, & \beta_2^0, & \ldots, & \beta_{s-r}^0 \\ 1, & 2, & \ldots, & s-r \end{pmatrix} = B_0$, exprimarea mărimilor F_α din (2.23) devine :

$$F_\alpha = \frac{(-1)^{\gamma_0}\overline{B}_0}{A_\alpha\begin{pmatrix} \gamma_1^0 & \gamma_2^0 & \ldots & \gamma_r^0 \\ 1 & 2 & \ldots & r \end{pmatrix}} . \tag{2.24}$$

Dacă înlocuim (2.24) în (2.22), exprimarea elementului A_{ij} devine :

$$A_{ij} = \frac{1}{\sum\limits_{\tau} \frac{(-1)^{\gamma_0}\overline{B}_0}{A_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0 & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}} \frac{(-1)^{\gamma_0} B_0}{\overline{A}_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}} |A_\tau A_\tau^*|^2}\cdot$$

$$\text{(2.25)}\qquad \cdot \sum_{\alpha} \frac{(-1)^{\gamma_0}\overline{B}_0}{A_{\alpha,j}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}} \frac{(-1)^{\gamma_0} B_0}{\overline{A}_{\alpha,j}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}} |A_{\alpha,j}A_{\alpha,j}^*|\, a_{\alpha,j}^{ji} =$$

$$= \sum_{\tau} \frac{1}{\frac{(A_\tau A_\tau^*)(A_\tau A_\tau^*)}{A_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}\overline{A}_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}}} \cdot \sum_{\alpha} \frac{|A_{\alpha,j}A_{\alpha j}^*|}{A_{\alpha j}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & \dots, & r\end{pmatrix}\overline{A}_{\alpha j}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}}\, a_{\alpha,j}^{ji}.$$

Fie acum $A^r = A(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ submatricea formată din coloanele $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ ale matricei A. În particular $A^{\gamma^0} = A(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \dots, \gamma_r^0)$ este de rang maximal. Dat fiind că rangul matricei A este egal cu r, rezultă că orice coloană din A se exprimă ca o combinaţie liniară de coloanele matricei $A(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \dots, \gamma_r^0)$. De aici rezultă :

$$\text{(2.26)}\qquad A(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r) = A(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \dots, \gamma_r^0)\, T_r',$$

unde T_r este o matrice pătrată de ordinul r. Astfel fiind, rezultă că coordonatele grassmaniene (minorii maximali) ale matricei $A(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ se obţin din cele ale matricei $A(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \dots, \gamma_r^0)$ prin înmulţirea cu determinantul $|T_\gamma|$:

$$\text{(2.27)}\qquad A\begin{pmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \dots, & \gamma_r\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_r\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_r\end{pmatrix} |T_\gamma|.$$

Să calculăm expresiile

$$\frac{|A_\tau A_\tau^*|}{A_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}\overline{A}_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}}$$

respectiv

$$\frac{|A_{\alpha,j}A_{\alpha,j}^*|}{A_{\alpha j}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}\overline{A}_{\alpha j}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}}$$

din (2.25).

Pentru aceasta folosim formula lui Cauchy-Binet, relaţia (2.27) şi mai ţinem seama şi de unele notaţii. Avem :

$$\frac{|A_\tau A_\tau^*|}{A_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}\overline{A}_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}} = \frac{\sum\limits_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\dots\gamma_r\leqslant s} A_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \dots, & \gamma_r\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}\overline{A}_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2, & \dots, & \gamma_r\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}}{A_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}\overline{A}_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ 1, & 2, & \dots, & r\end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_r\leqslant s} A\begin{pmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \dots, & \gamma_r\\ \tau_1, & \tau_2, & \dots, & \tau_r\end{pmatrix}\overline{A}\begin{pmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \dots, & \gamma_r\\ \tau_1, & \tau_2, & \dots, & \tau_r\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ \tau_1, & \tau_2, & \dots, & \tau_r\end{pmatrix}\overline{A}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, & \gamma_2^0, & \dots, & \gamma_r^0\\ \tau_1, & \tau_2, & \dots, & \tau_r\end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\gamma} A\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\end{pmatrix} |T_\gamma| \overline{A}_\tau \begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\end{pmatrix} |\overline{T}_\gamma|}{A\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\end{pmatrix} \overline{A}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{A\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\end{pmatrix} \overline{A}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\end{pmatrix} \sum\limits_{\gamma} |T_\gamma| \, |\overline{T}_\gamma|}{A\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\end{pmatrix} \overline{A}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r\end{pmatrix}} = \sum_{\gamma} |T_\gamma| \, |\overline{T}_\gamma| .$$

Deci am obţinut

$$(2.28) \qquad \frac{|A_\tau A_\tau^*|}{A_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ 1, 2, \ldots, r\end{pmatrix} \overline{A}_\tau\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ 1, 2, \ldots, r\end{pmatrix}} = \sum_{\gamma} |T_\gamma| \, |\overline{T}_\gamma| .$$

de unde în particular :

$$(2.29) \qquad \frac{|A_{\alpha,j} A_{\alpha j}^*|}{A_{\alpha j}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ 1, 2, \ldots, r\end{pmatrix} \overline{A}_{\alpha j}\begin{pmatrix}\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots, \gamma_r^0\\ 1, 2, \ldots, r\end{pmatrix}} = \sum_{\gamma} |T_\gamma| \, |\overline{T}_\gamma| .$$

Înlocuind (2.28) şi (2.29) în (2.25) obţinem :

$$(2.30) \qquad A_{ij} = \frac{1}{\sum\limits_{\tau} |A_\tau A_\tau^*| \sum\limits_{\gamma} |T_\gamma| \, |\overline{T}_\gamma|} \cdot \sum_{\alpha} a_{\alpha j}^{ji} \sum_{\gamma} |T_\gamma| \, |\overline{T}_\gamma| =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{\tau} |A_\tau A_\tau^*|} \sum_{\alpha} a_{\alpha,j}^{ji} .$$

Mărimea $a_{\alpha,j}^{ji}$ ne este dată de (2.19) :

$$(2.31) \qquad a_{\alpha,j}^{ji} = \sum_{1 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < i < \ldots \gamma_r \leqslant s} \overline{A}_{\alpha,j} \begin{pmatrix}\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r\\ 1, 2, \ldots\ldots\ldots, r\end{pmatrix} A_{\alpha,j}^{ji} \begin{pmatrix}\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r\\ 1, 2, \ldots\ldots\ldots, r\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant \gamma_1, \gamma_2, < \ldots < i < \ldots \gamma_r \leqslant s} \overline{A} \begin{pmatrix}\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r\\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, j, \ldots, \alpha_r\end{pmatrix} A_{ji} \begin{pmatrix}\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r\\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, j, \ldots, \tau_r\end{pmatrix} .$$

În continuare avem datorită formulei lui Cauchy-Binet :

$$(2.32) \qquad |A_\tau A_\tau^*| = \sum_{1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_r \leqslant s} A \begin{pmatrix}\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r\\ \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r\end{pmatrix} \overline{A} \begin{pmatrix}\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r\\ \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r\end{pmatrix} .$$

Înlocuind (2.31) şi (2.32) în (2.30), obţinem rezultatul final

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} A_{ij} = {} & \frac{1}{\sum\limits_{\substack{1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r \leqslant t\\ 1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_r \leqslant s}} A \begin{pmatrix}\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r\\ \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r\end{pmatrix} \overline{A} \begin{pmatrix}\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r\\ \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r\end{pmatrix}} \times \\ & \times \sum_{\substack{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < j < \ldots < \alpha_r \leqslant t\\ 1 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < i < \ldots < \gamma_r \leqslant s}} \overline{A} \begin{pmatrix}\gamma_1 \gamma_2 \ldots i \ldots \gamma_r\\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots j \ldots \alpha_r\end{pmatrix} A_{ji} \begin{pmatrix}\gamma_1, \gamma_2, \ldots, i, \ldots, \gamma_r\\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, j, \ldots, \alpha_r\end{pmatrix} \end{aligned}$$

În toate calculele pe care le-am efectuat am considerat liniile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, j \ldots \alpha_r$ liniar independente. În final însă putem să însumăm asupra tuturor sistemelor de r linii, fiindcă minorii care provin din sisteme de linii liniar dependente sînt egale cu zero şi rezultatul rămîne neschimbat. Cu aceasta teorema 2 a fost demonstrată.

§ 3. Aici găsim o nouă formulă pentru complemenţii algebrici generalizaţi ai unei matrici reale oarecare. De asemenea găsim o formulă pentru elementele inversei generalizate.

TEOREMA 3. *Fie A o matrice reală avînd rangul r, $Z = \underset{t,\,s}{A^{(-1)}}$ inversa ei generalizată şi C matricea complemenţilor algebrici generalizaţi. Avem următoarele formule :*

$$C_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial N(A)}{\partial a_{ij}} \tag{3.1}$$

şi

$$Z_{ij} = \frac{\partial \ln \sqrt{N(A)}}{\partial a_{ji}}. \tag{3.2}$$

Demonstraţie. În cazul real norma unei matrici este : $N(A) = \sum\limits_{\substack{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_r\leqslant s\\ 1\leqslant\delta_1<\delta_2<\ldots<\delta_r\leqslant t}} \left(A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_r\\ \delta_1 & \delta_2 \ldots \delta_r\end{pmatrix}\right)^2$. Derivata parţială în raport cu a_{ij}, a unui minor care nu conţine elementul a_{ij} este zero, iar derivata parţială a unui minor ce conţine elementul a_{ij} este egal cu complementul algebric al elementului a_{ij} în minorul respectiv. Ţinînd seama de această observaţie, avem :

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial N(A)}{\partial a_{ij}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \sum\limits_{\gamma,\delta}\left(A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_r\\ \delta_1 & \delta_2 \ldots \delta_r\end{pmatrix}\right)^2}{\partial a_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta}\frac{\partial \left(A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_r\\ \delta_1 & \delta_2 \ldots \delta_r\end{pmatrix}\right)^2}{\partial a_{ij}} =$$

$$= \sum_{\gamma,\delta} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_r\\ \delta_1 & \delta_2 \ldots \delta_r\end{pmatrix}\frac{\partial A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_r\\ \delta_1 & \delta_2 \ldots \delta_r\end{pmatrix}}{\partial a_{ij}} =$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots<j<\ldots<\gamma_r\leqslant s\\ 1\leqslant\delta_1<\delta_2<\ldots<i<\ldots<\delta_r\leqslant t}} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 \ldots j \ldots \gamma_r\\ \delta_1 & \delta_2 \ldots i \ldots \delta_r\end{pmatrix} A_{ij}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 \ldots j \ldots \gamma_r\\ \delta_1 & \delta_2 \ldots i \ldots \delta_r\end{pmatrix} = C_{ij}$$

Formula (3.2) se demonstrează ţinîndu-se seama de (3.1)

$$\frac{\partial \ln \sqrt{N(A)}}{\partial a_{ji}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{N(A)}\,\frac{\partial N(A)}{\partial a_{ji}} = \frac{1}{N(A)}\,C_{ji}\,Z = Z_{ij}.$$

Cu aceasta cele două formule au fost demonstrate.

Primită la redacţie la 22 iunie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. E. H. Moore, *General Analysis*. Part. I. Mem. Amer. Philos. Soc. vol. *I*, 197—209 (1935).
2. A. Bjerhammar, *Rectangular reciprocal matrices with special to geotetic, calculation*, Bull. Géodesique, 188—220 (1951).
3. R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **51** 406—413 (1955).
4. R. Rado, *Note on generalized inverse of matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **52**, 600—601 (1956).
5. Em. Arghiriade și A. Dragomir, *Une nouvelle définition de l'inverse généralisée d'une matrice*. Rendiconti dei Lincei. Série VIII, **XXXV**, fasc. *3*, *4*, 158—165 (1963).
6. Em. Arghiriade, *Sur les matrices qui sont permutable avec leur inverse généralisé*. Rendiconti dei Lincei. Seria VIII, **XXXV**, fasc. *5*, 244—251 (1963).
7. E. Boroş, *Asupra matricilor EPr*. Analele Universităţii din Timişoara, **II** (1964).
8. E. Boroş şi I. Sturz, *Asupra matricilor quasi-inverse*. Analele Universităţii din Timişoara, **I** (1963).
9. C. Giurescu şi R. Gabriel, *Asupra semiinversei unei matrici*. Analele Universităţii din Timişoara, **II** (1964).
10. Hodge and Pedoe, *Methods of algebraic Geometry*. Cambridge, 1954, pag. 292.

ASUPRA SPAȚIILOR LUI RIEMANN CU CONEXIUNE CONSTANTĂ

DE

EFTIMIE GRECU

Într-o lucrare [2], acad. G. Vrănceanu a arătat că o metrică de tipul

$$ds^2 = e^{2p}\, C_{ij}\, dx^i\, dx^j + e^{2q}\, C_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta , \tag{1}$$

unde $i, j = 1,2, \ldots, m$; $\alpha, \beta = m+1, m+2, \ldots, n$, este cu conexiune constantă, cînd $p-q$ nu este o constantă, numai dacă p este o funcție liniară de x^i, iar q este o funcție liniară de x^α , adică spațiul V_n este produsul direct a două spații Vagner V_m și V_{n-m}.

În lucrarea de față vom căuta să generalizăm rezultatele obținute mai sus.

Pentru aceasta considerăm spațiul V_n a cărui metrică este

$$\begin{aligned} ds^2 = e^{2p_1}\, C_{i_1 j_1}\, dx^{i_1}\, dx^{j_1} + e^{2p_2}\, C_{i_2 j_2}\, dx^{i_2}\, dx^{j_2} + \ldots + \\ + e^{2p_m}\, C_{i_m j_m}\, dx^{i_m}\, dx^{j_m}, \end{aligned} \tag{2}$$

unde $i_1, j_1 \in N_1$; $i_2, j_2 \in N_2$; $\ldots$; $i_m, j_m \in N_m$ iar N_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ sînt mulțimi disjuncte de numere naturale, a căror reuniune este mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, cu alte cuvinte dacă spațiul

$$d\sigma_\alpha^2 = e^{2p_\alpha}\, C_{i_\alpha j_\alpha}\, dx^{i_\alpha}\, dx^{j_\alpha} \qquad (\alpha \text{ indice fix})$$

are dimensiunea d_α, atunci $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} d_\alpha = n$.

Vom presupune că nici una din diferențele $p_\beta - p_\gamma$ nu este o constantă, unde $\beta \neq \gamma$; $\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m$.

În aceste condiții are loc următoarea proprietate : un spațiu al lui Riemann V_n a cărui metrică este de tipul (2), este cu conexiune constantă, numai dacă p_α este o funcție liniară de x^{i_α}, adică spațiul (2) este un produs direct de m spații Vagner $V\, d_\alpha$. Spațiul (2) nu este local euclidian dacă cel puțin unul din numerele d_α este mai mare sau cel puțin egal cu trei. Dacă

ST. CERC. MAT. TOM 17 NR. 10 P. 1583–1585 BUCUREȘTI 1965

însă toţi $d_\alpha \leqslant 2$, atunci, conform teoremei lui Sumitamo, spaţiul (2) este local euclidian. Pentru demonstraţie să scriem metrica (2) sub forma

$$ds^2 = e^{2p_\alpha} C_{i_\alpha j_\alpha}\, dx^{i_\alpha}\, dx^{j_\alpha}. \tag{3}$$

unde α este acum un indice de sumare de la 1 la m şi deci pentru fiecare α, indicii $i_\alpha, j_\alpha \in N_\alpha$.

Considerăm sistemul mecanic asociat metricei (3) şi a cărui energie cinetică se scrie

$$T = \frac{1}{2}\, e^{\alpha p_\alpha}\, C_{i_\alpha j_\alpha} \dot{x}^{i}{}_{\alpha}\, \dot{x}^{j_\alpha}. \tag{4}$$

Fie $K_r \in N_r$, $(r = 1, 2, \ldots, m)$. Geodezicele spaţiului V_n sînt date de ecuaţiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{k_r}}\right) = \frac{\partial T}{\partial x^{k_r}},$$

care în cazul lui (4) se scriu

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2p_r}\, C_{i_r k_r}\, \dot{x}^{i_r}\right) = e^{2p_\alpha}\, C_{i_\alpha j_\alpha}\, \dot{x}^{i_\alpha}\, \dot{x}^{j_\alpha}\, \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^{k_r}}, \tag{5}$$

unde r este un indice fix (de numerotare), iar α este indice de sumare. Derivînd în primul membru din (5), obţinem

$$e^{2p_r}\, C_{i_r k_r}\, \ddot{x}^{i_r} + 2\, e^{2p_r}\, C_{i_r k_r}\, \dot{x}^{i_r}\, \frac{\partial p_r}{\partial x^{j_\alpha}}\, \dot{x}^{j_\alpha} =$$

$$= e^{2p_r}\, C_{i_r j_r}\, \dot{x}^{i_r}\, \dot{x}^{j_r}\, \frac{\partial p_r}{\partial x^{k_r}} + e^{2p_\lambda}\, C_{i_\lambda j_\lambda}\, \dot{x}^{i_\lambda}\, \dot{x}^{j_\lambda} \frac{\partial p_\lambda}{\partial x^{k_r}},$$

unde $(\lambda = 1, 2, \ldots, r - 1, r + 1, \ldots, m)$ este un indice de sumare.

Împărţind în ambii membri cu e^{2p_r}, obţinem ecuaţiile

$$C_{i_r k_r}\, \ddot{x}^{i_r} + 2\, C_{i_r k_r}\, \dot{x}^{i_r}\, \frac{\partial p_r}{\partial x^{j_\alpha}}\, \dot{x}^{j_\alpha} = \tag{6}$$

$$= C_{i_r j_r}\, \dot{x}^{i_r}\, \dot{x}^{j_r}\, \frac{\partial p_r}{\partial x^{k_r}} + e^{(2p_\lambda - p_r)}\, C_{i_\lambda j_\lambda}\, \dot{x}^{i_\lambda}\, \dot{x}^{j_\lambda}\, \frac{\partial p_\lambda}{\partial x^{k_r}}.$$

Pentru ca ecuaţiile (6) să fie cu coeficienţi constanţi, este necesar să avem

$$p_r = a^r_{i_\alpha}\, x^{i_\alpha} + a^r,\ (r = 1, 2, \ldots, m), \tag{7}$$

$$\frac{\partial p_\lambda}{\partial x^{k_r}} = 0,\ (\lambda = 1, 2, \ldots, r - 1, r + 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Ecuaţiile (7) şi (8) se mai scriu

(7′) $p_r = a^r_{k_\alpha} x^{k_\alpha} = a^r_{k_\lambda} x^{k_\lambda} + a^r_{k_r} x^{k_r} + a^r,$ (λ indice de sumare)

(8′) $a^\lambda_{k_r} = 0.$

Deoarece $\lambda \neq r$ şi $a^\lambda_{k_r} = 0$, putem scrie $a^\lambda_{k_r} = a^r_{k_r} \delta^\lambda_r = a^r_{k_\lambda}$ şi din (7′), (8′) rezultă $p_r = a^r_{k_r} x^{k_r} + a^r$, unde r este un indice fix iar sumarea se face în raport cu toţi $K_r \in N_r$, şi proprietatea este demonstrată.

Primită la redacţie la 1 februarie 1965

Institutul Politehnic ,,Gh. Gheorghiu-Dej"
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

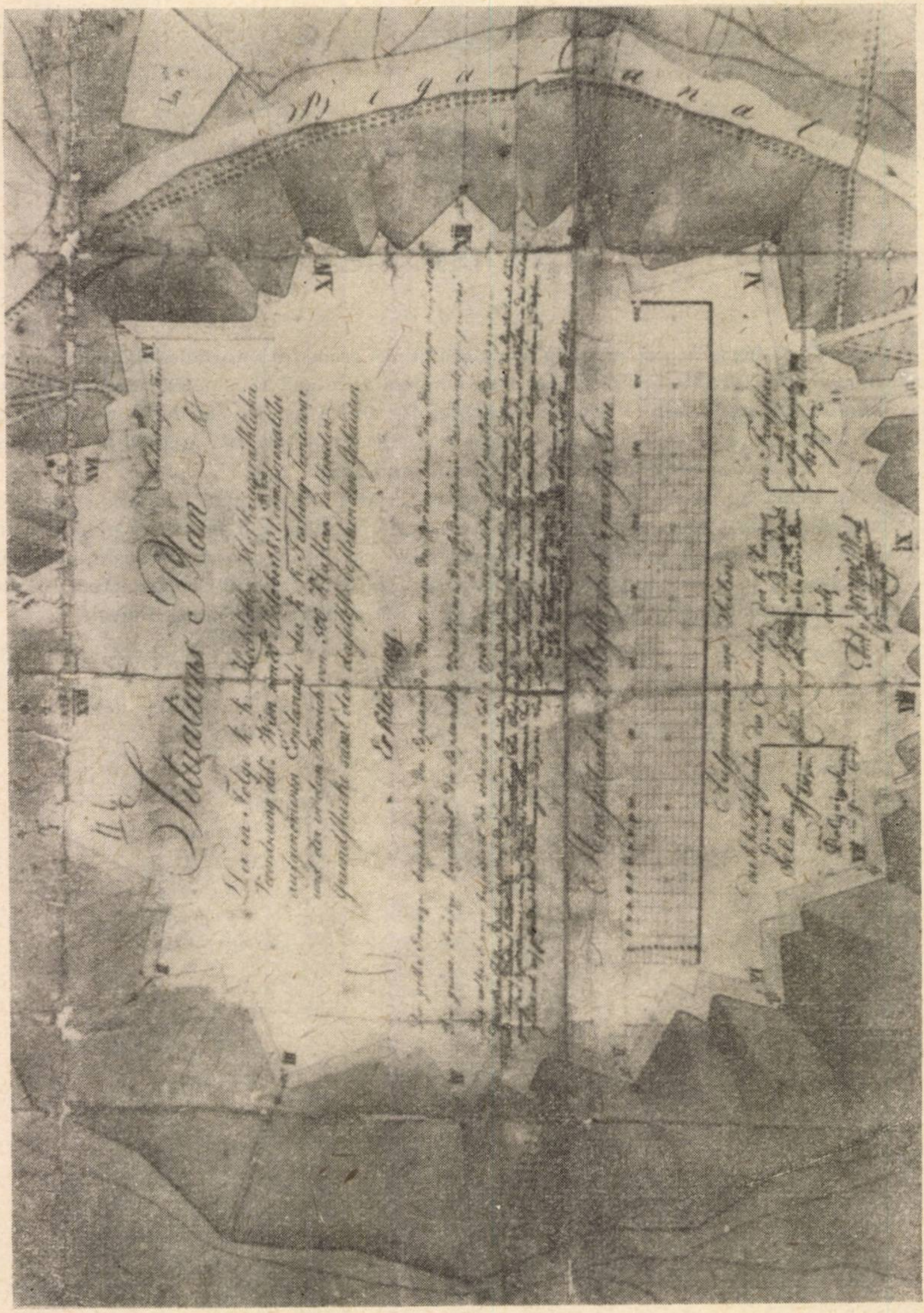
1. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*. Vol. I, Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.
2. G. Vrăceanu, *Asupra spaţiilor lui Riemann cu conexiune constantă*. St. cerc. mat., **XIII**, *2* (1962).

NOTĂ ISTORICĂ

Se ştie că Ianoş Bolyai, unul din fondatorii primei geometrii neeuclidiene, a funcţionat ca inginer militar la Direcţia Fortificaţiilor din Timişoara între anii 1823—1826, timp în care se pare că a obţinut rezultatele ce l-au făcut celebru, deşi aceste rezultate au fost publicate abia în 1831. Prioritatea o deţine Lobàcevsky, care a prezentat rezultatele sale în 1826 la o şedinţă a Societăţii de Matematică din Kazan şi a tipărit lucrarea sa în 1829.

Din punct de vedere istoric sînt desigur importante acele dovezi care arată prezenţa lui Ianoş Bolyai la Timişoara şi mai tîrziu la Tg. Mureş. Dăm mai jos o fotografie a unui plan al Cetăţii Timişoara din 1823, care se găseşte la Arhivele din oraşul Timişoara, executat de Ianoş Bolyai, pe atunci locotenent de geniu, în baza unui ordin al Comandamentului din Viena din 26 octombrie 1821. La stînga jos se vede clar semnătura lui Ianoş Bolyai.

G. Vrănceanu


Situations Plan
Erklärung

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

F762

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT * 1883 *

TOM. 17, Nr. 10
1965

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
ANDREIAN CAZACU, CABIRIA, Asupra unei probleme a lui L. I. Volkovîskii	4	499
ARAMĂ, OLEG, Asupra unor evaluări ale funcţiilor derivabile, cu aplicaţii la studiul problemei polilocale (I)	5	653
ARAMĂ, OLEG, Asupra unor evaluări ale funcţiilor derivabile, cu aplicaţii la studiul problemei polilocale. II.	8	1263
BĂDESCU, LUCIAN, Functori adjuncţi contravarianţi	7	1145
BĂDESCU, LUCIAN, Extensia definiţiei functorilor derivaţi pentru categorii abeliene	9	1479
BAL, LASCU şi PETER, MARIA, Nomograme cu transparent fără elemente gradate	6	851
BALAŞ, E. şi vezi: MIHOC, GH., Problema orarelor optime	4	477
BĂDESCU, RADU şi vezi: TEODORESCU, C.C., Distribuţia eforturilor, produse de variaţia de temperatură, în calea ferată sudată continuu	4	529
BĂNICĂ, C. şi POPESCU, N., Asupra categoriilor preabeliene	4	563
BĂNICĂ, C. şi POPESCU, N., Categorii cît	6	951
BERŢI, ŞTEFAN, Probleme legate de studiul şirurilor normale de cifre	9	1429
BODNĂRESCU, H., Spaţii de incidenţă. I.	1	19
BODNĂRESCU, H., Spaţii de incidenţă. II.	2	189
BORNEANU, GEORGE, Contribuţii la studiul topologic al curbelor de ordinul cinci	6	863
CĂLUGĂREANU, G., Asupra transformărilor univalente între spaţii euclidiene	5	633
CÂRLIG, A., Scurgerea către un dren vertical	9	1463
CÂŞLARU, CORNEL, Unele aplicaţii ale teoriei grafelor la studiul grupurilor consonantice finale din limba română	1	131
CARAMAN, PETRU, Cîteva proprietăţi ale reprezentărilor cvasiconforme n-dimensionale	1	49
CHIRILĂ, RODICA, Determinarea mişcărilor cu vîrtej constant în jurul unei clase particulare de profile	5	809
CHIRILĂ, RODICA, Profil Jukovski într-un curent fluid cu distribuţie parabolică de viteze	9	1443
CHIRILĂ, RODICA, Rezultanta şi momentul rezultant al presiunii pe un corp în cazul distribuţiei parabolice de viteze la infinit în amonte	10	1507
COHN, HARRY, Probleme de verificare statistică a ipotezelor la procesele staţionare	2	209
COHN, HARRY, Testul raportului de verosimilităţi pentru procese aleatoare	3	413
COHN, HARRY, Asupra comportării asimptotice a sistemelor cu legături complete	3	419
COHN, HARRY, Teoreme limită pentru sistemele cu legături complete	5	757
COHN, HARRY, Asupra unui proces staţionar întîlnit în teoria lanţurilor de ordin infinit	5	753
CONSTANTINESCU, CORNELIU, Un exemplu de spaţiu armonic	3	357
CONSTANTINESCU, CORNELIU, O topologie pe conul funcţiilor superarmonice nenegative	6	903
CONSTANTINESCU, CORNELIU, O teorie axiomatică pentru problema Dirichlet neliniară	7	1021

	Nr.	Pag.
COROI-NEDELCU, MARIANA, Nesimultaneităţi în funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor fără contacte	5	679
COROI-NEDELCU, MARIANA, Asupra soluţiei unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de tip eliptic în E_m, analog ecuaţiei lui Beltrami, în complex	7	1049
COROI-NEDELCU, MARIANA, Unele funcţii elementare în clasa funcţiilor (α) în spaţiu	10	1541
CRĂCIUN, CONSTANTIN V., Asupra noţiunii de rădăcină din teoria algebrică a gramaticii	2	253
CHRISTU, ILEANA, Derivata A — areolară	9	1449
DINCĂ, G., Asupra deformării plane a corpului perfect-plastic (utilizarea variabilelor complexe)	4	619
DINCĂ, G., Deformări rapide ale membranelor extensibile	5	817
DRĂGAN, I., Asupra unei clase de probleme de programare parametrică	3	445
DUMA, ANDREI, Asupra categoriilor de diagrame	5	803
ENE, HORIA I., Mişcări plane rotaţionale ale unui fluid perfect în prezenţa unor obstacole	5	781
FIRESCU, D. şi TĂUTU, Dr. P., Asupra unui model stocastic al hematopoezei	9	1345
FIRESCU, D. şi THEILER, G., Asupra unor probleme de inferenţă statistică relativ la lanţurile Markov simple, finite şi omogene	1	3
FIRESCU, D. şi THEILER, G., Asupra unor criterii de verificare a ipotezelor statistice relativ la lanţurile Markov simple, finite şi omogene	3	323
FOIAŞ, C., Asupra unei probleme de teorie spectrală	6	921
FRENKEL FERTIG, MARGARETA, Asupra proprietăţilor asimptotice ale soluţiilor unui sistem semiliniar de ecuaţii diferenţiale, care depinde de un parametru mic	6	907
GABRIEL, R., Extinderea complemenţilor algebrici generalizaţi la matrici oarecare	10	1569
GHEORGHE, CEZAR şi vezi: POPOVICI, IULIAN, Interpretarea geometrică a grupurilor spinoriale	5	737
GHEORGHE, CEZAR şi vezi: POPOVICI, IULIAN, Proprietăţi spinoriale în algebre de afinori	9	1377
GODINI, G., Variabile aleatoare aproape continue	3	399
GODINI, G. şi vezi: ISCOVICI, P., Linie de aşteptare cu staţii de servire prioritare şi număr limitat de solicitanţi	4	577
GODINI, G. şi vezi: ISCOVICI, P., Linie de aşteptare cu număr limitat de solicitanţi şi servire în faze	5	747
GODINI, G., O problemă de teoria aşteptării cu servire eterogenă	5	765
GODINI, G., O problemă de aşteptare cu o singură staţie de servire	5	777
GRECU, EFTIMIE, Asupra spaţiilor lui Riemann V_3 cu conexiune constantă de genul doi	7	1059
GRECU, EFTIMIE, Asupra spaţiilor Riemann cu conexiune constantă	10	1585
GUIAŞU, SILVIU, Asupra repartiţiei limită pentru procesele stocastice cu timp discret aleator	2	227
HRISTEV, ANATOLIE P., Comutatorii formelor biliniare covariante ale cîmpului spinorial cuantificat	1	95
IACOB, CAIUS, Cercetări asupra mişcării la mari viteze subsonice în jurul unor profile date	2	173
IACOB, VIORICA, Generalizarea unei formule de cvadratură a lui F. Tricomi	8	1221
IANUŞ, S., Asupra spaţiului-timp de Sitter	7	1161
IFTIMIE, VIOREL, Asupra problemei Dirichlet pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul doi neliniare de tip eliptic în plan	3	463
ION, D. B., Asupra algebrelor Jordan de tip A	2	301
ION, ION D., Un sistem de axiome pentru algebra evenimentelor	4	599
ION, ION D., Radical Baer-MacCoy şi radical Jacobson pentru semigrupuri reticulate	8	1321
IONESCU, D. V., Generalizarea unei formule de cvadratură a lui N. Obreschkoff la integrale duble	6	831

	Nr.	Pag.
ISAC, GEORGE, O teoremă Hahn-Banach pentru module semisimple definite peste inele normate	3	457
ISAC, GEORGE, Algebre universale dense în sumă directă completă	9	1473
ISCOVICI, P. și GODINI, G., Linie de așteptare cu stații de servire prioritare și număr limitat de solicitanți	4	577
ISCOVICI, P. și GODINI, G., Linie de așteptare cu număr limitat de solicitanți și servire în faze	5	747
ISTRĂŢESCU, V., Asupra unei proprietăți ale operatorilor complet continui	2	265
ISTRĂŢESCU, V., Asupra algebrelor de funcții lipschitziene (I)	3	407
ISTRĂŢESCU, V., Asupra algebrelor de funcții lipschitziene (II)	6	943
ISTRĂŢESCU, V., Observații asupra unei teoreme a lui Wielandt	6	947
ISTRĂŢESCU, V., Asupra operatorilor cvasicompacți (I)	9	1425
IVĂNESCU, PETRU L., Programarea pseudobooleeană și aplicații ale ei	4	583
KECS, WILHELM, Extinderea ecuațiilor de echilibru a firelor perfect flexibile și inextensibile în cazul unor sarcini ce se exprimă printr-o funcție continuă, avînd discontinuități de speța întîi	3	367
KECS, WILHELM, Aplicații ale teoriei funcțiilor generalizate privind problemele planului elastic infinit	3	379
KECS, WILHELM, Aplicații ale teoriei distribuțiilor privind încovoierea barelor drepte	7	1035
LIVOVSCHI, LEON, Minimizarea automatelor asincrone	8	1189
LUSZTIG, GHEORGHE, Model de geometrie afină plană peste un corp finit	8	1337
MANEA, SANDA, Aplicații ale unei metode semiinverse la problema scurgerilor pe sub baraje	3	433
MANGERON, D., MATEESCU, LIL. și ȘESTOPAL, A. F., Contribuții la studiul funcțiilor lui Green. II. Problema unicității inversiunii integralei lui Schwartz-Christoffel relativă la poligoane rectilinii simplu conexe	2	215
MANGERON, D. și NIANG, SOULEYMANE, Principiu variațional corespunzător unor noi forme lagrangiene de mecanică analitică	5	637
MATEESCU, LIL. și vezi: MANGERON, D., SESTOPAL, A. F., Contribuții la studiul funcțiilor lui Green. II. Problema unicității inversiunii integralei lui Schwartz-Christoffel relativă la poligoane rectilinii simple convexe	2	215
MATEESCU, MARGARETA, Două condiții necesare și suficiente de existență a codurilor liniare corectoare de *t* erori	6	933
MIHOC, G. și BALAȘ, E., Problema orarelor optime	4	477
MOCANU, PETRU, T., Funcții univalente pe sectoare	6	925
MOSCOVICI, HENRI, Asupra spațiilor local convexe separate	4	615
MURGULESCU, ELENA, Asupra devierii unui jet gazos subsonic, de lărgime finită, printr-un obstacol diedric	7	1007
NEGRESCU, L. și PĂVĂLOIU, I., Asupra verificării formale a schemelor logice de algoritmi	2	271
NEGRESCU, L. și PĂVĂLOIU, I., O proprietate a schemelor matriciale de algoritmi	9	1405
NEMÉTH, A. B., O teoremă relativă la rezolvabilitatea problemei de interpolare lacunară	9	1411
NIANG, SOULEYMANE și vezi: MANGERON, D., Principiu variațional corespunzător unor noi forme lagrangiene de mecanică analitică	5	637
PASCALI, DAN., Vectori analitici generalizați	5	707
PASCALI, DAN., Teoremele de scufundare Sobolev Kondrașev	8	1231
PASCALI, DAN, Funcții analitice generalizate de ordinul *n*	9	1385
PĂVĂLOIU, I. și vezi: NEGRESCU, L., Asupra verificării formale a schemelor logice de algoritmi	2	271
PĂVĂLOIU, I. și vezi: NEGRESCU, L., O proprietate a schemelor matriciale de algoritmi	9	1405
PETER, MARIA și vezi: BAL, LASCU, Nomograme cu transparent fără elemente gradate	6	851
PETRESCU, GH., Asupra mișcării apelor arteziene într-un domeniu concav	7	1153

Nr. Pag.

POPA, N., Obiecte injective în categoria spaţiilor ordonate arhimediene cu elemente axiale . . . 8 1333
POPESCU, N. şi vezi : BĂNICĂ, C., Categorii cît . . . 6 951
POPESCU, VALENTIN, Asupra definiţiei funcţiilor măsurabile . . . 9 1457
POPESCU, VALENTIN, Măsuri cu valori în spaţii vectoriale topologice oarecare 10 1517
POPOVICI, IULIAN şi GHEORGHE, CEZAR, Interpretarea geometrică a grupurilor spinoriale . . . 5 737
POPOVICI, IULIAN şi GHEORGHE, CEZAR, Proprietăţi spinoriale în algebre de afinori . . . 9 1377
POPP, SIMONA, Asupra mişcării subsonice cu circulaţie în jurul unui cilindru circular . . . 9 1361
PORICEL, MARINA, Corecţii de compresibilitate la mişcarea subsonică în jurul unui obstacol eliptic . . . 8 1305
RADU, ALEX. şi vezi : STĂNĂŞILĂ, OCTAVIAN, Şirul lui Künneth pentru complexe generalizate . . . 1 105
RADU, NICOLAE, Asupra functorului de completare . . . 7 1077
RIPIANU, DUMITRU, Asupra problemei bilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare (I) . . . 8 1281
RIPIANU, DUMITRU, Asupra problemei bilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare (II) . . . 9 1391
RIŞCUŢIA, CANTEMIR şi vezi : ŞERBAN, MIHAI, Indicatorii de stabilitate, model matematic pentru structura nucleului celular . . . 7 1117
RIZESCU, G. şi TEODORESCU, N. N., Asupra generalizării formulelor lui Frenet . . . 8 1297
ROŞCA, RADU, Asupra curbelor izotrope . . . 3 335
ROŞCA, RADU, Asupra unei clase de repere centrale . . . 3 339
ROŞCA, RADU, Asupra unei clase de reţele Darboux-Ţiţeica . . . 5 641
ROŞCA, RADU, Asupra unui tip de congruenţă (ω) . . . 5 647
ROŞCA, RADU, Asupra elicoidului de arie minima din spaţiul eliptic . . . 6 843
ROŞCA, RADU, Asupra unei clase de congruenţă Vincensini . . . 7 997
ROŞCULEŢ, MARCEL N., Funcţii monogene pentru spaţii Riemann. II. Funcţii definite pe o algebră cu baza infinită şi ecuaţie caracteristică $1 + \theta^2 + \varphi^2 = 0$ . . . 3 345
ROŞCULEŢ, MARCEL N., Cercetări asupra seriilor trigonometrice. II. Seria Fourier asociată unei funcţii neintegrabile . . . 4 485
ROŞCULEŢ, MARCEL N., Asupra teoremei lui Weierstrass de aproximare a funcţiilor continue de mai multe variabile prin polinoame . . . 8 1183
ROSINGER, ELMÉR, Structuri pseudotopologice (III) . . . 7 1133
RUDEANU, SERGIU, Observaţii asupra lucrărilor lui Motinori-Gotō privind ecuaţiile booleene . . . 3 359
RUS, T., Un algoritm de decidere în teoria arborilor . . . 2 311
RUS, T., Echivalenţa schemelor explicite şi a arborilor . . . 9 1415
RUS, T., Algoritmi de simplificare a expresiilor algebrice raţionale cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul . . . 10 1491
SOCOLESCU, DAN, Asupra mişcării subsonice în jurul unui cilindru circular . 7 1169
SOFONEA, LIVIU, Asupra concepţiei cuantice relativiste a gravitaţiei . . . 7 1089
STĂNĂŞILĂ, OCTAVIAN şi RADU, ALEX., Şirul lui Künneth pentru complexe generalizate . . . 1 105
STOKA, MARIUS I., Asupra corespondenţei de speţa a treia între plane proiective . . . 4 547
STOKA, MARIUS I., Conexiuni afine invariante pe un spaţiu riemannian V_3 (II) . . . 7 1027
ŞABAC, MIHAI, Familii compozabile de distribuţii şi transformata Fourier . . 4 607
ŞABAC, MIHAI, O caracterizare a topologiilor local convexe în care aplicaţiile liniare şi mărginite sînt continue . . . 8 1277
ŞCHIOP, ALEXANDRU I., Numărul tipurilor de multipoli ($1 - k$) după grupul altern . . . 3 451

	Nr.	Pag.
ŞERBAN, MIHAI şi RIŞCUŢIA, CANTEMIR, Indicatorii de stabilitate, model matematic pentru structura nucleului celular	7	1117
ŞESTOPAL, A. F. şi vezi: MANGERON, D., MATEESCU, LIL, Contribuţii la studiul funcţiilor lui Green. II. Problema unicităţii inversiunii integralei lui Schwartz-Christoffel relativă la poligoane rectilinii simple convexe	2	215
TĂUTU, DR. P. şi vezi: FIRESCU, D., Asupra unui model stocastic al hematopoezei	9	1345
TELEMAN, C., Asupra unei clase de spaţii Riemann omogene.	10	1531
TEODORESCU, C.C. şi BĂDESCU, RADU, Distribuţia eforturilor produse de variaţia de temperatură, în calea ferată sudată continuu	4	529
TEODORESCU, GABRIELA, Contribuţii la integrarea ecuaţiilor elasticităţii	1	83
TEODORESCU, N.N. şi vezi: RIZESCU, G., Asupra generalizării formulelor lui Frenet	8	1297
THEILER, G. şi vezi: FIRESCU, D., Asupra unor probleme de inferenţă statistică relativ la lanţurile Markov simple, finite şi omogene	1	3
THEODORESCU, RADU, Asupra relaţiilor funcţionale ale proceselor Markov multiple	9	1367
TOMESCU, ION, Metodă pentru determinarea conductibilităţilor totale ale unui multipol	7	1109
TORÓ, T., Asupra unei ecuaţii spinoriale cu 4 componente pentru neutrino în prezenţa gravitaţiei, în cazul unei conexiuni de spin nelocale.	6	939
TUDOR, C., Asupra unei teoreme a lui Aronszajn	2	295
TUDOR, C., Probleme la limită bilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare. . .	5	793
UDRESCU, VALERIU Şt., Omologia $\Lambda-(\Phi, \Psi)$ — modulelor	4	519
VRĂNCEANU, G., Grupuri discrete în spaţiul euclidian	1	119
VRĂNCEANU, G., Varietăţi diferenţiabile şi metrica naturală a spaţiilor sferice şi proiective	2	155
ZAMFIRESCU, TUDOR, Despre suprapunerea a două funcţii crescătoare, una convexă iar cealaltă concavă	1	111
ZAMFIRESCU, TUDOR, Asupra lemelor fundamentale ale calculului variaţional	2	287

LUCRĂRI APĂRUTE
ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

OCTAV ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 1960, 619 p., 25,50 lei.

D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)** 1956, 380 p., 7 lei.

JANKO BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 1961, 223 p., 8,85 lei.

N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU şi A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow 1959—1960. Teoria potenţialului pe suprafeţe riemanniene**, 1962, 160 p., 5 lei.

G. CIUCU şi R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 1960, 232 p., 9,85 lei (epuizat).

C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea, Teoria mulţimilor**, 1962, 108 p. 3,25 lei (epuizat).

C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape-periodice**, 1961, 191 p., 8,30 lei (epuizat).

ROMULUS CRISTESCU, **Spaţii liniare ordonate**, 1959, 332 p., 11,10 lei.

I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu, Algebre Lie**, 1962, 148 p., 5,15 lei.

C. FOIAŞ **Seminar M. Nicolescu 1959—1960. Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă**, 1962, 82 p., 2,85 lei.

ALEXANDRU FRODA, **Algebra superioară**, 1958, 455 p., 24,50 lei.

G. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 1961, 180 p., 7,85 lei (epuizat).

M. GHERMĂNESCU, **Ecuaţii funcţionale**, 1960, 523 p., 25,60 lei (epuizat).

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1959, 1288 p., 66,50 lei (epuizat).

TRAIAN LALESCU, **Introducere în teoria ecuaţiilor integrale**, 1956, 135 p., 5,90 lei.

LEON LIVOVSCHI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 357 p., 18,50 lei.

* * * **Lucrările celui de al IV-lea Congres al matematicienilor români**, 1960, 228 p., 8,55 lei (epuizat).

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie şi topologie**—Iaşi, 2—5 iunie 1958, 1962, 264 p., 9,75 lei.

* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secţia de ştiinţe matematice a Academiei R.P.R.**, 1956, 368 p., 9,50 lei.

G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale normate**, 1956, 295 p., 6 lei.

G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice**, 1959, 219 p., 8,80 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 1954, 144 p., 4,30 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă**, 1958, 466 p., 23,90 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

G. MIHOC şi V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 1962, 732 p., 34,70 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 1961, 142 p., 8,55 lei (epuizat); vol. II, 1962, 155 p., 8,25 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p. , 12 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră. I., Inele şi ideale**, 1954, vol. I 256 p., 9,10 lei (epuizat).

GR. C. MOISIL, **Matricile asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale. Introducere în studiul cercetărilor lui I. N. Lopatinschi**, 1950, 64 p., 1,20 lei.

GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee**, 1959, 20 p., 9,65 lei (epuizat).

ALEXANDRU MYLLER, **Scrieri matematice**, 1959, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.

VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecţii de algebră**, 1953, 396 p., 8,75 lei.

MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, 1953, vol. II, 420 p., 11,90 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 1962, 260 p., 11,20 lei (epuizat).

OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor. Cu aplicaţii la programarea liniară**, 1961, 228 p., 8,45 lei (epuizat).

O. ONICESCU şi colab., **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

Opera matematică a lui Alexandru Pantazi, 1956, 486 p., 24,10 lei.

DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 1956, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.

N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţia** 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 1964, 308 p., 10 lei (epuizat), vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian Cazacu, 1958, 378 p., 25,70 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 1961, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 1956, 287 p., 8 lei.

DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 1961, 76 p., 3,15 lei.

SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 1956, 235 p., 5 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géométrie différentielle**, 1957, vol. I, 407 p., 26,50 lei; vol. II, 428 p., 27,50 lei; vol. III, 1964, 484 p., 32 lei.

GH. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, vol. I, 1952, 346 p., 7,50 lei; vol. II, 1955, 400 p., 6,38 lei; vol. III, 1960, 455 p., 15 lei.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihail Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT BUDAPEST

1966 FEB 22

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 304 p. + 52 pl., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systémes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

N. RANCU şi L. TŐVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOÏLOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 17, NR. 10, P. 1487—1594, BUCUREŞTI, 1965

I. P. „Informaţia" — c. 3807

43831

Lei 12.—